

Федеральное агентство железнодорожного транспорта  
Уральский государственный университет путей сообщения  
Кафедра «Естественнонаучные дисциплины»

**И. В. Куликова**

**П. П. Скачков**

**ФУНКЦИИ  
НЕСКОЛЬКИХ  
ПЕРЕМЕННЫХ**



Екатеринбург  
УрГУПС  
2017

Федеральное агентство железнодорожного транспорта  
Уральский государственный университет путей сообщения  
Кафедра «Естественнонаучные дисциплины»

**И. В. Куликова**  
**П. П. Скачков**

# **ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

## **Типовой расчет**

Методические рекомендации  
по изучению дисциплины «Математика»  
для студентов всех специальностей  
и направлений подготовки

Екатеринбург  
УрГУПС  
2017

УДК 517.1  
К 90

**Куликова, И. В.**

К90      **Функции нескольких переменных. Типовой расчет : метод. рекомендации / И. В. Куликова, П. П. Скачков. – Екатеринбург : УрГУПС, 2017.– 50, [2] с.**

Предназначено для выполнения индивидуальных заданий типового расчета по теме «Функции нескольких переменных» студентами всех специальностей и направлений подготовки дневной формы обучения.

Первая часть содержит краткие теоретические сведения, необходимые для решения задач типового расчета. Рассмотрены примеры для всех типов заданий. Приведены подробные решения наиболее важных из них с необходимыми пояснениями и ссылками на теоретический материал.

Вторая часть представляет собой индивидуальные задания. По уровню сложности и тематике они носят характер, соответствующий требованиям программы по математике для технических вузов.

УДК 517.1

*Издано по решению редакционно-издательского совета университета*

*Авторы:*      И. В. Куликова, ассистент кафедры «Естественнонаучные дисциплины», УрГУПС  
                    П. П. Скачков, доцент кафедры «Естественнонаучные дисциплины», канд. физ.-мат. наук, УрГУПС

*Рецензент:*    В. В. Башуров, доцент кафедры «Естественнонаучные дисциплины», канд. физ.-мат. наук, УрГУПС

© Уральский государственный университет  
путей сообщения (УрГУПС), 2017

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Область определения функции нескольких переменных .....	4
2. Линии уровня функции.....	8
3. Предел и непрерывность функции двух переменных .....	10
4. Дифференцирование функции двух переменных .....	11
5. Дифференцирование неявных функций двух переменных .....	13
6. Полный дифференциал функции.....	14
7. Касательная плоскость и нормаль к поверхности .....	15
8. Производная по направлению и градиент функции .....	18
9. Частные производные второго порядка .....	21
10. Экстремум функции.....	23
11. Наибольшее и наименьшее значения функции.....	29
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	32
Типовой расчет «Функции нескольких переменных».....	33

## 1. Область определения функции нескольких переменных

Многие задачи физики, техники, экономики приводят к рассмотрению переменной величины, которая связана зависимостью с двумя или более независимо изменяющимися переменными. Отсюда вытекает необходимость оперировать с так называемыми функциями нескольких переменных (аргументов). В данных методических рекомендациях мы ограничимся рассмотрением случая двух независимых переменных, так как все основные свойства таких функций легко обобщить на большее число аргументов, кроме того, функции двух переменных имеют вполне определенный геометрический смысл.

**Определение 1.1.** Пусть  $D$  – некоторое множество пар действительных чисел  $(x; y)$ , и пусть каждой паре  $(x; y)$  из  $D$  по определенному правилу поставлено в соответствие единственное значение переменной  $z$ . Тогда говорят, что на множестве  $D$  задана **функция двух переменных**  $z = f(x; y)$ . Переменные  $x$  и  $y$  называются **независимыми переменными** (или аргументами), а переменная  $z$  – **функцией**.

При нахождении частного значения функции  $z = f(x; y)$ , которое она принимает при конкретных значениях аргументов  $x = x_0, y = y_0$ , используют обозначение  $z_0 = f(x_0; y_0)$ . Например, если  $z = x^2 + y^2 + 1$  и  $x_0 = 3, y_0 = 4$ , то  $z_0 = 3^2 + 4^2 + 1 = 26$ .

Чтобы задать функцию двух переменных, нужно задать способ, с помощью которого для каждой пары  $(x; y)$  из  $D$  можно найти соответствующее значение функции. Часто мы будем использовать способ задания с помощью формулы  $z = f(x; y)$ , где  $f(x; y)$  – некоторое выражение, зависящее от  $x$  и  $y$ . Например,  $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(xy)$ . Такой способ задания функции называется **аналитическим**.

**Определение 1.2.** Множество всех пар  $(x; y)$ , при которых аналитическое выражение  $f(x; y)$  имеет смысл, называется **областью определения**

**функции**  $z = f(x; y)$ . В дальнейшем область определения функции будем обозначать символом  $D(f)$ .

**Определение 1.3.** Множество значений, принимаемых переменной  $z$  в области определения, называется **множеством значений функции**.

Так как каждой паре чисел  $(x; y)$  на координатной плоскости  $Oxy$  соответствует точка  $M$  с координатами  $(x; y)$ , то для области определения функции  $z = f(x; y)$  можно построить геометрическую модель:  $D(f)$  – множество точек  $M(x; y)$  координатной плоскости, координаты которых обеспечивают существование выражения  $f(x; y)$ . Это может быть вся координатная плоскость, например  $D(f)$  для функции  $z = x^2 + y^2$ , или часть плоскости, ограниченной некоторыми линиями. Эти линии называются **границами области определения**, а их точки – **граничными** точками области.

Точки области определения, не лежащие на границе, называются **внутренними**. Область, содержащая все свои граничные точки, называется **замкнутой**. Область, состоящая из одних внутренних точек, называется **открытой областью**.

Отметим некоторые условия, которые используются при нахождении областей определения функций, заданных аналитически в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Область определения функции

Вид функции	Область определения
$z = \sqrt[n]{\varphi(x; y)}$ , где $n$ – четное	$\varphi(x; y) \geq 0$
$z = \frac{1}{\varphi(x; y)}$	$\varphi(x; y) \neq 0$
$z = \log_a(\varphi(x; y))$	$\varphi(x; y) > 0$
$z = \arcsin(\varphi(x; y)); z = \arccos(\varphi(x; y));$	$-1 \leq \varphi(x; y) \leq 1$

Следует иметь в виду, что эти требования могут совмещаться. Например, если выражение имеет вид  $\frac{1}{\sqrt{\varphi(x; y)}}$ , то  $\varphi(x; y) > 0$ . Для выражения  $\frac{1}{\ln(\varphi(x; y))}$  должны выполняться условия  $\varphi(x; y) > 0; \varphi(x; y) \neq 1$ . Рассмотрим примеры.

**Пример 1.1.** Найдите область определения функции двух переменных  $z(x; y) = \sqrt{4 + y - x^2} + \ln(x^2 - 1)$ . Изобразите ее на чертеже.

**Решение.** Областью определения функции является множество точек плоскости  $Oxy$ , координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 4 + y - x^2 \geq 0, \\ x^2 - 1 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq x^2 - 4, \\ x^2 > 1. \end{cases} \quad (1.1)$$

$$(1.2)$$

Рассмотрим сначала неравенство (1.1). Ему будет соответствовать уравнение  $y = x^2 - 4$ , которое определяет параболу с вершиной в точке  $(0; -4)$ , ветви ее направлены вверх. Парабола делит координатную плоскость на две части: внешнюю и внутреннюю. Для одной из них  $y > x^2 - 4$ , для другой  $y < x^2 - 4$  (на самой параболе  $y = x^2 - 4$ ). Чтобы установить, какая из этих частей состоит из точек, для которых  $y \geq x^2 - 4$ , достаточно проверить это условие для какой-нибудь одной точки. Возьмем, например точку  $A(0; 1)$ . Подставив ее координаты в неравенство (1.1), получим верное числовое неравенство  $1 \geq 0 - 4$ . Следовательно, эта точка и подобные ей (т. е. внутренние, лежащие между ветвями параболы или на ней) дают геометрическое изображение области, определяемой неравенством (1.1). Рассмотрим неравенство (1.2)  $x^2 > 1$ . Это неравенство равносильно совокупности двух неравенств  $x < -1$  или  $x > 1$ . Они определяют части плоскости, лежащие левее прямой  $x = -1$  или правее прямой  $x = 1$ . Точки самих прямых в область определения не входят. В таком случае будем изображать соответствующие линии пунктиром. Областью определения функции будет множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе (1.1), (1.2). Это будет параболическая зона, из которой удалены точки, лежащие между прямыми и на прямых  $x = -1$ ,  $x = 1$ . Точки параболы принадлежат области (см. рис. 1.1). На рисунке область определения заштрихована.

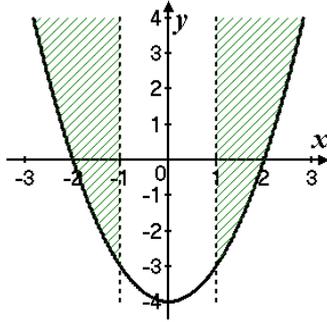


Рис. 1.1

**Пример 1.2.** Найдите область определения функции двух переменных  $z(x; y) = \arcsin(y - x) + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ . Изобразите ее на чертеже.

**Решение.** Областью определения этой функции является множество точек плоскости  $Oxy$ , значения координат которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} -1 \leq y - x \leq 1, \\ 1 - x^2 - y^2 > 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x - 1 \leq y \leq x + 1, \\ x^2 + y^2 < 1. \end{cases} \quad (1.3)$$

$$(1.4)$$

Решения двойного неравенства (1.3) изображаются на координатной плоскости точками, лежащими на прямых  $y = x + 1$ ;  $y = x - 1$  и между ними. Решения неравенства (1.4) – точки внутренней части круга, с центром в начале координат с радиусом 1. Таким образом, область определения данной функции – множество точек полосы, лежащих внутри окружности  $x^2 + y^2 = 1$ . Границы полосы – прямые  $y = x - 1$  и  $y = x + 1$ . На чертеже (см. рис. 1.2) область определения заштрихована.

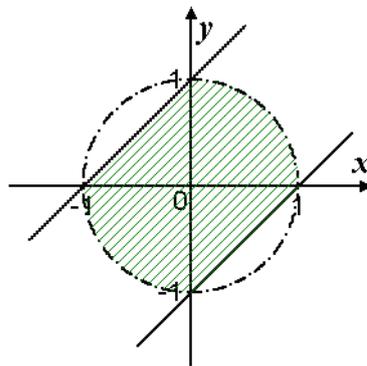


Рис. 1.2

**Определение 1.4.** Пусть функции двух переменных заданы аналитически формулой  $z = f(x; y)$ . Множество точек пространства, координаты которых имеют вид  $(x; y; f(x; y))$  таких, что  $(x; y) \in D(f)$ , называется *графиком функции*  $z = f(x; y)$ . В общем случае графиком функции  $z = f(x; y)$  в заданной системе координат с областью определения  $D(f)$  является некоторая поверхность.

## 2. Линии уровня функции

**Определение 2.1.** Линии на плоскости  $Oxy$ , уравнения которых имеют вид  $f(x; y) = C$ , где  $C$  – постоянная величина, называются *линиями уровня функции двух переменных*  $z = f(x; y)$ .

Построение линий уровня, соответствующих различным значениям постоянной величины  $C$ , выбранных с равным шагом, позволяет увидеть характер поверхности, заданной исследуемой функцией. Сгущение линий уровня означает более быстрое изменение значений функции. Редкое расположение линий уровня характеризует пологую поверхность (т. е. значения функции изменяются медленно).

Линии равных высот на физической карте – это пример линий уровня.

**Пример 2.1.** Найдите линии уровня функции  $z = e^{x+y}$ .

**Решение.** Линии уровня функции  $z(x; y) = e^{x+y}$  – это семейство линий на плоскости  $Oxy$ , описываемое уравнением  $e^{x+y} = C$ . Представим это уравнение в другой форме, выполнив следующие преобразования:

$$e^{x+y} = C \text{ или } e^{x+y} = e^{\ln C}, \text{ значит } x + y = \ln C.$$

Пусть  $\ln C = C^*$ , тогда  $x + y = C^*$ ,  $y = C^* - x$  (семейство прямых линий). Они показаны на рис. 2.1.

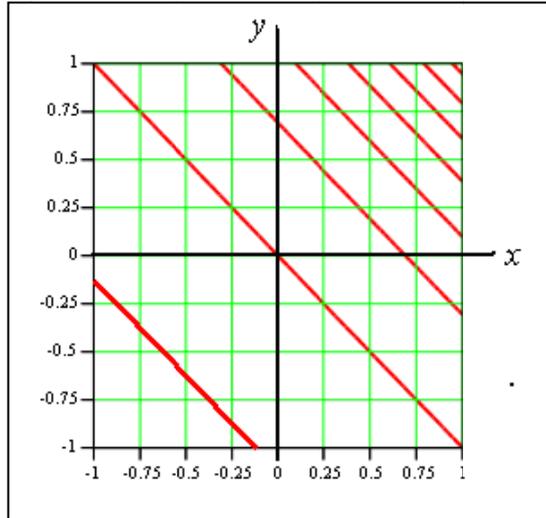


Рис. 2.1

**Пример 2.2.** Найдите линии уровня функции  $z(x; y) = \sqrt{y - x^2}$ .

**Решение.** Определить линии уровня функции  $z(x; y) = \sqrt{y - x^2}$  как семейства кривых  $y = g(x; C)$  на плоскости  $Oxy$  можно, осуществляя следующие преобразования:

$$\sqrt{y - x^2} = C \quad \text{или} \quad y - x^2 = C^2.$$

Пусть  $C^2 = C^*$ , тогда  $y - x^2 = C^*$ , где  $C^* \geq 0$ , (семейство парабол  $y = x^2 + C^*$ ). Они показаны на рис. 2.2.

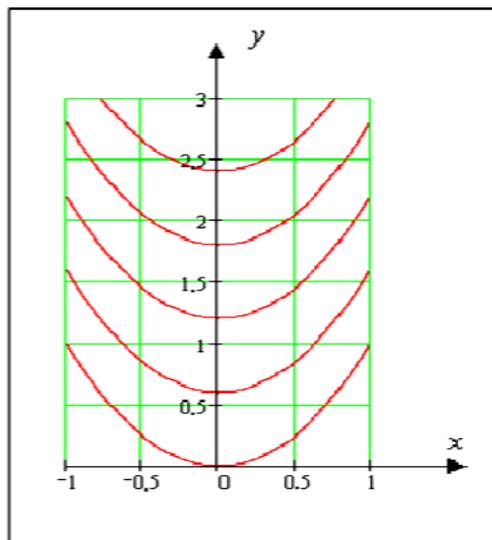


Рис. 2.2

### 3. Предел и непрерывность функции двух переменных

**Определение 3.1.** *Дельта-окрестностью точки  $P_0(x_0; y_0)$*  называется внутренность круга радиуса  $\delta$  с центром в этой точке.

**Определение 3.2.** Число  $A$  называется *пределом функции  $z = f(x; y) = f(P)$*  при  $P \rightarrow P_0$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon > 0$  найдется такая  $\delta$ -окрестность точки  $P_0(x_0; y_0)$ , что для любой точки  $P(x; y)$  из этой окрестности (за исключением может быть точки  $P_0(x_0; y_0)$ ) выполняется неравенство  $|f(P) - A| < \varepsilon$ . При этом пишут  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$  или  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$ .

Геометрический смысл предела функции двух переменных состоит в том, что каково бы ни было число  $\varepsilon > 0$ , найдется такая  $\delta$ -окрестность точки  $P_0(x_0; y_0)$ , что во всех точках  $P(x; y)$  этой окрестности, отличных от  $P_0(x_0; y_0)$ , значения  $z$  соответствующих точек поверхности  $z = f(x; y)$  отличаются от числа  $A$  по модулю меньше, чем на  $\varepsilon$ .

**Определение 3.3.** Функция  $z = f(x; y)$  называется *непрерывной* в точке  $P_0(x_0; y_0)$ , если она:

- 1) определена в этой точке и некоторой ее окрестности;
- 2) имеет предел в этой точке  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$ ;
- 3) этот предел равен значению функции  $z = f(x; y)$  в точке  $P_0(x_0; y_0)$ , т. е.  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$ .

**Определение 3.4.** Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется *непрерывной в этой области*.

Точки, в которых непрерывность нарушается, т. е. не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности, называются *точками разрыва* этой функции. Точки разрыва функции  $z = f(x; y)$  могут образовывать целые *линии разрыва*.

Так, например, функция  $z = \frac{2}{y-x}$  имеет линию разрыва  $y = x$ .

#### 4. Дифференцирование функции двух переменных

**Определение 4.1.** Разность  $f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)$  называется *частным приращением* функции  $z = f(x; y)$  *по переменной  $x$*  в точке  $P_0(x_0; y_0)$ .  
Обозначение:  $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)$ .

**Определение 4.2.** Разность  $f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$  называется *частным приращением* функции  $z = f(x; y)$  *по переменной  $y$*  в точке  $P_0(x_0; y_0)$ .  
Обозначение:  $\Delta_y z = f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$ .

**Определение 4.3.** Предел отношения частного приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, называется *частной производной функции*  $z = f(x; y)$  по одному из ее аргументов

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Используются также обозначения:  $z'_x, z'_y, f'_x, f'_y$ .

Геометрический смысл частных производных  $z'_x$  и  $z'_y$  заключается в том, что они равны значениям угловых коэффициентов касательных  $l_1$  и  $l_2$  к линиям пересечения поверхности, определяемой уравнением  $z = f(x; y)$ , плоскостями  $x = x_0, y = y_0$ , проходящими через точку  $M_0$  (касательная  $l_1$  параллельна плоскости  $Oxz$ , касательная  $l_2$  параллельна плоскости  $Oyz$ ) (см. рис. 4.1).

Значения частных производных  $z'_x$  и  $z'_y$  в точке  $P_0$  соответственно равны  $z'_x(x_0; y_0) = \operatorname{tg} \alpha$  и  $z'_y(x_0; y_0) = \operatorname{tg} \beta$ .

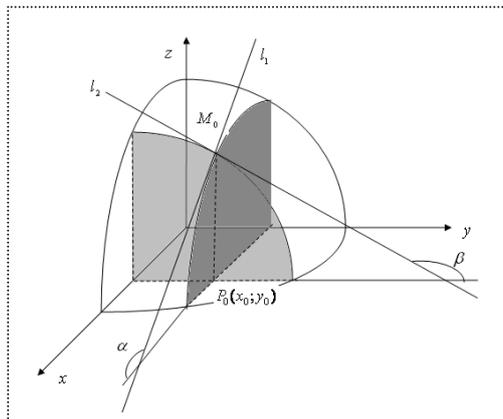


Рис. 4.1

Частная производная функции двух переменных по переменной  $x$  представляет собой обыкновенную производную функции одной переменной при фиксированном значении  $y$ , поэтому ее находят по правилам вычисления производных функций одной переменной (аналогично рассматривается и частная производная по переменной  $y$ ).

**Пример 4.1.** Найдите частные производные  $z'_x$  и  $z'_y$  функции  $z(x; y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ .

**Решение.** Найдем частные производные  $z'_x$  и  $z'_y$  функции  $z(x; y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

$$z'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \right) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x + 2\sqrt{xy}}.$$

$$z'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \right) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{xy} + 2y}.$$

**Пример 4.2.** Найдите частные производные  $z'_x$  и  $z'_y$  функции  $z(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x} + 1\right)$ .

**Решение.** Найдем частные производные  $z'_x$  и  $z'_y$  функции

$$z(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x} + 1\right).$$

$$\begin{aligned} z'_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x} + 1\right) \right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x} + 1\right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x} + 1\right) = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{(y+x)^2}{x^2}} \cdot y \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-x^2 y}{(x^2 + y^2 + 2yx + x^2)x^2} = \frac{-y}{2x^2 + 2yx + y^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x} + 1\right) \right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x} + 1\right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x} + 1\right) = \\ &= \frac{x^2}{2x^2 + 2yx + y^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{x}{2x^2 + 2yx + y^2}. \end{aligned}$$

## 5. Дифференцирование неявных функций двух переменных

Пусть некоторая функция  $z = f(x, y)$  задана уравнением  $F(x, y, z) = 0$ .

Справедлива **теорема** (о существовании неявной функции): если функция  $F(x, y, z)$  и ее частные производные  $F'_x(x, y, z)$ ,  $F'_y(x, y, z)$  и  $F'_z(x, y, z)$  определены и непрерывны в некоторой окрестности точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ; причем  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ , а  $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ , то существует окрестность точки  $M_0$ , в которой уравнение  $F(x, y, z) = 0$  определяет единственную функцию  $z = f(x, y)$ , непрерывную и дифференцируемую в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ .

Пусть условия теоремы выполняются для некоторой функции, тогда ее частные производные могут быть найдены по формулам

$$z'_x = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad z'_y = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \quad (4.1)$$

**Пример 4.1.** Найдите частные производные функции  $z = f(x, y)$ , заданной неявно уравнением  $\sin z - z^2 + 2xy + y^2 = 0$ .

**Решение.** Находим частные производные и подставляем их в формулы (4.1). Получим

$$F'_x(x, y, z) = 2y, F'_y(x, y, z) = 2x + 2y, F'_z(x, y, z) = \cos z - 2z,$$

$$z'_x = \frac{2y}{2z - \cos z}, \quad z'_y = \frac{2x + 2y}{2z - \cos z}.$$

**Пример 4.2.** Найдите частные производные функции  $z = f(x, y)$ , если она задана неявно уравнением  $\frac{x + \ln z}{y} + e^{2x+z} - xy^2 = 0$ .

**Решение.** Находим частные производные и подставляем их в формулы (4.1). Получим

$$F'_x(x, y, z) = \frac{1}{y} + 2e^{2x+z} - y^2, F'_y(x, y, z) = -\frac{(x + \ln z)}{y^2} - 2xy, F'_z(x, y, z) = \frac{1}{yz} + e^{2x+z},$$

$$z'_x = -\frac{\frac{1}{y} + 2e^{2x+z} - y^2}{\frac{1}{yz} + e^{2x+z}}, \quad z'_y = -\frac{-\frac{x + \ln z}{y^2} - 2xy}{\frac{1}{yz} + e^{2x+z}}.$$

## 6. Полный дифференциал функции

**Определение 6.1.** *Полным приращением функции*  $z = f(x, y)$  в точке  $P_0(x_0; y_0)$  называется разность  $\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$ .

**Определение 6.2.** Функция  $z = f(x, y)$  называется *дифференцируемой в точке*  $P(x, y)$ , если ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде  $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x; \Delta y)$ , где числа  $A$  и  $B$  – не зависят от  $\Delta x$  и  $\Delta y$ ,

а  $\alpha(\Delta x; \Delta y)$  – бесконечно малая величина, для которой  $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\alpha(\Delta x; \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$ .

**Определение 6.3.** Главная линейная относительно  $\Delta x$  и  $\Delta y$  часть приращения функции называется *полным дифференциалом* этой функции и обозначается  $dz$ :

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Для дифференцируемой функции  $A = \frac{\partial z}{\partial x}$ ;  $B = \frac{\partial z}{\partial y}$ . Поскольку прираще-  
 ния независимых переменных  $x$  и  $y$  совпадают с их дифференциалами  
 $\Delta x = dx$ ,  $\Delta y = dy$ , окончательно имеем  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ .

Геометрический смысл дифференциала  $dz$  функции  $z = f(x; y)$  состоит в том, что он равен приращению  $\Delta z$  аппликаты касательной плоскости.

**Пример 6.1.** Найдите полный дифференциал  $dz$  функции двух переменных  $z(x; y) = \frac{x \arcsin y}{y}$ .

**Решение.** Полный дифференциал  $dz$  функции  $z(x; y) = \frac{x \arcsin y}{y}$  равен

$$\begin{aligned} dz &= d\left(\frac{x \arcsin y}{y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x \arcsin y}{y}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x \arcsin y}{y}\right) dy = \\ &= \frac{\arcsin y}{y} \cdot 1 \cdot dx + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot y - \arcsin y \cdot 1 \\ &= \frac{\arcsin y}{y} dx + \frac{x}{y^2} \cdot \left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} - \arcsin y\right) dy. \end{aligned}$$

## 7. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть функция  $z = f(x; y)$  дифференцируема в точке  $P_0(x_0; y_0)$  некоторой области  $D$ , лежащей в плоскости  $Oxy$ . Рассечем поверхность  $S$ , изображающую функцию  $z$ , плоскостями  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  (см. рис. 7.1).

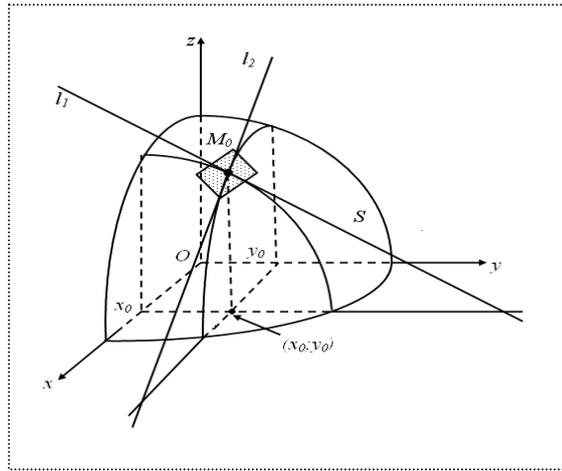


Рис. 7.1

Плоскость  $x = x_0$  пересекает поверхность  $S$  по некоторой линии, уравнение которой в плоскости  $x = x_0$  имеет вид  $z = f(x_0; y) = \varphi_1(y)$ . Оно получается подстановкой  $x = x_0$  в исходную функцию  $z = f(x; y)$ . Точка  $M_0(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$  принадлежит кривой  $\varphi_1(y)$ , лежащей в плоскости  $x = x_0$ . В силу дифференцируемости функции  $z$  в точке  $M_0$  функция  $\varphi_1(y)$  также является дифференцируемой в точке  $y = y_0$ . Следовательно, в этой точке в плоскости  $x = x_0$  к кривой  $\varphi_1(y)$  может быть проведена касательная  $l_1$ .

Проводя аналогичные рассуждения для сечения плоскостью  $y = y_0$ , построим касательную  $l_2$  к кривой  $z = f(x; y_0) = \varphi_2(x)$  в точке  $x = x_0$ . Прямые  $l_1$  и  $l_2$  определяют плоскость ( $\alpha$ ), которая называется **касательной плоскостью к поверхности  $S$  в точке  $M_0$** .

Уравнение касательной плоскости в точке  $M_0$  к поверхности  $S$  имеет следующий вид:

$$z - z_0 = f'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0). \quad (7.1)$$

Прямая, проходящая через точку  $M_0$  и перпендикулярная касательной плоскости, построенной в этой точке поверхности, называется **нормалью** к поверхности  $S$  в точке  $M_0$ .

Нормальный вектор касательной плоскости может быть принят за направляющий вектор нормали к поверхности, поэтому ее канонические уравнения будут

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (7.2)$$

Если поверхность задана уравнением  $F(x; y; z) = 0$ , то уравнения касательной плоскости и нормали будут соответственно

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0. \quad (7.3)$$

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}. \quad (7.4)$$

**Пример 7.1.** Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $z = x^2 + y^2 - 1$  в точке  $M_0(1; -2; 4)$ .

**Решение.** Найдем значения частных производных  $z'_x$  и  $z'_y$  данной функции в точке  $(1; -2)$ :

$$z'_x = 2x, \quad z'_x(1; -2) = 2, \quad z'_y = 2y, \quad z'_y(1; -2) = -4.$$

Уравнение касательной плоскости к поверхности  $z(x; y) = x^2 + y^2 - 1$ , в точке  $M_0$  будет

$$z - 4 = 2(x - 1) - 4(y + 2),$$

или

$$2x - 4y - z - 6 = 0.$$

Используя равенства (7.2), получим канонические уравнения нормали

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{-4} = \frac{z - 4}{-1}.$$

**Пример 7.2.** Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$  в точке  $M_0(2; 2; 3)$ .

**Решение.** Чтобы записать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, определяемой заданной функцией, найдем значения частных производных от этой функции в точке  $M_0$

$$F'_x = 2x, F'_x(M_0) = 2 \cdot 2 = 4;$$

$$F'_y = 2y, F'_y(M_0) = 2 \cdot 2 = 4;$$

$$F'_z = -2z, F'_z(M_0) = -2 \cdot 3 = -6.$$

Запишем уравнение касательной плоскости

$$4(x - 2) + 4(y - 2) - 6(z - 3) = 0. \text{ Или после преобразований } 2x + 2y - 3z + 1 = 0,$$

$$\text{Канонические уравнения нормали будут иметь вид } \frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-6}.$$

## 8. Производная по направлению и градиент функции

Пусть функция  $z = f(x; y)$  определена в некоторой окрестности точки  $M_0(x_0; y_0)$ , а  $\vec{l}$  – данное направление, задаваемое единичным вектором  $\vec{e} = \{\cos \alpha; \cos \beta\}$ ,  $|\vec{e}| = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$ , при этом  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ , а  $\cos \alpha$  и  $\cos \beta$  – косинусы углов, образуемых вектором  $\vec{l}$  с осями координат (направляющие косинусы).

**Определение 8.1.** При перемещении в данном направлении  $\vec{l}$  точки  $M_0(x_0; y_0)$  в точку  $M_1(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$  функция  $z = f(x; y)$  получает приращение  $\Delta_l z(x_0; y_0) = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$ , называемое **приращением функции  $z = f(x; y)$  в данном направлении**.

Длина отрезка  $M_0 M_1 = |\vec{\Delta l}|$  численно равна гипотенузе прямоугольного треугольника, катеты которого равны  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , следовательно,  $\Delta x = |\vec{\Delta l}| \cdot \cos \alpha$ ,  $\Delta y = |\vec{\Delta l}| \cdot \cos \beta$  и приращение функции  $\Delta_l z(x; y)$  в данном направлении можно представить следующей формулой:

$$\Delta_l z(x_0; y_0) = f(x_0 + |\overline{\Delta l}| \cos \alpha; y_0 + |\overline{\Delta l}| \cos \beta) - f(x_0; y_0).$$

Если рассматривать произвольную точку  $M(x; y)$ , то можно ввести такое определение.

**Определение 8.2.** Производной  $z'_l(x; y)$  по направлению  $\vec{l}$  функции двух переменных  $z = f(x; y)$  называется предел отношения приращения функции в этом направлении к величине приращения  $|\overline{\Delta l}|$  при стремлении  $\Delta l$  к нулю

$$z'_l(x; y) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l z(x; y)}{|\overline{\Delta l}|}.$$

Производная по направлению  $z'_l(x; y)$  характеризует скорость изменения функции  $z = f(x; y)$  в направлении  $\vec{l}$  и определяется выражением  $z'_l(x; y) = z'_x \cdot \cos \alpha + z'_y \cdot \cos \beta$ , где  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  – направляющие косинусы вектора  $\vec{l}$ , которые вычисляются по формулам  $\cos \alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|}$ ,  $\cos \beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|}$ , где  $\vec{l}$  – вектор, задающий данное направление,  $l_x, l_y$  – его координаты, а  $|\vec{l}| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}$  – модуль вектора  $\vec{l}$ .

**Пример 8.1.** Вычислите производную функции  $z(x; y) = 5x^4 - 3x - y - 1$  в точке  $M_0(2; 1)$  по направлению вектора  $\overline{M_0 M_1}$ , где  $M_1(5; 5)$ .

**Решение.** Нахождение производной  $z'_l(x_0; y_0)$  по направлению вектора  $\overline{M_0 M_1}$  согласно формуле  $z'_l(x; y) = z'_x \cdot \cos \alpha + z'_y \cdot \cos \beta$  связано с определением частных производных  $z'_x$ ,  $z'_y$  и направляющих косинусов  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ .

Вычислим частные производные  $z'_x$  и  $z'_y$  в точке  $M_0(2; 1)$

$$z'_x = \frac{\partial}{\partial x} (5x^4 - 3x - y - 1) = 20x^3 - 3, \quad z'_x(2; 1) = 20 \cdot 2^3 - 3 = 157,$$

$$z'_y = \frac{\partial}{\partial y} (5x^4 - 3x - y - 1) = -1, \quad z'_y(2; 1) = -1.$$

Направляющие косинусы  $\cos\alpha$  и  $\cos\beta$  можно найти, если использовать приведенные выше формулы.  $\overline{M_0M_1} = \{5-2; 5-1\} = \{3; 4\}$ ,

$$|\overline{M_0M_1}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5. \text{ Тогда } \cos\alpha = \frac{3}{5}, \cos\beta = \frac{4}{5}.$$

Значение производной функции  $z$  по направлению  $\overline{M_0M_1}$  в точке  $M_0(2;1)$  равно

$$z'_l(2; 1) = z'_x(2; 1) \cdot \cos\alpha + z'_y(2; 1) \cdot \cos\beta = 157 \cdot \frac{3}{5} + (-1) \cdot \frac{4}{5} = 93,4.$$

Так как  $z'_l(2; 1)$  в точке  $M_0(2;1)$  положительна, то можно сделать вывод, что функция  $z(x; y)$  возрастает в направлении вектора  $\overline{M_0M_1}$ .

**Определение 8.3.** *Градиентом*  $\text{grad } z$  функции  $z = f(x; y)$  называется вектор с координатами  $z'_x; z'_y$ , т. е.  $\text{grad } z = \{z'_x; z'_y\}$ .

Производная по направлению  $z'_l$  равна скалярному произведению градиента функции  $z$  и единичного вектора, задающего направление вдоль некоторой прямой  $l$ , т. е.  $\frac{\partial z}{\partial l} = \text{grad } z \cdot \vec{e} = z'_x \cdot \cos\alpha + z'_y \cdot \cos\beta$ .

Градиент функции  $z = f(x; y)$  в данной точке характеризует направление максимальной скорости изменения функции в этой точке.

**Пример 8.2.** Найдите градиент  $\text{grad } z$  функции  $z = x \cdot \ln(x + y)$  и его длина в точке  $M_0(-1; 2)$ .

**Решение.** Координаты вектора  $\text{grad } z$  можно найти, если вычислить значения частных производных  $z'_x$  и  $z'_y$  в точке  $M_0(-1; 2)$ :

$$z'_x = \frac{\partial}{\partial x}(x \cdot \ln(x + y)) = 1 \cdot \ln(x + y) + x \cdot (\ln(x + y))'_x = \ln(x + y) + \frac{x}{x + y},$$

$$z'_x(-1; 2) = \ln 1 - 1 = -1,$$

$$z'_y = \frac{\partial}{\partial y}(x \cdot \ln(x + y)) = x \cdot (\ln(x + y))'_y = \frac{x}{x + y},$$

$$z'_y(-1; 2) = -1.$$

Тогда  $\text{grad } z = \{-1; -1\}$ .

Модуль градиента функции  $|\text{grad } z|$  в точке  $M_0(-1;2)$  – это длина этого вектора

$$|\text{grad } z| = \sqrt{(z'_x(-1;2))^2 + (z'_y(-1;2))^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

**Пример 8.3.** Найдите градиент  $\text{grad } z$  функции  $z = x^2 \cdot y + 2\frac{x}{y}$  и его длина в точке  $M_0(-2;1)$ .

**Решение.** Координаты вектора  $\text{grad } z$  можно найти, если вычислить значения частных производных  $z'_x$  и  $z'_y$  в точке  $M_0(-2;1)$ :

$$z'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( x^2 \cdot y + 2\frac{x}{y} \right) = 2xy + \frac{2}{y}, \quad z'_x(-2;1) = -2,$$
$$z'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( x^2 \cdot y + 2\frac{x}{y} \right) = x^2 + 2x \cdot \left( -\frac{1}{y^2} \right), \quad z'_y(-2;1) = 8.$$

Тогда  $\text{grad } z = \{-2; 8\}$ .

Модуль градиента функции  $|\text{grad } z|$  в точке  $M_0(-2;1)$  – это длина этого вектора:

$$|\text{grad } z| = \sqrt{(z'_x(-2;1))^2 + (z'_y(-2;1))^2} = \sqrt{(-2)^2 + (8)^2} = \sqrt{68}.$$

## 9. Частные производные второго порядка

**Определение 9.1.** Частная производная от частной производной функции называется *частной производной второго порядка*.

Приняты следующие обозначения для частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = z''_{xx} = f''_{xx}(x; y) \quad \text{– функция дифференцируется по } x \text{ последо-$$

тельно два раза;

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = z''_{xy} = f''_{xy}(x; y) - \text{функция сначала дифференцируется по } x, \text{ а ре-}$$

зультат дифференцируется по } y;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = z''_{yx} = f''_{yx}(x; y) - \text{функция сначала дифференцируется по } y, \text{ а ре-}$$

зультат дифференцируется по } x;

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = z''_{yy} = f''_{yy}(x; y) - \text{функция дифференцируется по } y \text{ последова-}$$

тельно два раза.

**Теорема 9.1.** Если функция  $z(x; y)$  дважды дифференцируема в точке  $M_0(x_0, y_0)$ , то ее смешанные производные  $z''_{xy}$  и  $z''_{yx}$  в этой точке равны.

**Пример.** Найдите частные производные второго порядка от функции  $z(x, y) = x^4 y^2 + x^2 y - 3xy - 2y$ .

**Решение.** Первоначально находим частные производные  $z'_x$  и  $z'_y$ :

$$z'_x = \frac{\partial}{\partial x} (x^4 y^2 + x^2 y - 3xy - 2y) = 4x^3 y^2 + 2xy - 3y,$$

$$z'_y = \frac{\partial}{\partial y} (x^4 y^2 + x^2 y - 3xy - 2y) = 2x^4 y + x^2 - 3x - 2.$$

Последовательно находим частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} (4x^3 y^2 + 2xy - 3y) = 12x^2 y^2 + 2y,$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} (4x^3 y^2 + 2xy - 3y) = 8x^3 y + 2x - 3,$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} (2x^4 y + x^2 - 3x - 2) = 8x^3 y + 2x - 3,$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} (2x^4 y + x^2 - 3x - 2) = 2x^4.$$

## 10. Экстремум функции

**Определение 10.1.** Точка  $P_0(x_0; y_0)$  называется *точкой максимума функции*  $z = f(x; y)$ , а значение функции в ней  $z_0 = f(x_0; y_0)$  – *максимумом*, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек  $P(x; y)$  из этой окрестности, отличных от  $P_0(x_0; y_0)$ , выполняется неравенство  $f(x; y) < f(x_0; y_0)$ .

**Определение 10.2.** Точка  $P_0(x_0; y_0)$  называется *точкой минимума функции*  $z = f(x; y)$ , а значение функции в ней  $z_0 = f(x_0; y_0)$  – *минимумом*, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек  $P(x; y)$  из этой окрестности, отличных от  $P_0(x_0; y_0)$ , выполняется неравенство  $f(x; y) > f(x_0; y_0)$ .

Максимум и минимум функции это ее *экстремумы*.

**Определение 10.3.** Точка, в которой обе частные производные равны нулю, т. е.  $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ , называется *стационарной точкой* функции  $z = f(x; y)$ .

**Теорема 10.1.** (необходимый признак существования экстремума). Если  $P_0(x_0; y_0)$  – точка экстремума дифференцируемой функции  $z = f(x; y)$ , то  $z'_x(x_0; y_0) = 0$ ,  $z'_y(x_0; y_0) = 0$ .

Этот признак не является достаточным условием. Сформулируем достаточный признак.

**Теорема 10.2.** Пусть в стационарной точке  $P_0(x_0; y_0)$  и некоторой ее окрестности функция имеет непрерывные частные производные до второго порядка.  $z''_{xx}(x_0; y_0)$ ,  $z''_{xy}(x_0; y_0)$ ,  $z''_{yy}(x_0; y_0)$ .

Составим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx}(x_0; y_0) & z''_{xy}(x_0; y_0) \\ z''_{xy}(x_0; y_0) & z''_{yy}(x_0; y_0) \end{vmatrix}.$$

- Тогда: 1) если  $\Delta > 0$ , то функция  $z = f(x; y)$  имеет в точке  $P_0(x_0; y_0)$  экстремум. Причем максимум, если  $z''_{xx}(x_0; y_0) < 0$  и минимум, если  $z''_{xx}(x_0; y_0) > 0$ ;
- 2) если  $\Delta < 0$ , то функция  $z = f(x; y)$  в точке  $P_0(x_0; y_0)$  не имеет экстремума;
- 3) если  $\Delta = 0$ , вопрос об экстремуме в точке  $P_0(x_0; y_0)$  остается открытым.

### *Схема исследования функции $z(x; y)$ на экстремум*

1. Находим стационарные точки.

1.1. Находим частные производные  $z'_x$  и  $z'_y$  функции  $z=f(x; y)$ .

1.2. Находим решения системы уравнений  $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$

2. Проверяем выполнение достаточного условия экстремума в каждой стационарной точке.

2.1. Находим частные производные второго порядка  $z''_{xx}$ ,  $z''_{yy}$ ,  $z''_{xy}$  функции  $z=f(x; y)$ .

2.2. Определяем значения частных производных второго порядка  $z''_{xx}$ ,  $z''_{yy}$ ,  $z''_{xy}$  в стационарной точке.

2.3. Вычисляем значение определителя  $\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx}(x_0; y_0) & z''_{xy}(x_0; y_0) \\ z''_{xy}(x_0; y_0) & z''_{yy}(x_0; y_0) \end{vmatrix}$

в каждой из стационарных точек и, используя достаточное условие, делаем вывод относительно наличия экстремума в каждой из них.

**Пример 10.1.** Исследовать на экстремум функцию  $z(x; y) = xy(1 - x - y)$ .

**Решение.** 1. Находим стационарные точки.

1.1. Найдем частные производные  $z'_x$  и  $z'_y$  функции  $z=f(x; y)$ .

$$z'_x = \frac{\partial}{\partial x}(xy(1-x-y)) = y(1-x-y) + xy(-1) = y - 2xy - y^2.$$

$$z'_y = \frac{\partial}{\partial y}(xy(1-x-y)) = x(1-x-y) + xy(-1) = x - x^2 - 2xy.$$

1.2. Для нахождения стационарных точек решим систему уравнений

$$\begin{cases} z'_x = 0; \\ z'_y = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 2xy - y^2 = 0; \\ x - x^2 - 2xy = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(1 - 2x - y) = 0; \\ x(1 - x - 2y) = 0. \end{cases}$$

Эта система распадается на совокупность систем

$$1) \begin{cases} x = 0; \\ y = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 1; \\ y = 0. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = 0; \\ y = 1. \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 1 - 2x - y = 0; \\ 1 - x - 2y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/3; \\ y = 1/3. \end{cases}$$

В итоге получаем такой набор стационарных точек:  $M_1(0; 0)$ ,  $M_2(1; 0)$ ,  $M_3(0; 1)$  и  $M_4(1/3; 1/3)$ .

2. Проверим выполнение достаточного условия экстремума для каждой из них.

2.1. Найдем частные производные второго порядка  $z''_{xx}$ ,  $z''_{yy}$ ,  $z''_{xy}$  исследуемой функции  $z=f(x; y)$ .

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(z'_x) = \frac{\partial}{\partial x}(y - 2xy - y^2) = -2y.$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(z'_y) = \frac{\partial}{\partial y}(x - x^2 - 2xy) = -2x.$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(z'_y) = \frac{\partial}{\partial x}(x - x^2 - 2xy) = 1 - 2x - 2y.$$

2.2. Определим значения частных производных  $z''_{xx}$ ,  $z''_{yy}$ ,  $z''_{xy}$  исследуемой функции  $z=f(x; y)$  в стационарных точках  $(0; 0)$ ,  $(1; 0)$ ,  $(0; 1)$  и  $(1/3; 1/3)$ .

$$z''_{xx}(0;0) = 0; \quad z''_{xx}(1;0) = 0; \quad z''_{xx}(0;1) = -2; \quad z''_{xx}\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3};$$

$$z''_{yy}(0;0) = 0; \quad z''_{yy}(1;0) = -2; \quad z''_{yy}(0;1) = 0; \quad z''_{yy}\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3};$$

$$z''_{xy}(0;0) = 1; \quad z''_{xy}(1;0) = -1; \quad z''_{xy}(0;1) = -1; \quad z''_{xy}\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}.$$

2.3. Вычислим определитель  $\Delta$  в каждой из этих точек.

$\Delta(0;0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 < 0$ , следовательно, в стационарной точке  $M_1(0; 0)$  экстремума нет.

$\Delta(1;0) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 < 0$ , следовательно, в стационарной точке  $M_2(1; 0)$  экстремума нет.

$\Delta(0;1) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 < 0$ , следовательно, в стационарной точке  $M_3(0; 1)$  экстремума нет.

$\Delta\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} > 0$ , следовательно, в стационарной точке  $M_4$

$\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$  экстремум есть. Так как  $z''_{xx}\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} < 0$ , то точка  $M_4\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$  – точка максимума.

Значение функции в точке максимума  $z_{\max}\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$ .

График исследуемой функции  $z(x; y) = xy(1 - x - y)$  представлен на рис.

10.1.

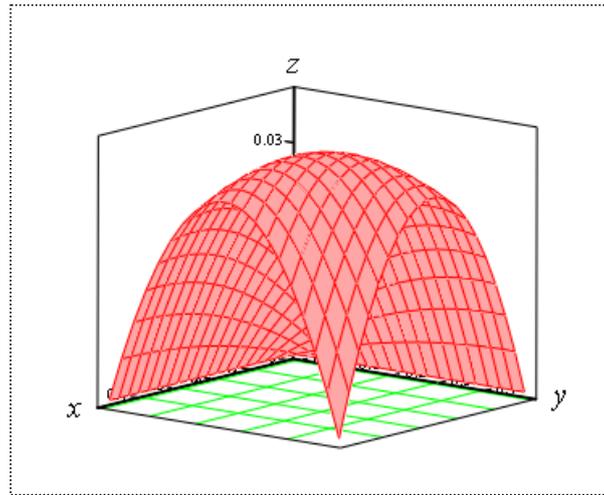


Рис. 10.1

**Пример 10.2.** Исследовать на экстремум функцию

$$z = 3x + 6y + x^2 - xy + y^2.$$

**Решение.** 1. Находим стационарные точки.

1.1. Найдем частные производные  $z'_x$  и  $z'_y$  функции  $z=f(x; y)$ .

$$z'_x = \frac{\partial}{\partial x}(3x + 6y + x^2 - xy + y^2) = 3 + 2x - y.$$

$$z'_y = \frac{\partial}{\partial y}(3x + 6y + x^2 - xy + y^2) = 6 - x + 2y.$$

Для определения стационарных точек решим систему уравнений  $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} 3 + 2x - y = 0, \\ 6 - x + 2y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 + 4x - 2y = 0, \\ 6 - x + 2y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 + 3x = 0, \\ y = 3 + 2x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4, \\ y = -5. \end{cases}$$

Стационарная точка имеет координаты  $(-4; -5)$ .

2. Проверим выполнение достаточного условия экстремума.

2.1. Найдем частные производные второго порядка  $z''_{xx}$ ,  $z''_{yy}$ ,  $z''_{xy}$  функции  $z=f(x; y)$ .

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(z'_x) = \frac{\partial}{\partial x}(3 + 2x - y) = 2. \quad z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(z'_y) = \frac{\partial}{\partial y}(6 - x + 2y) = 2.$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(z'_y) = \frac{\partial}{\partial x}(6 - x + 2y) = -1.$$

2.2. Частные производные  $z''_{xx}$ ,  $z''_{yy}$ ,  $z''_{xy}$  имеют постоянные значения в любой точке плоскости  $Oxy$ .

2.3. Вычислим значение определителя  $\Delta$  в точке  $(-4; -5)$ .

$$\Delta(-4; -5) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0, \text{ следовательно, в стационарной точке } (-4; -5)$$

экстремум есть и, так как  $z''_{xx}(-4; -5) = 2 > 0$ , то точка  $(-4; -5)$  – точка минимума. Найдем минимальное значение функции  $z(-4; -5) = -21$ .

График исследуемой функции  $z(x, y) = 3x + 6y + x^2 - xy + y^2$  представлен на рис. 10.2.

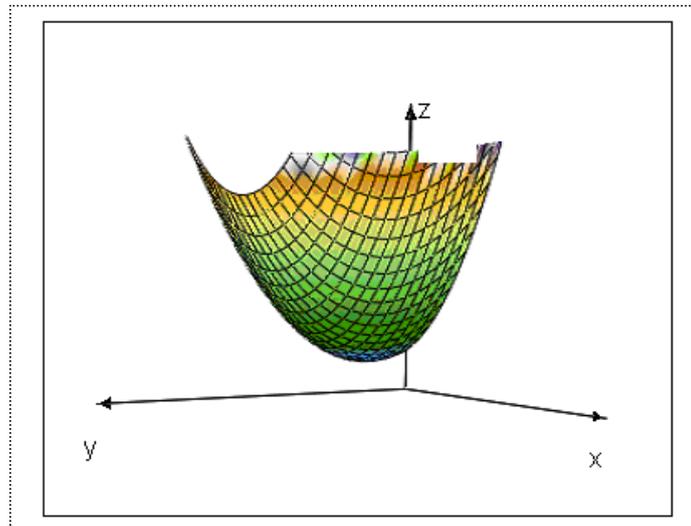


Рис. 10.2

## 11. Наибольшее и наименьшее значения функции

Пусть функция  $z = f(x; y)$  определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области  $D$ , тогда она достигает в этой области своего наибольшего и наименьшего значений.

Порядок действий при нахождении наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой в замкнутой области  $D$  функции  $z = f(x; y)$  состоит в следующем:

1. Найдем все стационарные точки функции, принадлежащие  $D$ , и вычислим значения функции в них.
2. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции  $z = f(x; y)$  на границе области и ее значения в угловых точках области.
3. Сравним все найденные значения функции и выберем из них наибольшее и наименьшее.

**Пример 11.1.** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z(x; y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$  в замкнутой области, заданной системой нера-

венств 
$$\begin{cases} x \leq 0, \\ y \leq 0, \\ 2x + 3y + 6 \geq 0. \end{cases}$$

**Решение.** 1. Найдем стационарные точки из системы уравнений

$$\begin{cases} z'_x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 - xy + x + y) = 2x - y + 1 = 0; \\ z'_y = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 - xy + x + y) = 2y - x + 1 = 0. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение  $(-1; -1)$ . Стационарная точка  $M(-1; -1)$  лежит внутри области (область  $D$  изображена на рис.11.1). Найдем значение функции в ней:  $z_1 = f(-1; -1) = -1$ .

1. Исследуем поведение функции на границе области. Для этого разобьем границу на три отрезка  $AO$ ,  $OB$ ,  $AB$ . На отрезке  $AO$  имеем:

$y = 0, -3 \leq x \leq 0, z = x^2 + x$ . Найдем значения функции на концах отрезка  $[-3;0]$  в точках  $A(-3;0)$  и  $O(0;0)$ . Получим  $z_2 = f(-3;0) = 6, z_3 = f(0;0) = 0$ . Теперь найдем стационарную точку на этом отрезке. Для этого найдем производную  $z'_x = 2x + 1$  и приравняем ее к нулю, получим  $x = -\frac{1}{2}$ . Точка  $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$  лежит внутри отрезка  $AO$ . Значение функции в этой точке будет  $z_4 = f\left(-\frac{1}{2}; 0\right) = -\frac{1}{4}$ . Перейдем к отрезку  $OB$ .

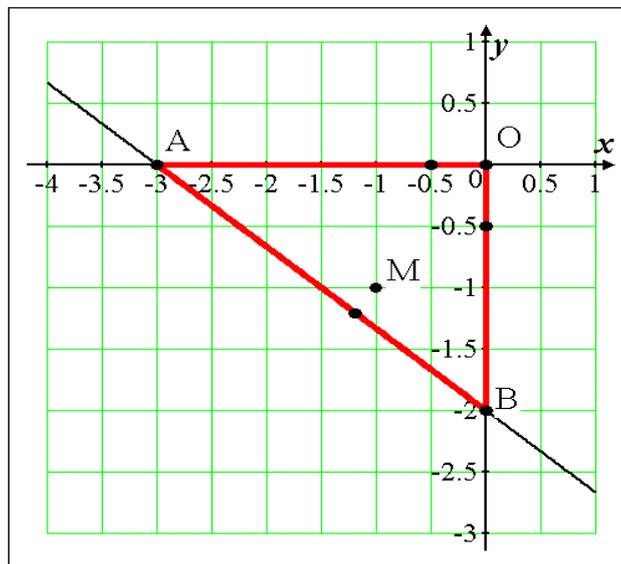


Рис. 11.1

Здесь  $x = 0, -2 \leq y \leq 0, z = y^2 + y$ . Вычислим значение функции в точке  $B(0;-2)$ . Получим  $z_5 = f(0;-2) = 2$ . При  $y = 0$  значение функции вычислено ранее.

Найдем стационарную точку функции  $z = y^2 + y$ , лежащую внутри отрезка  $OB$ . Для этого найдем  $z'_y = 2y + 1$  и приравняем ее к нулю, получим  $y = -\frac{1}{2}$ .

Точка  $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$  лежит внутри отрезка  $OB$ . Значение функции в ней

$$z_6 = f\left(0; -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}.$$

Рассмотрим поведение функции  $z$  на отрезке  $AB$ . Значения функции на концах отрезка (в точках  $A$  и  $B$ ) вычислены ранее. Найдем стационарную точку, лежащую внутри этого отрезка. Из уравнения прямой  $AB$   $2x + 3y + 6 = 0$

выразим  $y$ :  $y = -\frac{2}{3}x - 2$ . Подставим найденный  $y$  в функцию

$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ . Получим  $z = \frac{19}{9}x^2 + 5x + 2$  и найдем стационарную точку

этой функции при условии, что  $-3 \leq x \leq 0$ . Имеем:  $z'_x = \frac{38}{9}x + 5 = 0$ ,  $x = -\frac{45}{38}$ .

Таким образом, стационарная точка, лежащая внутри отрезка  $AB$ , имеет коор-

динаты  $\left(-\frac{45}{38}; -\frac{46}{38}\right)$ . Значение функции в ней  $z_7 = f\left(-\frac{45}{38}; -\frac{46}{38}\right) = -\frac{73}{76}$ .

Сравнивая все найденные значения функции  $z_1, z_2, \dots, z_7$ , делаем вывод, что в заданной области функция  $z$  принимает наименьшее значение  $-1$  в точке  $M(-1; -1)$ . Наибольшее значение, равное 6, функция принимает в точке  $A(-3; 0)$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Егоров В. Я. Сборник домашних заданий по курсу высшей математики : метод. рекомендации / В. Я. Егоров, А. И. Недвецкая, М. А. Толмачева. – Екатеринбург : УрГУПС, 2004. – 56 с.
2. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : полный курс / Д. Т. Письменный. – 12-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2014. – 603 с. – ISBN 978-5-8112-5257-2.
3. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособие в 4 ч. Ч. 1 / под ред. А. П. Рябушко. – 6-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2007. – 592 с. – ISBN 5-339-00328-0.
4. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Т. 1: учеб. для вузов / Г. М. Фихтенгольц. – СПб. : Лань, 2008. – 464 с. – ISBN 978-5-8114-0191-8.
5. Сборник задач по высшей математике : 1 курс / К. Н. Лунгу [и др.] – М. : Айрис-пресс, 2008 ISBN 978-5-8112-2326-8.

## Типовой расчет «Функции нескольких переменных»

### Вариант № 1

1. Найдите область определения функций

а)  $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ ; б)  $z = \sqrt{3 + x - y} \cdot \ln(x + 1)$ .

2. Найдите частные производные первого порядка функции

$$z = \ln(x^3 + 2y^2) + \cos xy.$$

3. Найдите частные производные функции  $z = z(x; y)$ , заданной неявно уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz - 4yz = 1$ .

4. Найдите градиент функции  $z = x^2 - 2xy - 2y^2$  в точке  $M_0(1; 2)$  и производную по направлению вектора  $\overline{M_0M_1}$ , где  $M_1(2; 4)$ .

5. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0$  в точке  $M_0(2; 1; -1)$ .

6. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^3 - 3x^2 - 2y^2 + 10y - 4$ .

7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = 6x^2 + 6xy + 2y^2 + 2y + 6x$  в замкнутой области  $D$ , ограниченной заданными линиями  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $y = x + 3$ .

### Вариант № 2

1. Найдите область определения функций

а)  $z = \ln(1 - y - \frac{1}{4}x^2) + \sqrt{xy}$ ; б)  $z = \arcsin(x - y)$ .

2. Найдите частные производные первого порядка функции  $z = \frac{1}{\arctg \sqrt{xy}}$ .

3. Доказать, что функция  $z = z(x; y)$ , заданная неявно уравнением

$$4\sin(3x + 2y + 5z) = 3x + 2y + 5z, \text{ удовлетворяет уравнению } \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + 1 = 0.$$

4. Найдите градиент функции  $z = x^2 + xy + y^2 + 3$  в точке  $M_0(1; 2)$  и производную по направлению вектора  $\overline{M_0M_1}$ , где  $M_1(1; 1)$ .

5. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \text{ в точке } M_0(2; 3; 2).$$

6. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^2 - 4x - 4y^3 + 12y^2 - 5$ .

7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции  $z = x^2 + 2y^2 - 4y + 8x + 1$  в замкнутой области  $D$ , ограниченной заданными линиями  $x = -5$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $y = 2$ .

### Вариант № 3

1. Найдите область определения функций

$$\text{а) } z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}} + \sqrt{\frac{x}{y}}. \quad \text{б) } z = \arcsin(x - y + 1) + \sqrt{1 - x^2}.$$

2. Найдите частные производные первого порядка функции  $z = e^{x(5y-2)} \cdot (x+1)^7$ .

3. Найдите частные производные функции  $z = z(x; y)$ , заданной неявно уравнением  $z^3 - 3xyz = a^3$ .

4. Найдите градиент функции  $z = x^3 + y^2 - xy + 4$  в точке  $M_0(2; 1)$  и производную по направлению вектора  $\overrightarrow{M_0M_1}$ , где  $M_1(-1; 2)$ .

5. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3z = 7$  в точке  $M_0(1; 2; 1)$ .

6. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^3 - 2y^2 - 3x + 6y + 7$ .

7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции  $z = x^2 - 9xy + y^2 + 27$  в замкнутой области  $D$ , ограниченной заданными линиями  $x = 0$ ;  $x = 3$ ;  $y = 0$ ;  $y = 3$ .

### Вариант № 4

1. Найдите область определения функции

$$\text{а) } z = \sqrt{x} + \ln \frac{x-1}{y+1}; \quad \text{б) } z = \ln(4 - x^2 - y^2) + \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

2. Найдите частные производные первого порядка функции  $z = \frac{x^3 + 2xy}{y}$ .
3. Найдите частные производные функции  $z = z(x; y)$ , заданной неявно уравнением  $z = y \cdot e^{\frac{2x}{z}}$ .
4. Найдите градиент функции  $z = 2x^3 + y^3 - x^2 - y$  в точке  $M_0(-1; 2)$  и производную по направлению вектора  $\overline{M_0M_1}$ , где  $M_1(1; 1)$ .
5. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4x = 8$  в точке  $M_0(-1; 1; 2)$ .
6. Исследуйте на экстремум функцию  $z = 3x^3 + 3y^3 - 9x - 9y^2 + 1$ .
7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции  $z = 3x^2 + 6xy - 2y^2 - 5y$  в замкнутой области  $D$ , ограниченной заданными линиями  $x = 0$ ;  $x = 2$ ;  $y = -1$ ;  $y = 1$ .

*Вариант № 5*

1. Найдите область определения функций
  - а)  $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{9 - y^2}$ ; б)  $z = \ln\left(\frac{y-1}{x+2}\right) + \sqrt{y^2 - x^2 + 1}$ .
2. Найдите частные производные первого порядка функции  $z = \frac{1 + e^{y-x}}{x+y}$ .
3. Найдите частные производные функции  $z = z(x; y)$ , заданной неявно уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz + 3yz = 1$ .
4. Найдите градиент функции  $z = x^2 - y^3 + xy$  в точке  $M_0(0; -3)$  и производную по направлению вектора  $\overline{M_0M_1}$ , где  $M_1(2; 1)$ .
5. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $2x^2 - y^2 + z^2 - 4z + y = 13$  в точке  $M_0(2; 1; -1)$ .
6. Исследуйте на экстремум функцию  $z = 2x^3 - 2y^2 - 6x + 4y + 6$ .

7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции  $z = 2x^2 + 2xy + y^2 - 3y$  в замкнутой области  $D$ , ограниченной заданными линиями  $x = -3$ ;  $x = 1$ ;  $y = 0$ ;  $y = 4$ .

*Вариант № 6*

1. Найдите область определения функций  
а)  $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ ; б)  $z = \arcsin(x + y - 2)$ .
2. Найдите частные производные первого порядка функции  $z = \arcsin \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ .
3. Найдите частные производные функции  $z = z(x; y)$ , заданной неявно уравнением  $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$ . Найдите  $dz$ .
4. Найдите градиент функции  $z = x^2 + 3y^2 - xy^2$  в точке  $M_0(1; 1)$  и производную по направлению вектора  $\overline{M_0M_1}$ , где  $M_1(-1; -2)$ .
5. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0$  в точке  $M_0(2; 1; -1)$ .
6. Исследуйте на экстремум функцию  $z = 3x^3 - 3y^2 + 9xy + 2$ .
7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции  $z = x^2 + 2y^2 - 4x + 1$  в замкнутой области  $D$ , ограниченной заданными линиями  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $y = 3 - x$ .

*Вариант № 7*

1. Найдите область определения функций  
а)  $z = \ln(x^2 - 6y) + \sqrt{xy}$ ; б)  $z = \arccos(x + y)$ .
2. Найдите частные производные первого порядка функции  $z = 5^{\operatorname{tg}(3x^2 + y)}$ .
3. Найдите частные производные функции  $z = z(x; y)$ , заданной неявно уравнением  $x^2 - 2xyz - 8x + \sin z + 5 = 0$ .
4. Найдите градиент функции  $z = x^4 + y^3 + x^2y$  в точке  $M_0(2; -1)$  и производную по направлению вектора  $\overline{M_0M_1}$ , где  $M_1(1; 2)$ .

5. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 + z^2 - 5yz + 3y = 46$  в точке  $M_0(1; 2; -3)$ .
6. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^3 + 8y^2 - 12xy + 1$ .
7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции  $z = -2x^2 - y^2 - 2xy + 4x + 5$  в замкнутой области  $D$ , ограниченной заданными линиями  $x = 0; x = 3; y = x; y = -3$ .

*Вариант № 8*

1. Найдите область определения функций

а)  $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} + \sqrt{\frac{x}{y}}$ ; б)  $z = \sqrt{1 + x - y^2} + \ln(1 - x)$ .

2. Найдите частные производные первого порядка функции  $z = \ln(x^2 - \frac{y}{2x})$ .
3. Найдите частные производные функции  $z = z(x; y)$ , заданной неявно уравнением  $2xy - 3yz + 6xz + e^{2z} = 0$ .
4. Найдите градиент функции  $z = x^3 + 4y^3 - x^2y^2$  в точке  $M_0(1; 1)$  и производную по направлению вектора  $\overline{M_0M_1}$ , где  $M_1(0; -2)$ .
5. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 + y^2 - xz - yz = 0$  в точке  $M_0(0; 2; 2)$ .
6. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^3 - 4y^2 - 3x + 4y - 2$ .
7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции  $z = x^2 + 3y^2 - 6y + 2x + 2$  в замкнутой области  $D$ , ограниченной заданными линиями  $x = 0; x = -2; y = x + 3; y = -1$ .

*Вариант № 9*

1. Найдите область определения функций

2. а)  $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + \frac{xy}{\sqrt{y - x^2}}$ ; б)  $z = \arcsin(2x - y)$ .

3. Найдите частные производные первого порядка функции  $z = \sqrt[3]{x^3 + 2xy}$ .

3. Найдите частные производные функции  $z = z(x; y)$ , заданной неявно уравнением  $2x - 3y + 5z = e^{4x+y-3z}$ .
4. Найдите градиент функции  $z = 2x^2 - 3y^3 + 4xy$  в точке  $M_0(-3; 1)$  и производную по направлению вектора  $\overline{M_0M_1}$ , где  $M_1(4; 2)$ .
5. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 + y^2 + 2yz - z^2 + y - 2z = 2$  в точке  $M_0(1; 1; 1)$ .
6. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^3 - 4y^3 - 3x + 12y + 7$ .
7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции  $z = x^2 + 2y^2 + 2xy + 4y - 2$  в замкнутой области  $D$ , ограниченной заданными линиями  $x = 0; x = 3; y = 0; y = -3$ .

*Вариант № 10*

1. Найдите область определения функций

$$\text{а) } z = \sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{9 - y^2}; \quad \text{б) } z = \sqrt{x + y} + \ln(y - 1).$$

2. Найдите частные производные первого порядка функции  $z = e^{\sqrt{4-x^2y}}$ .
3. Найдите частные производные функции  $z = z(x; y)$ , заданной неявно уравнением  $x^2 + y^2 + 3z^2 - 3xyz = 0$ .
4. Найдите градиент функции  $z = -x^2 + 2y^2 - 5xy$  в точке  $M_0(1; -3)$  и производную по направлению вектора  $\overline{M_0M_1}$ , где  $M_1(2; 4)$ .
5. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $y^2 - z^2 + x^2 - 2xz + 2x - 1 = 0$  в точке  $M_0(1; 1; 1)$ .
6. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^2 - 4y^3 - 2x + 12y + 5$ .
7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции  $z = 2x^2 + y^2 + 2xy + y - 3$  в замкнутой области  $D$ , ограниченной заданными линиями  $x = 0; y = x - 2; y = 0$ .

*Вариант № 11*

1. Найдите область определения функций

а)  $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 5}$ ; б)  $z = \sqrt{\frac{x+1}{y-2}}$ .

2. Найдите частные производные первого порядка функции

$$z = \ln\left(1 + \operatorname{tg} \frac{y}{x}\right) + 3xy.$$

3. Найдите частные производные функции  $z = z(x; y)$ , заданной неявно

$$\text{уравнением } 3x^2 - 5y^2 + 4z^2 - 6x + 3y + 2z - 1 = 0.$$

4. Найдите градиент функции  $z = 5x^2 - 3xy + 4y^2$  в точке  $M_0(2; -1)$  и производную по направлению вектора  $\overrightarrow{M_0M_1}$ , где  $M_1(2; 4)$ .

5. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - y \text{ в точке } M_0(-1; -1; -1).$$

6. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^3 - 6x^2 + 9x - 2y^2 + 6y + 8$ .

7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$$z = x^2 + 3y^2 + 4x - 6y + 5 \text{ в замкнутой области } D, \text{ ограниченной заданными линиями } x = 0; x = -3; y = 2; y = -x - 3.$$

*Вариант № 12*

1. Найдите область определения функций

а)  $z = \ln(x^2 + 6y) + \sqrt{xy}$ ; б)  $z = \sqrt{\frac{4x}{x - 3y + 1}}$ .

2. Найдите частные производные первого порядка функции  $z = \frac{x}{\sqrt{4xy + y^2}}$ .

3. Найдите частные производные функции  $z = z(x; y)$ , заданной неявно

$$\text{уравнением } e^z - (2x - 1) \cdot y \cdot (3z + 2) = 0.$$

4. Найдите градиент функции  $z = 3x^4 - 4y^3 + x$  в точке  $M_0(1; 1)$  и производную по направлению вектора  $\overrightarrow{M_0M_1}$ , где  $M_1(2; 1)$ .

5. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $z = y^2 - x^2 - 2xy - 3y$  в точке  $M_0(-1; 1; -1)$ .
6. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^2 - 2x - 4y^3 + 24y^2 - 36y + 18$ .
7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции  $z = x^2 - y^2 + 2xy + 4x$  в замкнутой области  $D$ , ограниченной заданными линиями  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $y + x = -3$ .

*Вариант № 13*

1. Найдите область определения функций

а)  $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9}} + \sqrt{\frac{x}{y}}$ ; б)  $z = \frac{\sqrt{xy}}{x^2 + y^2}$ .

2. Найдите частные производные первого порядка функции  $z = \ln(\sqrt{x^2 + y^2} + xy)$ .
3. Найдите частные производные функции  $z = z(x; y)$ , заданной неявно уравнением  $3x^2 - 5y^2 + 2xy + \sin(2z - 1) - 4y + 2 = 0$ .
4. Найдите градиент функции  $z = 6x^2 - 5y^2 + x - 2y$  в точке  $M_0(2; 1)$  и производную по направлению вектора  $\overline{M_0M_1}$ , где  $M_1(0; 0)$ .
5. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $z = x^2 - y^2 - 2xy - x - 2y$  в точке  $M_0(-1; 1; 1)$ .
6. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^3 - 6x^2 + 9x - 2y^2 + 2y + 9$ .
7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции  $z = x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x$  в замкнутой области  $D$ , ограниченной заданными линиями  $x = 0$ ;  $x = 3$ ;  $y = 0$ ;  $y = -x$ .

*Вариант № 14*

1. Найдите область определения функций

а)  $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2} + \frac{xy}{\sqrt{4y - x^2}}$ ; б)  $z = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right)$ .

2. Найдите частные производные первого порядка функции  $z = \sqrt[3]{\frac{1+xy}{2-xy}}$ .
3. Найдите частные производные функции  $z = z(x; y)$ , заданной неявно уравнением  $x \cos y + y \cos z + z \cos x = a$ .
4. Найдите градиент функции  $z = 4x^4 + 3y^2 + x - y$  в точке  $M_0(2; 2)$  и производную по направлению вектора  $\overline{M_0M_1}$ , где  $M_1(-4; 2)$ .
5. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 - 2y^2 + z^2 + xz - 4y = 13$  в точке  $M_0(3; 1; 2)$ .
6. Исследуйте на экстремум функцию  $z = 3x^3 + 9x^2 + 3y^3 - 18y^2 + 27y - 17$ .
7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции  $z = x^2 + xy + x - y$  в замкнутой области  $D$ , ограниченной заданными линиями  $x = 0; x = 2; y = 0; y = -4$ .

*Вариант № 15*

1. Найдите область определения функций
  - а)  $z = \sqrt{x^2 - 16} + \sqrt{16 - y^2}$ ; б)  $z = \ln(y^2 - x^2)$ .
2. Найдите частные производные первого порядка функции  $z = \left( \operatorname{tg} \frac{xy + 4}{\sqrt{x + y}} \right)^4$ .
3. Найдите частные производные функции  $z = z(x; y)$ , заданной неявно уравнением  $x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz + \sin(4y - 2z^2) = a$ .
4. Найдите градиент функции  $z = 7x - 3y^3 + xy$  в точке  $M_0(1; -3)$  и производную по направлению вектора  $\overline{M_0M_1}$ , где  $M_1(5; 3)$ .
5. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z = 9$  в точке  $M_0(1; -2; 1)$ .
6. Исследуйте на экстремум функцию  $z = 2x^3 + 12x^2 + 18x - 2y^2 + 8y + 4$ .
7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции  $z = 1 - 12x + 2y - 6x^2 - y^2$  в замкнутой области  $D$ , ограниченной заданными линиями  $x = 0; y = 2; y = -x - 1$ .

*Вариант № 16*

1. Найдите область определения функций

а)  $z = \sqrt{12 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$ ; б)  $z = \frac{x^3 y}{3 + x - y} + \ln(y + 1)$ .

2. Найдите частные производные первого порядка функции

$$z = \cos \sqrt{2 + x^2 y^2 - y}.$$

3. Доказать, что функция  $z = z(x; y)$ , заданная неявно уравнением

$$3 \sin(5x + 2y + z) = 5x + 2y + z, \text{ удовлетворяет уравнению } \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + 7 = 0.$$

4. Найдите градиент функции  $z = 4x + 5y^2 - x^2 y$  в точке  $M_0(2; 4)$  и производную по направлению вектора  $\overline{M_0 M_1}$ , где  $M_1(3; 5)$ .

5. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = x^2 + y^2 - 3xy - x + y + 2 \text{ в точке } M_0(2; 1; 0).$$

6. Исследуйте на экстремум функцию  $z = 3x^3 - 9x^2 + 9x - 3y^2 - 6y + 9xy - 4$ .

7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$$z = 15 - 4x + 6y + x^2 + y^2 \text{ в замкнутой области } D, \text{ ограниченной заданными линиями } x = 0; x = 3; y = 0; y = -4.$$

*Вариант № 17*

1. Найдите область определения функций

а)  $z = \sqrt{xy} + \ln(4 - x^2 - y^2)$ ; б)  $z = \arccos(x + 2y)$ .

2. Найдите частные производные первого порядка функции  $z = \frac{x + 2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .

3. Найдите частные производные функции  $z = z(x; y)$ , заданной неявно

$$\text{уравнением } \frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1.$$

4. Найдите градиент функции  $z = 5x - 6y^5 + x + y$  в точке  $M_0(2; 0)$  и производную по направлению вектора  $\overline{M_0 M_1}$ , где  $M_1(4; 5)$ .

5. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $2x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + xz = 3$  в точке  $M_0(1; 2; 1)$ .
6. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^3 + 3x^2 + 15x + 8y^2 - 28y - 12xy + 21$ .
7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции  $z = 2 - 6x + 2y - x^2 - y^2$  в замкнутой области  $D$ , ограниченной заданными линиями  $x = 0$ ;  $x = -4$ ;  $y = -2$ ;  $y = 2$ .

*Вариант № 18*

1. Найдите область определения функций
  - а)  $z = \ln(x^2 - 8y) + \sqrt{xy}$ ; б)  $z = \arcsin(2x - y)$ .
2. Найдите частные производные первого порядка функции  $z = \operatorname{arctg}(e^{xy} - xy)$ .
3. Найдите частные производные функции  $z = z(x; y)$ , заданной неявно уравнением  $x^2 + y^2 - z^2 + \operatorname{tg}(xyz) = a$ .
4. Найдите градиент функции  $z = 4x - 8y^3 + x + 2y$  в точке  $M_0(1; 1)$  и производную по направлению вектора  $\overrightarrow{M_0M_1}$ , где  $M_1(2; -1)$ .
5. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 2y = 14$  в точке  $M_0(3; 1; 4)$
6. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^3 - 4y^2 - 3x^2 - 4y$ .
7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции  $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 - 4x + 18y + 10$  в замкнутой области  $D$ , ограниченной заданными линиями  $x = -2$ ;  $x = 1$ ;  $y = 0$ ;  $y = 5$ .

*Вариант № 19*

1. Найдите область определения функций :
  - а)  $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} + \frac{xy}{\sqrt{2y - x^2}}$ ; б)  $z = \ln(9 - x^2 - y^2) + \frac{1}{\sqrt{xy}}$ .
2. Найдите частные производные первого порядка функции  $z = \sin^2(xy + 3) + x$ .

- Найдите частные производные функции  $z = z(x; y)$ , заданной неявно уравнением  $e^{3x-y+2z} + \cos z + x^2 + y^2 + 1 = 0$ .
- Найдите градиент функции  $z = 5x^2 + 3y^3 + x + y$  в точке  $M_0(2; -3)$  и производную по направлению вектора  $\overrightarrow{M_0M_1}$ , где  $M_1(-1; -1)$ .
- Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 + y^2 - z^2 + xz + 4y = 4$  в точке  $M_0(1; 1; 2)$ .
- Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^3 - 4y^3 - 3x - 24y^2 - 36y - 1$ .
- Найдите наибольшее и наименьшее значение функции  $z = 1 - 2x + 2y - 3x^2 - 3y^2 - 8xy$  в замкнутой области  $D$ , ограниченной заданными линиями  $x = -1; y = 0; y = x - 3$ .

#### Вариант № 20

- Найдите область определения функций
  - $z = \frac{1}{\sqrt{x-y}} + \arccos 2x$ ;
  - $z = \sqrt{3-x^2-y^2} + \ln(x^2+y^2-1)$ .
- Найдите частные производные первого порядка функции  $z = \sqrt[5]{\frac{x^2+3xy}{y}}$ .
- Найдите частные производные функции  $z = z(x; y)$ , заданной неявно уравнением  $\sin(xy) + \sin(yz) + \sin(xz) = a$ .
- Найдите градиент функции  $z = 8x^2 + y^2 - 5x + y$  в точке  $M_0(1; 1)$  и производную по направлению вектора  $\overrightarrow{M_0M_1}$ , где  $M_1(-2; -2)$ .
- Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 - 2y^2 - z^2 + xz + 4x = -6$  в точке  $M_0(-2; 1; 0)$ .
- Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^2 - 4y^3 + 4x + 12y^2$ .
- Найдите наибольшее и наименьшее значение функции  $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$  в замкнутой области  $D$ , ограниченной заданными линиями  $x = 0; x = 3; y = 0; y = -3$ .

Вариант № 21

1. Найдите область определения функций

а)  $z = \frac{2}{\sqrt{y+2}} + \arccos \frac{x+y}{2}$ ; б)  $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 5}} + \ln(9 - x^2 - y^2)$ .

2. Найдите частные производные первого порядка функции  $z = \ln \sin \frac{x+3}{\sqrt{y}}$ .

3. Найдите частные производные функции  $z = z(x; y)$ , заданной неявно уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz + \cos 2z + 1 = 0$ .

4. Найдите градиент функции  $z = x^4 + 3x^2y^2 - 5x + y$  в точке  $M_0(0; 1)$  и производную по направлению вектора  $\overrightarrow{M_0M_1}$ , где  $M_1(3; 5)$ .

5. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 + y^2 - xz + yz - 3x = 11$  в точке  $M_0(1; 4; -1)$ .

6. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^2 - 4y^3 + 8x + 24y^2 - 36y + 28$ .

7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции  $z = 3x + 6y - xy - x^2 - y^2$  в замкнутой области  $D$ , ограниченной заданными линиями  $x = -2; x = 2; y = -1; y = 4$ .

Вариант № 22

1. Найдите область определения функций

а)  $z = \lg(x-2)(y-1) + \frac{y}{x+1}$ ; б)  $z = \ln(x^2 + y^2 - 16) + \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$ .

2. Найдите частные производные первого порядка функции  $z = \frac{5x + y \cdot \operatorname{tg} x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .

3. Найдите частные производные функции  $z = z(x; y)$ , заданной неявно уравнением  $8x^3 - 3y^2 + 5xyz - \sin z + 2x - 3y + 1 = 0$ .

4. Найдите градиент функции  $z = 2x^4 - 3y^3 + x + 2y$  в точке  $M_0(2; 1)$  и производную по направлению вектора  $\overrightarrow{M_0M_1}$ , где  $M_1(5; 3)$ .

5. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xz = 6$  в точке  $M_0(1; 2; -1)$ .

6. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^3 + 3x^2 - 2y^2 + 10y - 3$ .
7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции  $z = 7 - x^2 - xy - y^2 + 3x - 3y$  в замкнутой области  $D$ , ограниченной заданными линиями  $x = 0$ ;  $x = 4$ ;  $y = 1$ ;  $y = -4$ .

*Вариант № 23*

1. Найдите область определения функций

а)  $z = \sqrt{x(y+1)} + \ln(9 - x^2 - y^2)$ ; б)  $z = \frac{\sqrt{3x - 2y}}{x^2 + y^2 + 4}$ .

2. Найдите частные производные первого порядка функции  $z = \operatorname{arctg} \frac{2y + x}{y^2}$ .
3. Найдите частные производные функции  $z = z(x; y)$ , заданной неявно уравнением  $x^2 + y^2 + 2xy + 3xz + 1 = 0$ .
4. Найдите градиент функции  $z = x^4 + y^3 + xy - 3x$  в точке  $M_0(2; 2)$  и производную по направлению вектора  $\overrightarrow{M_0M_1}$ , где  $M_1(4; 2)$ .
5. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 - y^2 - 2z^2 - 2y = 0$  в точке  $M_0(-1; -1; 1)$ .
6. Исследуйте на экстремум функцию  $z = 3x^3 + 18x^2 + 3y^3 + 27x - 27y^2 + 72y + 6$ .
7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции  $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$  в замкнутой области  $D$ , ограниченной заданными линиями  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $y = x + 3$ .

*Вариант № 24*

1. Найдите область определения функций

а)  $z = \ln(3 - x^2 - y^2) + \frac{1}{\sqrt{x}}$ ; б)  $z = \frac{5}{4 - x^2 - y^2}$ .

2. Найдите частные производные первого порядка функции  $z = \operatorname{tg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{5xy}$ .

3. Найдите частные производные функции  $z = z(x; y)$ , заданной неявно уравнением  $e^{2x-3y+5z} + 2xyz - 5y + 7 = 0$ .
4. Найдите градиент функции  $z = 3x^5 + 4y^2 + xy - 2y$  в точке  $M_0(1; 3)$  и производную по направлению вектора  $\overrightarrow{M_0M_1}$ , где  $M_1(-1; 2)$ .
5. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 + y^2 - 3z^2 + xy + 2z = 0$  в точке  $M_0(1; 0; 1)$ .
6. Исследуйте на экстремум функцию  $z = 2x^3 - 6x^2 - 2y^2 + 12$ .
7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции  $z = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 7$  в замкнутой области  $D$ , ограниченной заданными линиями  $x = 6; y = 0; y = x - 3$ .

*Вариант № 25*

1. Найдите область определения функций
  - а)  $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 16} + \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$ ; б)  $z = \ln(2x - y) + \frac{x}{y}$ .
2. Найдите частные производные первого порядка функции  $z = \sqrt[3]{\cos 2(x^2 + y^2)}$ .
3. Найдите частные производные функции  $z = z(x; y)$ , заданной неявно уравнением  $3x^2 - y^2 + z^2 + 3xyz + 1 = 0$ .
4. Найдите градиент функции  $z = 6x - 2y^2 - xy + 7x$  в точке  $M_0(2; -1)$  и производную по направлению вектора  $\overrightarrow{M_0M_1}$ , где  $M_1(0; 5)$ .
5. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $2x^2 - y^2 + z^2 - 6x + 2y + 6 = 0$  в точке  $M_0(1; -1; 1)$ .
6. Исследуйте на экстремум функцию  $z = 3x^3 + 18x^2 + 27x + 9xy - 3y^2 + 24y - 1$ .
7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции  $z = 6xy - 3x^2 - 2y^2 - 6x + 4y + 1$  в замкнутой области  $D$ , ограниченной заданными линиями  $x = 1; y = 0; y = x + 3$ .

Вариант № 26

1. Найдите область определения функций

а)  $z = \sqrt{x-y} + \lg(4-x^2-y^2)$ ; б)  $z = \frac{xy}{\sqrt{x-4y}} + \arccos(x+1)$ .

2. Найдите частные производные первого порядка функции  $z = \arcsin \frac{x^2}{x+y}$ .

3. Показать, что функция  $z = z(x; y)$ , заданная неявно уравнением

$$\sin(x+2y+3z) = x+2y+3z, \text{ удовлетворяет уравнению } \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + 1 = 0.$$

4. Найдите градиент функции  $z = 7x + 3y^3 - 6x^3 - x^2$  в точке  $M_0(0; -1)$  и производную по направлению вектора  $\overrightarrow{M_0M_1}$ , где  $M_1(2; 2)$ .

5. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 + y^2 - z^2 + 6xy - z = 8$  в точке  $M_0(1; 1; 0)$ .

6. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^3 - 6x^2 + 12x + 8y^2 - 12xy + 24y + 3$ .

7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$$z = 2 + (x-y)^2 + y^2 + 2y \text{ в замкнутой области } D, \text{ ограниченной заданными линиями } x=0; y=0; y=-x-3.$$

Вариант № 27

1. Найдите область определения функций

а)  $z = \arccos \frac{x+y}{5}$ ; б)  $z = \sqrt{4-x^2-y^2} + \ln(x^2+y^2-1)$ .

2. Найдите частные производные функции  $z = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \ln(x+y)}$ .

3. Найдите частные производные функции  $z = z(x; y)$ , заданной неявно уравнением  $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz + 3\cos(x-z) = a$ .

4. Найдите градиент функции  $z = x + 9y^3 + x^3 - 10x^2$  в точке  $M_0(1; 2)$  и производную по направлению вектора  $\overrightarrow{M_0M_1}$ , где  $M_1(3; -3)$ .

5. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $z = 2x^2 - 3y^2 + 4x - 2y + 10$  в точке  $M_0(-1; 1; 3)$ .

6. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^3 - 6x^2 + 9x - 4y^2 - 12y - 3$ .
7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции  $z = x^2 + xy^2 + 2xy - 11$  в замкнутой области  $D$ , ограниченной заданными линиями  $x = 0$ ;  $x = 2$ ;  $y = 1$ ;  $y = -2$ .

*Вариант № 28*

1. Найдите область определения функций

а)  $z = \arcsin(x - y)$ ; б)  $z = e^{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + \ln xy$ .

2. Найдите частные производные функции  $z = \frac{\cos(x + y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .
3. Найдите частные производные функции  $z = z(x; y)$ , заданной неявно уравнением  $xy - xz + yz + \sin(xyz) + 1 = 0$ .
4. Найдите градиент функции  $z = 6x^5 + 3y^3 - 3y$  в точке  $M_0(1; 2)$  и производную по направлению вектора  $\overrightarrow{M_0M_1}$ , где  $M_1(4; 4)$ .
5. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $z = x^2 + y^2 - 4xy + 3x - 15$  в точке  $M_0(-1; 3; 4)$ .
6. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^2 - 2x - 4y^3 - 12y^2 - 2$ .
7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции  $z = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 12y - 2$  в замкнутой области  $D$ , ограниченной заданными линиями  $x = -2$ ;  $x = 2$ ;  $y = 0$ ;  $y = 2$ .

*Вариант № 29*

1. Найдите область определения функций

а)  $z = \ln(x + 2) + \sqrt{\frac{x+1}{y}}$ ; б)  $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}} + \ln(16 - x^2 - y^2)$ .

2. Найдите частные производные функции  $z = \sqrt[5]{\sin \frac{x+y}{2y}}$ .

3. Показать, что функция  $z = z(x; y)$ , заданная неявно уравнением

$$2 \cos(3x + 2y + z) = 3x + 2y + z, \text{ удовлетворяет уравнению } \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + 5 = 0.$$

4. Найдите градиент функции  $z = 7x^2 - 6y^2 + xy$  в точке  $M_0(2; -2)$  и производную по направлению вектора  $\overrightarrow{M_0M_1}$ , где  $M_1(5; 5)$ .

5. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $z = x^2 + 2y^2 + 4xy - 5y - 10$  в точке  $M_0(-7; 1; 8)$ .

6. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^3 - 3x^2 - 4y^2 + 20y - 1$ .

7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$z = x^2 + 6xy + 5y^2 - x + 5y - 5$  в замкнутой области  $D$ , ограниченной заданными линиями  $x = -3; y = 0; y = -x$ .

### Вариант № 30

1. Найдите область определения функций

а)  $z = \sqrt{xy} + \sqrt{36 - x^2 - y^2}$ ; б)  $z = \frac{4xy}{x^2 - y^2} + \arcsin(x - y + 1)$ .

2. Найдите частные производные функции  $z = xy + y \operatorname{tg} \frac{x - 2y}{4x}$ .

3. Найдите частные производные функции  $z = z(x; y)$ , заданной неявно уравнением  $\cos xy + \cos xz + \cos yz = a$ .

4. Найдите градиент функции  $z = 5x^2 + 4y^2 + 5x - y$  в точке  $M_0(-2; 2)$  и производную по направлению вектора  $\overrightarrow{M_0M_1}$ , где  $M_1(-4; 3)$ .

5. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $z = 2x^2 - 3y^2 + xy + 3x + 1$  в точке  $M_0(1; -1; 2)$ .

6. Исследуйте на экстремум функцию  $z = 3x^3 + 9x^2 + 3y^3 - 27y^2 + 72y + 1$ .

7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$z = 3x^2 - 2xy + 2y^2 + 5x$  в замкнутой области  $D$ , ограниченной заданными линиями  $x = 1; y = -1; y = x + 2$ .

*Учебное издание*

**Куликова Ирина Валерьевна**

**Скачков Павел Павлович**

# **ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

**Типовой расчет**

Методические рекомендации  
по изучению дисциплины «Математика»  
для студентов всех специальностей  
и направлений подготовки

Редактор *С. В. Пилюгина*

Подписано в печать 16.11.17. Формат 60×84/16

Усл. печ. л. 3,0. Тираж 50 экз. Заказ 251

УрГУПС

620034, Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66