

## Рекомендуемая литература.

1. Алиев А. В., Мищенко О. В. Математическое моделирование в технике. -Ижевск: Ин-т компьютерных иссл., 2012. -456 с.
2. Дьяконов В.П. Mathcad 8—12 для студентов [Электронный ресурс]/ Дьяконов В.П.— Электрон. текстовые данные.— М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2005.— 632 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/20845>.— ЭБС «IPRbooks»

## **Задача 1.**

Решить нелинейное уравнение, выбрав его в соответствии с вариантом:

1. построить график функции, для проведения предварительного анализа;
2. используя известные вычислительные алгоритмы в соответствии с вариантом (методом половинного деления, методом итераций, методом Ньютона и др.).
3. Сравнить полученные результаты вычислений.

### *Теоретическая часть*

К нелинейным уравнениям для разыскиваемой неизвестной  $x$  относятся уравнения, имеющие вид

$$F(x)=0$$

Особенностью рассматриваемого класса задач является возможность существования нескольких независимых решений. Более того, решением уравнений могут быть комплексные числа.

Применение вычислительных методов для решения нелинейных уравнений требует проведения предварительного анализа этих уравнений (определение характера изменения производных от функций, находящихся в левой части уравнений), определение интервалов, внутри которых могут размещаться эти корни. Чем тщательнее будет выполнен предварительный анализ системы уравнений, тем качественней окажется решение, полученное с использованием вычислительной техники.

### Метод простой итерации.

Метод простой итерации может быть применен для решения системы нелинейных уравнений в случае, если число уравнений и число разыскиваемых переменных совпадают. В этом методе исходная система уравнений (2.1) приводится к виду

$$x_i = G_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \quad i=1, \dots, n$$

Примем начальное приближение для разыскиваемых переменных в виде:  $x_i = x_i^{(0)}, (i=1, n)$ .

Тогда первое приближение может быть определено по формулам

$$x_i^{(1)} = G_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}), \quad i=1, \dots, n$$

Все последующие итерации (для итерации с номером  $t$ ) определяются по формулам:

$$x_i^{(t)} = G_i(x_1^{(t-1)}, x_2^{(t-1)}, x_3^{(t-1)}, \dots, x_n^{(t-1)}), \quad i=1, \dots, n.$$

Итерационный процесс, записанный выше, не всегда сходится к решению задачи. Можно доказать теорему о том, что итерационный процесс сходится к решению задачи, если

поиск решения происходит в окрестности, где  $\left| \frac{\partial G_i(x)}{\partial x_i} \right| < 1$ . Для анализа сходимости метода

простой итерации в общем случае вводится определение функции  $\rho(f_1, f_2) = \sqrt{\sum_i (f_{1i} - f_{2i})^2}$ ,

называемой расстоянием между  $f_1$  и  $f_2$ . Будем рассматривать в качестве функций  $f_1$  и  $f_2$  значения функций  $G_i(\mathbf{x}^{(t)})$ ,  $G_i(\mathbf{x}^{(t-1)})$  и значения разыскиваемых переменных  $x^{(t)}$ ,  $x^{(t-1)}$ ,

вычисленные, соответственно, на итерациях с номерами  $t$  и  $(t-1)$ . Можно утверждать, что если при итерационном процессе выполняется условие  $\rho(G_i(\mathbf{x}^{(t)}), G_i(\mathbf{x}^{(t-1)})) \leq q \cdot \rho(\mathbf{x}^{(t)}, \mathbf{x}^{(t-1)})$  для

любых  $i$  и  $t$  и при значениях  $q < 1$  (это условие называется сжимающим отображением), то итерационный процесс сходится к решению задачи. Вышезаписанное показывает, что скорость сходимости итерационного процесса существенно зависит от вида выбранных функций  $G_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ,  $i=1, \dots, n$ . В качестве примера, какое влияние оказывает на

процесс сходимости вычислений функция  $\varphi(x)$ , рассмотрим пример решения методом итерации квадратного уравнения вида  $x^2 + x - 2 = 0$ . В обозначениях уравнения записанное квадратное уравнение можно переписать в вид

$$F(x) = x^2 + x - 2 = 0.$$

Уравнение имеет два корня -  $x_1 = -2$ ;  $x_2 = 1$ . Итерационный процесс при решении уравнения можно построить, выбирая функцию  $G(x)$ , например, по следующим вариантам:

$$G_{(1)}(x) = x^2 + 2x - 2 \text{ (соответствует решению уравнения } x = x^2 + 2x - 2),$$

$$G_{(2)}(x) = \pm\sqrt{2-x} \text{ (соответствует решению уравнения } x = \pm\sqrt{2-x}),$$

$$G_{(3)}(x) = \left(\frac{2-x}{x}\right) \text{ (соответствует решению уравнения } x = \left(\frac{2-x}{x}\right)).$$

Функциям  $G(x)$  соответствуют производные  $G'(x)$ :

$$G'_{(1)}(x) = 2x + 2,$$

$$G'_{(2)}(x) = \mp \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2-x}},$$

$$G'_{(3)}(x) = -\frac{2}{x^2}.$$

Для определенности первый корень будем разыскивать в интервале  $x \in (-100, -1)$ . Подстановка границ поиска корней в значения производных  $G'(x)$  дают следующие результаты -  $G'_{(1)}(-100) = -198$ ,  $G'_{(1)}(-1) = 0$ ;  $G'_{(2)}(-100) \approx -0.0495$ ,  $G'_{(2)}(-1) \approx -0.289$ ;

$G'_{(3)}(-100) \approx -0.0002$ ,  $G'_{(3)}(-1) = -2$ . Расчеты показывают, что условию  $\left| \frac{\partial G(x)}{\partial x} \right| < 1$

удовлетворяет исходное уравнение, переписанное в виде

$$x = -\sqrt{2-x}$$

Теперь, если при проведении итераций значение разыскиваемого неизвестного не выйдет за пределы интервала  $x \in (-100, -1)$ , то итерационный процесс будет сходиться к искомому решению. Выполним несколько итераций уравнения (1.4). За начальное приближение примем  $x^{(0)} = -100$ . Последовательно имеем:

$$x^{(1)} = -\sqrt{2-x^{(0)}} = -\sqrt{2-(-100)} = -\sqrt{102} = -10,0995$$

$$x^{(2)} = -\sqrt{2-x^{(1)}} = -\sqrt{2-(-10,0995)} = -\sqrt{12,0995} = -3,4784$$

$$x^{(3)} = -\sqrt{2-x^{(2)}} = -\sqrt{2-(-3,4784)} = -\sqrt{5,4784} = -2,3406$$

$$x^{(4)} = -\sqrt{2-x^{(3)}} = -\sqrt{2-(-2,3406)} = -\sqrt{4,3406} = -2,0834$$

$$x^{(5)} = -\sqrt{2-x^{(4)}} = -\sqrt{2-(-2,0834)} = -\sqrt{4,0834} = -2,0207$$

$$x^{(6)} = -\sqrt{2-x^{(5)}} = -\sqrt{2-(-2,0207)} = -\sqrt{4,0207} = -2,0052$$

$$x^{(7)} = -\sqrt{2-x^{(6)}} = -\sqrt{2-(-2,0052)} = -\sqrt{4,0052} = -2,0013$$

$$x^{(8)} = -\sqrt{2-x^{(7)}} = -\sqrt{2-(-2,0013)} = -\sqrt{4,0013} = -2,0003$$

Из расчетов следует, что после восьмой итерации решение уравнения (2.4), а, следовательно и уравнения (2.3), достигается с точностью до  $10^{-4}$ . Аналогичным образом можно убедиться, что для определения положительного корня уравнения ( $x=1$ ) уравнение (2.3) следует решать в виде  $x = \sqrt{2-x}$ , а за начальное приближение принять, например  $x^{(0)} = 100$ .

**Метод Ньютона.**

Пусть требуется найти точку пересечения кривой  $F(x)$  с осью  $x$ . Примем в качестве начального приближения значение  $x = x_0$ . Проведем касательную к кривой  $F(x)$  в точке  $x = x_0$ .

Найдем точку пересечения касательной с осью  $x$  ( $x = x_1$ ), и вновь проведем касательную к кривой  $F(x)$  в точке  $x = x_1$ . Продолжая и далее эту процедуру, можно обеспечить определение точки пересечения кривой  $F(x)$  с осью  $x$  (иначе – обеспечить решение уравнения  $F(x) = 0$ ) с любой точностью. Такова графическая интерпретация мощного метода решения нелинейных уравнений (и систем уравнений), называемого методом Ньютона. В случае решения одного нелинейного уравнения с одним неизвестным формула переписывается следующим образом:

$$x^{(t)} = x^{(t-1)} - \frac{F_i(x^{(t-1)})}{F_i'(x^{(t-1)})}$$

В сравнении с методом простой итерации в методе Ньютона на каждом шаге итерации следует вычислять не только значение функций, но и значение их производных.

Достоинством метода Ньютона является его быстрая сходимость к решению, однако, лишь в случае выбора удачного начального приближения для разыскиваемых неизвестных.

В качестве примера рассмотрим реализацию метода Ньютона для решения уравнения  $F(x) = x^2 + x - 2 = 0$ . Для этого уравнения  $F'(x) = 2x + 1$  и формула для проведения итераций запишется в виде

$$x^{(t)} = x^{(t-1)} - \frac{(x^{(t-1)})^2 + x^{(t-1)} - 2}{2(x^{(t-1)} + 1)}.$$

Примем в качестве начального приближения  $x^{(0)} = -100$ . Тогда итерационный процесс будет развиваться следующим образом

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{(x^{(0)})^2 + x^{(0)} - 2}{2x^{(0)} + 1} = -100 - \frac{100^2 - 100 - 2}{-2 \cdot 100 + 1} = -49.7588,$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{(x^{(1)})^2 + x^{(1)} - 2}{2x^{(1)} + 1} = -49.7588 - \frac{49.7588^2 - 49.7588 - 2}{-2 \cdot 49.7588 + 1} = -24.7266$$

$$x^{(3)} = x^{(2)} - \frac{(x^{(2)})^2 + x^{(2)} - 2}{2x^{(2)} + 1} = -24.7266 - \frac{24.7266^2 - 24.7266 - 2}{-2 \cdot 24.7266 + 1} = -12.6822$$

$$x^{(4)} = x^{(3)} - \frac{(x^{(3)})^2 + x^{(3)} - 2}{2x^{(3)} + 1} = -12.6822 - \frac{12.6822^2 - 12.6822 - 2}{-2 \cdot 12.6822 + 1} = -6.6898$$

$$x^{(5)} = x^{(4)} - \frac{(x^{(4)})^2 + x^{(4)} - 2}{2x^{(4)} + 1} = -6.6898 - \frac{6.6898^2 - 6.6898 - 2}{-2 \cdot 6.6898 + 1} = -3.7759$$

$$x^{(6)} = x^{(5)} - \frac{(x^{(5)})^2 + x^{(5)} - 2}{2x^{(5)} + 1} = -3.7759 - \frac{3.7759^2 - 3.7759 - 2}{-2 \cdot 3.7759 + 1} = -2.4816$$

$$x^{(7)} = x^{(6)} - \frac{(x^{(6)})^2 + x^{(6)} - 2}{2x^{(6)} + 1} = -2.4816 - \frac{2.4816^2 - 2.4816 - 2}{-2 \cdot 2.4816 + 1} = -2.0586$$

$$x^{(8)} = x^{(7)} - \frac{(x^{(7)})^2 + x^{(7)} - 2}{2x^{(7)} + 1} = -2.0586 - \frac{2.0586^2 - 2.0586 - 2}{-2 \cdot 2.0586 + 1} = -2.0011$$

$$x^{(9)} = x^{(8)} - \frac{(x^{(8)})^2 + x^{(8)} - 2}{2x^{(8)} + 1} = -2.0011 - \frac{2.0011^2 - 2.0011 - 2}{-2 \cdot 2.0011 + 1} = -2.0000$$

Девяти итераций достаточно для получения решения уравнения с четырьмя значащими цифрами после запятой. Аналогичным образом можно убедиться в возможности применения метода Ньютона для нахождения положительного корня исходного уравнения  $F(x) = x^2 + x - 2 = 0$ .

Метод половинного деления и метод хорд.

Для решения скалярных уравнений может быть применен надежный метод вычисления корней, называемый методом половинного деления (иногда этот метод называется методом

дихотомии). Пусть корень уравнения  $F(x)=0$  размещается в интервале  $x \in (a, b)$  и этот корень единственный в рассматриваемом интервале. В этом случае справедливо неравенство  $F(a) \cdot F(b) < 0$ . Выберем теперь точку, лежащую в интервале  $(a, b)$ . Эту точку можно выбрать, разбив интервал  $(a, b)$  пополам ( $c = \frac{a+b}{2}$ ),. При вычисленном значении  $c$  вычисляем значение  $F(c)$ . Далее переименовываем точку  $c$  на  $a$  или  $b$  так, чтобы выполнялось условие  $F(a) \cdot F(b) < 0$ . Эту процедуру продолжаем до тех пор, пока интервал  $(a, b)$  уменьшится до значения, сравнимого с точностью определения корня ( $|a-b| < \varepsilon$ ).

Рассмотрим применение метода половинного деления для решения уравнения  $F(x) = x^2 + x - 2 = 0$ . Как и в выше рассмотренных примерах ограничимся поиском корня, расположенного в интервале  $x \in (-100, -1)$ . Обозначим  $a = -100$ ,  $b = -1$ . Для выделенного интервала  $(a, b)$  имеем -  $F(a) = -100^2 + 100 - 2 = -9998 < 0$ ,  $F(b) = -1^2 + 1 - 2 = -2 < 0$ . Результаты вычислений корня уравнения  $x = -2$  представлены в таблице:

№	$x$	$F(x)$	$a$	$b$	$F(a)$	$F(b)$
0	-100	10098	-100	-1	10098	-2
1	-50.5000	2498.0	-50.5000	-1	2498	-2
2	-25.7500	635.3	-25.7500	-1	635.3	-2
3	-13.3750	163.5	-13.375	-1	163.5	-2
4	-7.1875	42.5	-7.1875	-1	42.5	-2
5	-4.0938	10.70	-4.0938	-1	10.70	-2
6	-2.5469	1.94	-2.5469	-1	1.94	-2
7	-1.7734	-0.63	-2.5469	-1.7734	1.94	-0.63
8	-2.1602	0.51	-2.1602	-1.7734	0.51	-0.63
9	-1.9668	-0.098	-2.1602	-1.9668	0.51	-0.098
10	-2.0635	0.195	-2.0635	-1.9668	0.195	-0.098

После проведения 10 итераций установлено, что значение корня уравнения размещается в интервале  $x \in (-2.0635, -1.9668)$ . В качестве решения можно принять середину отмеченного интервала -  $x \approx -2.0151$ .

Перечень индивидуальных заданий к задаче 2

№ варианта	Нелинейное уравнение	№ варианта	Нелинейное уравнение
1.	$x^3 + x + e^x - 625.43$	2.	$\sqrt{x+1} - 1/x$
3.	$x^3 + 10x^2 + 33x - e^{-x} + 90.6$	4.	$x - \sin x - 1$
5.	$x - 0.785\sqrt{1-x^2}$	6.	$e^x - 2(x-1)^2$
7.	$3x + 15 \ln(x-3) - 40$	8.	$x^3 - 1.75x + 5 \operatorname{tg} 2x + 0.05$
9.	$x^3 - 11x^2 + 40x - e^x - 27.9$	10.	$x - 0.21 \sin(x+0.5)$
11.	$e^x - 6x - 30$	12.	$x^3 - 25x^2 - 7 \operatorname{tg} x + 4.324$
13.	$x^3 - 10x^2 - 4\sqrt{x} - 107.73$	14.	$x^3 + x + \sqrt{x} + \ln x - 226.24$
15.	$e^x - x^3 + \sqrt{10x} - 195$	16.	$e^x / 40 - 6x - 0.2$
17.	$x^3 - 13x^2 + 56x - \operatorname{tg} x - 83$	18.	$x^2 + 2x + 0.5\sqrt{x} - 43$
19.	$25x + 10x^3 + \sin x - 11$	20.	$5x - 8 \ln x - 8$
21.	$\sqrt{x} + e^x + x^3 + x - 62.8$	22.	$4x^2 + 5x - 20 / \ln(x+2)$
23.	$\ln x - 2x + 7$	24.	$10x^3 + 200x + \sin x - 81$
25.	$x^2 + e^x + x - 307$	26.	$2 \ln x - 0.5x + 1$
27.	$x^3 + x + \sqrt{x} - \sin x - 225$	28.	$x^3 - 8x^2 - 40 \ln x + 6.889$
29.	$x^3 + 10x^2 - e^{-x} + 41.402$	30.	$x^5 - 2x^3 + 24x^2 - 420x + 200$

## Задача 2.

Составить программы для численного интегрирования дифференциального уравнения

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  при известных начальных условиях  $y_0 = y(x_0)$ . Интегрирование выполнить в

цикле от  $x = x_0$  до  $x = x_k$  с шагом интегрирования  $\Delta x = h = 0.1$ .

Решение уравнения выполнить:

1. методом Эйлера

2. используя встроенные функции MathCAD и вычислительный блок Given.

Результаты расчетов вывести в виде таблицы и в виде графиков (в одном поле построения).

Сравнить результаты, полученные при решении задачи разными методами.

*Теоретическая часть:*

Задача Коши.

Найти функцию  $y(x)$ , удовлетворяющую дифференциальному уравнению  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ , если

известно, что  $y(x_0) = y_0$ ,  $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$

**Метод Эйлера.**

Основан на разложении

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i) + \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot y''(x_i) + \dots$$

В методе Эйлера принимается

$$y(x_i + h) \approx y(x_i) + h \cdot y'(x_i) = y(x_i) + h \cdot f(x_i, y_i)$$

Вторую производную можно представить в виде

$$y''(x_i) \approx \frac{\Delta y'}{\Delta x} = \frac{y'(x_i + h) - y'(x_i)}{h}$$

Если использовать это в разложении Тэйлора, то получаем формулу для модифицированного метода Эйлера:

$$y(x_i + h) \approx y(x_i) + \frac{1}{2} \cdot h \cdot (y'(x_i + h) + y'(x_i))$$

**Решение задачи Коши с использованием математического пакета Math Cad**

В Mathcad решить задачу Коши можно с помощью следующих функций:

- **rkfixed(y, x1, x2, npoints, D)** — решение задачи на отрезке методом Рунге—Кутты с постоянным шагом;
- **Rkadapt(y, x1, x2, npoints, D)** — решение задачи на отрезке методом Рунге—Кутты с автоматическим выбором шага;
- **rkadapt(y, x1, x2, acc, npoints, D, kmax, save)** — решения задачи в заданной точке методом Рунге-Кутты с автоматическим выбором шага;
- **Bulstoer(y, x1, x2, npoints, D)** — решение задачи на отрезке методом Булирша-Штера;
- **bulstoer(y, x1, x2, acc, npoints, D, kmax, save)** — решение задачи в заданной точке методом Булирша—Штера;
- **StiffR(y, x1, x2, acc, D, J)** — решение задачи для жестких систем на отрезке с использованием алгоритма Розенброка;
- **stiffR(y, x1, x2, acc, D, J, kmax, save)** — решения задач для жестких систем на отрезке с использованием алгоритма Розенброка;
- **StiffB(y, x1, x2, acc, D, J)** — решение задачи для жестких систем на отрезке с использованием алгоритма Булирша—Штера;
- **stiffB(y, x1, x2, acc, D, J, kmax, save)** — решение задач для жестких систем в заданной точке с использованием алгоритма Булирша—Штера.

Смысл **параметров** для всех функций одинаков и определяется математической постановкой задачи:

$y$  — вектор начальных условий

$x1, x2$  — начальная и конечная точки отрезка интегрирования системы; для функций, вычисляющих решение в заданной точке,  $x1$  — начальная точка,  $x2$  — заданная точка;

**npoints** — число узлов на отрезке  $[x1, x2]$ ; при решении задачи на отрезке результат содержит **npoints+1** строку;

**D** — имя вектор-функции **D(x,y)** правых частей  $D_i(x, y) = f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ ; ( имя **D** — от Derivative — производная, имя вектора, содержащего выражения для производных (derivatives) искомого решения);

**J** — имя матрицы-функции **J(x,y)** размерности  $n \times (n+1)$ , в первом столбце которой хранятся выражения частных производных по  $x$  правых частей системы, а в остальных  $n$  столбцах содержится матрица Якоби правых частей:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f_n(x, y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x, y)}{\partial y_n} \end{bmatrix}$$

**acc** — параметр, контролирующий погрешность решения при автоматическом выборе шага интегрирования (если погрешность решения больше **acc**, то шаг сетки уменьшается; шаг уменьшается до тех пор, пока его значение не станет меньше **save** );

**kmax** — максимальное число узлов сетки, в которых может быть вычислено решение задачи на отрезке, максимальное число строк в результате;

**save** — наименьшее допустимое значение шага неравномерной сетки.

Результат работы функции — матрица, содержащая  $n+1$ ; ее первый столбец содержит координаты узлов сетки, второй столбец — вычисленные приближенные значения решения  $y_1(x)$  в узлах сетки,  $(k+1)$ -й — значения решения  $y_k(x)$  в узлах сетки.

При решении задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка результат вычислений всех приведенных выше функций — матрица, в первом столбце которой содержатся координаты узлов сетки  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , а во втором — значения приближенного решения в соответствующих узлах.

Перечень индивидуальных заданий к задаче 3

Исходные данные для расчета			
№	F(x,y)	Начальное условие	$[x_0, x_k]$
1	$\frac{3y^2 - x^2}{2yx}$	$y(2)=1$	$[2;4]$
2	$\frac{(x^2 + y^2)^2}{2x^2y} - \frac{x}{y}$	$y(1)=1$	$[1;1.9]$
№	F(x,y)	Начальное условие	$[x_0, x_k]$
3	$\frac{x^2 - y^2}{xy}$	$y(1)=1$	$[1;3]$
4	$\frac{y^2}{2yx + 3}$	$y(1)=-1$	$[1;3]$
5	$y(1 - y \cos x)$	$y(0)=1$	$[0;2]$

6	$\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}$	$y(0)=1$	[0;2]
7	$y \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}$	$y(0)=0$	[0;2]
8	$x + \frac{y}{x}$	$y(1)=0$	[1;3]
9	$\frac{1 - xy}{1 - x^2}$	$y(0)=1$	[0;0.9]
10	$\frac{2y}{x(x^2y - 2)}$	$y(1)=1$	[1;3]
11	$1 = \frac{y(2x-1)}{x^2}$	$y(1)=2$	[1;3]
12	$\cos x(\sin x - y)$	$y(0)=-1$	[0;2]
13	$\frac{\cos x - y^2}{y}$	$y(1)=1$	[1;3]
14	$\frac{y(1+xy)}{x}$	$y(0)=1$	[0;2]
15	$\frac{y^2 + 1}{x^2 + 1}$	$y(1)=1$	[1;1.7]
16	$\frac{y-2}{x(1+2x)}$	$y(0)=1$	[0;0.9]
17	$\frac{y-2}{x(1+2x)}$	$y(1)=1$	[1;3]
№	F(x,y)	Начальное условие	[X <sub>0</sub> ;X <sub>K</sub> ]
18	$\frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}$	$y(1)=-1$	[1;3]
19	$\frac{y(xy \ln x - 1)}{x}$	$y(1)=1$	[1;3]
20	$\frac{2y}{6x - y^2}$	$y(2)=2$	[2;4]
21	$1 + \frac{y}{x(x+1)}$	$y(1)=0$	[1;3]
22	$\frac{y+1}{\operatorname{tg} x}$	$\frac{\pi}{2}$ $y(\frac{\pi}{2})=1$	$\frac{\pi}{2}$ ; $\frac{3\pi}{2}$ [ ; ]
23	$x^5 + x^2 + 3x^2y$	$y(0)=1$	[0;1]
24	$4x-2y$	$y(0)=0$	[0;2]
25	$xe^{-x^2} - 2xy$	$y(0)=1$	[0;2]
26	$\frac{y^2 - x^2}{2xy}$	$y(1)=1$	[1;2]
27	$1 + x^2 + \frac{2xy}{1+x^2}$	$y(0)=1$	[0;2]
28	$\cos x - y$	$y(0)=1$	[0;2]
29	$0.5xy$	$y(0)=1$	[0;2]
30	$e^{x+y}$	$y(0)=1$	[0;1.5]

31	$e^{2x} - y$	$y(0)=1$	[0;1.5]
32	$\frac{y+1}{x}$	$y(1)=1$	[1;3]
33	$e^{2x} - ye^x$	$y(0)=0$	[0;2]
34	$\frac{1-y \sin x}{\cos x}$	$y(0)=0$	[0;2]
35	$\frac{y(1-2xy)}{x}$	$y(1)=1$	[1;3]
36	$ytgx-y^2 \cos x$	$y(0)=1$	[0;1.5]
№	F(x,y)	Начальное условие	[X <sub>0</sub> ,X <sub>K</sub> ]
37	$\frac{y(y \ln x - 1)}{x}$	$y(1)=1$	[1;3]
38	$\frac{y^2 + y}{x}$	$y(1)=1$	[1;1.9]
39	$x-y$	$y(0)=0$	[0;2]
40	$\frac{1}{e^{x-y}}$	$y(1)=1$	[1;3]
41	$\frac{2xy-3}{x^2}$	$y(1)=0$	[1;3]
42	$\frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$	$y(1)=1$	[1;3]
43	$\frac{y}{x} - 1$	$y(1)=0$	[1;3]
44	$e^x(1+x)^2 + \frac{2y}{1+x}$	$y(0)=0$	[0;1]
45	$2y-x^2$	$y(0) = \frac{1}{4}$	[0;2]
46	$2x-y$	$y(0)=-1$	[0;2]
47	$-\frac{\sqrt{1+x^2} - x - y}{\sqrt{1+x^2}}$	$y(0)=0$	[0;2]
48	$\frac{y^2 - y}{x}$	$y(1)=2$	[1;1.9]
49	$\frac{x-y}{x}$	$y(1)=0$	[1;3]
50	$\frac{y-1}{x-x^2}$	$y(1)=2$	[1;3]
51	$\frac{x^2 + y^2}{xy}$	$y(1)=1$	[1;3]