ОРЛОВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени И.С. Тургенева

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЛОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ И.С. ТУРГЕНЕВА»
ИНСТИТУТ ПРИБОРОСТРОЕНИЯ, АВТОМАТИЗАЦИИ
И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра приборостроения, метрологии и сертификации

К.В. Подмастерьев

МЕТРОЛОГИЯ.
ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Методические указания
по выполнению курсовых работ

Дисциплина – «Метрология, стандартизация и технические
измерения»
Направления: 12.03.01 «Приборостроение»
12.03.04 «Биотехнические системы и технологии»

Орёл
ОГУ имени И.С. Тургенева
2020

Автор: д-р техн. наук,
проф. каф. ПМиС К.В. Подмастерьев

Рецензент: канд. техн. наук, доц.,
и.о. зав. каф. ПМиС В.В. Марков

Методические указания содержат задания по обработке экспериментальных данных при выполнении однократных и многократных измерений, нескольких серий измерений, при функциональных преобразованиях результатов измерений и исследовании физических зависимостей. В настоящих методических указаниях представлены пять видов индивидуальных заданий (по 100 вариантов каждое) на курсовые работы.

Предназначены студентам очной формы обучения, обучающимся по направлениям 12.03.01 «Приборостроение» и 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии», изучающим дисциплину «Метрология, стандартизация и технические измерения».

Могут быть полезны для студентов других технических специальностей, изучающих метрологические дисциплины, а также для слушателей программ дополнительного профессионального образования и профессиональной переподготовки.

Редактор В.Ю. Крутикова
Технический редактор Н.Н. Лысых

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»

Подписано к печати 02.10.2020 г. Формат 60×90 1/16.
Усл. печ. л. 2,8. Тираж 10 экз.
Заказ №___

Отпечатано с готового оригинал-макета
на полиграфической базе ОГУ имени И.С. Тургенева
302026, г. Орел, ул. Комсомольская, 95.

СОДЕРЖАНИЕ

1 Общие указания 4

  1.1 Содержание работы 4

  1.2 Оформление работы 5

2 Задания и методические указания 6

  2.1 Задание 1. Однократное измерение 6

  2.2 Задание 2. Многократное измерение 18

  2.3 Задание 3. Обработка результатов нескольких серий измерений 24

  2.4 Задание 4. Функциональные преобразования результатов измерений (косвенные измерения) 27

  2.5 Задание 5. Обработка экспериментальных данных при изучении зависимостей (совместные измерения) 29

Литература 35

Приложение А. Форма задания на курсовую (расчётно-графическую) работу 38

Приложение Б. Форма титульного листа 39

Приложение В. Интегральная функция нормированного нормального распределения *Ф(t)* 40

Приложение Г. ν-критерий 41

Приложение Д. Составной критерий 42

Приложение Е. Распределение Стьюдента 43

Приложение Ж. Распределение Фишера 44

Приложение З. Критерий серий 45

Приложение К. Критерий инверсий 46

1 ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1 Содержание работы

Согласно федеральным государственным образовательным стандартам подготовки бакалавров, магистров и аспирантов по многим направлениям и специальностям предусмотрено формирование компетенций, связанных с организацией метрологического обеспечения производства, с получением объективной количественной информации о различных объектах путем проведения измерений. В этой связи учебные планы включают различные метрологические дисциплины. Так, например, по направлениям подготовки 12.03.01 - Приборостроение и 12.03.04 Биотехнические системы и технологии предусматривается изучение дисциплины «Метрология, стандартизация и технические измерений».

При этом для формирования практических навыков в соответствие с формируемыми компетенциями учебные планы для различных направлений предполагают выполнение курсовых работ. Наряду со специфическими задачами изучения метрологической дисциплины для каждого направления подготовки есть общие цели и задачи для всех направлений.

Одной из основных задач изучения метрологических дисциплин является освоение методов получения достоверной измерительной информации и правильного ее использования, а также приобретение практических навыков обработки данных при выполнении различных видов измерений и экспериментов.

Решению указанной задачи и служат задания, изложенные в данных методических указаниях. При выполнении работы студент углубляет теоретические знания и получает практические навыки в области обработки экспериментальных данных при выполнении однократных и многократных измерений, нескольких серий измерений, при функциональных преобразованиях результатов измерений и исследовании физических зависимостей.

В настоящих методических указаниях представлены индивидуальные задания пяти видов (по 100 вариантов):

– задание 1. Однократное измерение;

– задание 2. Многократное измерение;

– задание 3. Обработка результатов нескольких серий измерений;

– задание 4. Функциональные преобразования результатов измерений;

– задание 5. Обработка экспериментальных данных при изучении зависимостей.

В зависимости от изучаемой дисциплины и планируемого объема работа может включать лишь некоторые из представленных пяти заданий.

1.2 Оформление работы

Курсовые работы оформляются на листах стандартного формата А4 (297x210 мм). Форма титульного листа представлена в приложении А.

Работа должна включать по каждому заданию: условие задачи; экспериментальные данные; априорную информацию; выбранный алгоритм обработки с соответствующими пояснениями и промежуточные результаты обработки экспериментальных данных; полученный результат измерений; необходимые графики и диаграммы, поясняющие решение задач.

В конце работы необходимо представить список использованных источников.

2 ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

2.1 Задание 1. Однократное измерение

2.1.1 Условие задания

При однократном измерении физической величины получено показание средства измерения Х = 10. Определить, чему равно значение измеряемой величины, если экспериментатор обладает априорной информацией о средстве измерений и условиях выполнения измерений согласно данным таблицы 1.

2.1.2 Указания по выполнению

1. Исходные данные студент выбирает из таблицы 1 по предпоследней и последней цифрам шифра; например шифру 96836 соответствует априорная информация, определяемая на пересечении строки 3 и столбца 6.

2. Априорная информация в таблице 1 представлена в двух вариантах. В первом варианте даются сведения о классе точности средства измерений: пределы измерений, класс точности, значение аддитивной ($\theta_а$) или мультипликативной ($\theta_м$) поправки, значение неисключенной систематической погрешности ($\Delta_{нсп}$) и цена деления (с). Например, данные: -50...50; 1,5; $\theta_а = 0,5$; $\Delta_{нсп} = \pm 0,2$; с = 1 – означают, что средство измерения имеет диапазон измерений от -50 до 50, класс точности 1,5, значение аддитивной поправки равняется 0,5, при значении не исключенной систематической погрешности ±0,2 и цене деления 1.

Во втором варианте в качестве априорной информации даются сведения о видах и характеристиках распределения вероятности результата измерения: вид закона распределения, значение оценки среднего квадратического отклонения (S_x), доверительная вероятность (*P*), значение аддитивной ($\theta_а$) или мультипликативной ($\theta_м$) поправки, значение неисключенной систематической погрешности ($\Delta_{нсп}$) и цена деления (с). Например, данные: норм.; $S_x = 0,5$; Р = 0,95; $\theta_м = 1,1$; $\Delta_{нсп} = \pm 0,2$; с = 1 означают, что закон распределения вероятности результата измерения нормальный, со значением оценки среднеквадратического отклонения 0,5. При этом имеет место мультипликативная поправка (поправочный множитель) 1,1, а расширенную неопределенность следует рассчитывать с доверительной вероятностью 0,95, при этом неисключенная систематическая погрешность составляет ±0,2, а цена деления равна 1.

Таблица 1 – Исходные данные

Предпоследняя цифра шифра	Последняя цифра шифра									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0…100 1,0 $Q_а = 1$ $\Delta_{нсп}$=±0,2 c=1	-50…+50 1,5 $Q_а = -1,2$ $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=2	0…50 0,02/0,01 $Q_м = 1.1$ $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=0,5	0…50 4,0 $Q_м = 0.9$ $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=0,5	-30…+30 1,5 $Q_м = 1.2$ $\Delta_{нсп}$=±0,08 c=0,5	0…50 0,2/0,1 $Q_а = -0.5$ $\Delta_{нсп}$=±0,15 c=1	0…100 4,0 $Q_а = 0$ $\Delta_{нсп}$=±0,4 c=2	-50…+50 2,5 $Q_а = 0$ $\Delta_{нсп}$=±0,2 c=1	0…30 4,0 $Q_а = 1$ $\Delta_{нсп}$=±0,3 c=1	-10…+10 1,0 $Q_м = 1,1$ $\Delta_{нсп}$=±0,05 c=0,5
2	норм. $S_х = 0,1$ P = 0,9 $Q_а = 1$ $\Delta_{нсп}$=±0,2 c=1	норм. $S_х = 0,5$ P = 0,95 $Q_а = 1,3$ $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=2	норм. $S_х = 1$ P = 0,9 $Q_а = -1$ $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=2	норм. $S_х = 0,6$ P = 0,98 $Q_а = 0,5$ $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=0,5	норм. $S_х = 0,3$ P = 0,9 $Q_а = 0$ $\Delta_{нсп}$=±0,08 c=0,5	норм. $S_х = 0,1$ P = 0,95 $Q_а = -1,0$ $\Delta_{нсп}$=±0,4 c=2	норм. $S_х = 0,3$ P = 0,99 $Q_а = 1,1$ $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=1	норм. $S_х = 0,5$ P = 0,8 $Q_а = 0$ $\Delta_{нсп}$=±0,2 c=1	норм. $S_х = 0,6$ $Q_а = 1,0$ $\Delta_{нсп}$=±0,05 c=0,5	норм. $S_х = 0,2$ P = 0,8 $Q_а = -0,8$ $\Delta_{нсп}$=±0,3 c=1
3	-30…+50 2,5 $Q_а = 1$ $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=1	-50…+30 2,5 $Q_а = 1$ $\Delta_{нсп}$=±0,1c =2	0…150 1,0 $Q_м = 1,1$ $\Delta_{нсп}$=±0,15 c=1,5	-20…+20 1,5 $Q_м = 0,9$ $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=0,5	0…50 2,5 $Q_а = 0$ $\Delta_{нсп}$=±0,15 c=0,5	-10…+20 2,0 $Q_а = 0,1$ $\Delta_{нсп}$=±0,15 c=0,5	0…30 4,0 $Q_м = 1,2$ $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=0,5	0…50 0,03/0,01 $Q_а = 0$ $\Delta_{нсп}$=±0,2 c=1	0…10 0,02/0,01 $Q_а = 1,0$ $\Delta_{нсп}$=±0,05 c=0,2	0…30 1,0 $Q_а = 1,1$ $\Delta_{нсп}$=±0,2 c=0,5
4	норм. $S_х = 0,2$ P = 0,99 $Q_а = 0$ $\Delta_{нсп}$=±0,1c =0,5	норм. $S_х = 0,3$ P = 0,8 $Q_м = 1,0$ $\Delta_{нсп}$=±0,2 c=1	норм. $S_х = 0,4$ P = 0,95 $Q_а = 0,8$ $\Delta_{нсп}$=±0,15 c=1	равн. $S_х = 0,4$ P = 0,95 $Q_а = 1,0$ $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=0,5	равн. $S_х = 0,8$ P = 0,95 $Q_м = 0,9$ $\Delta_{нсп}$=±0,5 c=2	равн. $S_х = 0,6$ P = 0,95 $Q_а = 1,0$ $\Delta_{нсп}$=±0,2 c=2	норм. $S_х = 0,6$ P = 0,8 $Q_а = 0,5$ $\Delta_{нсп}$=±0,2 c=2	норм. $S_х = 0,2$ P = 0,9 $Q_а = -0,5$ $\Delta_{нсп}$=±0,2 c=2	равн. $S_х = 0,5$ P = 0,9 $Q_а = 0,6$ $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=1	равн. $S_х = 0,3$ P = 0,9 $Q_м = 1,2$ $\Delta_{нсп}$=±0,15 c=1
5	0…100 4,0 $Q_а = 1,0$ $\Delta_{нсп}$=±0,5 c=2,5	-50…+50 1,5 $Q_м = 0,9$ $\Delta_{нсп}$=±0,15 c=1	0…30 4,0 $Q_а = -1,0$ $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=1	-20…+20 1,0 $Q_а = 0$ $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=0,5	-30…+30 0,04/0,02 $Q_а = 1,0$ $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=1	0…50 4,0 $Q_а = 0,5$ $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=2	-100…100 0,1 $Q_а = 0,1$ $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=2	1…100 0,2 $Q_а = 0$ $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=2	0…30 0,5 $Q_а = 0,9$ $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=1	0…50 0,25 $Q_а = 0,1$ $\Delta_{нсп}$=±0,15 c=1

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
6	0…100 4,0 $Q_а$ = -0,5 $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=2	0…50 0,4 $Q_а$ = -0,2 $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=1	-10…+10 0,5 $Q_а$ = -0,5 $\Delta_{нсп}$=±0,05 c=0,5	-30…+50 0,25 $Q_м$ = 0,9 $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=1	-100…100 0,1 $Q_а$ = 0,5 $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=2	0…10 1,0 $Q_а$ = 0,1 $\Delta_{нсп}$=±0,05 c=0,5	0…50 0,1/0,2 $Q_м$ = 1,1 $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=1	0…100 0,2/0,1 $Q_м$ = 1,1 $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=2	0…50 6,0 $Q_а$ = 0,5 $\Delta_{нсп}$=±0,2 c=2	-20…+20 0,3/0,2 $Q_а$ = 0 $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=1
7	норм. S_x = 0,5 P = 0,9 $Q_а$ = 0,3 $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=2	норм. S_x = 0,2 P = 0,95 $Q_м$ = 1,1 $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=2	норм. S_x = 0,4 P = 0,9 $Q_м$ = 1,1 $\Delta_{нсп}$=±0,2 c=2	норм. S_x = 0,6 P = 0,8 $Q_а$ = -1,0 $\Delta_{нсп}$=±0,3 c=2	равн. S_x = 0,1 P = 0,95 $Q_а$ = 0,3 $\Delta_{нсп}$=±0,05 c=2	равн. S_x = 0,2 P = 0,95 $Q_а$ = -0,1 $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=1	равн. S_x = 0,4 P = 0,95 $Q_м$ = 0,8 $\Delta_{нсп}$=±0,4 c=2,5	равн. S_x = 0,3 P = 0,8 $Q_а$ = -0,5 $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=1	норм. S_x = 0,1 P = 0,9 $Q_м$ = 0,95 $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=1	норм. S_x = 0,4 P = 0,95 $Q_а$ = -0,1 $\Delta_{нсп}$=±0,2 c=2
8	0…15 0,02/0,01 $Q_а$ = 1,1 $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=0,5	0…20 0,1 $Q_м$= 1,1 $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=0,5	-20…+30 0,25 $Q_а$ = -0,1 $\Delta_{нсп}$=±0,2 c=1	-30…+20 0,25 $Q_а$ = -0,1 $\Delta_{нсп}$=±0,4 c= 1	0…80 0,05 $Q_а$ = -0,05 $\Delta_{нсп}$=±0,05 c=1	0…100 0,1 $Q_м$= 0,9 $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=1	0…50 6,0 $Q_м$= 1,2 $\Delta_{нсп}$=±0,5 c=1	-10…20 4,0 $Q_м$= 0,9 $\Delta_{нсп}$=±0,2 c=1	-20…+20 1,0 $Q_м$= 1,0 $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=0,5	-25…+25 1,5 $Q_а$ = -0,5 $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=1
9	0…50 0,02/0,01 $Q_м$ = 1,1 $\Delta_{нсп}$=±0,2 c=1	0…10 0,1 $Q_а$ = 0,1 $\Delta_{нсп}$=±0,05 c=0,2	-10…20 0,25 $Q_м$ = 0,9 $\Delta_{нсп}$=±0,05 c=0,5	-50…+50 1,5 $Q_а$ = 0,1 $\Delta_{нсп}$=±0,2 c=1	0…50 1,6 $Q_м$ = 0,01 $\Delta_{нсп}$=±0,2 c=1	0…20 1,5 $Q_м$ = 1 $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=0,5	0…50 2,0 $Q_а$ = 1 $\Delta_{нсп}$=±0,2 c=1	-10…+10 0,01/0,02 $Q_м$ = 1,1 $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=0,5	0…15 0,5 $Q_а$ = 0,1 $\Delta_{нсп}$=±0,05 c=0,5	0…10 0,1 $Q_а$ = 0,2 $\Delta_{нсп}$=±0,05 c=0,2
0	норм. S_x = 0,5 P = 0,9 $Q_а$ = 0,1 $\Delta_{нсп}$=±0,2 c=2	норм. S_x = 0,9 P = 0,9 $Q_а$ = 0,9 $\Delta_{нсп}$=±0,2 c=2	норм. S_x = 0,5 P = 0,8 $Q_м$ = 1,1 $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=1	норм. S_x = 0,9 P = 0,8 $Q_а$ = 0 $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=2	равн. S_x = 0,5 P = 0,95 $Q_а$ = 1,0 $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=0,5	равн. S_x = 0,8 P = 0,95 $Q_а$ = 0,8 $\Delta_{нсп}$=±0,5 c=2	норм. S_x = 0,85 P = 0,95 $Q_а$ = 0,1 $\Delta_{нсп}$=±0,4 c=2	норм. S_x = 0,4 P = 0,99 $Q_а$ = 0 $\Delta_{нсп}$=±0,4с =1	норм. S_x = 0,1 P = 0,95 $Q_м$ = 1,1 $\Delta_{нсп}$=±0,1 c=0,5	норм. S_x = 0,2 P = 0,9 $Q_а$ = 0,2 $\Delta_{нсп}$=±0,2 c=1

2.1.3 Порядок расчета

Обработка экспериментальных данных проводится по следующему алгоритму:

– составление модельного уравнения;

– оценивание входных величин и стандартных неопределенностей входных величин;

– оценка числового значения измеряемой величины (условного значения);

– вычисление коэффициентов чувствит ельности и вкладов неопределенности входных величин в неопределенность измеряемой величины;

– вычисление суммарной стандартной неопределенности;

– составление бюджет неопределенности;

– определение эффективного числа степеней свободы и расширенной неопределенности;

– запись результата измерения с учетом неопределенности.

2.1.4 Составление модельного уравнения

Модель измерений **-** математическая связь между всеми величинами, о которых известно, что они причастны к измерению:

$$\boldsymbol{Y = f\,(X_1\,X_2......X_N)}, \qquad (1)$$

где Y –выходная величина (измеряемая величина);

$X_1\,X_2......X_N$ - входные величины .

Входные величины – это все величины, от которых зависит выходная величина ***У***, они могут быть отсчетами при измерениях могут зависеть от других величин, включая поправки и поправочные коэффициенты на систематические эффекты.

В данном случае модель измерения включает:

– отсчет $\boldsymbol{X}$;

– основную погрешность измерения $\boldsymbol{\Delta_х}$, определяемую, в зависимости от априорной информации либо классом точности, либо информацией о законе распределения результата измерений и значения среднего квадратического отклонения $\boldsymbol{S}$**;**

– поправка на систематическую погрешность, θ_a или $\theta_м$;

– неисключенную систематическую погрешность $\boldsymbol{\Delta_{нсп}}$**;**

– погрешность от дискретности отсчета $\boldsymbol{\Delta_д}$**.**

С учетом указанных входных величин модельное уравнение (уравнение измерений) имеет вид:

$$Y = X + \boldsymbol{\Delta_х} + \theta_a + \boldsymbol{\Delta_{нсп}} + \boldsymbol{\Delta_д}$$

или

$$Y = (X + \boldsymbol{\Delta_х} + \boldsymbol{\Delta_{нсп}} + \boldsymbol{\Delta_д})\ \theta_м.$$

2.1.5 Оценивание входных величин и стандартных неопределенностей входных величин

Входные величины X_1 X_2......X_N в зависимости от способа получения и значений и связанных с ними неопределенностей разделяются на две группы.

1. Первая группа – величины, значения и неопределенности которых определяют непосредственно в текущем измерении. Эти значения и неопределенности можно получить, например, в результате однократного наблюдения, повторных наблюдений или по основанным на опыте суждениям. Они могут включать определения поправок к показаниям приборов и поправок на влияющие величины, такие как окружающая температура, атмосферное давление и влажность. Это наилучшие значения, например, среднее значение при многократных *наблюдениях*, середина диапазона возможных значений отклонений и т.п.;

2. Вторая группа - величины, значения и неопределенности которых получены из сторонних источников. К ним относятся величины, связанные с аттестованными эталонами, стандартными образцами веществ и материалов, а также величины, значения которых указаны в справочниках, в нормативных документах.

Предполагается, что входные значения являются ***лучшими оценками входных величин*** (откорректированы путем внесения поправок на учет влияний и эффектов, значимых для данной модели). В другом случае необходимые поправки вводятся в модель в качестве отдельных входных величин. Если входная величина определяется путем многократных измерений, то в качестве значения величины принимают ***среднее значение***. Если величина представляется диапазоном возможных значений, ограниченным предельным значениями, то в качестве лучшей оценки принимают ***средину диапазона***.

Каждую входную оценку $\mathbf{x_i}$**,** и связанную с ней стандартную неопределенность $\mathbf{u(x_i)}$ получают ***из вероятностного распределения*** значений входной величины $\mathbf{X_i}$ Это вероятностное распределение можно интерпретировать как частотную вероятность, основанную ***на серии наблюдений*** $X_{iк}$ величины X_i, или как ***априорное распределение*** (заранее известное) .

Существует два подхода к оценке неопределенности:

- оценки составляющих стандартной неопределенности по типу А основаны на частотном представлении вероятности;

- оценки составляющих стандартной неопределенности по типу В основаны на априорных распределениях.

В обоих случаях распределения отражают некоторое модельное представление знаний о случайной величине

Оценивание неопределенности по типу А

Применяется, когда для одной из входных величин при одинаковых условиях измерения проведены ***n*** независимых наблюдений.

1. Если метод измерения обладает достаточным разрешением, то полученные значения показывают наблюдаемый разброс. Тогда стандартная неопределенность типа А определяется, оценкой среднеквадратического отклонения среднего арифметического:

$$u_A(x_i)=\sqrt{\frac{\sum_{q=1}^{n_i}(x_{iq}-\overline{x}_i)^2}{n_i(n_i-1)}}\ .$$

Если количество наблюдений ***n*** мало, а метод измерений статистически хорошо исследован ранее проводимыми измерениями и известна оценка среднеквадратического отклонения результатов измерений S_i, то

$$u_A(x_i)=\frac{S_i}{\sqrt{n}}$$

Оценивание неопределенности по типу В

Применяется, когда неопределенность, связанная оценкой x_i *входной величины* X_i ***необходимо оценить*** *по методу, который не за*ключается в статистическом анализе ряда наблюдений.

Стандартная неопределенность измерения $u(x_i)$ получается при этом *с* ***помощью метрологически обоснованной оценки изменчивости входной величины*** X_i, *учитывая всю имеющуюся информа*цию:

- значения из других, ранее проведенных измерений;
- значения, полученные в результате опыта или общих знаний о поведении и свойствах применяемых материалах или приборов;
- данные производителя;
- значения, содержащиеся в свидетельствах о калибровках или других удостоверениях;
- неопределенности измерения, связанные со справочными значениями из справочной литературы.

Процесс оценки неопределенности по типа В – творческий и неоднозначный

1. Если известно только одиночное значение для величины X_i, *например, одно измерен*ное значение, полученное из ранее проведенного измерения, справочное значение из литературы или поправка, то такое значение используется в качестве оценки x_i.

- *Если при этом* также дается стандартная неопределенность измерения $u(x_i)$, *связанная со значением* x_i, то необходимо в ***качестве неопределенности использовать это значение*** $u(x_i)$ **.**

$$u_B(x_i)=u(x_i)$$

Если известна расширенная неопределенность $U(x_i)$ и коэффициент охвата k, то стандартную неопределенность определяют:

$$u_B(x_k)=\frac{U(x_i)}{k}$$

Если коэффициент охвата не указан, то принимают:

***k* = 1.73** - если можно предположить *равномерный* закон распределения (например, при округлении результата)

k* = 2,0** если можно предположить нормальное распределение и оценка ***U(x $U(x_i)$ соответствует вероятности охвата 0,95 (например при аттестации рабочих эталонов, для которых установлена доверительная вероятность 0,95)

***k* = 2.6** если можно предположить нормальное распределение и оценка $U(x_i)$ соответствует вероятности охвата 0,99 (например при аттестации первичных и вторичных эталонов для доверительной вероятности 0,99);

***k* = 3** если можно предположить нормальное распределение и оценка $U(x_i)$ пределом допускаемых изменений параметра, установленным в нормативной документации (например, предел допускаемой погрешности измерений);

***k* = 2** во всех остальных случаях, когда нет информации о виде распределения.

2. ***Если для величины** X_i* из теоретических или экспериментальных основ ***может предполагаться распределение вероятностей***, то математическое ожидание и квадратный корень из дисперсии этого распределения используются как, соответственно, оценка x_i и связанная с ним стандартная неопределенность измерения $u(x_i)$.

$$u_B(x_i)=u(x_i)$$

3. Если могут быть оценены для значения величины** X_i **только верхняя и нижняя граница а+ и а- (например, данные производителя об измерительном приборе, область изменчивости температуры, погрешность округления или отбрасывания вследствие автоматической обработки данных), то

- *При отсутствии другой информации* принимают равномерное или прямоугольное распределение вероятностей входной величины X_i ***с постоянной плотностью вероятности.*** Для *этого* случая

$$x_i = (a_+ + a_-)/2. \qquad u^2(x_i) = (a_+ - a_-)^2/12\ .$$

- Если выполняется условие $a_- = \mathbf{a_+}$, то

$$u^2(x_i) = a^2/3.$$

- Если можно ожидать, что значения, вблизи границ интервала менее вероятны, чем в центре, то прямоугольное распределение заменяют симметричным ***трапецеидальным распределением*** с шириной нижнего основания $\mathbf{a_+ - a = 2a}$ и шириной верхнего основания **2ар**, где $\mathbf{0 < p < 1}$. Тогда:

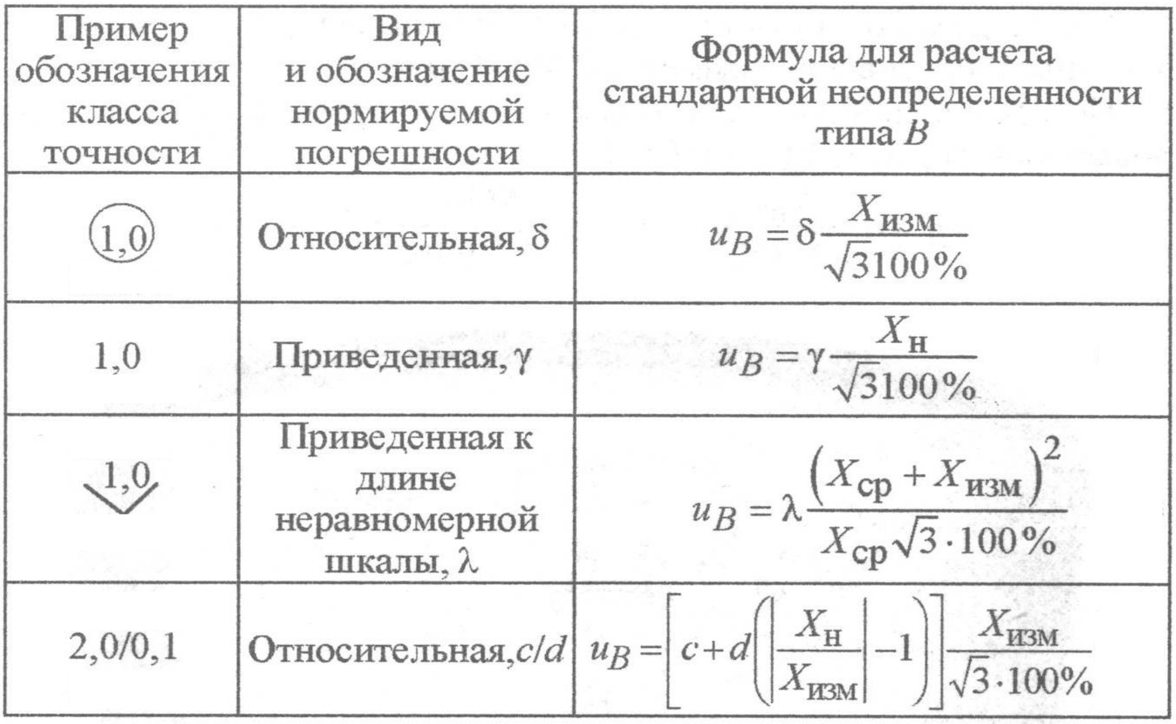
$$u^2\ (x_i) = a^2\ (1 + \beta^2)/6,$$

При р →1 это распределение стремится к прямоугольному, а при р → 0 — к ***треугольному***

$$u^2\ (x_i) = a^2/6.$$

- Если имеется информация о классе точности, то можно воспользоваться зависимостями, представленными в таблице 2

Таблица 2



Пример обозначения класса точности	Вид и обозначение нормируемой погрешности	Формула для расчета стандартной неопределенности типа *B*
$\textcircled{1,0}$	Относительная, δ	$u_B = \delta \frac{X_{\text{изм}}}{\sqrt{3}100\%}$
1,0	Приведенная, γ	$u_B = \gamma \frac{X_{\text{н}}}{\sqrt{3}100\%}$
$\underset{\vee}{1,0}$	Приведенная к длине неравномерной шкалы, λ	$u_B = \lambda \frac{\left(X_{\text{ср}} + X_{\text{изм}}\right)^2}{X_{\text{ср}}\sqrt{3}\cdot 100\%}$
2,0/0,1	Относительная, *c*/*d*	$u_B = \left[c + d\left(\left\lvert\frac{X_{\text{н}}}{X_{\text{изм}}}\right\rvert - 1\right)\right]\frac{X_{\text{изм}}}{\sqrt{3}\cdot 100\%}$

2.1.6 Оценивание суммарной стандартной неопределенности результата измерения

Коэффициенты чувствительности

Неопределенность каждой входной величины $u(x_i)$ оказывает определенный вклад в неопределенность результата измерения $u_i\,(y)$. Этот вклад определяется в зависимости от *уравнения измерения* посредством умножения стандартной неопределенности входной величины на коэффициент чувствительности c_i :

$$u_i\,(y). = u(x_i)\bullet c_i\ , \qquad c_i \equiv \partial f/\partial x_i; \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} = \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{x_1,\, x_2, \ldots, x_N}.$$

Суммарная стандартная неопределенность для некоррелированных входных величин

$$u_c^2\,(y) = \sum_{i=1}^{N}[c_i\, u\,(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^{N} u_i^2\,(y),$$

- Если модель измерения имеет вид степенной зависимости, то

$$Y = cX_1^{p_1}\, X_2^{p_2}\,, \ldots, X_N^{p_N} \qquad [u_c(y)\,/\,y]^2 = \sum_{i-1}[p_i\, u(x_i)\,/\,x_i]^2$$

- Если модель измерения является суммой или разностью входных величин, то

$$Y = \Sigma p_i X_i \qquad u_c^2(y) = \Sigma p_i^2 \bullet u^2(x_i).$$

2.1.7. Построение бюджета неопределенности

Бюджет неопределенности – это таблица, в которой сведены все данные по учитываемым входным величинам, их оценкам, оценкам их стандартных неопределенностей, вкладов в суммарную неопределенность, коэффициентам чувствительности, расширенной неопределенности. Возможный вид бюджета представлен в таблице 3

Таблица 3

Входная величина	Оценка входной величины	Стандартная неопределенность	Вид неопределенности, распределение	Число степеней свободы	Коэффициент чувствительности	Вклад в суммарную стандартную неопределенность
1	2	3	4	5	6	7
X						
Δ_x						
θ_a						
$\Delta_{нсп}$						
$\Delta_д$						

Выходная величина - результат измерения, **Y**	Оценка выходной величины, ***y***	Стандартная суммарная неопределенность, ***u(y)***	Эффективное число степеней свободы, ν_{eff}	Уровень доверия, ***P***	Коэффициент охвата, ***k***	Расширенная неопределенность, ***U*(y)**

2.1.8. Оценивание расширенной неопределенности результата измерения

Расширенная неопределенность U*(*y*) -** произведение суммарной стандартной неопределённости ***u(y) и коэффициента охвата ***k.***

$$U(y) = ku(y).$$

Тогда ***результат измерений*** представляется выражением:

$$Y = y \pm U(y), \text{ или } y - U(y) \leq Y \leq y + U(y)$$

2.1.9. Определение коэффициента охвата

Значение коэффициента охвата **k** *выбирают на основе уровня доверия* ***P****, требуемого для интервала. Обычно* ***k*** *принимает значения от 2 до 3, однако в особых случаях значение* ***k*** *может* находиться вне этих границ.

1. Если распределение вероятностей с оценками его параметров y и $u_c(y)$ близко к нормальному, *все неопределенности оценены по типу А, а число эффективных степеней* свободы при оценивании ***$u_c(y)$*** достаточно велико, то на практике принимают **k = 2** соответствует уровню доверия **95 %**, или **k = 3** — интервалу с уровнем доверия, близким **к 99 %.**

Также можно подходить независимо от закона распределения составляющих и типа их определения (А или В), если ни одна из них не является доминирующей, и их несколько

Более подробные данные для нормального закона распределения в табл. 4.

Таблица 4

Уровень доверия p, %	Коэффициент охвата k_p	Уровень доверия p, %	Коэффициент охвата k_p
68,27	1	95,45	2
90	1,645	99	2,576
95	1,960	99,73	3

2. ***При многократных измерениях с небольшим n*** коэффициент охвата ***k*** принимают равным квантилю распределения Стьюдента при вероятности охвата ***P*** и *эффективном числе степеней свободы* ν_{eff}

$$k = t_P(\nu_{eff}),$$

$$\nu_{eff} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \text{ -}$$

Здесь ν_i число степенней свободы при оценке ***i***-входной величины.

Значения коэффициента охвата для различных ν_{eff} представлены в таблице5

Таблица 5

ν_{eff}	1	2	3	4	5	6	7	8	10	20	50	∞
k	13,97	4,53	3,31	2,87	2,65	2,52	2,43	2,37	2,28	2,13	2,05	2,00

- При оценке неопределенности входной величины по типу А при n ***повторных*** измерениях число степеней свободы ν_i принимается равным ***n*-1.**

- При оценке неопределенности входной величины по типу В число степеней свободы ν_i принимается равным ∞.

- Если по типу А оценивается неопределенность только одной входной величины, то

$$\nu_{eff} = (m-1) \cdot u^4(y)/u_A^4(y)$$

- Если есть информация о нормальном законе распределения Y или нет никакой информации, то рекомендуется принять $k = 2$ (при этом $P = 0.95$).

3. ***В случае, когда все неопределенности определены по типу В при равномерном законе***, тогда значение коэффициента охвата определяется из таблицы 6.

Таблица 6

u$_2$(y)/u$_1$(y)	**1 … 0,8**	**0,7**	**0,6**	**0,5**	**0,4**	**0,3**	**0,2**	**0,1**
k	1,94	1,93	1,92	1,90	1,87	1,82	1,75	1,68

Здесь $u_1(y)$ и $u_2(y)$ два доминирующих равномерно распределенных вклада в неопределенность по типу В, причем $u_2(y) \leq u_1(y)$

4. ***В случае, когда есть ОДНА доминирующая неопределенность по типу В, распределенная по равномерному закону распределенная,*** значение коэффициента охвата определяется : k = р·1,73. Таким образом, для вероятности охвата р = 95%, соответствующий коэффициент охвата составляет $k = 1{,}65$.

5. Если есть ***ДВЕ доминирующие неопределенности, которые описываются прямоугольными распределениями*** с полуширинами интервалов a_1 *и* a_2 *, результатом их свертки является симметричное* ***трапецеидальное*** распределение с полушириной основания и вершины, соответственно:

$$a = a_1 + a_2 \text{ и } b = a_1 - a_2.$$

Тогда определяют коэффициент $\beta = b/a$ и рассчитывают:

$$k = \frac{1-\sqrt{(1-p)(1-\beta^2}}{\sqrt{\frac{1+\beta^2}{6}}}$$

6. ***При наличии нормально распределенных*** вкладов неопределенности их объединяют в единый вклад $\boldsymbol{u_н(y)}$**.** Тогда значение ***k*** определяют из таблицы 7 в зависимости от:

- $\boldsymbol{u_н(y)\ /\ u_1(y)}$ – отношение вклада нормально распределенных величин к наибольшему вкладу равномерно распределенной величины

- $\boldsymbol{u_2(y)\ /\ u_1(y)}$ **-** отношение второго по величине равномерно распределенного вклада к наибольшему равномерно распределенному вкладу.

Таблица 7

$\lvert u_2(y)/u_1(y)\rvert$	$\lvert u_н(y)/u_1(y)\rvert$									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	1,65	1,69	1,73	1,77	1,81	1,84	1,87	1,89	1,91	1,92
0,1	1,68	1,7	1,74	1,78	1,82	1,85	1,87	1,89	1,91	1,92
0,2	1,73	1,75	1,78	1,81	1,84	1,86	1,88	1,9	1,91	1,92
0,3	1,8	1,81	1,82	1,84	1,86	1,88	1,89	1,91	1,92	1,93
0,4	1,85	1,85	1,86	1,87	1,88	1,89	1,91	1,92	1,92	1,93
0,5	1,88	1,89	1,89	1,9	1,9	1,91	1,92	1,92	1,93	1,94
0,6	1,91	1,91	1,91	1,91	1,92	1,92	1,93	1,93	1,93	1,94
0,7	1,92	1,92	1,92	1,92	1,93	1,93	1,93	1,94	1,94	1,94
0,8	1,93	1,93	1,93	1,93	1,93	1,93	1,94	1,94	1,94	1,94
0,9...1,0	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94

2.1.10. Запись результата измерений

Результат измерений сопровождается записью, котора формулируется следующим образом;

«Измеренное значение величины равно $\boldsymbol{Y = y \pm U(Y)}$, где число, стоящее после знака ± расширенная неопределенность $U(y) = k \cdot u(y)$, полученная для суммарной стандартной неопределённости $u(y)$ =… и коэффициента охвата k = …., соответствующего уровню доверия …. % для ………распределения».

2.2 Задание 2. Многократное измерение

2.2.1 Условие задания

При многократном измерении одной и той же физической величины получена серия из 24 результатов измерений Q_i; $i \in [1...24]$. Эти результаты после внесения поправок представлены в таблице 8. Определить результат измерения, считая, что влиянием систематических погрешностей, и других входных величин (влияющих факторов), за исключением погрешности в результате дискретности отсчета, можно пренебречь.

Таблица 8 – Исходные данные

Предпоследняя цифра шифра	Последняя цифра шифра										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
1	482	483	483	484	483	483	484	484	484	481	482 495
2	483	485	482	484	483	485	482	482	481	482	492 484
3	483	482	482	486	483	484	484	481	480	481	483 494
4	482	485	486	486	483	483	483	483	481	480	492 486
5	483	484	485	482	484	483	485	485	484	483	481 494
6	486	486	485	483	484	485	486	480	485	485	495 484
7	485	484	486	482	483	484	484	481	485	485	485 492
8	484	485	487	483	482	484	482	483	484	484	492 483
9	484	486	484	484	481	485	484	482	483	485	482 493
0	483	480	487	482	481	483	486	483	483	484	493 480
	484 493	492 484	487 495	492 484	483 495	493 484	487 495	493 484	485 492	492 484	

2.2.2 Указания по выполнению

1. Серию экспериментальных данных студент выбирает из таблицы 8 по предпоследней и последней цифрам шифра. Например, шифру 96836 соответствует серия, включающая все результаты измерений, которые приведены в строке 3 и столбце 6.

2. Результат измерения следует получить с вероятностью охвата 0,95.

2.2.3 Порядок расчета

Обработка экспериментальных данных проводится по следующему алгоритму:

– составление модельного уравнения;

– оценивание входных величин и стандартных неопределенностей входных величин;

– оценка числового значения измеряемой величины (условного значения);

– вычисление коэффициентов чувствительности и вкладов неопределенности входных величин в неопределенность измеряемой величины;

– вычисление суммарной стандартной неопределенности;

– составление бюджет неопределенности;

– определение эффективного числа степеней свободы и расширенной неопределенности;

– запись результата измерения с учетом неопределенности

2.2.4 Составление модельного уравнения

Модельное уравнение – это математическая связь между всеми величинами, о которых известно, что они причастны к измерению. С учётом исходных данных задачи и примечания к условию модельное уравнение может быть представлено в следующем виде:

$$Y = Q + \Delta д, \tag{2}$$

где Y – значение измеряемой величины;

Q – показание прибора;

Δд –погрешность от дискретности отсчёта (определяется по цене деления шкалы прибора.

2.2.5 Оценка значений входных величин и их стандартных неопределенностей

2.2.5.1 *Оценка значения входной величины Q и ее стандартной неопределенности*

Измеряемая величина определяется путем многократных измерений, поэтому значение величины определяется как среднее арифметическое результатов измерений, а стандартное отклонение определяется по типу А как среднее квадратическое отклонение среднего арифметического. Алгоритм следующий.

1. Определить точечные оценки результата измерения: среднего арифметического $\overline{Q}$ и среднего квадратического отклонения S_Q результата измерения.

2. Обнаружить и исключить ошибки. Для этого необходимо:

– вычислить наибольшее по абсолютному значению нормированное отклонение

$$v = \frac{\max\left|Q_i - \overline{Q}\right|}{S_Q};$$

– задаться доверительной вероятностью P и из соответствующих таблиц (например, таблица В.1) с учетом $q = 1 - P$ найти соответствующее ей теоретическое (табличное) значение v_q;

– сравнить v с v_q.

Если $v > v_q$, то данный результат измерения Q_i является ошибочным, он должен быть отброшен. После этого необходимо повторить вычисления по пунктам 1 и 2 для сокращенной серии результатов измерений. Вычисления проводятся до тех пор, пока не будет выполняться условие $v < v_q$.

При этом значение q величины Q будет равняться среднему арифметическому значению результатов измерений после исключения ошибочных результатов: $q = \overline{Q}$.

3. Определить стандартную неопределенность входной величины Q как среднее квадратическое отклонение среднего арифметического из выражения:

$$u(Q) = S_Q \big/ \sqrt{n} ,$$

где S_Q- среднее квадратическое отклонение результатов измерений, полученное после исключения ошибочных результатов;

n – оставшееся после исключения ошибочных результатов число измерений;

4. Проверить гипотезу о нормальности распределения оставшихся результатов измерений.

Проверка выполняется по составному критерию.

Применив критерий 1, следует:

– вычислить отношение

$$d = \frac{\sum_1^n \left|Q_i - \overline{Q}\right|}{\sqrt{n \sum_1^n (Q_i - \overline{Q})^2}} ;$$

– задаться доверительной вероятностью P_1 (рекомендуется принять $P_1 = 0{,}98$) и для уровня значимости $q_1 = 1 - P_1$ по соответствующим таблицам (например, таблица Г.1) определить квантили распределения $d_{1-0,5ql}$ и $d_{0,5q1}$;

– сравнить d с $d_{1-0,5ql}$ и $d_{0,5q1}$.

Если выполняется неравенство $d_{1-0,5q1} < d < d_{0,5q1}$, то гипотеза о нормальном законе распределения вероятности результата измерения согласуется с экспериментальными данными.

Применив критерий 2, следует:

– задаться доверительной вероятностью P_2 (рекомендуется принять $P_2 = 0{,}98$) и для уровня значимости $q_2 = 1 - P_2$ с учетом n определить по соответствующим таблицам (например, таблица Г.2) значения m и P^*;

– для вероятности P^* из таблиц для интегральной функции нормированного нормального распределения $\Phi(t)$ (например, таблица Б.1) определить значение t и рассчитать $E = t \cdot S_Q$.

Если не более m разностей | $Q_{\mathrm{i}} - \overline{Q}$ | превосходит E, то гипотеза о нормальном законе распределения вероятности результата измерения согласуется с экспериментальными данными, закон можно признать нормальным с вероятностью $P_0 \geq (P_1 + P_2 - 1)$.

Если хотя бы один из критериев не соблюдается, то гипотезу о нормальности распределения отвергают.

2.2.5.2 Оценка значения входной величины Δд и ее стандартной неопределенности

Значение величины Δд определяется, как середина интервала погрешности от дискретности отсчёта. Данная погрешность определяется как ± половина цены деления. Из анализа исходных данных видно, что цена деления прибора: с = 1, следовательно, погрешность от дискретности отсчета: ±0,5 с = ±0,5·1 = ±0,5. Поэтому значение Δд равн середине диапазона ее возможного изменения, т.е. 0.

Стандартная неопределенность Δд оценивается как неопределенность по типу В. Поскольку нет информации о возможном законе распределения этой величины, принимаем закон равномерным, тогда

$$u(\Delta д) = \Delta д / \sqrt{3}\,.$$

2.2.6 Оценка значения выходной величины

Значение (опорное) выходной величины (результата измерения) определяется путем подстановки найденных значений входных величин в выражение (2).

2.2.7 Вычисление коэффициентов чувствительности и вкладов неопределенностей входных величин в неопределенность измеряемой величины

Значения коэффициентов чувствительности определяются в общем случае, как:

$$C_i = \partial Y / \partial X_i\,,$$

где X_i –входная величина уравнения измерения (2).

Поскольку уравнение (2) аддитивно, значение всех коэффициентов чувствительности раны: $C_Q = C_д = 1$.

Следовательно вклады неопределенностей входных величин в неопределенность измеряемой величины равны значениям неопределенностей входных величин.

2.2.8 Вычисление суммарной стандартной неопределенности результата измерения

Принимая входные величины уравнения измерения в качестве независимых величин, суммарную стандартную неопределенность результата измерения определяем из уравнения:

$$u(Y) = \sqrt{\left(u(Q)\cdot C_Q\right)^2 + \left(u(\Delta_Д)\cdot C_Д\right)^2}\,,$$

2.2.9. Составление бюджета неопределенности

Входная величина	Оценка входной величины	Стандартная неопределенность	Вид неопределенности, распределение	Число степеней свободы	Коэффициент чувствительности	Вклад в суммарную стандартную неопреде-

						ленность
1	2	3	4	5	6	7
Q						
$\Delta_д$						

Выходная Величина – результат измерения, **Y**	Оценка выходной величины, ***y***	Стандартная суммарная неопределенность, ***u(Y)***	Эффективное число степеней свободы, ν_{eff}	Уровень доверия, ***P***	Коэффициент охвата, ***k***	Расширенная неопределенность, ***U*(Y)**

2.2.10 Вычисление расширенной неопределённости

Согласно заданию значение вероятности охвата $P = 0{,}95$, которое соответствует «результатам измерения общего назначения».

Анализируя входные величины, отмечаем, что имеют место две составляющие суммарной неопределенности, одна из которых определена по тира А и имеет нормальный закон распределения, а другая – по типу В и имеет равномерный закон распределения.

В этом случае коэффициент охвата *k* рекомендуется принимать равным квантилю распределения Стьюдента (например, таблица 5) при вероятности охвата $P = 0{,}95$ и эффективном числе степеней свободы ν_{eff}, определяемом по формуле:

$$\nu_{eff} = (n-1)\left(\frac{u(Y)}{u(Q)}\right)^4$$

При этом расширенную неопределённость определяем по формуле:

$$U(Y) = k \cdot u(Y).$$

Округляем данное значение по правилам округления результатов измерений (до 1 значащей цифры, если первая значащая цифра больше 3, и до 2 значащих цифр, если первая цифра меньше или равна 3).

2.2.11 Запись результата измерения с учётом неопределённости.

Результат измерений сопровождается записью, котора формулируется следующим образом;

«Измеренное значение величины равно $Y = y \pm U(Y)$, где число, стоящее после знака ± расширенная неопределенность $U(Y) = k \cdot u(Y)$, полученная для суммарной стандартной неопределённости $u(Y)$ =… и коэффициента охвата k = …., соответствующего уровню доверия …. % для ………распределения при эффективном числе степеней свободы ν_{eff} = …»

2.3 Задание 3. Обработка результатов серий измерений

2.3.1 Условие задания

При многократных измерениях одной и той же величины получены две серии по 12 (n_j) результатов измерений в каждой. Эти результаты после внесения поправок представлены в таблице 8. Вычислить результат многократных измерений, принимая, что влиянием систематических погрешностей, и других входных величин (влияющих факторов), включая погрешности в результате дискретности отсчета, можно пренебречь.

2.3.2 Указания по выполнению

1. Серии в таблице 8 студент выбирает по предпоследней и последней цифрам шифра: например, шифру 96836 соответствуют все результаты измерений, которые приведены в строке 3 (серия 1) и столбце 6 (серия 2).

2. Результат измерения следует получить с достоверностью 0,95.

3. Приния во нимание условие, согласно которому можно пренебречь всеми влияющими факторами, уравнение измерения включает только одну входную величину – результат измерения Q и может быть представлно в виде:

$$\mathrm{Y} = \mathrm{Q}.$$

В этом лучае суммарная стандартная нелпределенность результата измерения равняется стандартной неопределенностии отсчетов при многократном измерении: $u(Y) = u(Q)$.

2.3.3 Порядок расчета

Обработку результатов двух серий измерений целесообразно осуществлять по алгоритмам с учетом $10...15 < n < 40...50$.

1. Обработать экспериментальные данные в каждой j-й серии отдельно по алгоритму, изложенному в задании 2 (алгоритм обработки многократных измерений), при этом:

– определить оценки результата измерения Q_j и среднего квадратического отклонения S_{QJ};

– обнаружить и исключить ошибки;

– проверить гипотезу о нормальности распределения оставшихся результатов измерений.

2. Проверить значимость различия средних арифметических серий по следующему алгоритму:

– вычислить моменты закона распределения разности:

$$G = \overline{Q}_1 - \overline{Q}_2,$$

$$S_G = \sqrt{\frac{S_{Q1^2}}{n_1} + \frac{S_{Q1^2}}{n_2}}\ ;$$

– задавшись доверительной вероятностью P, определить из соответствующих таблиц интегральной функции нормированного нормального распределения $\Phi(t)$ (например, таблица Б.1) значение t;

– сравнить $|G|$ с $t \cdot S_G$.

Если $|G| \le t \cdot S_G$, то различие между средними арифметическими в сериях с доверительной вероятностью P можно признать незначимым.

3. Проверить равнорассеянность результатов измерений в сериях по следующему алгоритму:

– определить значение $\psi = S^2_{Q1} / S^2_{Q2} \ge 1$ (делить большее значение на меньшее);

– задавшись доверительной вероятностью P, определить из соответствующих таблиц (например, таблица Е.1) значение аргумента интегральной функции распределения вероятности Фишера ψ_0;

– сравнить ψ с ψ_0.

Если $\psi < \psi_0$, то серии с доверительной вероятностью P считают рассеянными.

4. Обработать совместно результаты измерения обеих серий с учетом того, однородны серии или нет.

Если серии однородны (равнорассеянны с незначимым различием средних арифметических), то все результаты измерения следует объединить в единый массив и выполнить обработку по следующему алгоритму:

– определить оценку результата измерения $\overline{Q}$ и стандартную неопределенность $u(Y)$:

$$\overline{Q} = \left(n_1\overline{Q}_1 + n_2\overline{Q}_2\right) / \left(n_1 + n_2\right);$$

$$u(Y) = \sqrt{\frac{1}{(n_1+n_2)(n_1+n_2-1)}\left[(n_1-1)S^2_{Q1} + (n_2-1)S^2_{Q2} + n_1\left(\overline{Q}_1 - \overline{Q}\right)^2 + n_2\left(\overline{Q}_2 - \overline{Q}\right)^2\right]};$$

– задавшись вероятностью охвата P, определить из таблиц распределения Стьюдента (например, таблица Д.1) значение коэффициента охвата $k = t$ для числа степеней свободы $\nu_{eff} = 2^2 / \left[(n_1-1)^{-1} + (n_2-1)^{-1}\right]$;

– определить расширенную неопределенность: $U(Y) = k \cdot u(Y)$.

Если серии не равнорассеянны с незначимым различием средних арифметических, то совместную обработку результатов измерений следует выполнять с учетом весовых коэффициентов по следующему алгоритму:

– определить оценки результата измерения $\overline{Q}$ и стандартной неопределенности u(Y):

$$u(Y) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{1}^{2} \left(1/S_j\right)^2}} = \frac{S_{Q1} \cdot S_{Q2}}{\sqrt{n_1 \cdot S_{Q2}^2 + n_2 \cdot S_{Q1}^2}};$$

$$\overline{Q} = \sum_{1}^{2} \frac{S^2}{S_j^2} \cdot \overline{Q}_j = \sum_{1}^{2} \frac{S^2 \cdot n_j}{S_{Qj}^2} \overline{Q}_j;$$

– аналогично предыдущему случаю, задавшись вероятностью охвата *P*, определить коэффициент охвата *k* = *t* и расширенную неопределенность *U*(*Y*).

Если различие средних арифметических в сериях признано значимым, то результаты измерений в каждой серии следует обработать раздельно по алгоритму многократных измерений.

2.4 Задание 4. Функциональные преобразования результатов измерений (косвенные измерения)

2.4.1 Условие задания

При многократных измерениях независимых величин *X* и *Y* получено по 12 (*n*) результатов измерений. Эти результаты после внесения поправок представлены в таблице 8. Определить результат вычисления $Z = f\,(X,\ Y)$, (вид функции *Z* и характер величин *X, Y, Z* представлены в таблице 9). Влиянием систематических погрешностей, и других входных величин (влияющих факторов), включая погрешности в результате дискретности отсчета, можно пренебречь

Таблица 9 – Исходные данные

Последняя цифра шифра	Z=f (X,Y)	Характер и единицы величин		
		X	Y	Z
1	$Z=X/Y$	напряжение, мВ	сила тока, мкА	сопротивление
2	$Z=X^2Y$	сила тока, мкА	сопротивление, Ом	мощность
3	$Z=2X/Y^2$	перемещение, м	время, мс	ускорение
4	$Z = 2\pi\sqrt{XY}$	индуктивность, мкГн	емкость, мкФ	период колебаний
5	$Z=3X/4\pi\cdot Y^3$	масса, мкг	радиус сферы, мкм	плотность материала
6	$Z=X\cdot Y^2/2$	индуктивность, мкГн	сила тока, мА	энергия магнитного поля
7	$Z=0{,}5X^2/Y$	заряд, пКл	емкость, пФ	энергия конденсатора
8	$Z=X\cdot Y/(X+Y)$	сопротивление, Ом	сопротивление, Ом	сопротивление
9	$Z=X/(Y+10)$	ЭДС, мВ	сопротивление, Ом	сила тока
0	$Z = 2\pi\sqrt{X/Y}$	масса, г	жесткость, Н/м	период колебаний

2.4.2 Указания по выполнению

1. Значения *X* и *Y* студент выбирает соответственно по предпоследней и последней цифрам шифра: например, шифру 96836 соответствуют значения *X,* представленные в строке 3, и значения *Y,* представленные в столбце 6 таблицы 8.

2. Вид уравнения измерения (функции *Z*) студент выбирает по последней цифре шифра, например, шифру 96836 соответствует функция *Z*, представленная в строке 6 таблицы 9.

3. При определении *Z* следует предварительно выразить значения величин *X* и *Y* в единицах системы СИ.

2.4.3 Порядок расчета

Обработку экспериментальных данных при функциональном преобразовании результатов измерений целесообразно осуществлять по следующему алгоритму, принимая во внимание, что $n = 12$, следовательно, порядок расчетов и их содержание определяются условием $10...15 < n < 40...50$:

– составление модельного уравнения;

– оценивание входных величин и стандартных неопределенностей входных величин;

– оценка числового значения измеряемой величины (условного значения);

– вычисление коэффициентов чувствительности и вкладов неопределенности входных величин в неопределенность измеряемой величины;

– вычисление суммарной стандартной неопределенности;

– составление бюджет неопределенности;

– определение эффективного числа степеней свободы и расширенной неопределенности;

– запись результата измерения с учетом неопределенности

.

2.4.4 Составление модельного уравнения

Записать уравнение измерения в виде функции, представленной в таблице 9:

$$Z = f(X, Y) \qquad (3)$$

2.4.5 Оценивание входных величин и стандартных неопределенностей входных величин

Обработать результаты измерений величин X и Y отдельно по алгоритму обработки результатов многократных измерений, изложенному во втором заданиих при этом:

– определить средние арифметические значения входных веричин X, $У$ и значения стандартных отклонений (средних квадратическ отклонений) S_x, S_y;

– обнаружить и исключить ошибки;

– проверить гипотезу о нормальности распределения оставшихся результатов измерений;

– принять за значения входных величин их средние арифметические значения, а за стандартную неопределенность (по типу А) – средние квадратические отклонения средних арифметических:

$$x = \bar{X};\ y = \bar{Y};\ u(X) = S_x/\sqrt{n_X};\ u(Y) = S_y/\sqrt{n_Y},$$

где n_x, n_y – числа оставшихся результатов измерений соответственно X и Y после исключения ошибок

2.4.6. Оценка числового значения измеряемой величины (условного значения)

Определить значение z выходной величины Z, подставив в выражение (3) значения входных величин:

$$z = f(x,y) = f(\overline{X},\overline{Y}).$$

2.4.7 Определение поправки

$$\theta = -0{,}5\left[\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\cdot S_X^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}\cdot S_Y^2\right].$$

2.4.8 Вычисление коэффициентов чувствительности и суммарной стандартной неопределенности результата измерений

$$u(Z) = \sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial X}\cdot u(X)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial Y}\cdot u(Y)\right]^2},$$

2.4.9 Составление бюджет неопределенности

Входная величина	Оценка входной величины	Стандартная неопределенность	Вид неопределенности, закон распределения	Число степеней свободы n-1	Коэффициент чувствительности	Вклад в суммарную стандартную неопределенность
1	2	3	4	5	6	7
X						
Y						

Выходная величина – результат измерения, **Z**	Оценка выходной величины, z	Стандартная суммарная неопределенность, ***u(Z)***	Эффективное число степеней свободы, ν_{eff}	Уровень доверия, ***P***	Коэффициент охвата, ***k***	Расширенная неопределенность, ***U*(Z)**

2.4.10 Определение эффективного числа степеней свободы

Если законы распределения вероятности результатов измерения X и Y признаны нормальными, то коэффициент охвата k можно определить для принятой вероятности охвата P из таблиц для распределения Стьюдента (например, таблица Д.1). При этом число степеней свободы ν_{eff} определяется из выражения

$$\nu_{eff} = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial X} \cdot u(X) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \cdot u(Y) \right)^2 \right]^2 : \left[\frac{1}{n_x - 1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial X} \cdot u(X) \right)^4 + \frac{1}{n_y - 1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \cdot u(Y) \right)^4 \right].$$

Если гипотеза о нормальности распределения результатов измерения X или (и) Y отвергается, то k целесообразно определить из неравенства Чебышева:

$$P \geq 1 - 1/k^2 \ .$$

2.4.11 Определение расширенной неопределенности

Значение расширенной неопределенности результата измерений определяется из выражения

$$U(Z) = k \cdot u(Z).$$

2.4.12 Запись результат измерений.

Результат измерений сопровождается записью, котора формулируется следующим образом;

«Измеренное значение величины равно Z = z+θ ±$U(Z)$, где число, стоящее после знака ± расширенная неопределенность $U(Z) = k \cdot u(Z)$, полученная для суммарной стандартной неопределённости $u(Z)$ =… и коэффициента охвата k = …., соответствующего уровню доверия …. % для … распределения при эффективном числе степеней свободы ν_{eff} = …»

2.5 Задание 5. Обработка экспериментальных данных при изучении зависимостей

2.5.1 Условие задания

При многократных совместных измерениях величин *X* и *Y* получено по 20 *(n)* пар результатов измерений. Эти результаты после внесения поправок представлены в таблице 4. Определить уравнение регрессии *Y* по *X: Y = f (X).*

2.5.2 Указания по выполнению

1. Серии экспериментальных данных студент выбирает из таблицы 10 по предпоследней и последней цифрам шифра. Например, шифру 96836 соответствуют серии, включающие все результаты измерений *X* (числитель) и *Y* (знаменатель), которые представлены в строке 3 и столбце 6.

2. Считать, что результаты измерений не содержат ошибок.

Таблица 10 – Исходные данные

Предпоследняя цифра шифра	Последняя цифра шифра									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	10	21	32	42	49	58	69	77	87	96
2	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	110	120	131	143	149	158	170	180	188	195
3	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	205	215	226	237	245	258	265	275	286	293
4	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	312	321	330	342	355	364	372	379	386	395
5	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
	405	418	431	442	449	456	468	475	485	492
6	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
	505	518	525	530	541	550	561	569	575	583
7	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
	602	613	620	631	639	648	656	662	667	682
8	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
	696	710	715	722	732	742	752	762	770	779
9	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
	795	802	812	822	832	840	850	858	868	870
0	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
	880	891	901	912	922	935	943	957	966	975

2.5.3 Порядок расчета

Обработку экспериментальных данных при изучении зависимостей целесообразно осуществлять по следующему алгоритму.

1. В осях координат X и Y построить n экспериментальных точек с координатами X_i , Y_i, $i \in (1 \ldots 20)$ и по характеру расположения точек принять гипотезу о виде уравнения регрессии Y на X.

В качестве уравнения регрессии целесообразно использовать полином степени m:

$$Y = A + B \cdot X + C \cdot X^2 + \ldots + K \cdot X^m.$$

В первом приближении для решения данной задачи рекомендуется принять $m = 1$, т.е.

$$Y = A + B \cdot X.$$

2. Определить параметры уравнения регрессии по методу наименьших квадратов. Для этого необходимо:

– составить систему уравнений по числу рассчитываемых параметров:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial A} = 0; \ \frac{\partial \Delta}{\partial B} = 0; \ \frac{\partial \Delta}{\partial C} = 0; \ \ldots; \ \frac{\partial \Delta}{\partial K} = 0,$$

где $\Delta = \sum_{1}^{n} \left(Y_i - A - B \cdot X - C \cdot X^2 - \ldots - K \cdot X^m\right)^2$.

Например, для линейного уравнения регрессии система уравнений имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} B\sum_{1}^{n} X_i^{\,2} + A\sum_{1}^{n} X_i &= \sum_{1}^{n} X_i Y_i \\ B\sum_{1}^{n} X_i + nA &= \sum_{1}^{n} Y_i \end{aligned}\right\}$$

– решить систему уравнений и определить неизвестные параметры. Например, для линейного уравнения регрессии решение имеет вид:

$$B = \frac{n\sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2}; \ A = \frac{\sum X_i^{\,2} \sum Y_i - \sum X_i \sum X_i Y_i}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2}.$$

3. Проверить правильность выбора вида уравнения регрессии. Для этого следует применить непараметрические критерии серий и инверсий:

– рассчитать отклонения экспериментальных значений Y_i от соответствующих значений Y_{pi}, рассчитанных для того же аргумента X_i по полученному уравнению регрессии:

$$\Delta Y_i = Y_i - Y_{pi};$$

– построить в осях координат X, ΔY полученные значения ΔY_i для соответствующих X_i;

– записать последовательность значений ΔY_j по мере возрастания X_j, $X_j \in [l,n]$;

– рассчитать число серий N в полученной последовательности ΔY_j (под серией в данном случае понимают последовательность отклонений одного знака, перед и после которой следуют отклонения противоположного знака или нет вообще никаких отклонений);

– задавшись доверительной вероятностью P (уровень значимости $\alpha = 1 - \mathrm{P}$) для $n = 20$ определить по соответствующей таблице (например, таблица Ж.1) допустимые границы $N_{1-0,5\alpha}$ и $N_{0,5\alpha}$;

– рассчитать число инверсий A в полученной последовательности ΔY_j (под инверсией понимается событие, заключающееся в том, что $\Delta Y_j > \Delta Y_{jk}$ при $k > j$):

$$A = \sum_{1}^{n-1} A_j \ ,$$

где A_J – это число инверсий j-го члена последовательности, т.е. число членов последовательности, которые, будучи расположенными в последовательности после j-го члена, имеют значение меньшее, чем ΔY_j;

– задавшись доверительной вероятностью P (уровень значимости $\alpha = 1 - P$) для $n = 20$ определить по соответствующей таблице (например, таблица И.1) допустимые границы $A_{1-0,5\alpha}$ и $A_{0,5\alpha}$;

– сравнить A с $A_{1-0,5\alpha}$ и $A_{0,5\alpha}$.

Если выполняются неравенства

$$N_{1-0,5\alpha} < N \leq N_{0,5\alpha};$$

$$A_{1-0,5\alpha} < A \leq A_{0,5\alpha},$$

то с выбранной доверительной вероятностью P можно считать, что отклонения экспериментальных значений Y_i, от соответствующих значений Y_{pi} найденного уравнения регрессии являются случайными, не содержат аддитивного, мультипликативного или колебательного трендов, т.е. рассчитанное уравнение регрессии достоверно описывает экспериментально исследуемую зависимость между величинами X и Y.

Если хотя бы одно из указанных выше неравенств не выполняется, то следует пересмотреть выбор вида уравнения регрессии. В частности, можно увеличить степень полинома *m* на единицу и повторить вычисления по описанному выше алгоритму. Например, для полинома второй степени:

$$Y = A + B \cdot X + C \cdot X^2.$$

С целью определения параметров уравнения регрессии в данном случае необходимо решить систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} C\sum_{1}^{n} X_i^{4} + B\sum_{1}^{n} X_i^{3} + A\sum_{1}^{n} X_i^{2} &= \sum_{1}^{n} X_i^{2} Y_i; \\ C\sum_{1}^{n} X_i^{3} + B\sum_{1}^{n} X_i^{2} + A\sum_{1}^{n} X_i &= \sum_{1}^{n} X_i Y_i; \\ C\sum_{1}^{n} X_i^{2} + B\sum_{1}^{n} X_i + nA &= \sum_{1}^{n} Y_i \end{aligned}\right\}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. ГОСТ 34100.1-2017/Руководство ИСО/МЭК 98-1:2009 Неопределенность измерения. Часть 1. Введение в руководства по неопределенности измерения

2. ГОСТ 34100.3-2017/Руководство ИСО/МЭК 98-3:2008 Неопределенность измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределенности измерений

3. Введение к «Руководству по выражению неопределенности измерения» и сопутствующим документам. Оценивание данных измерений / Пер. с анг. под науч. ред. д.т.н., проф. В.А. Слаева, д.т.н. А.Г. Чуновкиной. — СПб.: «Профессионал», 2011. — 58 с.: ил.

4. Шишкин И.Ф. Метрология, стандартизация и управление качеством. - М.: Изд-во стандартов, 1990.

5. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. - М.: Наука, 1986.- 544 с.

6. Атамалян Э.Г. Приборы и методы измерения электрических величин.- М.: Высшая школа, 1989.- 384 с.

7. Бендат Дж. Прикладной анализ случайных данных / Дж. Бендат, А. Пирсол. - М.: Мир, 1989. - 540 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
(справочное)

Форма задания на курсовую (расчетно-графическую) работу

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ОРЛОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени И.С. ТУРГЕНЕВА

ЗАДАНИЕ
на курсовую работу

по дисциплине ____
____

Тема курсовой (расчетно-графической) работы: «Обработка результатов различных видов измерений»________________________________

Направление подготовки:________________________________
(шифр, наименование)

Студент____
(фамилия, имя, отчество)

Шифр: ____

Вариант: ____

Исходные данные для обработки:**

Задание № 1 Однократные измерения.

При однократном измерении физической величины получено показание средства измерения X = 10. Определить, чему равно значение измеряемой величины, если экспериментатор обладает следующей априорной информацией о средстве измерений и условиях выполнения измерений: ____
____
____

Здание № 2. Многократные прямые измерения.

При многократном измерении одной и той же физической величины получена серия из 24 результатов измерений Q_i; $i \in [1...24]$:
____
____
____

Определить результат измерения, считая, что влиянием систематических погрешностей и других входных величин (влияющих факторов), за исключением погрешности в результате дискретности отсчета, можно пренебречь.

∗Перечень заданий определяется в зависимости от вида (курсовая или расчетно-графическая) работы и требований рабочей программы дисциплины

Задание № 3 Обработка результатов серий измерений

При многократных измерениях одной и той же величины получены две серии по 12 (n_j) результатов измерений в каждой (поправки внесены):

серия I:____ ;

серия II:____.

Вычислить результат измерений, принимая, что влиянием систематических погрешностей и других входных величин (влияющих факторов), включая погрешности в результате дискретности отсчета, можно пренебречь.

Задание №4. Функциональные преобразования результатов измерений (косвенные измерения)

При многократных измерениях независимых величин X и Y получено по 12 (n) результатов измерений (поправки внесены):

значения X:____;

значения Y:____ .

Определить значение величины Z, если вид функции $Z = f\,(X, Y)$:________ Влиянием систематических погрешностей и других входных величин (влияющих факторов), включая погрешности в результате дискретности отсчета, можно пренебречь

Задание №5. Обработка экспериментальных данных при изучении зависимостей

При многократных совместных измерениях величин X и Y получено по 20 *(n)* пар результатов измерений (поправки внесены):

X_i										
Y_i										

Определить уравнение регрессии Y по X: $Y = f\,(X)$.

ОРЕЛ, (год)

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

(справочное)

Форма титульного листа

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ОРЛОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени И.С. ТУРГЕНЕВА

Кафедра ПМиС

КУРСОВАЯ РАБОТА

ПО ДИСЦИПЛИНЕ: _________________

СТУДЕНТ__________________ ШИФР__________________

ГРУППА___________________

ОТМЕТКА О ЗАЧЕТЕ __________________________

ПОДПИСИ ЧЛЕНОВ КОМИСИИ_____________________

ОРЕЛ, (год)

ПРИЛОЖЕНИЕ В

(справочное)

Интегральная функция нормированного нормального распределения *Ф(t)*

Таблица Б.1 – Распределение $2\hat{O}(t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{t}e^{-\frac{t^{2}}{2}}dt$

2Ф(t)	***t***	***2Ф(t)***	***t***	***2Ф(t)***	***t***	***2Ф(t)***	***t***	***2Ф(t)***	***t***
0,6827	1	0,7699	1,2	0,8385	1,4	0,8904	1,6	0,9281	1,8
0,6875	1,01	0,7737	1,21	0,8415	1,41	0,8926	1,61	0,9297	1,81
0,6923	1,02	0,7775	1,22	0,8444	1,42	0,8948	1,62	0,9312	1,82
0,697	1,03	0,7813	1,23	0,8473	1,43	0,8969	1,63	0,9328	1,83
0,7017	1,04	0,785	1,24	0,8501	1,44	0,899	1,64	0,9342	1,84
0,7063	1,05	0,7887	1,25	0,8529	1,45	0,9011	1,65	0,9357	1,85
0,7109	1,06	0,7923	1,26	0,8557	1,46	0,9031	1,66	0,9371	1,86
0,7154	1,07	0,7959	1,27	0,8584	1,47	0,9051	1,67	0,9385	1,87
0,7199	1,08	0,7995	1,28	0,8611	1,48	0,907	1,68	0,9399	1,88
0,7243	1,09	0,8029	1,29	0,8638	1,49	0,909	1,69	0,9412	1,89
0,7287	1,1	0,8064	1,3	0,8664	1,5	0,9109	1,7	0,9426	1,9
0,733	1,11	0,8098	1,31	0,869	1,51	0,9127	1,71	0,9439	1,91
0,7373	1,12	0,8132	1,32	0,8715	1,52	0,9146	1,72	0,9451	1,92
0,7415	1,13	0,8165	1,33	0,874	1,53	0,9164	1,73	0,9464	1,93
0,7457	1,14	0,8198	1,34	0,8764	1,54	0,9181	1,74	0,9476	1,94
0,7499	1,15	0,823	1,35	0,8789	1,55	0,9199	1,75	0,9488	1,95
0,754	1,16	0,8262	1,36	0,8812	1,56	0,9216	1,76	0,95	1,96
0,758	1,17	0,8293	1,37	0,8836	1,57	0,9233	1,77	0,9512	1,97
0,762	1,18	0,8324	1,38	0,8859	1,58	0,9249	1,78	0,9523	1,98
0,766	1,19	0,8355	1,39	0,8882	1,59	0,9265	1,79	0,9534	1,99
2Ф(t)	***t***	***2Ф(t)***	***t***	***2Ф(t)***	***t***	***2Ф(t)***	***t***	***2Ф(t)***	***t***
0,9545	2	0,9722	2,2	0,9836	2,4	0,9907	2,6	0,9949	2,8
0,9556	2,01	0,9729	2,21	0,984	2,41	0,9909	2,61	0,995	2,81
0,9566	2,02	0,9736	2,22	0,9845	2,42	0,9912	2,62	0,9952	2,82
0,9576	2,03	0,9743	2,23	0,9849	2,43	0,9915	2,63	0,9953	2,83
0,9586	2,04	0,9749	2,24	0,9853	2,44	0,9917	2,64	0,9955	2,84
0,9596	2,05	0,9756	2,25	0,9857	2,45	0,992	2,65	0,9956	2,85
0,9606	2,06	0,9762	2,26	0,9861	2,46	0,9922	2,66	0,9958	2,86
0,9615	2,07	0,9768	2,27	0,9865	2,47	0,9924	2,67	0,9959	2,87
0,9625	2,08	0,9774	2,28	0,9869	2,48	0,9926	2,68	0,996	2,88
0,9634	2,09	0,978	2,29	0,9872	2,49	0,9929	2,69	0,9961	2,89
0,9643	2,1	0,9786	2,3	0,9876	2,5	0,9931	2,7	0,9963	2,9
0,9651	2,11	0,9791	2,31	0,9879	2,51	0,9933	2,71	0,9964	2,91
0,966	2,12	0,9797	2,32	0,9883	2,52	0,9935	2,72	0,9965	2,92
0,9668	2,13	0,9802	2,33	0,9886	2,53	0,9937	2,73	0,9966	2,93

Продолжение таблицы Б.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,9676	2,14	0,9807	2,34	0,9889	2,54	0,9939	2,74	0,9967	2,94
0,9684	2,15	0,9812	2,35	0,9892	2,55	0,994	2,75	0,9968	2,95
0,9692	2,16	0,9817	2,36	0,9895	2,56	0,9942	2,76	0,9969	2,96
0,97	2,17	0,9822	2,37	0,9898	2,57	0,9944	2,77	0,997	2,97
0,9707	2,18	0,9827	2,38	0,9901	2,58	0,9946	2,78	0,9971	2,98
0,9715	2,19	0,9832	2,39	0,9904	2,59	0,9947	2,79	0,9972	2,99

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

(справочное)

ν-критерий

Таблица В.1 – Значения v_q при различных *n, q*

n	*q*		*n*	*q*	
	0,10	0,05		0,10	0,05
3	1,406	1,412	15	2,326	2,493
4	1,645	1,689	16	2,354	2,523
5	1,731	1,869	17	2,380	2,551
6	1,894	1,996	18	2,404	2,557
7	1,974	2,093	19	2,426	2,600
8	2,041	2,172	20	2,447	2,623
9	2,097	2,237	21	2,467	2,644
10	2,146	2,294	22	2,486	2,664
11	2,190	2,383	23	2,564	2,688
12	2,229	2,387	24	2,520	2,701
13	2,264	2,426	25	2,537	2,717
14	2,297	2,461			

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

(справочное)

Составной критерий

Таблица Г.1 – Статистика *d*

n	$d_{0,5q1}$		$d_{1-0,5ql}$	
	0,01	0,05	0,05	0,01
11	0,9359	0,9073	0,7153	0,6675
16	0,9137	0,8884	0,7236	0,6829
21	0,9001	0,8768	0,7304	0,6950
26	0,8961	0,8686	0,7360	0,7040
31	0,8826	0,8625	0,7404	0,7110
36	0,8769	0,8578	0,7440	0,7167
41	0,8722	0,8540	0,7470	0,7216
46	0,8682	0,8508	0,7496	0,7256
51	0,8648	0,8481	0,7518	0,7291

Таблица Г.2 – Значения *m* и *P**

n	m	P^*		
		0,01	0,02	0,05
10	1	0,98	0,98	0,99
11-14	1	0,99	0,98	0,97
15-20	1	0,99	0,99	0,98
21-22	2	0,98	0,97	0,96
23	2	0,98	0,98	0,96
24-27	2	0,98	0,98	0,97
28-32	2	0,99	0,98	0,97
33-35	2	0,99	0,98	0,98
36-49	2	0,99	0,99	0,98

ПРИЛОЖЕНИЕ Е
(справочное)

Распределение Стьюдента

Таблица Д.1 – Коэффициент Стьюдента

n-1	*P*=0,95	*P*=0,99	*n*-1	*P*=0,95	*P*=0,99
3	3,182	5,841	16	2,120	2,921
4	2,776	4,604	18	2,101	2,878
5	2,571	4,032	20	2,086	2,845
6	2,447	3,707	22	2,074	2,819
7	2,365	3,499	24	2,064	2,797
8	2,306	3,355	26	2,056	2,779
10	2,228	3,169	28	2,048	2,763
12	2,179	3,055	30	2,043	2,750
14	2,145	2,977	∞	1,960	2,576

ПРИЛОЖЕНИЕ Ж
(справочное)

Распределение Фишера

Таблица Е.1 – Значения ψ_0 для различных значений n_1, n_2 и доверительной вероятности P

n_2	P	n_1				
		8	9	10	11	12
8	0,75	1,64	1,64	1,63	1,63	1,62
	0,90	2,59	2,56	2,54	2,52	2,50
	0,95	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28
	0,99	6,03	5,91	5,81	5,73	5,67
9	0,75	1,60	1,59	1,59	1,58	1,58
	0,90	2,47	2,44	2,42	2,40	2,38
	0,95	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07
	0,99	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	0,75	1,56	1,56	1,55	1,55	1,54
	0,90	2,38	2,35	2,32	2,30	2,28
	0,95	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91
	0,99	5,06	4,94	4,85	4,77	4,71
11	0,75	1,53	1,53	1,52	1,52	1,51
	0,90	2,30	2,27	2,25	2,23	2,21
	0,95	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79
	0,99	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	0,75	1,51	1,51	1,50	1,50	1,49
	0,90	2,24	2,21	2,19	2,17	2,15
	0,95	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69
	0,99	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16

ПРИЛОЖЕНИЕ З
(справочное)

Критерий серий

Таблица Ж.1 – Процентные точки распределения серий (вероятность $P[r_n>r_{n;\alpha}]=\alpha$, $n=N_1=N_2=N$)

$n=N/2$	α					
	0,99	0,975	0,95	0,05	0,025	0,01
5	2	2	3	8	9	9
6	2	3	3	10	10	11
7	3	3	4	11	12	12
8	4	4	5	12	13	13
9	4	5	6	13	14	15
10	5	6	6	15	15	16
11	6	7	7	16	16	17
12	7	7	8	17	18	18
13	7	8	9	18	19	20
14	8	9	10	19	20	21
15	9	10	11	20	21	22
16	10	11	11	22	22	23
18	11	12	13	24	25	26
20	13	14	15	26	27	28
25	17	18	19	32	33	34
30	21	22	24	37	39	40
35	25	27	28	43	44	46
40	30	31	33	48	50	51
45	34	36	37	54	55	57
50	38	40	42	59	61	63
55	43	45	46	65	66	68
60	47	49	51	70	72	74
65	52	54	56	75	77	79
70	56	58	60	81	83	85
75	61	63	65	86	88	90
80	65	68	70	91	93	96
85	70	72	74	97	99	101
90	74	77	79	102	104	107
95	79	82	84	107	109	112
100	84	86	88	113	115	117

ПРИЛОЖЕНИЕ К

(справочное)

Критерий инверсий

Таблица И.1 – Процентные точки распределения числа инверсий (вероятность $P[A_N > A_{N;\alpha}] = \alpha$, где N – общее число значений)

N	α					
	0,99	0,975	0,95	0,05	0,025	0,01
10	9	11	13	31	33	35
12	16	18	21	44	47	49
14	24	27	30	60	63	66
16	34	38	41	78	81	85
18	45	50	54	98	102	107
20	59	64	69	120	125	130
30	152	162	171	263	272	282
40	290	305	319	460	474	489
50	473	495	514	710	729	751
60	702	731	756	1013	1038	1067
70	977	1014	1045	1369	1400	1437
80	1299	1344	1382	1777	1815	1860
90	1668	1721	1766	2238	2283	2336
100	2083	2145	2198	2751	2804	2866