

Составители: Д.Н. Васильев, Е.Ю. Леонова, В.А. Разборов

УДК 651.3.06

Численное и графическое моделирование и исследование кинематических и динамических характеристик механической системы»: Метод. разработка по выполнению курсовой работы по информатике для студентов технических специальностей дневной формы обучения / НГТУ; Сост.: Д.Н. Васильев, Е.Ю. Леонова, В.А. Разборов. Н. Новгород, 2004. 14 с.

Изложены основные этапы решения инженерной задачи на ПК в графических, текстовых и математических Windows-приложениях на основе изученных численных методов. Рассмотрены графическая, физическая и математическая модели упрощенной механической системы. Приводятся варианты форм препятствий.

Научный редактор С. Н. Митяков
Редактор И.И. Морозова

Компьютерный набор: В. А. Разборов
Ю.А. Резчиков

Подп. к печ. 19.05.04. Формат 60x84 ¹/₁₆. Бумага газетная. Печать офсетная.
Печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 0,8. Тираж 300 экз. Заказ 470.

Нижегородский государственный технический университет.
Типография НГТУ. 603600, Н. Новгород, ул. Минина, 24.

© Нижегородский государственный
технический университет, 2004

1. ВВЕДЕНИЕ

В курсе «Информатика» изучались разделы:

1. Принципы алгоритмизации и программирования.
2. Элементы численных методов, используемых в инженерных расчетах.
3. Работа пользователя в программных средах: MathCAD, EXCEL, WORD и др. на примерах реализации численных методов.
4. Оформление результатов расчетов в указанных программных продуктах, в редакторе типа Word или графическом редакторе типа Paint и др.

В данной курсовой работе на примере упрощенной инженерной задачи о механической системе студент демонстрирует свои знания, полученные при изучении указанных разделов и умение их применить в конкретных задачах.

Задача, поставленная в данной курсовой работе, не требует каких-либо специальных знаний, кроме уже изученных в курсе физики законов механики и в математическом анализе:

- 1) элементарные теоремы геометрии для треугольников и окружностей;
- 2) законы механики Ньютона;
- 3) закон Гука для упругой пружины;
- 4) закон сопротивления движению в вязких жидкостях;
- 5) сведения о простейших дифференциальных уравнениях.

Работа выполняется с использованием пакета MathCAD.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе рассматривается задача расчета и исследования кинематических и динамических характеристик механической системы, схема которой изображена на рис. 1.

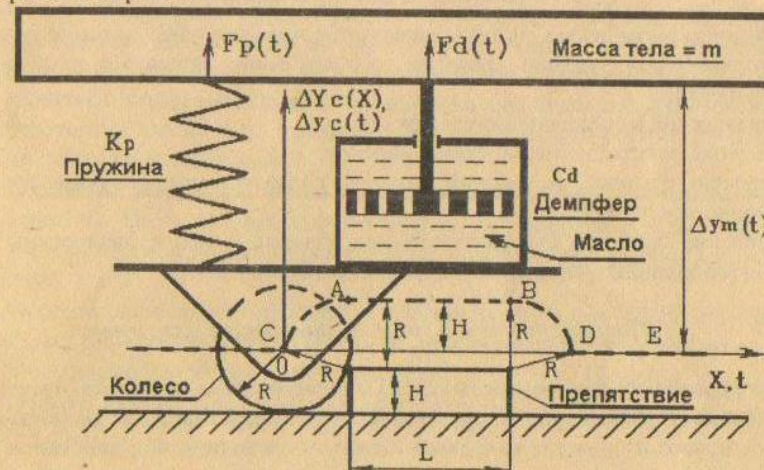


Рис. 1. Кинематическая схема механической системы и траектория центра жесткого колеса (CABDE)

Система содержит:

- массивное жесткое тело массой m ;
- жесткую опору и жесткое неподвижное препятствие;
- упругое колесо радиусом R ;
- пружинно-демпферный амортизатор, состоящий из параллельно соединенных пружины и демпфера; амортизатор жестко соединен с массивным телом и шарнирно соединен с колесом.

Основные допущения:

1. Массы всех частей амортизатора и колеса значительно меньше массы массивного тела, поэтому их массами можно пренебречь.
2. Вся система перемещается по горизонтали с малой постоянной скоростью, а по вертикали – с переменной скоростью без вращения вокруг любых точек или осей за счет дополнительных связей, не изображенных на рис. 1.
3. При малой горизонтальной скорости V_x и достаточно большой массе тела m колесо постоянно соприкасается с опорой и/или с препятствием (то есть колесо не подпрыгивает и не летит по воздуху).
4. Начало декартовой системы координат расположим в центре жесткого колеса (в точке C) при первом соприкосновении колеса с препятствием.
5. Изменение реакции пружины $\Delta F_{pr}(t)$ линейно зависит от изменения ее длины $\Delta L_{pr}(t)$.
6. Реакция демпфера $F_d(t)$ линейно зависит от скорости перемещения поршня относительно корпуса демпфера.

3. МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

3.1. Физическая модель системы

Физической моделью системы называется качественное описание явлений, происходящих при функционировании того или иного механизма, прибора или другого изделия.

Физической модели соответствуют:

- 1) рисунки, эскизы, чертежи, схемы изделия;
- 2) перечень физических явлений, законов, соответствующих процессу функционирования изделия;
- 3) описание процесса функционирования изделия, а также физических величин (координаты, скорости, ускорения, силы и др.).

3.2. Процесс работы и силы, возникающие в системе

До первого соприкосновения колеса с препятствием вся механическая система движется равномерно и прямолинейно с горизонтальной скоростью V_x . Упругое колесо и пружина находятся в сжатом состоянии под действием силы тяжести массивного тела. Демпфер находится в некотором среднем положении.

При преодолении препятствия и далее на тело массой m действуют следующие внешние силы:

1. Неизменная сила тяжести P_m массивного тела.
2. Переменная сила сжатия пружины $F_{pr}(t)$, возникающая за счет изменения длины пружины.
3. Переменная сила жидкого сопротивления демпфера $F_d(t)$, возникающая за счет переменной скорости изменения длины пружины.
4. Сила инерции $F_m(t)$, обусловленная наличием массивного тела и его переменным ускорением, вычисляемая по 2-му закону Ньютона.

3.3 Упрощенная физическая модель всей системы

Механическую систему, изображенную на рисунке, можно приближенно представить в виде двух жестко соединенных частей:

- 1) препятствие + упругое колесо;
- 2) пружинно-демпферный амортизатор + массивное тело.

Вертикальное перемещение оси колеса и скорость его изменения передаются через шарнирную связь нижней части демпфера. Это приводит к возникновению вертикально направленных избыточных внешних сил сжатия пружины $\Delta F_{pr}(t)$ и жидкого трения демпфера $F_d(t)$, действующих на массивное тело.

3.4. Упрощенные физическая и геометрическая модели упругого колеса

Упругое колесо состоит из жесткого диска, жесткого обода и упругой пневматической шины. В исходном состоянии упругое колесо прижато к опоре под действием силы тяжести массивного тела. В результате этого колесо имеет не точечный контакт с опорой, а некоторую площадку сцепления колеса с опорой.

В процессе преодоления препятствия площадка сцепления упругого колеса постепенно изменит свою форму так, что одна ее часть сначала расположена на опоре, а другая – на части препятствия. Это происходит за счет упругости шины, которая зависит от избыточного давления воздуха внутри шины. Затем может оказаться, что вся площадка сцепления колеса будет целиком расположена на препятствии, после чего изменение формы площадки сцепления будет происходить в обратном порядке.

Жесткость шины как минимум на порядок больше жесткости пружины амортизатора. Поэтому упрощенную модель формирования траектории $\Delta y_s(t)$ упругого колеса можно представить в виде двух последовательно выполняемых операций:

Формирование траектории $\Delta y_s(t)$ оси жесткого колеса (без учета упругости шины) на основе только геометрической модели препятствия и радиуса колеса.

Формирование сглаженной траектории $\Delta y_s(t)$ оси упругого колеса путем скользящего взвешенного усреднения траектории $\Delta y_s(t)$ оси жесткого колеса $\Delta y_s(x)$ и $\Delta y_s(t)$.

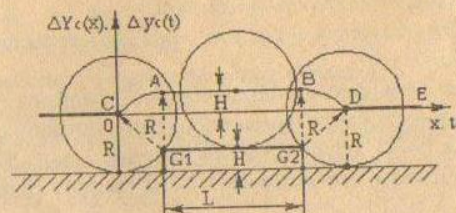


Рис. 2. Эскиз траектории центра жесткого колеса

Как видно на рис.2, колесо полностью исключает скачки (ступеньки) на траектории (CABDE) оси жесткого колеса $\Delta y_c(X)$, которые есть на препятствии (в точках $G1$ и $G2$). Однако, на траектории $\Delta y_c(X)$ возможны скачки скорости изменения траектории оси жесткого колеса (точки C и D на рис.2).

При обтекании выступающих углов препятствия ($G1$ и $G2$) траектория $\Delta y_c(X)$ содержит участки, имеющие форму дуг окружностей, радиус которых равен радиусу колеса R , а их центры находятся в точках $G1$ и $G2$.

При необходимости рассчитать координаты (X_i, Y_i) границ i -го и $(i+1)$ -го участков траектории $\Delta y_c(X)$ нужно решить уравнение: $\Delta y_{ci}(X) - \Delta y_{c(i+1)}(X) = 0$ при заданном начальном значении $X = X_{нач}$.

3.5. Физические законы, описывающие процессы в системе

1. Принцип Даламбера - сумма всех внешних сил, действующих на массивное тело, равняется силе инерции этого тела.
2. 2-й закон Ньютона для силы инерции.
3. закон Гука для сжатия пружины.
4. закон сопротивления движению тела в вязкой жидкости.

3.6. Математическая модель задачи

Математической моделью задачи называется набор формул, уравнений, систем алгебраических или дифференциальных уравнений, отражающих физические процессы и законы, использованные в физической модели.

В данной работе эти математические выражения отражают перечисленные выше физические законы.

4. ЭТАПЫ ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Работа в целом состоит из следующих взаимно связанных подзадач:

1. Расчет траектории центра жесткого колеса (относительные координаты траектории $\Delta y_c(X)$ и зависимость от времени $\Delta y_c(t)$ с учетом только формы препятствия, радиуса колеса R и горизонтальной скорости V_x).
2. Расчет сглаженной траектории оси упругого колеса (зависимость от времени $\Delta y_s(t)$ и скорость ее изменения $V_s(t) = d/dt[\Delta y_s(t)]$).
3. Расчет координат $\Delta y_m(t)$, вертикальной составляющей скорости $V_{ym}(t)$ массивного тела, а также вертикальной составляющей его ускорения $a_m(t)$.

4. Исследование кинематических и динамических характеристик системы при изменении одного из ее параметров (по вариантам заданий).

Вся курсовая работа выполняется в 3 этапа. Для выполнения каждого этапа работы используется своя группа исходных данных, а также результаты выполнения предыдущих этапов.

На каждом этапе работы часть исходных данных задается непосредственно, а другие – вычисляются либо через коэффициенты пропорциональности уже заданных или вычисленных величин, либо по другим формулам.

4.1. ЭТАП 1. Расчет координат центра упругого колеса и скорости их изменения по участкам траектории центра жесткого колеса

Исходные данные для расчета кинематических характеристик системы

Ввод	Расчет	Результат	Комментарии
$R \leftarrow 0.3$		$R = 0.3$	R - радиус колеса, м
$cH \leftarrow 0.1$	$H = cH * R$	$H = 0.03$	H - Высота препятствия, м (равна cH -й доле радиуса колеса R)
$cL \leftarrow 4$	$L = cL * H$	$L = 0.12$	L - Длина препятствия, м $cL = L / H$ (длина преп./высота преп.)
$V_x \leftarrow 1$		$V_x = 1$	V_x - горизонтальная скорость системы, м/с
$cL_s \leftarrow 0.5$	$L_s = cL_s * R$	$L_s = 0.15$	L_s - длина площадки сцепления колеса с опорой, м (равна cL_s -й доле радиуса колеса R)
	$T_s = s / (2V_x)$	$T_s = 0.075$	Эффективное время сглаживания траектории центра жестк. колеса, с

На каждом участке траектории выполняются 4 следующих шага:

Шаг 1.1. Расчет координат траектории $\Delta y_c(X)$ точки C (центра жесткого колеса) только по геометрическим характеристикам препятствия по участкам и радиуса колеса R (по вариантам заданий).

Шаг 1.2. Расчет зависимости от времени высоты центра жесткого колеса:

$$\Delta y_c(t) = \Delta y_c[X(t)] = \Delta y_c(V_x \cdot t).$$

Шаг 1.3. Расчет сглаженной траектории оси колеса $\Delta y_s(t)$ путем скользящего взвешенного усреднения временной зависимости $\Delta y_c(t)$ для жесткого колеса.

$$\Delta y_s(t) := \int_{-2T_s}^0 \Delta y_c(\tau + t) W_{ys}(\tau) d\tau, \text{ где } W_{ys}(\tau) := \left(\frac{1}{2T_s} \right) \left(1 - \cos\left(\frac{\pi \tau}{T_s} \right) \right)$$

Эффективное время T_s сглаживания с помощью весовой функции $W_{ys}(t)$ равно $T_s = L_s / (2V_s)$. Так моделируется упругость пневматической шины.

Шаг 1.4. Расчет вертикальной скорости центра упругого колеса:

$$V_s(t) = d/dt[\Delta y_s(t)].$$

4.2. ЭТАП 2. Расчет динамических характеристик механической системы

Найдем следующие зависимости от времени t :

1. Вертикальную составляющую перемещения массивного тела $\Delta y_m(t)$ относительно равновесного его состояния.
2. Вертикальную составляющую скорости перемещения массивного тела $V_{ym}(t)$.
3. Вертикальную составляющую ускорения массивного тела $a_m(t)$.

Для этого составим систему двух дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $\Delta y_m(t)$ и $V_{ym}(t)$ соответственно.

Шаг 2.1. Из физической модели рассматриваемой механической системы найдем внешние силы, действующие на массивное тело.

На массивное тело действуют две внешние силы:

- 1) Реакция пружины $\Delta F_{pr}(t)$.
- 2) Реакция демпфера $F_d(t)$.

Согласно принятым допущениям при малых изменениях длины пружины $\Delta L_{pr}(t)$ реакция пружины (ΔF_{pr}) находится по линейному закону Гука:

$$\Delta F_{pr}(t) = K_{pr} \Delta L_{pr}(t) = K_{pr} [\Delta y_s(t) - \Delta y_m(t)].$$

Здесь K_{pr} - коэффициент восстанавливающей силы упругой пружины;

$\Delta y_s(t)$ - ранее найденная временная зависимость относительной высоты оси упругого колеса;

$\Delta y_m(t) = y_m(t) - y_m(0)$ - изменение высоты массивного тела относительно начальной высоты $y_m(0)$ массивного тела при $t = 0$.

При малых значениях V_d - скорости перемещения поршня силу $\Delta F_d(t)$ будем находить по линейному закону для силы сопротивления жидкого трения:

$$\Delta F_d(t) = -C_d V_d(t) = -C_d [V_{ym}(t) - V_{ys}(t)].$$

В этой формуле знак силы $\Delta F_d(t)$ противоположен $V_d(t)$ - скорости изменения расстояния от поршня до дна корпуса демпфера.

Здесь также обозначено: $V_{ym}(t) = d/dt[\Delta y_m(t)]$ и $V_{ys}(t) = d/dt[\Delta y_s(t)]$ - скорости изменения вертикальной координаты массивного тела и центра колеса.

Шаг 2.2. Из физических соображений найдем систему двух дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций $\Delta y_m(t)$ и $V_{ym}(t)$:

1-е дифференциальное уравнение относительно $\Delta y_m(t)$ и V_{ym} получим из определения скорости тела: 1) $d/dt[\Delta y_m(t)] = V_{ym}(t)$;

2-е дифференциальное уравнение получим из 2-го закона Ньютона.

Произведение массы тела m на его ускорение $d/dt[V_{ym}(t)]$ равно алгебраической сумме всех внешних сил, действующих на это тело.

$$2) \quad d/dt[V_{ym}(t)] = (1/m) \{ K_{pr} [\Delta y_s(t) - \Delta y_m(t)] + C_d [V_{ys}(t) - V_{ym}(t)] \}.$$

Для расчёта значений $\Delta y_m(t)$ и $V_{ym}(t)$ при $t_{нач} \leq t \leq t_{кон}$ с шагом Δt нужно решить полученную систему двух дифференциальных уравнений при нулевых начальных значениях $\Delta y_m(t_{нач}) = 0$ и $V_{ym}(t_{нач}) = 0$.

Дополнительные исходные данные для расчета динамических характеристик системы (подготовка данных для решения дифференциального уравнения)

$m := 250$	Масса тела $m = 250$ кг
$T_{koleb} := 1$	Период собственных колебаний системы T_{koleb} , с
$c\tau_{au} := 0.5$	\leq Отношение постоянной времени затухания колебаний (τ_{au}) к периоду собственных колебаний (T_{koleb})
$\tau_{au} := c\tau_{au} T_{koleb}$	Постоянная времени затухания колебаний $\tau_{au} = 0.5$ с

Расчет коэфф-та демпфирования C_d : $C_d := 2 \cdot m / \tau_{au}$ $C_d = 1000$ [Н*с.м]

Расчет коэфф-та упругости $K_{pr} \Rightarrow K_{pr} := m \left[\left(\frac{2 \cdot \pi}{T_{koleb}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\tau_{au}} \right)^2 \right]$ $K_{pr} = 13869$ [Н/м]

Собственные колебания массивного тела

$$f_{cos0}(t) := e^{-\frac{t}{\tau_{au}}} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_{koleb}}\right) \quad \leq \text{реакция системы на единичное вертикальное смещение массивного тела на [1 м]}$$

$$f_{sin0}(t) := e^{-\frac{t}{\tau_{au}}} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_{koleb}}\right) \quad \leq \text{реакция системы на единичную вертикальную скорость массивного тела [1 м/сек]}$$

Шаг 2.3. Расчет избыточного ускорения массивного тела.

$a_m(t) = d V(t) / dt$ [м/с²] методом центральных разностей.

4.3. ЭТАП 3. Исследование зависимости избыточного ускорения массивного тела от одного из параметров системы

Шаг 3.1. Создать вектор Var из трех-пяти элементов, содержащий значения варьируемого параметра и пустой шаблон вектора $amMAX$ такого же размера, который будет содержать максимальные значения $MAXam$ - модуля дополнительного ускорения массивного тела $a_m(t)$ при соответствующих значениях варьируемого параметра.

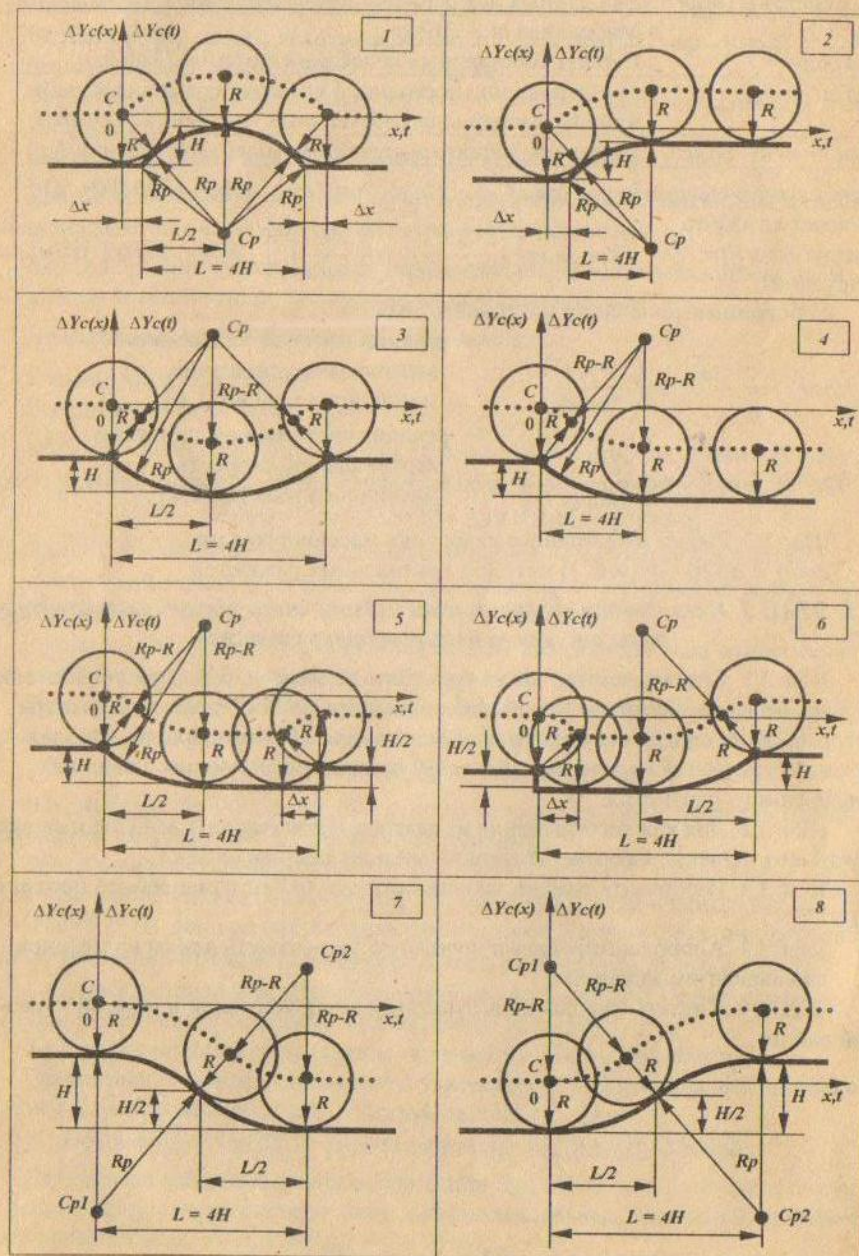
Шаг 3.2. Для каждого значения из вектора Var вычислить $MAXam$ и скопировать его значение в соответствующий элемент вектора $amMAX$.

Шаг 3.3. Изобразить график зависимости $amMAX$ от изменяемого параметра.

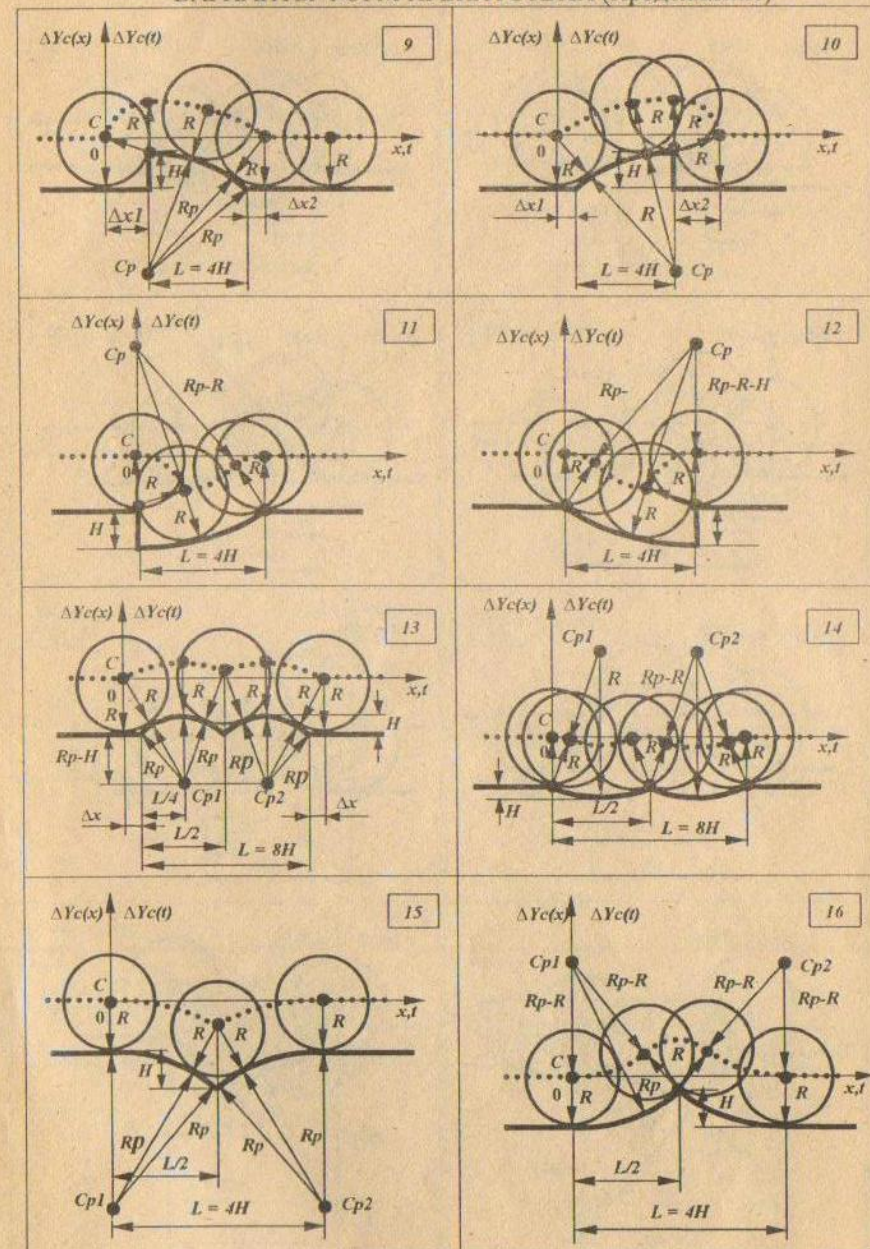
Шаг 3.4. Аппроксимировать полученную зависимость одним из методов (по вариантам заданий).

Шаг 3.5. Сделать выводы по результатам аппроксимации и по всей курсовой работе.

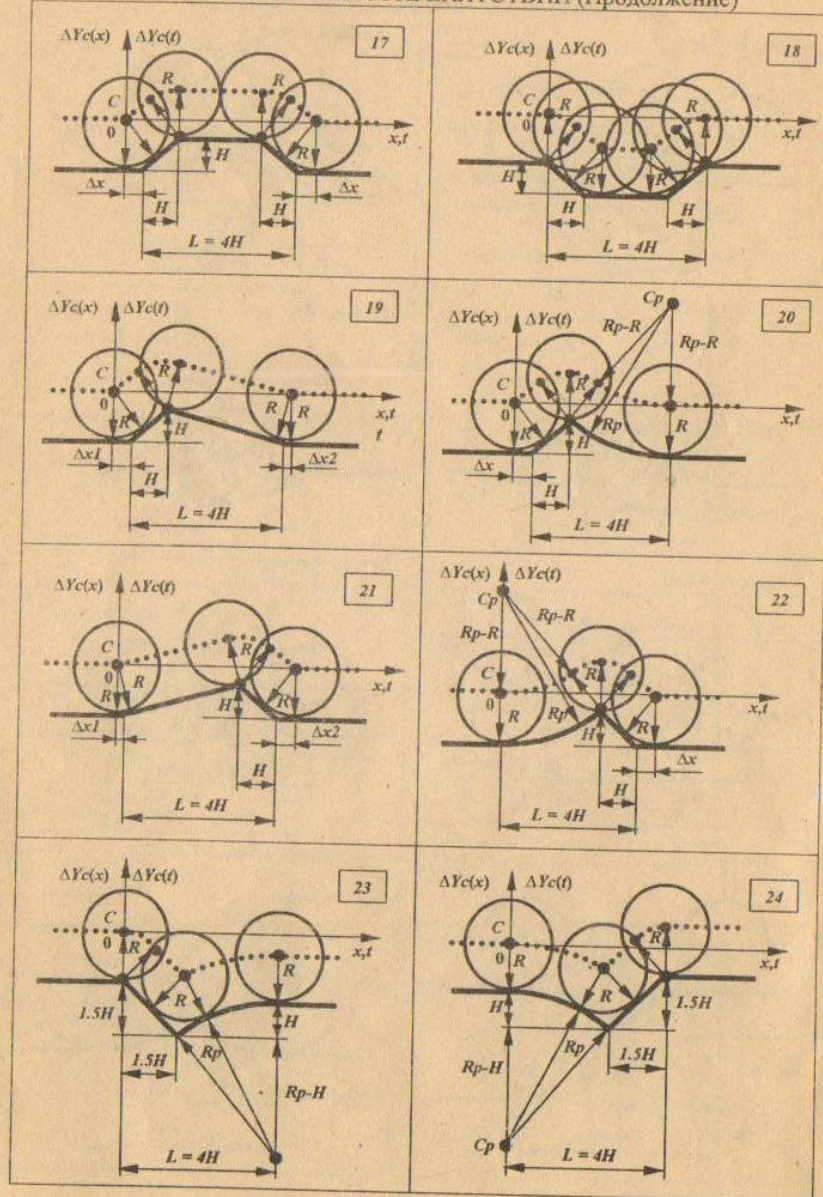
5. ВАРИАНТЫ ФОРМ ПРЕПЯТСТВИЙ



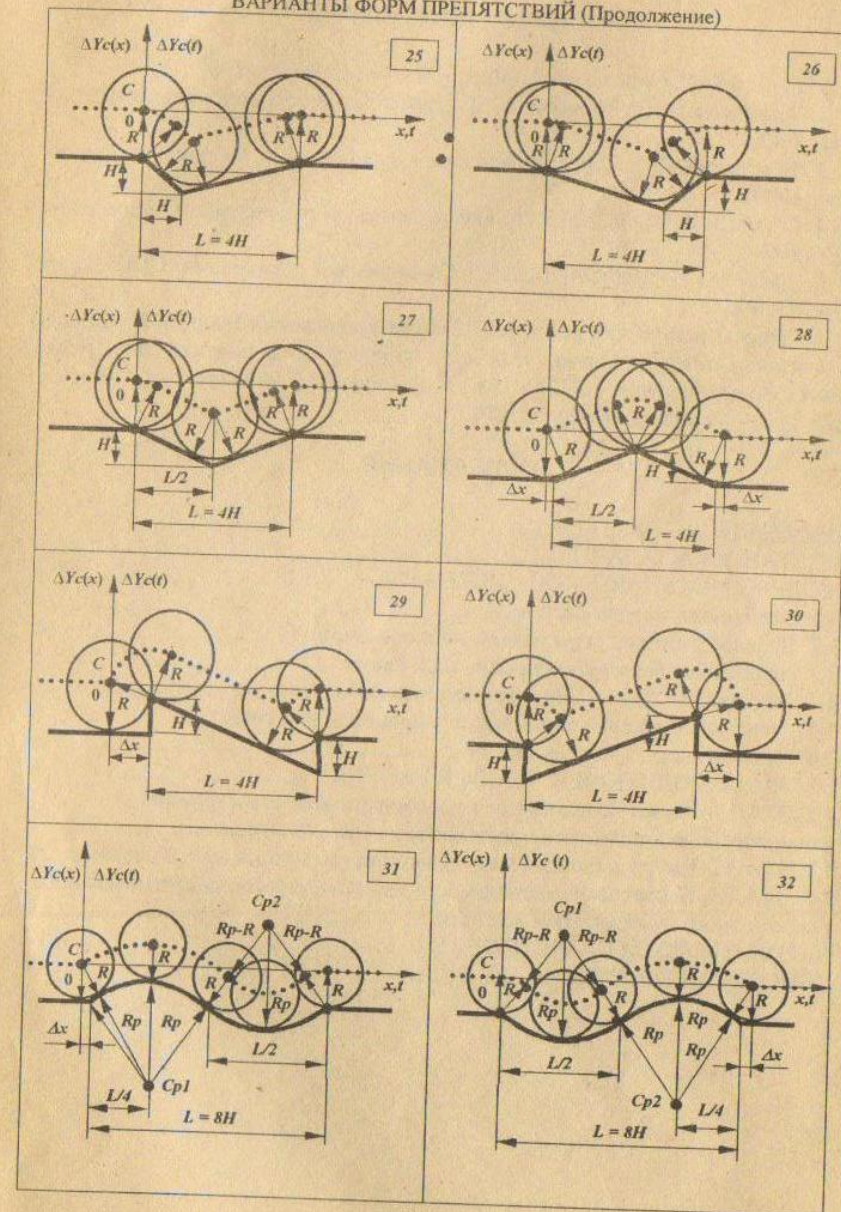
ВАРИАНТЫ ФОРМ ПРЕПЯТСТВИЙ (Продолжение)



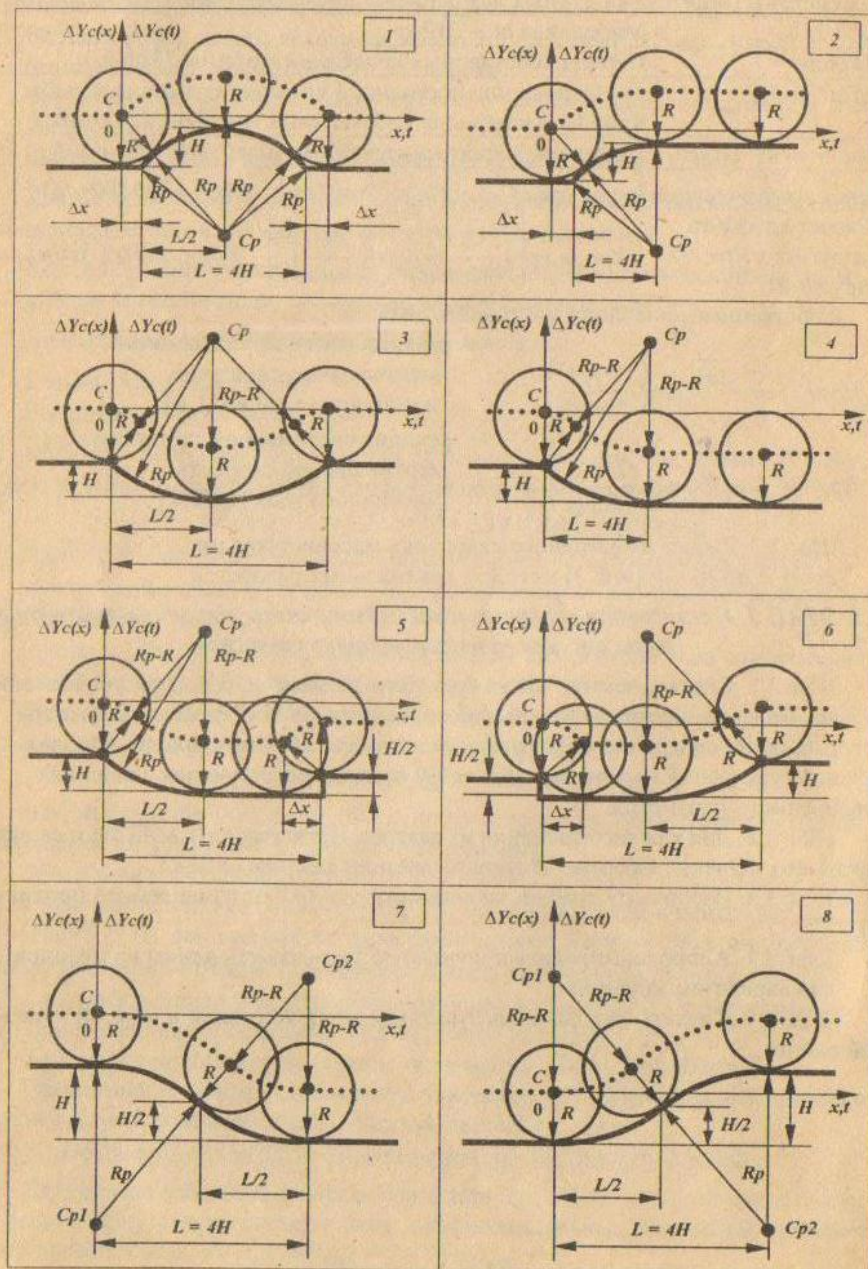
ВАРИАНТЫ ФОРМ ПРЕПЯТСТВИЙ (Продолжение)



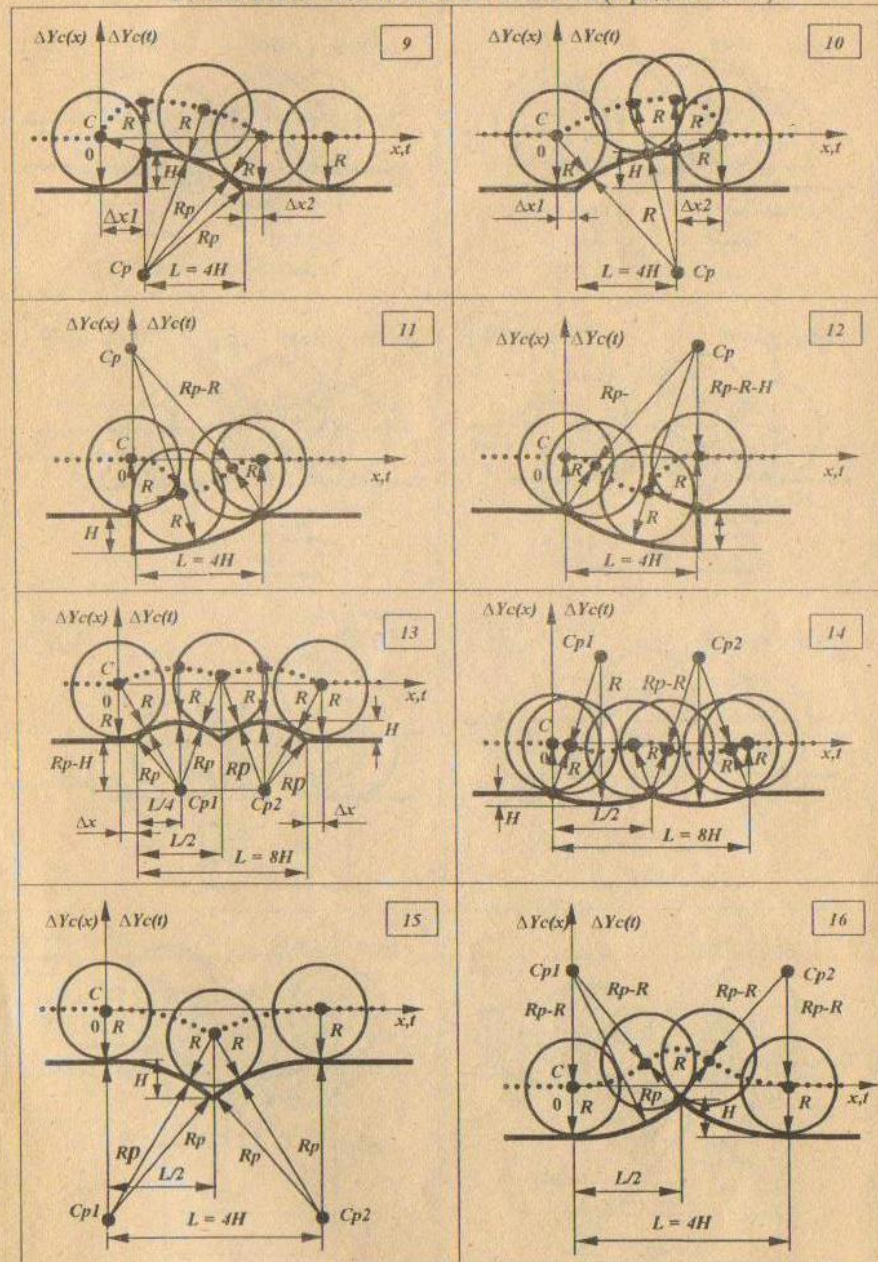
ВАРИАНТЫ ФОРМ ПРЕПЯТСТВИЙ (Продолжение)



5. ВАРИАНТЫ ФОРМ ПРЕПЯТСТВИЙ



ВАРИАНТЫ ФОРМ ПРЕПЯТСТВИЙ (Продолжение)



6. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Турчак Л. И. Основы численных методов. М.: Наука, 1987.
2. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы прикладной математики. М.: Наука, 1965.
3. Понтрягин Л. С. Дифференциальные уравнения и их приложения. М.: Наука, 1988.
4. Очков В. Ф. MathCAD 7 Pro для студентов и инженеров. М.: Компьютер Пресс, 1998.
5. Дьяконов В. MathCAD 8/2000: Специальный справочник. СПб: Изд-во "Питер", 2000.
6. Основы технологии работы в Windows-приложении MathCAD и элементы численных методов: Метод. разработка по курсу "Информатика" для студентов всех форм обучения/ НГТУ; Сост.: В.Ф. Билуба, Т.В. Моругина, Н.Н. Осипенко, О.И. Чайкина. Н. Новгород, 2000.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ.....	3
2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....	3
3. МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.....	4
3.1. Физическая модель системы.....	4
3.2. Процесс работы и силы, возникающие в системе.....	4
3.3 Упрощенная физическая модель всей системы.....	5
3.4 Упрощенные физическая и геометрическая модели упругого колеса.....	5
3.5. Физические законы, описывающие процессы в системе.....	6
3.6. Математическая модель задачи.....	6
4. ЭТАПЫ ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ.....	6
4.1. ЭТАП 1. Расчет координат центра упругого колеса и скорости их изменения по участкам траектории центра жёсткого колеса.....	7
4.2. ЭТАП 2. Расчет динамических характеристик механической системы.....	8
4.3. ЭТАП 3. Исследование зависимости избыточного ускорения массивного тела от одного из параметров системы.....	9
5. ВАРИАНТЫ ФОРМ ПРЕПЯТСТВИЙ.....	10
6. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	14