

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра теоретической механики

Л.И. Кудина

# **ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР СОСТАВНОЙ КОНСТРУКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРИНЦИПА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ**

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве методических указаний для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по техническим направлениям подготовки бакалавров

Оренбург  
2013

УДК 531.259.1  
ББК 22.21я73  
К 88

Рецензент – доцент, кандидат технических наук С.Н. Горелов

**Кудина, Л.И.**  
К 88      Определение реакций опор составной конструкции с помощью принципа возможных перемещений: методические указания / Л.И. Кудина; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2013. – 34с.

Методические указания содержат краткие теоретические сведения и рекомендации по решению задач на определение реакций опор составных конструкций с помощью принципа возможных перемещений, а также варианты заданий для расчетно-графической работы и примеры ее выполнения.

Предназначены для самостоятельной работы студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по техническим направлениям подготовки бакалавров всех форм обучения, при выполнении расчетно-графической работы по дисциплине «Теоретическая механика». Будут также полезны студентам при самостоятельном изучении курса теоретической механики и подготовке к практическим занятиям по данной теме.

УДК 531.259.1  
ББК 22.21я73

©Кудина Л.И., 2013  
©ОГУ, 2013

## Содержание

1 Краткие теоретические сведения .....	4
1.1 Классификация связей .....	4
1.2 Возможные и действительные перемещения .....	6
1.3 Возможная работа силы. Идеальные связи .....	8
1.4 Принцип возможных перемещений .....	10
1.5 Общие рекомендации по решению задач .....	11
2 Вопросы для самоконтроля .....	13
3 Задание. Определение реакций опор_ составной конструкции с помощью принципа возможных перемещений .....	14
3.1 Содержание задания.....	14
3.2 Примеры выполнения задания.....	17
3.3 Общие требования к оформлению отчета по расчетно-графической работе .....	33
4 Литература, рекомендуемая для изучения темы.....	34

# 1 Краткие теоретические сведения

## 1.1 Классификация связей

Механическая система материальных точек называется *свободной*, если положения и скорости ее точек могут принимать произвольные значения. Если же на положения и скорости точек механической системы наложены некоторые ограничения, то механическая система называется *несвободной*, а сами эти ограничения называются *связями*. Конструктивно связи реализуются в виде поверхностей, направляющих, шарниров, стержней, нитей и т.д. Аналитически ограничения, накладываемые связями на перемещения и скорости точек системы, описываются с помощью некоторых соотношений, называемых *уравнениями (неравенствами) связей*. В общем случае уравнения связей могут содержать координаты точек механической системы, их скорости, время:

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, t) = 0. \quad (1.1)$$

Если время  $t$  явно не входит в уравнение связи, то связь называется *стационарной*. Если же время  $t$  входит в уравнение связи явно, то такая связь называется *нестационарной*.

Например, положение точки  $A$  кривошипно-шатунного механизма, изображенного на рисунке 1, определяется соотношением

$$x_A^2 + y_A^2 = r^2. \quad (1.2)$$

В уравнение (1.2) время  $t$  явно не входит, хотя координаты точки  $A$  и являются, строго говоря, функциями времени, поэтому наложенная на точку  $A$  связь является стационарной.

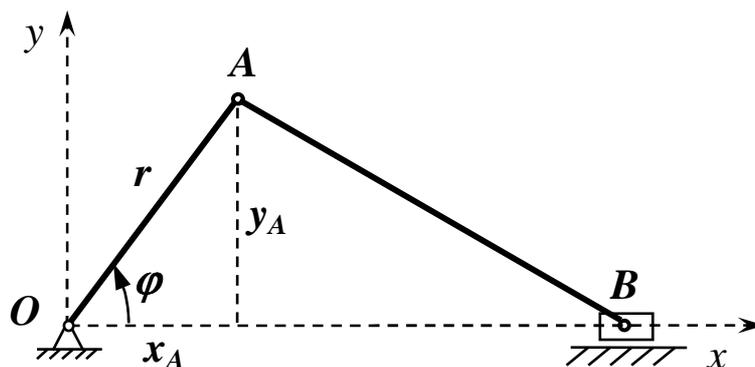


Рисунок 1

Связь, препятствующая перемещениям точек системы в некотором направлении и не допускающая перемещений этих точек в направлении, противоположном первому, называется *удерживающей (двусторонней)*. *Неудерживающей (односторонней)* называется связь, препятствующая перемещениям точек системы в некотором направлении и не работающая при перемещениях этих точек в противоположном направлении. Примером неудерживающей (односторонней) связи может служить гибкая нерастяжимая нить (рисунок 2).

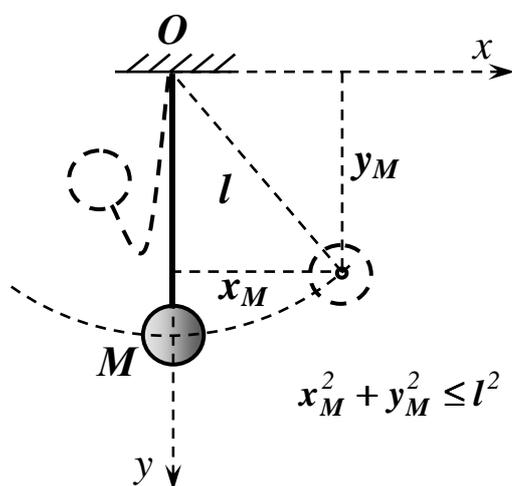


Рисунок 2

Нерастяжимая нить не допускает удаления подвешенного на ней тела  $M$  от точки подвеса  $O$ , но не мешает этому телу приближаться к ней (в этом случае нить провисает и связь не работает).

Следует заметить, что удерживающие связи аналитически описываются уравнениями, а не удерживающие – неравенствами. Так, соотношение (1.2) – уравнение удерживающей связи.

Связи, накладывающие ограничения только на положения точек механической системы, называются *голономными (геометрическими)*. Связи, ограничивающие не только положения, но и скорости точек, называются *неголономными (кинематическими)*.

В уравнения голономных связей входят только координаты точек системы, и не входят производные от этих координат по времени, т.е. проекции скоростей точек:

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots, t) = 0. \quad (1.3)$$

Вообще говоря, голономные связи могут описываться и дифференциальными уравнениями, но в этом случае уравнения обязательно должны быть интегрируемыми.

Уравнения неголономных связей имеют вид (1.1), т.е. содержат не только координаты точек системы, но и их производные по времени, и представляют собой неинтегрируемые дифференциальные уравнения.

## 1.2 Возможные и действительные перемещения

**Возможным перемещением** материальной точки называется всякое воображаемое бесконечно малое её перемещение, допускаемое в данный момент времени наложенными на точку связями.

Понятие возможного перемещения чисто геометрическое. Возможное перемещение не зависит от действующих на точку сил, а определяется только характером наложенных на точку связей. В этом состоит существенное отличие возможного перемещения от действительного. Величина и направление последнего определяется

как наложенными на точку связями, так и действующими на нее силами и начальными условиями.

Следует заметить, что в случае стационарных голономных связей элементарное действительное перемещение точки  $d\vec{r}$  совпадает с одним из ее возможных перемещений  $\delta\vec{r}$ . В случае же нестационарных голономных связей элементарное действительное перемещение точки  $d\vec{r}$  не совпадает ни с одним из возможных перемещений  $\delta\vec{r}$ .

Аналогично вводится понятие возможного перемещения механической системы, которое определяется как совокупность возможных перемещений всех ее точек. Иначе говоря, возможное перемещение точек механической системы рассматривается как совокупность любых допускаемых связями системы перемещений ее точек из положений, занимаемых в данный момент времени, в бесконечно близкие положения, которые они могут занимать в тот же момент времени.

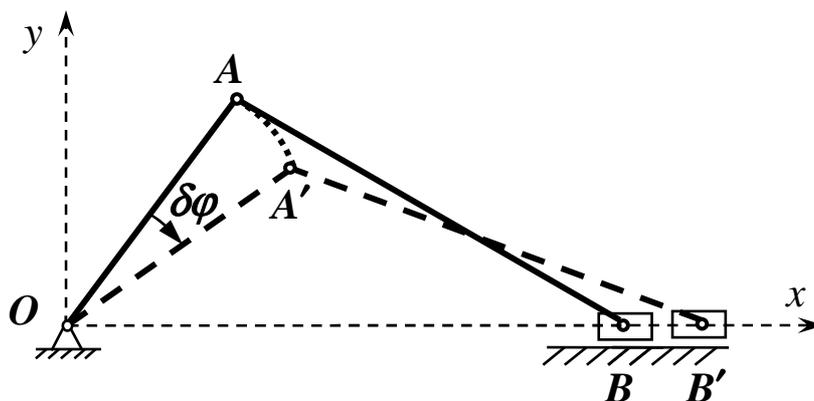


Рисунок 3

Например, для кривошипно-шатунного механизма, изображенного на рисунке 3, возможным является перемещение, соответствующее повороту кривошипа  $OA$  на бесконечно малый угол  $\delta\phi$  вокруг точки  $O$ . При этом точка  $A$  должна переместиться по дуге окружности  $AA' = OA \cdot \delta\phi$ , а ползун  $B$  получит возможное перемещение  $BB'$ , направленное вдоль опорной поверхности вправо.

Возможные перемещения точек механической системы рассматривают как величины первого порядка малости, поэтому криволинейные возможные перемещения точек заменяют прямолинейными отрезками, направленными по касательным к траекториям точек  $\delta\vec{S}_A = A\bar{A}'$ . Как правило, на чертеже возможные перемещения изображают направленными отрезками и дугами, сохраняя при этом зависимости между отдельными возможными перемещениями (рисунок 4).

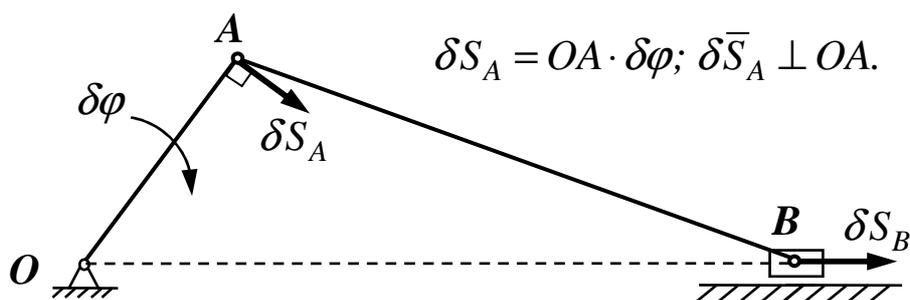


Рисунок 4

### 1.3 Возможная работа силы. Идеальные связи

*Возможной работой* силы называется элементарная работа, которую сила могла бы совершить на любом возможном перемещении точки ее приложения:

$$\delta A(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \delta\vec{r}. \quad (1.4)$$

Для вычисления возможной работы силы можно применять все известные из курса динамики формулы для вычисления элементарной работы силы, заменяя при этом действительные перемещения на возможные.

Например, возможную работу силы, приложенной к твердому телу, можно вычислять по формуле:

$$\delta A(\vec{F}) = \pm F \cdot \delta S \cdot \cos(\alpha); \quad (1.5)$$

где  $\alpha$  – острый угол между направлением силы  $\bar{F}$  и направлением возможного перемещения точки ее приложения  $\delta\bar{S}$ .

Возможная работа силы положительна, если направление действия силы совпадает с направлением возможного перемещения, и наоборот.

Возможную работу силы, приложенной к твердому телу, для которого возможен поворот вокруг некоторой оси, удобно вычислять по следующей формуле:

$$\delta A(\bar{F}) = \pm m_z(\bar{F}) \cdot \delta\varphi; \quad (1.6)$$

где  $m_z(\bar{F})$  – момент силы  $\bar{F}$  относительно оси вращения тела;

$\delta\varphi$  – возможный угол поворота тела.

Возможная работа силы положительна, если направление вращения силы относительно оси  $z$  совпадает с направлением возможного перемещения, и наоборот.

С понятием возможной работы силы тесно связано понятие так называемых *идеальных связей*.

*Идеальными* называются связи, сумма элементарных работ реакций которых на любом возможном перемещении системы равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n (\bar{R}_k \cdot \delta\bar{r}_k) = 0. \quad (1.7)$$

где  $\bar{R}_k$  – реакция связи, действующая на  $k$ -тую точку системы;

$\delta\bar{r}_k$  – возможное перемещение  $k$ -той точки.

Примерами идеальных связей являются:

- абсолютно гладкие поверхности и линии (направляющие);
- нерастяжимые нити;
- шарниры и подшипники без трения;
- абсолютно твердая шероховатая поверхность при перекатывании по ней абсолютно твердого тела без скольжения.

В первом случае реакция связи направлена по нормали к поверхности и, следовательно, перпендикулярна любому возможному перемещению точки. В последнем случае, несмотря на наличие силы трения скольжения, ее возможная работа будет равна нулю, т.к. эта реакция приложена в точке, скорость которой в данный момент времени равна нулю (возможное перемещение точки приложения силы в данный момент времени равно нулю).

#### 1.4 Принцип возможных перемещений

*Принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа)* выражает необходимое и достаточное условие равновесия механической системы.

*Для равновесия механической системы с удерживающими, идеальными, голономными и стационарными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил, действующих на систему, на любых возможных перемещениях системы равнялась нулю:*

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^a = \sum_{k=1}^n (\bar{F}_k^a \cdot \delta \bar{r}_k) = 0. \quad (1.8)$$

где  $\bar{F}_k^a$  – равнодействующая всех приложенных к  $k$ -той точке активных сил (внешних и внутренних);

$\delta \bar{r}_k$  – возможное перемещение  $k$ -той точки системы.

В ряде случаев при решении задач удобнее использовать другую формулировку принципа возможных перемещений, так называемое *уравнение возможных мощностей*.

*Для равновесия механической системы с удерживающими, идеальными, голономными и стационарными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма возможных мощностей всех активных сил системы равнялась нулю:*

$$\sum_{k=1}^n (\bar{F}_k^a \cdot \bar{v}_k) = 0. \quad (1.9)$$

где  $\bar{v}_k$  – возможная скорость  $k$ -той точки системы.

Возможная мощность силы находится как скалярное произведение вектора силы  $\bar{F}_k^a$  на возможную скорость точки ее приложения  $\bar{v}_k$ . Направление возможной скорости точки  $\bar{v}_k$  совпадает с направлением её возможного перемещения  $\delta \bar{r}_k$  и зависит только от характера наложенных на систему связей.

Принцип возможных перемещений дает универсальный метод решения задач статики для любой механической системы и любой системы сил, действующей на точки системы. При этом указанный принцип позволяет исключить из уравнений равновесия все неизвестные реакции идеальных связей и требует учета только активных сил. Следует заметить, что принцип возможных перемещений можно применять к решению задач о равновесии механических систем и в случае наличия в системе неидеальных связей. Если не все связи, наложенные на систему, являются идеальными, например, имеются негладкие плоскости и поверхности, то в уравнениях (1.8) и (1.9) к активным силам следует добавить силы трения и приравнять к нулю сумму возможных работ не только активных сил, но и сил трения.

## 1.5 Общие рекомендации по решению задач

При определении реакций составных конструкций с помощью принципа возможных перемещений рекомендуется придерживаться следующей последовательности:

- 1 Освободить конструкцию от той связи, реакцию которой надо определить. В соответствии с принципом освобождаемости от связей заменить действие отброшенной связи реакцией.
- 2 Изобразить на чертеже действующие на систему активные силы.

- 3 Сообщить одной из частей системы возможное перемещение (скорость) и установить связь между перемещениями (скоростями) отдельных точек и тел, входящих в систему.
- 4 Составить уравнение равновесия полученной системы в форме (1.8) или (1.9) и определить искомую реакцию.

Связи целесообразно отбрасывать таким образом, чтобы полученная система получала только одну степень свободы. Например, для определения горизонтальной составляющей реакции неподвижного цилиндрического шарнира следует «разрушить» ту часть связи, которая препятствует горизонтальному перемещению шарнира и заменить его подвижным цилиндрическим шарниром на горизонтальных направляющих. Аналогично, для определения вертикальной составляющей реакции неподвижного цилиндрического шарнира следует заменить его подвижным шарниром на вертикальных направляющих. Для определения реактивного момента жесткой заделки нужно заменить ее неподвижным цилиндрическим шарниром. Если же требуется определить горизонтальную или вертикальную составляющую реакции жесткой заделки, то следует заменить её скользящей заделкой в горизонтальных или вертикальных направляющих соответственно.

Так как после отбрасывания одной связи исходная система превращается в систему с одной степенью свободы, то она будет иметь одно независимое возможное перемещение. Задание возможных перемещений следует производить, исходя из следующих соображений. Если на одной из частей системы есть неподвижная точка (как правило, неподвижный цилиндрический шарнир), то возможным для нее является бесконечно малый поворот вокруг этой точки. Если же какая-либо часть системы имеет скользящую заделку, то возможным перемещением для этой части будет поступательное перемещение. Задав возможное перемещение одной из частей системы, переходят к анализу возможного перемещения второй части. В большинстве случаев вторая часть будет совершать бесконечно малый поворот вокруг мгновенного центра скоростей. Подробнее этот вопрос рассмотрен в пункте 3.2 Примеры выполнения задания.

## 2 Вопросы для самоконтроля

- 1 Какие связи механической системы называются стационарными?
- 2 Как называется связь, в уравнение которой явно входит время?
- 3 Какие связи механической системы называются голономными? неголономными? В чем состоит различие между уравнениями таких связей?
- 4 Какие связи механической системы называются удерживающими? не-удерживающими?
- 5 Какие связи математически описываются уравнениями, а какие неравенствами?
- 6 Какое перемещение точки называется возможным? Каким условиям должно удовлетворять такое перемещение?
- 7 Какое перемещение механической системы называется возможным?
- 8 В чём заключается отличие возможных перемещений от действительных?
- 9 При каких связях элементарное действительное перемещение точки является одним из возможных?
- 10 Как определяется работа силы на возможном перемещении? Запишите формулы для вычисления возможной работы силы.
- 11 Какие связи механической системы называются идеальными? Назовите примеры идеальных связей.
- 12 Как формулируется принцип возможных перемещений? возможных мощностей?
- 13 Как направлена возможная скорость точки?
- 14 Почему для определения реакций связей с помощью принципа возможных перемещений сначала необходимо применить принцип освобожденности от связей?
- 15 Можно ли применить принцип возможных перемещений к расчету систем с неидеальными связями, например, при наличии трения?

### 3 Задание. Определение реакций опор составной конструкции с помощью принципа возможных перемещений

#### 3.1 Содержание задания

Определить реакции опор составной конструкции с идеальными связями от заданной внешней нагрузки, используя принцип возможных перемещений (возможных мощностей).

Схемы конструкций с действующей внешней нагрузкой показаны на рисунках 5-6. Исходные данные для решения задания приведены в таблице 1. Нагрузку, величина которой в таблице 1 равна нулю, на схеме не изображать.

Опоры конструкций на рисунках 5-6, не показаны, они устанавливаются в соответствии с выбранным номером условия из таблицы 1. Типы опор и варианты их установки указаны в таблице 2.

Все внешние связи, включая подвижные шарниры, – удерживающие. Конструкция подвижных шарниров исключает отрыв катков от опорной плоскости.

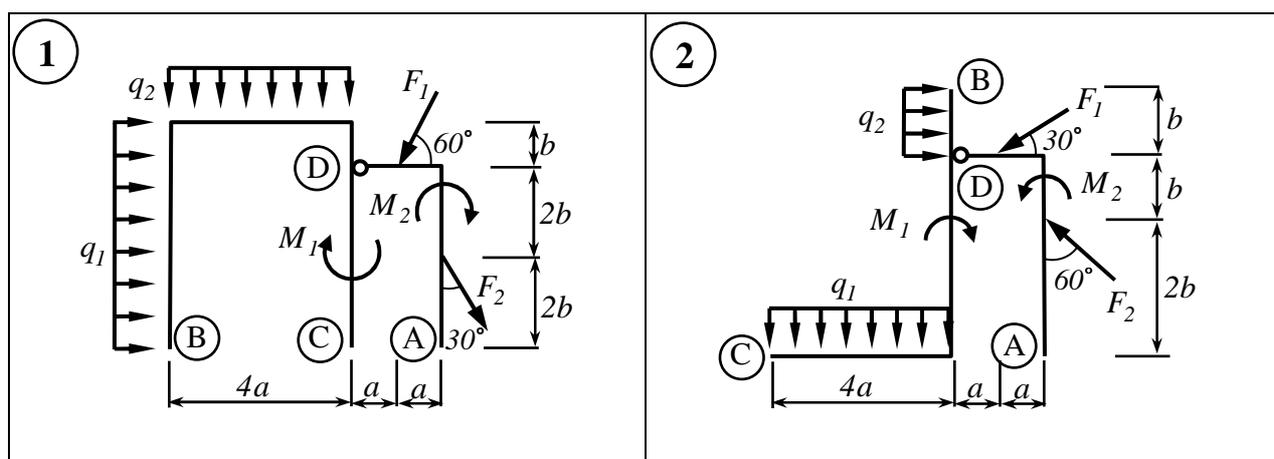


Рисунок 5

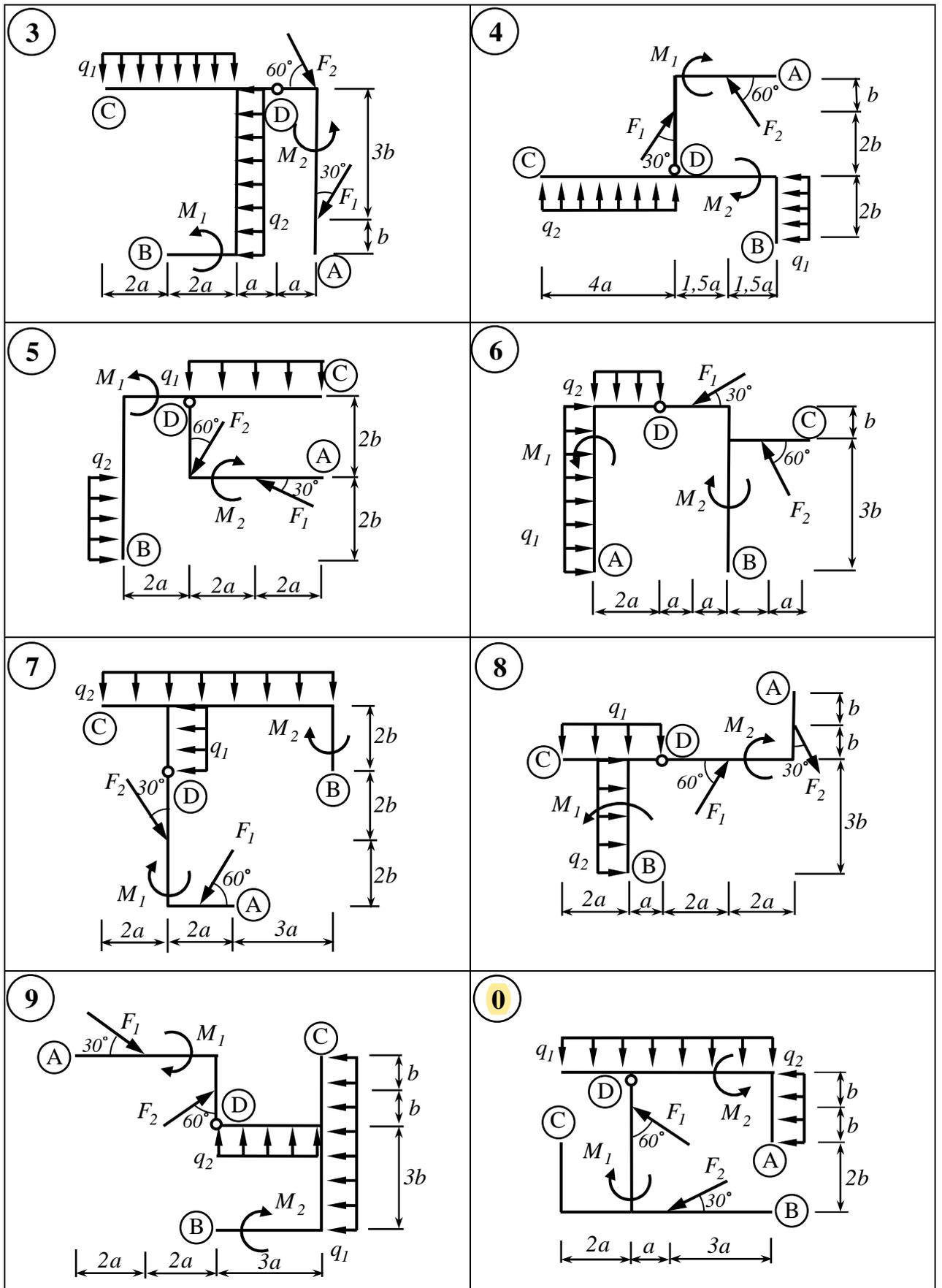
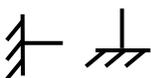
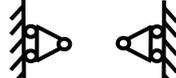


Рисунок 6

Таблица 1 – Исходные данные

Первая цифра цифра	Величина нагрузки						Вторая цифра цифра	Размеры		Точки установки опорных связей				Третья цифра цифра (№ схемы)
	$q_1$ , кН/м	$q_2$ , кН/м	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН	$M_1$ , кН·м	$M_2$ , кН·м		$a$ , м	$b$ , м	1 тип	2 тип	3 тип	4 тип	
<b>0</b>	0	2	10	0	12	0	<b>0</b>	3	2	A	-	B	-	<b>0</b>
<b>1</b>	0	4	8	0	0	5	<b>1</b>	2,5	2	-	A, B	-	-	<b>1</b>
<b>2</b>	5	0	0	10	0	8	<b>2</b>	2	1,5	-	C	A, B	-	<b>2</b>
<b>3</b>	0	5	0	4	10	0	<b>3</b>	1	0,5	A	-	-	C	<b>3</b>
<b>4</b>	4	0	6	0	5	0	<b>4</b>	1,5	1	-	A	B	C	<b>4</b>
<b>5</b>	3	0	0	8	0	10	<b>5</b>	3	1,5	-	B	-	A, C	<b>5</b>
<b>6</b>	2	0	12	0	8	0	<b>6</b>	1,5	3	C	-	A	-	<b>6</b>
<b>7</b>	0	3	4	0	0	4	<b>7</b>	1	2	-	A, C	-	-	<b>7</b>
<b>8</b>	5	0	0	12	4	0	<b>8</b>	0,5	1,5	B	-	-	A	<b>8</b>
<b>9</b>	0	2	0	6	0	12	<b>9</b>	2,5	3	-	C	B	A	<b>9</b>

Таблица 2

Виды связей и варианты их установки			
1 тип	2 тип	3 тип	4 тип
жесткая заделка	неподвижный цилиндрический шарнир	подвижный цилиндрический шарнир на вертикальных направляющих	подвижный цилиндрический шарнир на горизонтальных направляющих
			

### 3.2 Примеры выполнения задания

#### Пример 3.2.1

Для конструкции, показанной на рисунке 7, определить реакции опор от действующей внешней нагрузки с помощью принципа возможных перемещений Лагранжа.

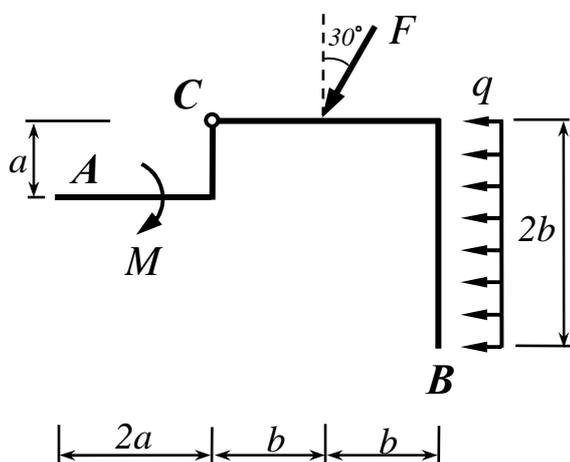


Рисунок 7

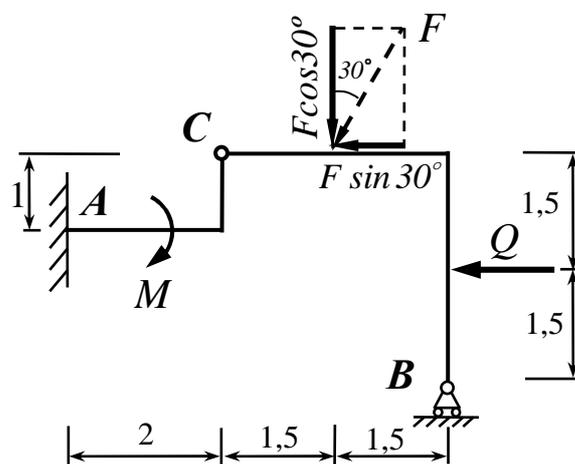


Рисунок 8

**Дано:**  $q = 2 \text{ кН/м}$ ;  $F = 8 \text{ кН}$ ;  $M = 15 \text{ кНм}$ ;  $a = 1 \text{ м}$ ;  $b = 1,5 \text{ м}$ .

Накладываемые на раму внешние связи: в т.  $A$  – связь 1-го типа, в т.  $B$  – связь 4-го типа.

**Решение.**

Изображаем расчетную схему конструкции с указанием внешней нагрузки, всех размеров и устанавливаемых опор. Равномерно распределенную нагрузку заменяем сосредоточенной силой  $Q = q \cdot 2b = 2 \cdot 2 \cdot 1,5 = 6 \text{ кН}$ , приложенной в середине загруженного участка (рисунок 8).

*Определение реакции подвижного шарнира B.* Воспользуемся принципом освобождения от связей и мысленно отбросим опору B, заменив её действие реакцией  $R_B$  (рисунок 9). Полученная система будет иметь одну степень свободы и, следовательно, одно независимое возможное перемещение. На левой части рамы AC находится жесткая заделка, которая исключает всякое перемещение этой части, поэтому левая часть рамы остаётся неподвижной. Возможным перемещением правой части рамы в этом случае будет поворот вокруг шарнира C на бесконечно малый угол  $\delta\varphi$ . Направление поворота выбираем произвольно, например, против хода часовой стрелки.

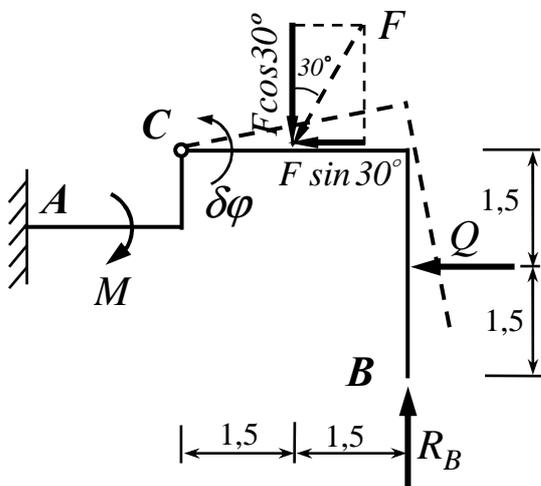


Рисунок 9

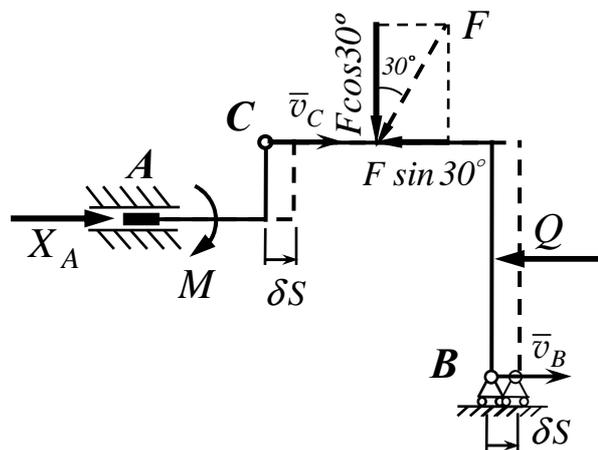


Рисунок 10

Составим уравнение принципа возможных перемещений (1.8). Работу сил, приложенных к вращающемуся телу, вычисляем по формуле (1.6), как взятое с соответствующим знаком произведение момента силы относительно центра вращения на

угол поворота тела. При вычислении момента силы  $F$  удобно воспользоваться теоремой Вариньона, для чего раскладываем силу на ее составляющие  $F' = F \cos 30^\circ$  и  $F'' = F \sin 30^\circ$ .

Уравнение возможных работ (1.8) примет вид:

$$3R_B \delta\varphi - 1,5F \cos 30^\circ \delta\varphi - 1,5Q \delta\varphi = 0. \quad (1.10)$$

Сокращая обе части уравнения (1.10) на  $\delta\varphi$ , получим

$$3R_B - 1,5F \cos 30^\circ - 1,5Q = 0.$$

Откуда,

$$R_B = \frac{F \cos 30^\circ + Q}{2} = \frac{8 \cdot 0,866 + 6}{2} = 6,464 \text{ кН}.$$

*Определение горизонтальной составляющей реакции жесткой заделки  $X_A$ .*

Для определения горизонтальной реакции заделки  $A$  отбросим связь, препятствующую горизонтальному перемещению точки  $A$ , и заменим жесткую заделку скользящей с горизонтальными направляющими, приложив реакцию  $X_A$  (рисунок 10). Полученная система будет иметь одну степень свободы и, следовательно, одно независимое возможное перемещение.

На левой части рамы находится скользящая заделка, которая исключает поворот и вертикальное смещение этой части рамы. Следовательно, для левой части рамы  $AC$  возможно только поступательное горизонтальное перемещение, например, вправо. При этом точка  $C$  получит возможную скорость  $\bar{v}_C$ , направленную вправо. Выясним, какое возможное перемещение получит правая часть рамы  $BC$ . Для подвижного шарнира  $B$  возможным является перемещение вдоль опорной поверхности, его возможная скорость  $\bar{v}_B$  также будет направлена вдоль опорной поверхности

вправо (в соответствии с направлением  $\bar{v}_C$ ). Т.к. скорости точек  $B$  и  $C$  параллельны, то правая часть рамы, как и левая, получит возможное поступательное перемещение. Следовательно, вся система получит поступательное возможное перемещение  $\delta S$ , направленное вправо. Составим уравнение возможных работ (1.8):

$$X_A \delta S - F \sin 30^\circ \delta S - Q \delta S = 0. \quad (1.11)$$

Сокращая обе части (1.11) на  $\delta S$ , получим

$$X_A - F \sin 30^\circ - Q = 0,$$

$$X_A = F \sin 30^\circ + Q = 8 \cdot 0,5 + 6 = 10 \text{ кН}.$$

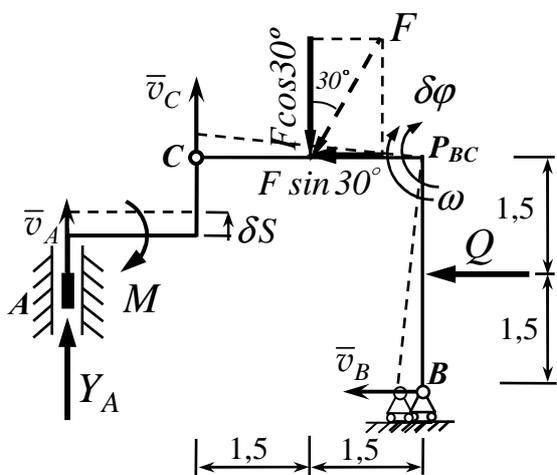


Рисунок 11

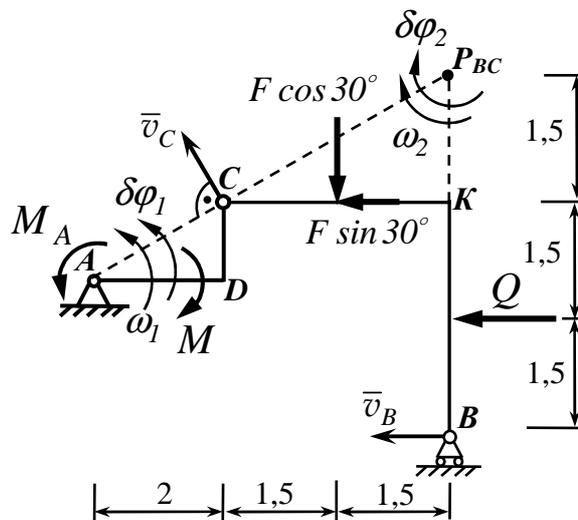


Рисунок 12

*Определение вертикальной составляющей реакции жесткой заделки  $Y_A$ .* Для определения вертикальной составляющей реакции заделки  $A$  отбросим связь, препятствующую вертикальному перемещению точки  $A$ , и заменим жесткую заделку скользящей с вертикальными направляющими, приложив реакцию  $Y_A$  (рисунок 11). Направляющие скользящей заделки исключают поворот и горизонтальное переме-

ещение левой части рамы, поэтому возможным для неё будет поступательное перемещение, например, вверх. При этом точка  $C$  получит возможную скорость  $\bar{v}_C$ , направленную вверх. Установим, какое возможное перемещение совершит правая часть рамы. Возможная скорость подвижного шарнира  $\bar{v}_B$  направлена вдоль опорной поверхности влево (в соответствии с направлением  $\bar{v}_C$ ). Из точек  $C$  и  $B$  восстанавливаем перпендикуляры к направлениям их скоростей  $\bar{v}_C$  и  $\bar{v}_B$ , на пересечении перпендикуляров находится мгновенный центр скоростей (МЦС) точка  $P_{BC}$ . Следовательно, правая часть рамы совершит бесконечно малый поворот вокруг МЦС  $P_{BC}$  на угол  $\delta\varphi$ . Возможная угловая скорость  $\omega$  вращения правой части рамы будет направлена по ходу часовой стрелки (в соответствии с направлениями  $\bar{v}_B$  и  $\bar{v}_C$ ). Точка  $C$  принадлежит одновременно двум частям рамы. С одной стороны, при поступательном движении левой части имеем:

$$v_A = v_C. \quad (1.12)$$

С другой стороны, при вращении правой части рамы вокруг МЦС:

$$v_C = \omega \cdot CP_{BC} = 3\omega. \quad (1.13)$$

Составим уравнение возможных мощностей (1.9):

$$Y_A v_A - 1,5F \cos 30^\circ \omega + 1,5Q\omega = 0. \quad (1.14)$$

С учетом (1.12), (1.13) уравнение (1.14) примет вид:

$$Y_A 3\omega - 1,5F \cos 30^\circ \omega + 1,5Q\omega = 0,$$

$$2Y_A - F \cos 30^\circ + Q = 0.$$

Откуда,

$$Y_A = \frac{F \cos 30^\circ - Q}{2} = \frac{8 \cdot 0,866 - 6}{2} = 0,464 \text{ кН}.$$

*Определение реактивного момента жесткой заделки  $M_A$ .* Отбросим связь, препятствующую повороту левой части рамы и заменим жесткую заделку неподвижной шарнирной опорой, приложив в точке  $A$  искомый момент  $M_A$  (рисунок 12). На левой части рамы находится неподвижная шарнир, поэтому возможным перемещением для левой части рамы будет поворот вокруг неподвижного центра  $A$  на бесконечно малый угол  $\delta\varphi_1$ .

Сообщим этой части рамы возможную угловую скорость  $\omega_1$ , например, по вращению часовой стрелки. Тогда т.  $C$  получит возможную скорость  $\bar{v}_C$ , перпендикулярную отрезку  $AC$ . Направление  $\bar{v}_C$  указываем в соответствии с выбранным направлением  $\omega_1$ . Выясним, какое возможное перемещение совершит при этом правая часть рамы. Подвижный шарнир  $B$  получит возможную скорость  $\bar{v}_B$ , направленную вдоль опорной плоскости вправо (в соответствии с указанным направлением  $\bar{v}_C$ ). Восстанавливая перпендикуляры из точек  $C$  и  $B$  к направлениям соответствующих скоростей, найдем положение мгновенного центра скоростей  $P_{BC}$  для правой части рамы. Следовательно, правая часть рамы совершит возможный поворот на угол  $\delta\varphi_2$  вокруг МЦС  $P_{BC}$  с возможной угловой скоростью  $\omega_2$ , направленной против вращения часовой стрелки (в соответствии с направлением  $\bar{v}_B$  и  $\bar{v}_C$ ).

Установим связь между возможными перемещениями левой и правой частей рамы. Точка  $C$  одновременно принадлежит двум частям рамы. С одной стороны,  $v_C = \omega_1 \cdot AC$ . С другой стороны,  $v_C = \omega_2 \cdot CP_{BC}$ .

Из подобия треугольников  $ADC$  и  $CKP_{BC}$ :

$$\frac{CP_{BC}}{AC} = \frac{KP_{BC}}{DC} = \frac{CK}{AD} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Тогда,

$$v_C = \omega_1 \cdot AC = \omega_2 \cdot CP_{BC},$$

$$\omega_1 = \frac{CP_{BC}}{AC} \omega_2 = 1,5 \omega_2. \quad (1.15)$$

Связь между возможными перемещениями левой и правой частей рамы будет аналогична (1.15)

$$\delta\varphi_1 = \frac{CP_{BC}}{AC} \delta\varphi_2 = 1,5 \delta\varphi_2. \quad (1.16)$$

Уравнение возможных работ (1.8) примет в этом случае вид:

$$M_A \delta\varphi_1 - M \delta\varphi_1 - 1,5F \cos 30^\circ \delta\varphi_2 + 1,5F \sin 30^\circ \delta\varphi_2 + 3Q \delta\varphi_2 = 0.$$

С учетом (1.16), получим

$$M_A \cdot 1,5 \delta\varphi_2 - M \cdot 1,5 \delta\varphi_2 - 1,5F \cos 30^\circ \delta\varphi_2 + 1,5F \sin 30^\circ \delta\varphi_2 + 3Q \delta\varphi_2 = 0,$$

$$M_A - M - F \cos 30^\circ + F \sin 30^\circ + 2Q = 0,$$

$$M_A = M + F \cos 30^\circ - F \sin 30^\circ - 2Q,$$

$$M_A = 15 + 8 \cdot (0,866 - 0,5) - 2 \cdot 6 = 5,928 \text{ кНм}.$$

Проверим правильность решения задачи. Для этого мысленно освободим раму от наложенных на неё связей, заменив их действие на раму соответствующими реакциями (рисунок 13). Составим уравнения равновесия полученной произвольной плоской системы сил:

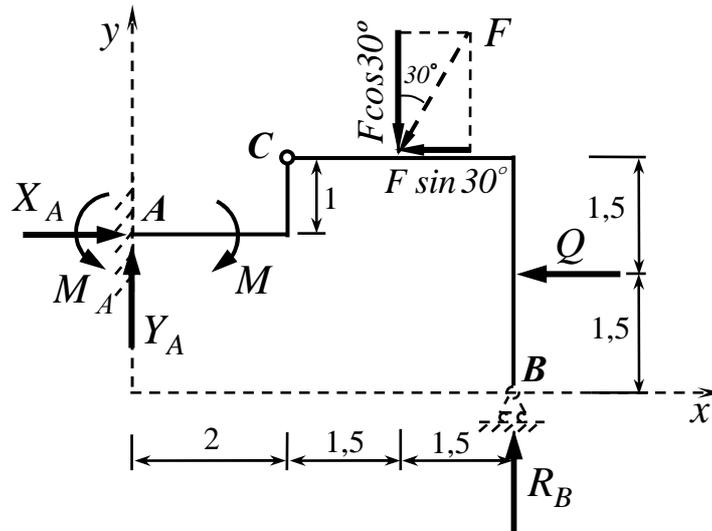


Рисунок 13

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_A(\bar{F}_k) = 0. \end{cases} \begin{cases} X_A - F \sin 30^\circ - Q = 0, \\ Y_A - F \cos 30^\circ + R_B = 0, \\ M_A - M - 3,5F \cos 30^\circ + F \sin 30^\circ - 0,5Q + 5R_B = 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

Убедимся, что найденные значения реакций удовлетворяют составленным уравнениям:

$$\begin{cases} 10 - 8 \cdot 0,5 - 6 = 0, \\ 0,464 - 8 \cdot 0,866 + 6,464 = 0, \\ 5,928 - 15 - 3,5 \cdot 8 \cdot 0,866 + 8 \cdot 0,5 - 0,5 \cdot 6 + 5 \cdot 6,464 = 0. \end{cases}$$

Уравнения равновесия (1.17) выполняются, следовательно, реакции рамы определены верно.

### Пример 3.2.2

Для конструкции, показанной на рисунке 14, определить реакции опор от действующей внешней нагрузки с помощью принципа возможных перемещений Лагранжа.

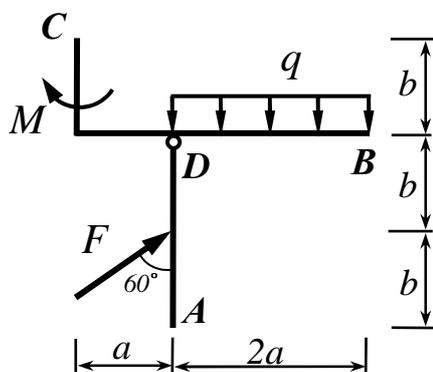


Рисунок 14

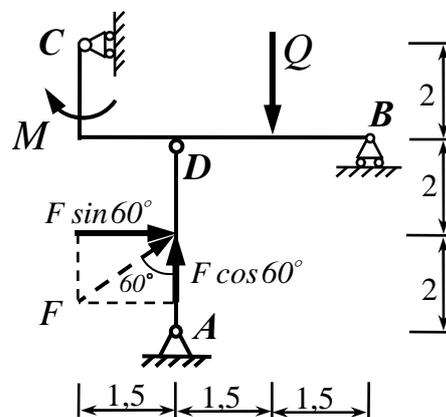


Рисунок 15

**Дано:**  $q = 4 \text{ кН/м}$ ;  $F = 5 \text{ кН}$ ;  $M = 10 \text{ кНм}$ ;  $a = 1,5 \text{ м}$ ;  $b = 2 \text{ м}$ .

Накладываемые на раму внешние связи: в т.  $A$  – связь 2-го типа, в т.  $B$  – связь 4-го типа, в т.  $C$  – связь 3-го типа.

### Решение.

Изображаем расчетную схему конструкции с указанием внешней нагрузки, всех размеров и устанавливаемых опор. Равномерно распределенную нагрузку заменяем сосредоточенной силой  $Q = q \cdot 2a = 4 \cdot 2 \cdot 1,5 = 12 \text{ кН}$ , приложенной в середине загруженного участка (рисунок 15).

*Определение реакции подвижного шарнира  $B$ .* Воспользуемся принципом освобождения от связей и мысленно отбросим опору  $B$ , заменив её действие реакцией  $R_B$  (рисунок 16). Полученная система будет иметь одну степень свободы и, следовательно, одно независимое возможное перемещение.

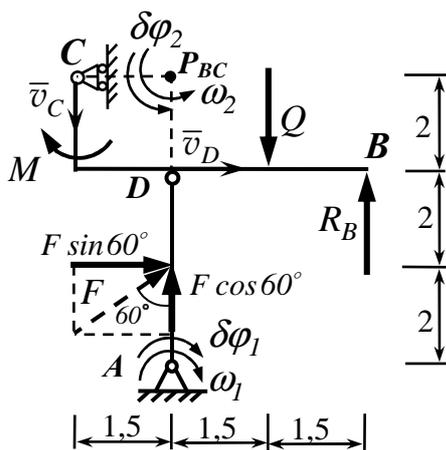


Рисунок 16

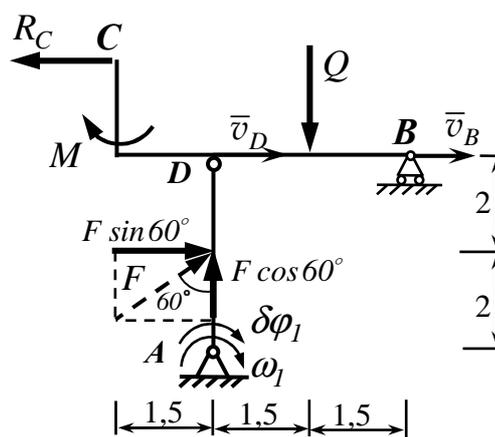


Рисунок 17

Т.к. на нижней части рамы  $AD$  находится неподвижный шарнир  $A$ , то возможным перемещением для нее будет поворот вокруг центра  $A$  на бесконечно малый угол  $\delta\varphi_1$ . Сообщим этой части рамы возможную угловую скорость  $\omega_1$ , направленную, например, по часовой стрелке. При этом т.  $D$  получит возможную скорость  $\bar{v}_D$ , перпендикулярную отрезку  $AD$  и направленную вправо.

Выясним, какое возможное перемещение в этом случае совершит верхняя часть рамы  $BC$ . Возможная скорость подвижного шарнира  $C$   $\bar{v}_C$  будет направлена вдоль опорной плоскости шарнира вниз (в соответствии с направлением  $\bar{v}_D$ ). Восстанавливая перпендикуляры из точек  $D$  и  $C$  к направлениям соответствующих скоростей, найдем положение мгновенного центра скоростей  $P_{BC}$  для верхней части рамы. Следовательно, эта часть конструкции повернется вокруг МЦС  $P_{BC}$  с возможной угловой скоростью  $\omega_2$  против хода часовой стрелки (в соответствии с направлением  $\bar{v}_C$  и  $\bar{v}_D$ ) на бесконечно малый угол  $\delta\varphi_2$ .

Установим связь между возможными перемещениями. Точка  $D$  одновременно принадлежит двум частям рамы. С одной стороны,  $v_D = \omega_1 \cdot AD$ . С другой стороны,  $v_D = \omega_2 \cdot DP_{BC}$ .

Тогда,

$$v_D = \omega_1 \cdot AD = \omega_2 \cdot DP_{BC},$$

$$\omega_1 = \frac{DP_{BC}}{AD} \omega_2 = \frac{2}{4} \omega_2 = 0,5 \omega_2. \quad (1.18)$$

Связь между возможными перемещениями левой и правой частей рамы будет аналогична (1.18)

$$\delta\varphi_1 = \frac{DP_{BC}}{AD} \delta\varphi_2 = 0,5 \delta\varphi_2. \quad (1.19)$$

Составим уравнение возможных работ (1.8):

$$2F \sin 60^\circ \delta\varphi_1 - M \delta\varphi_2 - 1,5Q \delta\varphi_2 + 3R_B \delta\varphi_2 = 0. \quad (1.20)$$

С учетом (1.19) уравнение (1.20) примет вид:

$$2F \sin 60^\circ \cdot 0,5 \delta\varphi_2 - M \delta\varphi_2 - 1,5Q \delta\varphi_2 + 3R_B \delta\varphi_2 = 0,$$

$$F \sin 60^\circ - M - 1,5Q + 3R_B = 0,$$

$$R_B = \frac{M + 1,5Q - F \sin 60^\circ}{3} = \frac{10 + 1,5 \cdot 12 - 5 \cdot 0,866}{3} = 7,89 \text{ кН}.$$

*Определение реакции подвижного шарнира С.* Воспользуемся принципом освобожденности от связей и мысленно отбросим опору С, заменив её действие реакцией  $R_C$  (рисунок 17). Полученная система будет иметь одну степень свободы и, следовательно, одно независимое возможное перемещение.

Т.к. на нижней части рамы  $AD$  находится неподвижный шарнир  $A$ , то возможным перемещением для нее будет поворот вокруг центра  $A$  на бесконечно малый угол  $\delta\varphi_1$ . Сообщим этой части рамы возможную угловую скорость  $\omega_1$ , направлен-

ную, например, по часовой стрелке. При этом т.  $D$  получит возможную скорость  $\bar{v}_D$ , перпендикулярную отрезку  $AD$  и направленную вправо.

Выясним, какое возможное перемещение в этом случае совершит верхняя часть рамы  $BC$ . Возможная скорость подвижного шарнира  $B$   $\bar{v}_B$  будет направлена вдоль опорной плоскости шарнира вправо (в соответствии с направлением  $\bar{v}_D$ ). Т.к. направления скоростей двух точек  $B$  и  $D$  этой части рамы совпадают, то вся верхняя часть рамы получит возможное поступательное перемещение, скорость которого равна

$$v = v_B = v_C = v_D = \omega_1 \cdot AD = 4\omega_1. \quad (1.21)$$

Составим уравнение возможных мощностей (1.9):

$$2F \sin 60^\circ \omega_1 - R_C v = 0. \quad (1.22)$$

С учетом (1.21) уравнение (1.22) примет вид:

$$2F \sin 60^\circ \omega_1 - R_C \cdot 4\omega_1 = 0,$$

$$F \sin 60^\circ - 2R_C = 0,$$

$$R_C = \frac{F \sin 60^\circ}{2} = \frac{5 \cdot 0,866}{2} = 2,165 \text{ кН}.$$

*Определение вертикальной составляющей реакции неподвижного шарнира  $A$ .* Отбросим связь, препятствующую вертикальному смещению опоры  $A$ , заменив неподвижный шарнир подвижной шарнирной опорой на вертикальных направляющих и приложив в т.  $A$  искомую реакцию  $Y_A$  (рисунок 18). Полученная система будет иметь одну степень свободы и, следовательно, одно независимое возможное перемещение.

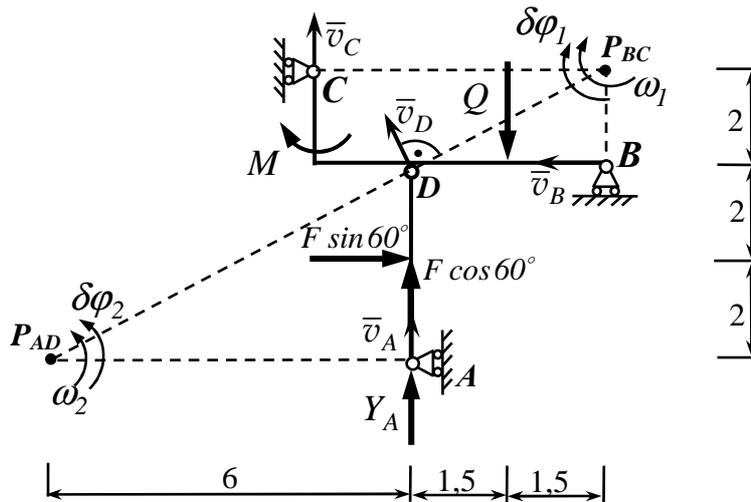


Рисунок 18

Анализ характера возможного перемещения рамы начнем с верхней части, т.к. на ней расположены две опоры. Возможные скорости точек  $B$  и  $C$  будут направлены вдоль соответствующих опорных плоскостей. На пересечении перпендикуляров к векторам  $\bar{v}_B$  и  $\bar{v}_C$ , восстановленных из точек  $B$  и  $C$ , находим мгновенный центр скоростей  $P_{BC}$ , вокруг которого возможен поворот верхней части рамы на бесконечно малый угол  $\delta\varphi_1$ . Сообщим части  $BC$  возможную угловую скорость  $\omega_1$  вокруг МЦС  $P_{BC}$ , направленную по ходу часовой стрелки. При этом точка  $D$  получит скорость  $\bar{v}_D$ , направленную перпендикулярно отрезку  $DP_{BC}$ .

Выясним, какое перемещение станет возможным в этом случае для нижней части рамы  $AD$ . Указав направление возможной скорости т.  $A$   $\bar{v}_A$  (вдоль опорной поверхности шарнира), на пересечении перпендикуляров к векторам  $\bar{v}_A$  и  $\bar{v}_D$  найдем МЦС для нижней части рамы  $P_{AD}$ . Следовательно, возможным перемещением нижней части рамы будет бесконечно малый поворот вокруг МЦС  $P_{AD}$  с угловой скоростью  $\omega_2$ . Выразим скорость т.  $D$ , учитывая, что она одновременно принадлежит двум частям рамы:

$$v_D = \omega_1 \cdot DP_{BC}; \quad v_D = \omega_2 \cdot DP_{AD}.$$

Отсюда,

$$\omega_1 \cdot DP_{BC} = \omega_2 \cdot DP_{AD}. \quad (1.23)$$

Из подобия треугольников  $DAP_{AD}$  и  $DBP_{BC}$ , имеем:

$$\frac{DP_{AD}}{DP_{BC}} = \frac{AP_{AD}}{DB} = \frac{AD}{BP_{BC}} = \frac{4}{2} = 2. \quad (1.24)$$

Тогда, с учетом (1.23) и (1.24), получим

$$\omega_1 = \frac{DP_{AD}}{DP_{BC}} \omega_2 = 2\omega_2. \quad (1.25)$$

Зависимость между возможными перемещениями аналогична (1.25):

$$\delta\varphi_1 = 2\delta\varphi_2. \quad (1.26)$$

Составляем уравнение возможных работ (1.8):

$$6Y_A \delta\varphi_2 - 2F \sin 60^\circ \delta\varphi_2 + 6F \cos 60^\circ \delta\varphi_2 + M \delta\varphi_1 - 1,5Q \delta\varphi_1 = 0. \quad (1.27)$$

С учетом (1.26) уравнение (1.27) примет вид:

$$6Y_A \delta\varphi_2 - 2F \sin 60^\circ \delta\varphi_2 + 6F \cos 60^\circ \delta\varphi_2 + M \cdot 2\delta\varphi_2 - 1,5Q \cdot 2\delta\varphi_2 = 0,$$

$$6Y_A - 2F \sin 60^\circ + 6F \cos 60^\circ + 2M - 3Q = 0,$$

$$Y_A = \frac{2F \sin 60^\circ - 6F \cos 60^\circ - 2M + 3Q}{6},$$

$$Y_A = \frac{2 \cdot 5 \cdot 0,866 - 6 \cdot 5 \cdot 0,5 - 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12}{6} = 1,61 \text{ кН}.$$

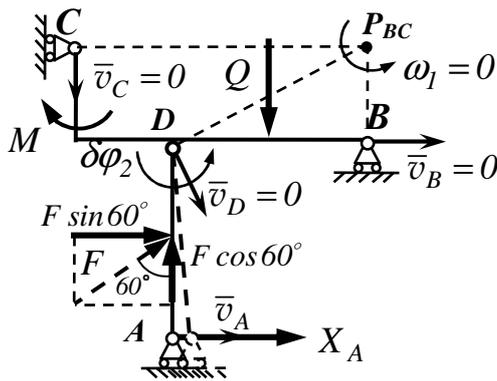


Рисунок 19

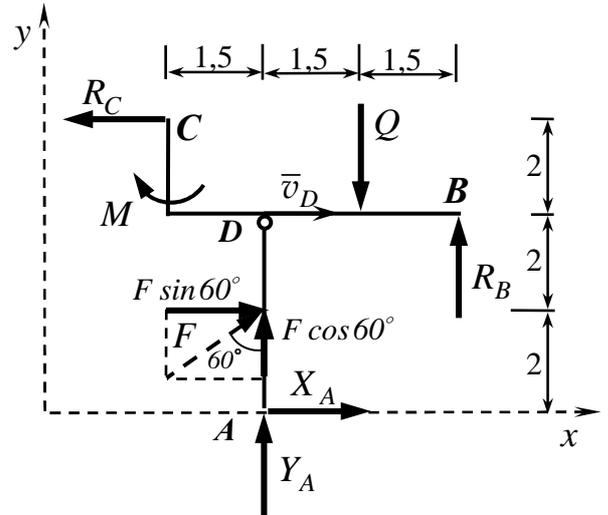


Рисунок 20

Определение горизонтальной составляющей реакции неподвижного шарнира  $A$ . Отбросив связь, препятствующую горизонтальному перемещению опоры  $A$ , заменим ее подвижной шарнирной опорой на горизонтальных направляющих и приложим в т.  $A$  искомую реакцию  $X_A$  (рисунок 19). Рассуждая так же, как и в предыдущем случае (при определении реакции  $Y_A$ ), найдем мгновенный центр скоростей  $P_{BC}$  для верхней части рамы и укажем направление возможной скорости точки  $D$   $\bar{v}_D$ .

Выясним, какое перемещение станет возможным в этом случае для нижней части рамы  $AD$ . Указав направление возможной скорости т.  $A$   $\bar{v}_A$  (вдоль опорной поверхности шарнира), восстановим перпендикуляры к векторам  $\bar{v}_A$  и  $\bar{v}_D$  и найдем, что МЦС для нижней части рамы  $P_{AD}$  находится в т.  $D$ . Тогда  $\bar{v}_D = 0$ , но это возможно только тогда, когда верхняя часть рамы  $BC$  неподвижна, т.е.  $\omega_1 = 0$ . Следова-

тельно, в данном случае возможно перемещение только нижней части рамы  $AD$ . Зададим нижней части рамы бесконечно малый поворот вокруг МЦС точки  $D$  на угол  $\delta\varphi_2$  против вращения часовой стрелки.

Составим уравнение принципа возможных перемещений (1.8):

$$2F \sin 60^\circ \delta\varphi_2 + 4X_A \delta\varphi_2 = 0,$$

$$F \sin 60^\circ + 2X_A = 0,$$

$$X_A = -\frac{F \sin 60^\circ}{2} = -\frac{5 \cdot 0,866}{2} = -2,165 \text{ кН}.$$

Проверим правильность решения задачи с помощью уравнений статики. Мысленно отбросим все наложенные на конструкцию связи и заменим их действие реакциями (рисунок 20). Составим уравнения равновесия полученной плоской системы сил:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_A(\bar{F}_k) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} X_A + F \sin 60^\circ - R_C = 0, \\ Y_A + F \cos 60^\circ - Q + R_B = 0, \\ 3R_B - M - 2F \sin 60^\circ - 1,5Q + 6R_C = 0. \end{cases} \quad (1.28)$$

Убедимся, что найденные значения реакций удовлетворяют составленным уравнениям:

$$\begin{cases} -2,165 + 5 \cdot 0,866 - 2,165 = 0, \\ 1,61 + 5 \cdot 0,5 - 12 + 7,89 = 0, \\ 3 \cdot 7,89 - 10 - 2 \cdot 5 \cdot 0,866 - 1,5 \cdot 12 + 6 \cdot 2,165 = 0. \end{cases}$$

Уравнения равновесия (1.28) выполняются, следовательно, реакции рамы определены верно.

### **3.3 Общие требования к оформлению отчета по расчетно-графической работе**

Отчет по расчетно-графической работе должен быть оформлен в соответствии с требованиями СТО 02069024.101 – 2010 «Работы студенческие. Общие требования и правила оформления».

Отчет обязательно должен содержать:

- исходные данные задания;
- схему конструкции с указанием внешней нагрузки, всех размеров и устанавливаемых опор;
- расчетные схемы для определения искомых реакций связей с указанием всех действующих на конструкцию активных сил, возможных перемещений, скоростей и т.д.
- аналитические уравнения принципа возможных перемещений (мощностей), составленные для определения всех реакций составной конструкции;
- результаты вычисления реакций;
- проверку результатов вычисления реакций;
- вывод.

Решение должно сопровождаться краткими, последовательными пояснениями и четкими схемами. Промежуточные и окончательные ответы должны быть записаны с точностью до второго знака с указанием размерностей всех полученных величин.

#### **4 Литература, рекомендуемая для изучения темы**

1. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики: учебник / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – 11-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2004. – 768 с.
2. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики: в 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2004. – 736 с.
3. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов / С.М. Тарг. – 20-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2010. – 416 с.
4. Диевский, В.А. Теоретическая механика: учебное пособие / В.А. Диевский. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 320 с.
5. Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учебное пособие для втузов. В 3 т. Т. II. Динамика / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – М.: Наука, 1991. – 640 с.
6. Кирсанов, М.Н. Решебник: Теоретическая механика / М.Н. Кирсанов; под ред. А.И. Кириллова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 384 с.