

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ИЖЕВСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»  
КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ И СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

УТВЕРЖДАЮ:

Проректор по учебной работе,  
профессор \_\_\_\_\_ П.Б. Акмаров  
«   » \_\_\_\_\_ 2018 г.

## **ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА**

Методические материалы  
для самостоятельной работы студентов бакалавриата  
направления подготовки **Агроинженерия**  
Направленность: **Электрооборудование и электротехнологии,**  
**Автоматизация технологических процессов**

Составитель:  
П.В. Дородов

Ижевск 2018

УДК 621.01(078)

ББК 30.12я73

Д 69

Методические материалы составлены в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования № 1172 от 20.10.2015.

Рассмотрено и рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом ФГБОУ ВО Ижевская ГСХА, протокол № \_\_\_ от \_\_\_\_\_ 2018 г.

Рецензент В.В. Касаткин – доктор технических наук, профессор кафедры «Технологии и оборудования пищевых и перерабатывающих производств» ФГБОУ ВО Ижевская ГСХА

Составитель:

Дородов П.В. – доктор технических наук, профессор кафедры «Теоретическая механика и сопротивление материалов» ФГБОУ ВО Ижевская ГСХА

Д 69 Прикладная механика: методические материалы для самостоятельной работы студентов вузов / сост. П.В. Дородов. – Ижевск: ФГБОУ ВО Ижевская ГСХА, 2018.– 22 с.

Настоящие методические материалы содержат задания и примеры решения задач по дисциплине «Прикладная механика» для студентов факультета энергетики и электрификации, обучающихся по направлению Агроинженерия.

УДК 621.01(078)

ББК 30.12я73

© Дородов П.В.

© ФГБОУ ВО Ижевская ГСХА, 2018

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	4
Общие указания о порядке выполнения контрольной работы.....	4
Методические указания .....	5
<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	5
<b>ЗАДАНИЕ № 1. РАСЧЕТ СИСТЕМ, РАБОТАЮЩИХ     НА РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ</b> .....	6
Задача 1.1. Растяжение и сжатие стержней переменного сечения .....	6
Задача 1.2. Статически неопределимая стержневая конструкция .....	10
<b>ЗАДАНИЕ № 2. ИЗГИБ БАЛОК</b> .....	13
<b>ЗАДАНИЕ № 3. КРУЧЕНИЕ ВАЛОВ</b> .....	18
Литература .....	22

## Предисловие

По курсу дисциплины «Прикладная механика» необходимо выполнить контрольную работу, которая включает следующие задания:

### **Задание № 1. РАСЧЕТ СИСТЕМ, РАБОТАЮЩИХ НА РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ**

Задача 1.1. Растяжение и сжатие стержней переменного сечения.

Задача 1.2. Статически неопределимая стержневая конструкция.

### **Задание № 2. ИЗГИБ БАЛОК**

### **Задание № 3. КРУЧЕНИЕ ВАЛОВ**

## **Общие указания о порядке выполнения контрольной работы**

1. Работу следует выполнять на листах формата А4, сшитых в отдельный труд, с полями в 3 см для замечаний рецензента. Текст выполняется от руки четким почерком или на компьютере. Если рисунки выполнены не на компьютере, то они оформляются карандашом с использованием чертежных инструментов.

2. На титульном листе должны быть четко выписаны: образовательное учреждение; название факультета; название работы и дисциплины, по которой она выполнена; фамилия, имя, отчество студента; фамилия, имя, отчество и должность преподавателя, проверяющего работу; город и год.

3. Перед решением каждой контрольной задачи надо выписать полностью ее условие с числовыми данными, составить аккуратный эскиз в масштабе, указать на нем все числовые величины, необходимые для расчета.

4. Данные из таблиц должны быть взяты в соответствии с личным шифром, который совпадает с двумя последними цифрами номера зачетной книжки (студенческого билета), которые необходимо записать дважды. Например, при номере зачетной книжки 043452 б шифром будет число 5252. Далее обозначается первая цифра буквой «а», вторая – «б», третья – «в» и четвертая «г» (в примере а – 5, б – 2, в – 5, г – 2). Тогда из каждого вертикального столбца любой таблицы, обозначенного внизу буквами «а», «б», «в» или «г», выбирается число, стоящее в той горизонтальной строке, номер которой совпадает со значением буквы шифра.

5. При возврате проверенной работы студент должен исправить в ней все отмеченные ошибки и выполнить все сделанные указания. Исправления делаются на отдельных листах и вклеиваются в соответствующие места контрольной работы.

Работа, выполненная не по шифру, возвращается без рассмотрения.

## Методические указания

### ВВЕДЕНИЕ

При проектировании различных конструкций и машин инженеру приходится решать много разнообразных вопросов, связанных с будущей работой проектируемого объекта.

Учитывая условия работы, инженер выбирает материал для конструкции, назначает размеры ее частей и элементов так, чтобы они достаточно надежно, без риска разрушения могли сопротивляться действию внешних нагрузок.

Кроме того, инженер обязан считаться с требованиями экономики, не допуская излишнего расхода материала и повышения стоимости конструкции или машины.

**Целью** изучения дисциплины «Прикладная механика» является ознакомление с методами расчета на прочность, жесткость, устойчивость элементов инженерных конструкций и деталей машин.

**Основные задачи дисциплины** заключаются в том, чтобы студент научился:

- правильно выбирать и составлять расчетную схему элементов конструкций,
- определять возникающие усилия при различных видах деформации, используя основные гипотезы при изучении курса,
- подбирать наиболее экономичные размеры поперечных сечений элементов конструкций и деталей машин.

При этом главной задачей курса является формирование знаний для применения математического аппарата при решении прикладных задач, осмысления полученных численных результатов и поиска выбора наиболее оптимальных конструктивных решений. То есть, данный предмет является базовым для формирования инженерного мышления и подготовки кадров высшей квалификации по техническим специализациям.

Прикладная механика базируется на сведениях из математики, физики, теоретической механики и в первую очередь на законах статики. Без знания этого раздела теоретической механики изучение курса невозможно.

Прежде всего, изучение курса следует начать с ознакомления с основными элементами конструкций, каковыми являются стержни, пластины, массивные тела. Нужно обратить внимание на понятие «расчетная схема», ибо выбор расчетной схемы является одной из ответственных задач, которую должен решать инженер. Для стержневых конструкций необходимо познакомиться с видами опор: шарнирные подвижные и неподвижные опоры, заделка, свободный край и уяснить, какие реакции в них возникают.

Далее следует разобрать основные гипотезы, на которых базируется курс: гипотезу о сплошности, гипотезу об однородности и изотропности, гипотезу о линейной связи между напряжениями и деформациями, гипотезу о независимости действия сил; две специальные гипотезы для стержней (гипотезу плоских сечений и гипотезу о ненадавливании волокон).

Необходимо понять и запомнить, что основным методом в прикладной механике материалов считается метод сечений, когда мысленно рассекается тело некоторой плоскостью и после введения сил взаимодействия (внутренних силовых факторов) разрезанных частей рассматривается равновесие одной из них. Необходимо запомнить, что система сил, действующих в сечении стержня, в общем случае приводится к 6 силовым факторам: продольной  $N_x$  и двум поперечным силам  $Q_y$  и  $Q_z$ ; двум изгибающим моментам  $M_y$  и  $M_z$ ; крутящему моменту  $M_x$ .

Необходимо обратить внимание на классификацию нагрузок (объемные и поверхностные, распределенные и сосредоточенные, статические и динамические) и на то обстоятельство, что конструкции могут оказаться статически неопределимыми, то есть такими, расчет которых не возможен с использованием только уравнений статики, без привлечения уравнений совместности деформаций.

## ЗАДАНИЕ № 1. РАСЧЕТ СИСТЕМ, РАБОТАЮЩИХ НА РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ

### Задача 1.1. Растяжение и сжатие стержней переменного сечения

На рисунке 1.1 изображен стержень, состоящий из трех участков. Длины участков, их площади, а также величины, направления и места приложения нагрузки указаны в таблице 1.1.

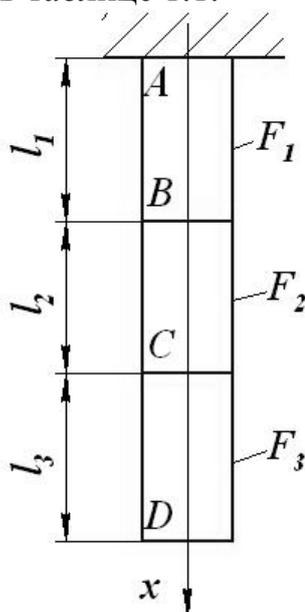


Рисунок 1.1 – Стержень

Таблица 1.1 – Данные к задаче 1.1

№ столбца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Данные	Длины участков			Величины, направления и места приложения нагрузки						Материал	Коэффициент запаса	Величины площадей		
Обозначения	$l_1$	$l_2/l_1$	$l_3/l_1$	$q_0$	$q$	$P_1$	$P_1$	$P_2/P_1$	$P_2$	Сталь	$n$	$F_1$	$F_2$	$F_3$
Размерность	м	–	–	кН/м	–	кН	–	–	–	–	–	м <sup>2</sup>	м <sup>2</sup>	м <sup>2</sup>
1	0,5	1,1	2,0	22	А...В вниз	20	В вверх	0,2	Д вверх	20	1,6	$F_0$	$3,0F_0$	$F_0$
2	0,6	1,5	1,9	24	В...С вниз	18	В вниз	0,4	С вверх	25	1,7	$1,2F_0$	$2,9F_0$	$2,0F_0$
3	0,7	1,7	1,8	15	С...Д вниз	16	С вверх	0,6	В вверх	30	1,8	$1,4F_0$	$2,8F_0$	$1,8F_0$
4	0,8	1,9	1,7	18	В...А вверх	14	С вниз	0,8	Д вверх	35	1,9	$1,6F_0$	$2,7F_0$	$1,6F_0$
5	0,9	1,0	1,6	10	С...В вверх	12	Д вверх	1,0	С вниз	40	2,0	$1,8F_0$	$2,6F_0$	$1,4F_0$
6	1,0	1,2	1,5	12	Д...С вверх	10	С вниз	1,2	В вниз	45	2,1	$2,0F_0$	$2,5F_0$	$1,2F_0$
7	1,1	1,4	1,4	14	А...В вниз	13	В вверх	1,4	С вниз	50	2,2	$2,2F_0$	$2,4F_0$	$2,0F_0$
8	1,2	1,6	1,3	16	С...В вверх	15	С вниз	1,6	Д вниз	55	2,3	$2,4F_0$	$2,3F_0$	$1,9F_0$
9	1,3	1,8	1,2	18	Д...С вверх	24	Д вверх	1,8	В вверх	60	2,4	$2,6F_0$	$2,2F_0$	$1,7F_0$
0	1,4	2,0	1,1	20	В...Д вниз	12	С вниз	2,0	С вниз	10	2,5	$2,8F_0$	$2,1F_0$	$1,5F_0$
шифр	в	б	а	г	б	а	г	б	в	г	б	а	а	б

Требуется:

1. Построить эпюры нормальных сил, напряжений, продольных деформаций и абсолютных удлинений.
2. Из расчета на прочность подобрать допускаемое значение площади сечения.

**Пример:**

Пусть дан стержень переменного сечения, на который действует сила  $P = 10 \text{ кН}$ , и равномерно распределенная нагрузка  $q = 20 \text{ кН/м}$ , как показано на рисунке П1.1. Длины участков  $l_1 = l_2 = l_3 = 1 \text{ м}$ , модуль упругости для материала стержня составляет  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , коэффициент запаса прочности  $n = 2$ , предел текучести  $\sigma_T = 280 \text{ МПа}$ . Соотношения площадей –  $F_1 = F_0$ ,  $F_2 = 2F_0$ ,  $F_3 = 3F_0$ .

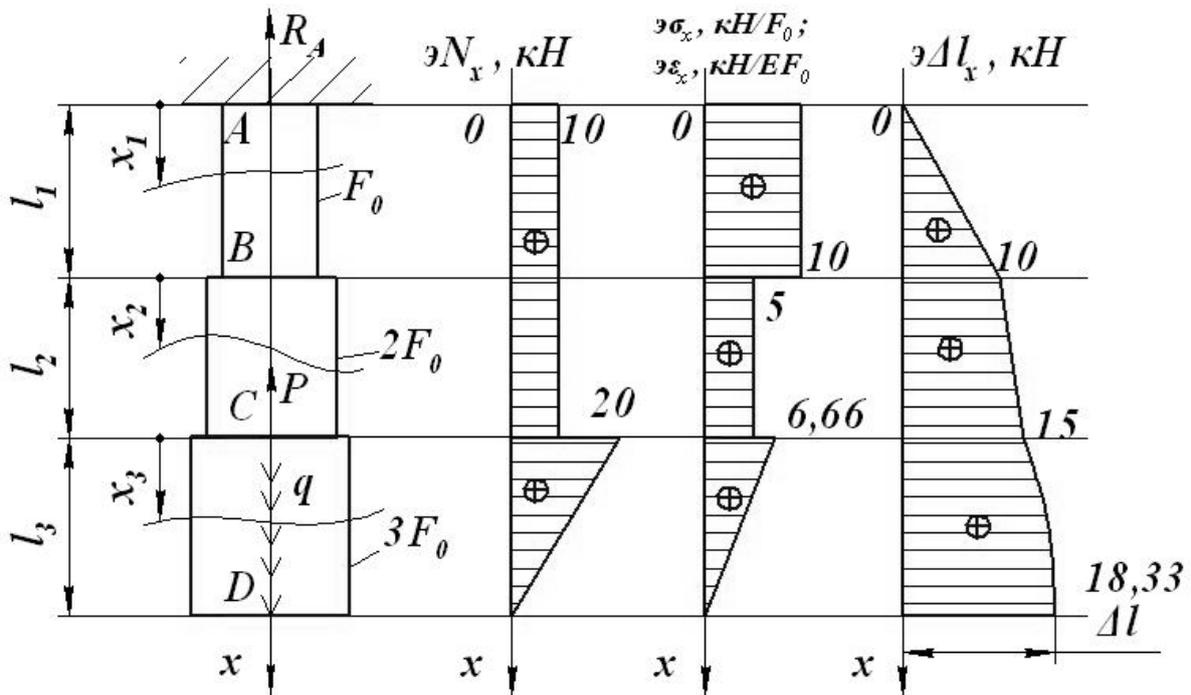


Рисунок П1.1 – Расчетная схема и эпюры нормальных сил, напряжений, деформаций и удлинений

**Решение:**

1) Определяем реакцию в жесткой заделке.

$$\sum P_{xi} = 0,$$

$$-R_A - P + \int_0^{l_3} q dx = 0,$$

откуда, при  $q = \text{const}$ , имеем:

$$R_A = ql_3 - P = 20 \cdot 1 - 10 = 10 \text{ кН.}$$

2) Разбиваем стержень на участки, определяем продольные силы (рисунок П1.2).

На первом участке (рисунок П.1.2 а)

$$N_{x1} = R_A = 10 \text{ кН.}$$

На втором участке (рисунок П1.2 б)

$$N_{x2} = R_A = 10 \text{ кН.}$$

На третьем участке (рисунок П1.2 в)

$$N_{x3} = R_A + P - \int_0^{x_3} q dx = R_A + P - qx_3 = 10 + 10 - 20x_3 = 20 - 20x_3.$$

Здесь при  $x_3 = 0$   $N_{x3} = 20 \text{ кН}$ , при  $x_3 = 1 \text{ м}$   $N_{x3} = 0$ .

Эпюра продольных сил изображена на рисунке П1.1.

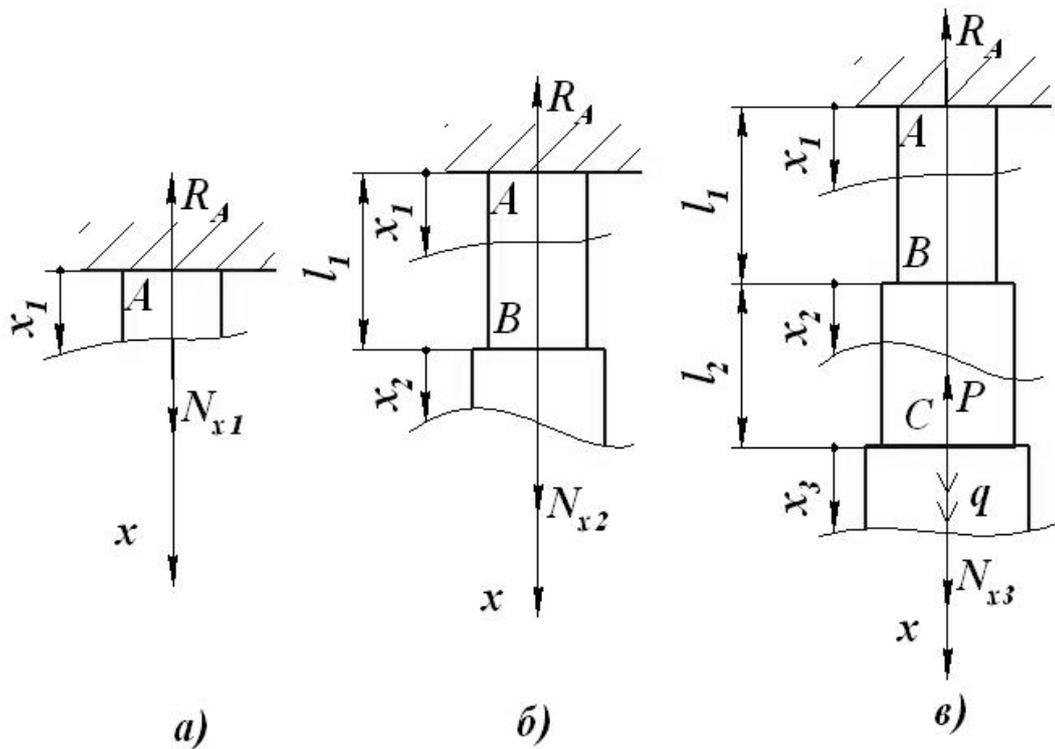


Рисунок П1.2 – Расчетные схемы участков стержня:  
 а) первый участок; б) второй участок; в) третий участок

3) Определяем нормальные напряжения.

$$\sigma_{x1} = \frac{N_{x1}}{F_1} = \frac{10 \text{ кН}}{F_0},$$

$$\sigma_{x2} = \frac{N_{x2}}{F_2} = \frac{10 \text{ кН}}{2F_0} = \frac{5 \text{ кН}}{F_0},$$

$$\sigma_{x3} = \frac{N_{x3}}{F_3} = \frac{(20 - 20x_3) \text{ кН}}{3F_0}.$$

Здесь при  $x_3 = 0$ ;  $\sigma_{x3} = 6,66 \text{ кН}/F_0$ , при  $x_3 = 1 \text{ м}$ ;  $\sigma_{x3} = 0$ .

Эпюра нормальных напряжений построена на рисунке П1.1.

4) Определяем относительные деформации.

$$\varepsilon_{x1} = \frac{\sigma_{x1}}{E} = \frac{10 \text{ кН}}{EF_0},$$

$$\varepsilon_{x2} = \frac{\sigma_{x2}}{E} = \frac{10 \text{ кН}}{2EF_0} = \frac{5 \text{ кН}}{EF_0},$$

$$\varepsilon_{x3} = \frac{\sigma_{x3}}{E} = \frac{(20 - 20x_3) \text{ кН}}{3EF_0}.$$

Здесь при  $x_3 = 0$ ;  $\varepsilon_{x3} = 6,66 \text{ кН}/EF_0$ , при  $x_3 = 1 \text{ м}$ ;  $\varepsilon_{x3} = 0$ .

Эпюра деформаций изображена на рисунке П1.1

5) Находим абсолютные деформации.

Принимаем в жесткой заделке

$$\Delta l_A = 0,$$

далее

$$\Delta l_{BA} = \int_0^{l_1} \frac{N_{x1} dx}{EF_0} = \frac{10l_1}{EF_0} = 10 \frac{\text{кНм}}{EF_0},$$

$$\Delta l_{CB} = \int_0^{l_2} \frac{N_{x2} dx}{2EF_0} = \frac{10l_2}{2EF_0} = 5 \frac{\text{кНм}}{EF_0},$$

$$\Delta l_{CA} = \Delta l_{BA} + \Delta l_{CB} = 15 \frac{\text{кНм}}{EF_0},$$

$$\Delta l_{DC} = \int_0^{l_3} \frac{N_{x3} dx_3}{3EF_0} = \int_0^{l_3} \frac{(20 - 20x_3) dx_3}{3EF_0} = \frac{20l_3 - 10l_3^2}{3EF_0} = 3,33 \frac{\text{кНм}}{EF_0},$$

$$\Delta l = \Delta l_{DA} = \Delta l_{BA} + \Delta l_{CB} + \Delta l_{DC} = 18,33 \frac{\text{кНм}}{EF_0}.$$

Эпюра абсолютных деформаций (удлинений) также имеется на рисунке П1.1

б) Составляем условие прочности:

$$\sigma_{max} = \sigma_{x1} = \frac{10 \text{ кН}}{F_0} \leq [\sigma],$$

где  $[\sigma] = \sigma_T/n = 280/2 = 140 \text{ МПа}$ .

Таким образом, допускаемая площадь поперечного сечения

$$[F_0] = \frac{10000}{140 \cdot 10^6} = 71,43 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

При такой площади удлинение стержня составит

$$\Delta l = \frac{18330}{2 \cdot 10^{11} \cdot 71,43 \cdot 10^{-6}} = 1,28 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,28 \text{ мм}.$$

На этом решение заканчивается.

### Задача 1.2. Статически неопределимая стержневая конструкция

На рисунке 1.2 изображена стержневая конструкция.

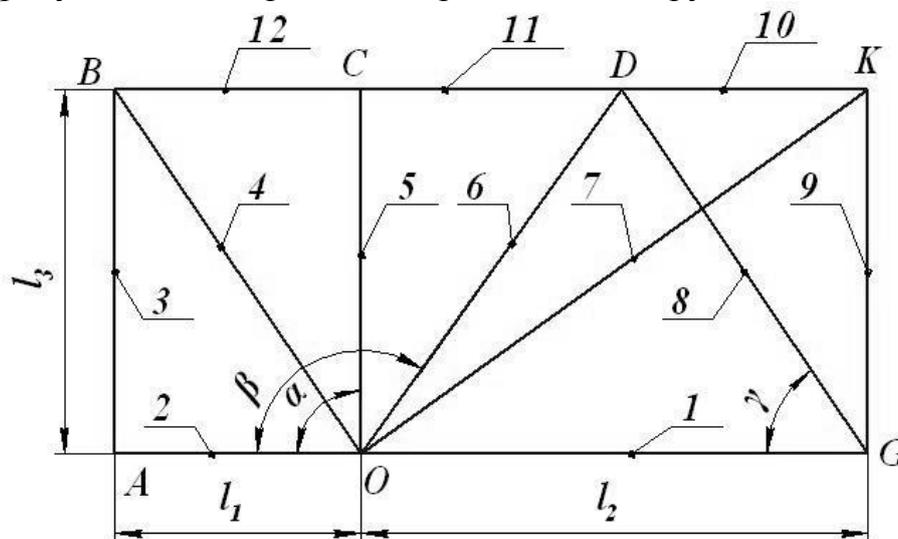


Рисунок 1.2 – Стержневая конструкция

Данные для этой задачи приведены в таблице 1.2. Исключая нулевые стержни, получаем конструкцию, состоящую из трех элементов.

Таблица 1.2 – Данные к задаче 1.2

№ столбца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Данные	Углы наклона стержней			Абсолютно жесткий элемент	Нулевые стержни	Номер опорной точки и вид опоры			Номер стержня и его площадь сечения			Величина, место приложения и направление силы	
Обозначения	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	–	$l_i=0$ , где $i=$	–	–	–	–	–	–	$P$	
Размерность	град.	град.	град.	–		–	–	–	–	–	–	кН	–
1	–	120	–	–	1,2,3,5, 8,9,10, 11,12	$\rightarrow O$	$\rightarrow B$	$\nabla D$ $\nabla K$	4 $F_0$	6 $1,2F_0$	7 $0,8F_0$	400	O вниз
2	–	–	–	O-B	2,3,5,6, 8,9,10, 11,12	$\rightarrow B$	$\nabla K$	$\Delta G$	1 $2F_0$	7 $1,6F_0$	–	600	O вниз
3	–	–	–	O-K	2,3,5,6, 8,9,10, 11,12	$\Delta G$	$\rightarrow B$	$\nabla K$	1 $1,1F_0$	4 $2,5F_0$	–	200	O вниз
4	90	140	–	O-B	1,2,3,7, 8,9,10, 11,12	$\rightarrow B$	$\nabla C$	$\nabla D$	5 $0,4F_0$	6 $0,9F_0$	–	300	O вправо
5	90	–	–	B-A-O-G	4,6,8,9, 10,11, 12	$\rightarrow B$	$\nabla C$	$\nabla K$	5 $0,4F_0$	7 $0,8F_0$	–	400	O вниз
6	90	–	–	B-C-O-G	2,3,4,6, 8, 10,11	$\rightarrow B$	$\nabla K$	–	7 $0,3F_0$	9 $F_0$	–	500	G вниз
7	–	–	45	B-A-O-G	4,5,6,7, 9,10	$\rightarrow A$	$\nabla D$	–	11,12 $0,5F_0$	8 $0,8F_0$	–	600	G вверх
8	90	–	70	A-O-C-D-K	1,3,4,6, 7,12	$\Delta O$	$\Delta G$	–	8 $0,9F_0$	9 $1,1F_0$	–	700	A вниз
9	90	–	–	C-O-G	1,2,3,4, 5,6,7,8, 10,11	$\Delta O$	$\rightarrow B$	$\nabla K$	9 $F_0$	12 $1,1F_0$	–	800	G вниз
0	–	–	–	–	1,3,5,6, 8,9,10, 11 12	$\Delta O$	$\nabla K$	$\rightarrow A$ $\rightarrow B$	2 $F_0$	4 $1,5F_0$	7 $0,8F_0$	900	O влево
шифр	б	б	б	б	б	б	б	б	б	б	б	б	б

**Примечание:** Длины  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  и материал стержней взять из таблицы 1.1.

Требуется:

1. Составить расчетную схему.
2. Раскрыть статическую неопределимость при помощи уравнения, составленного из условия совместности деформаций.
3. Выполнить расчет на прочность.

**Пример:**

Пусть дана конструкция состоящая из трех деформируемых стержней (рисунок П1.3). Сила  $P = 100 \text{ кН}$ , высота  $l = 1 \text{ м}$ , углы  $\beta = 45^\circ$ ,  $\gamma = 30^\circ$ , соотношение площадей сечений стержней  $F_1 = F_3 = F_0$ ,  $F_2 = 2F_0$ ,  $[\sigma] = 140 \text{ МПа}$ .

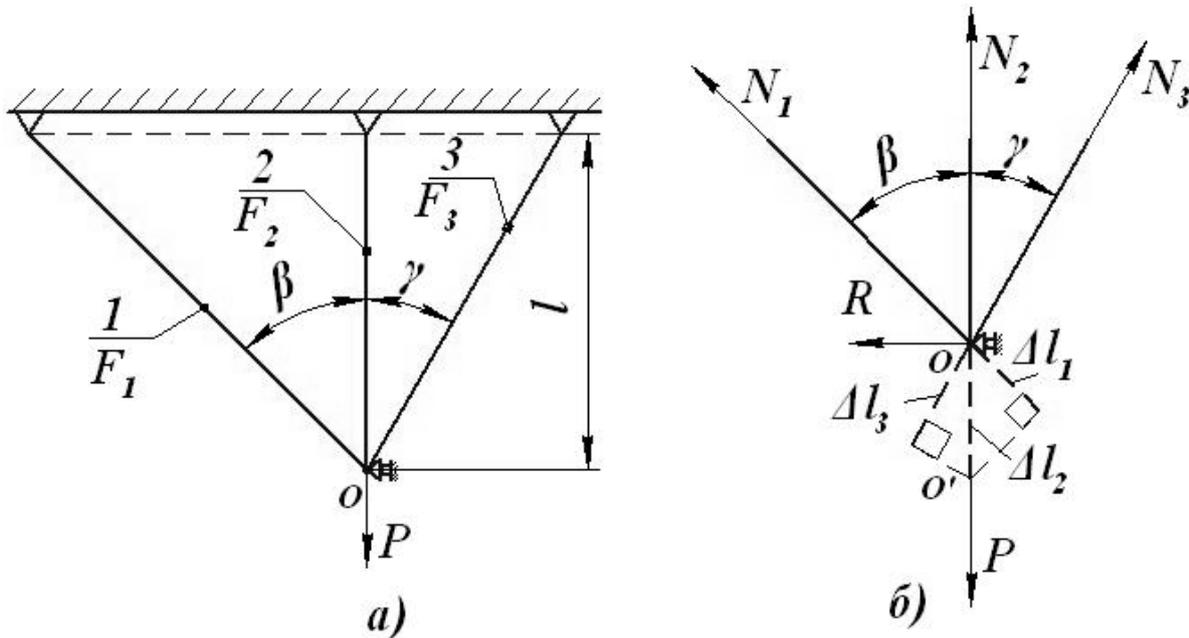


Рисунок П1.3 – Стержневая конструкция:  
 а) расчетная схема; б) система сил и перемещений

**Решение:**

1) Составляем уравнения равновесия.

Из суммы сил на вертикальную ось, имеем

$$N_1 \cos \beta + N_2 + N_3 \cos \gamma = P. \quad (a)$$

2) Записываем условия совместности деформаций (перемещений) для шарнира  $O$

$$OO' = \Delta l_2 = \frac{\Delta l_1}{\cos \beta} = \frac{\Delta l_3}{\cos \gamma}.$$

Распишем перемещения по закону Гука

$$\frac{N_2 l}{2EF_0} = \frac{N_1 l}{EF_0 \cos^2 \beta} = \frac{N_3 l}{EF_0 \cos^2 \gamma'}$$

после упрощения, получим:

$$\frac{N_2}{2} = \frac{N_1}{\cos^2 \beta} = \frac{N_3}{\cos^2 \gamma}. \quad (б)$$

Решая совместно (а) и (б), находим усилия в стержнях:

$$N_1 = 16,6 \text{ кН}; N_2 = 66,6 \text{ кН}; N_3 = 24,9 \text{ кН}.$$

3) Определяем напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{16,6 \text{ кН}}{F_0}; \sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{66,6 \text{ кН}}{2F_0} = \frac{33,3 \text{ кН}}{F_0}; \sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{24,9 \text{ кН}}{F_0}.$$

4) Выполняем расчет на прочность.

$$\sigma_{max} = \sigma_2 = \frac{33,3 \text{ кН}}{F_0} \leq [\sigma]$$

откуда допускаемая площадь поперечного сечения составит

$$[F_0] = \frac{33300}{140 \cdot 10^6} = 237,86 \cdot 10^{-6} \text{ мм}^2.$$

На этом решение заканчивается.

## ЗАДАНИЕ № 2. ИЗГИБ БАЛОК

Необходимо рассчитать балку (рисунок 2), расположенную на шарнирных опорах. На балку действуют сосредоточенная сила  $P$ , момент  $M$  и равномерно распределенная нагрузка  $q$ . Данные берутся из таблицы 2.

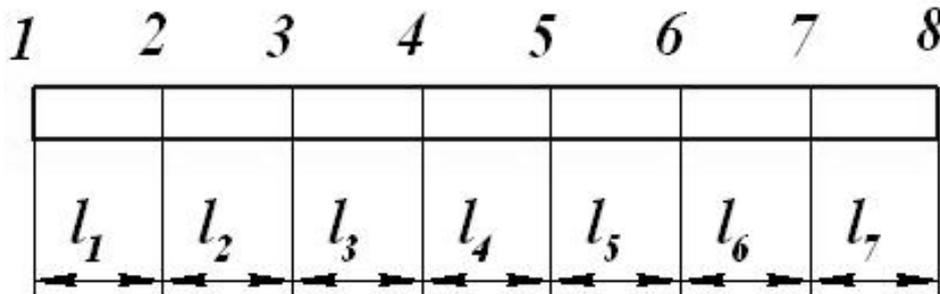


Рисунок 2 – Балка

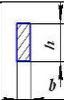
Требуется:

1. Определить опорные реакции.
2. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.
3. Из условия прочности подобрать номера швеллера и двутавра, а также определить диаметр круга и размеры прямоугольника.
4. Выбрать профиль балки с наименьшей площадью поперечного сечения.
5. Для выбранной балки составить примерное дифференциальное уравнение упругой линии, построить эпюры углов поворота сечений и прогибов.

**Пример:**

Дана балка на двух опорах, на которую действуют: равномерно распределенная нагрузка  $q = 2 \text{ кН/м}$ , сосредоточенная сила  $P = 2ql$ , и момент  $M = 10ql^2$  (рисунок П2.1). Длина участков  $l = 0,5 \text{ м}$ . Соотношение размеров прямоугольного сечения  $h/b = 2$ . Механические характеристики материала:  $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

Таблица 2 – Данные к заданию 2

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Данные	Длины участков							Место и вид опоры		Вид, величина, направление и место приложения внешней нагрузки							Сталь	Коэф. запаса
	Обозн-я	$l_1$	$l_2/l_1$	$l_3/l_1$	$l_4/l_1$	$l_5/l_1$	$l_6/l_1$	$l_7/l_1$	–	–	$q$		$P$		$M$			
Размер-ть	м	–	–	–	–	–	–	–	–	кН/м	–	кН	–	кН·м	–	–	–	–
1	0,4	0,1	1,0	0,2	0,6	1,1	2,0			1,0	4 вниз 8	2,0	6 вниз	10		1,0	10	1,4
2	0,6	0,2	0,9	0,2	0,5	1,2	1,9			1,1	3 вниз 7	2,2	8 вниз	12		1,4	15	1,6
3	0,8	0,3	0,8	0,2	0,5	1,3	1,8			1,2	3 вниз 6	2,4	4 вниз	14		1,8	20	1,8
4	1,0	0,4	0,7	0,3	0,4	1,4	1,7			1,3	1 вниз 5	2,6	2 вниз	16		2,0	25	2,0
5	1,2	0,5	0,6	0,3	0,4	1,5	1,6			1,4	1 вниз 6	2,8	4 вниз	18		2,4	30	2,2
6	1,1	0,6	0,5	0,4	0,3	1,6	1,5			1,5	3 вверх 8	3,0	6 вниз	20		3,0	35	2,4
7	0,9	0,7	0,4	0,4	0,3	1,7	1,4			1,6	3 вверх 7	3,2	2 вверх	22		4,0	40	2,6
8	0,7	0,8	0,3	0,5	0,2	1,8	1,3			1,7	4 вверх 6	3,4	8 вверх	24		4,2	45	2,8
9	0,5	0,9	0,2	0,5	0,2	1,9	1,2			1,8	1 вверх 5	3,6	4 вниз	26		5,0	50	3,0
0	0,3	1,0	0,1	0,6	0,1	2,0	1,1			1,9	1 вверх 4	3,8	6 вверх	28		5,4	40Г	3,2
шифр	а	б	в	г	б	а	а	б	б	в	в	а	б	б	в	г	б	а

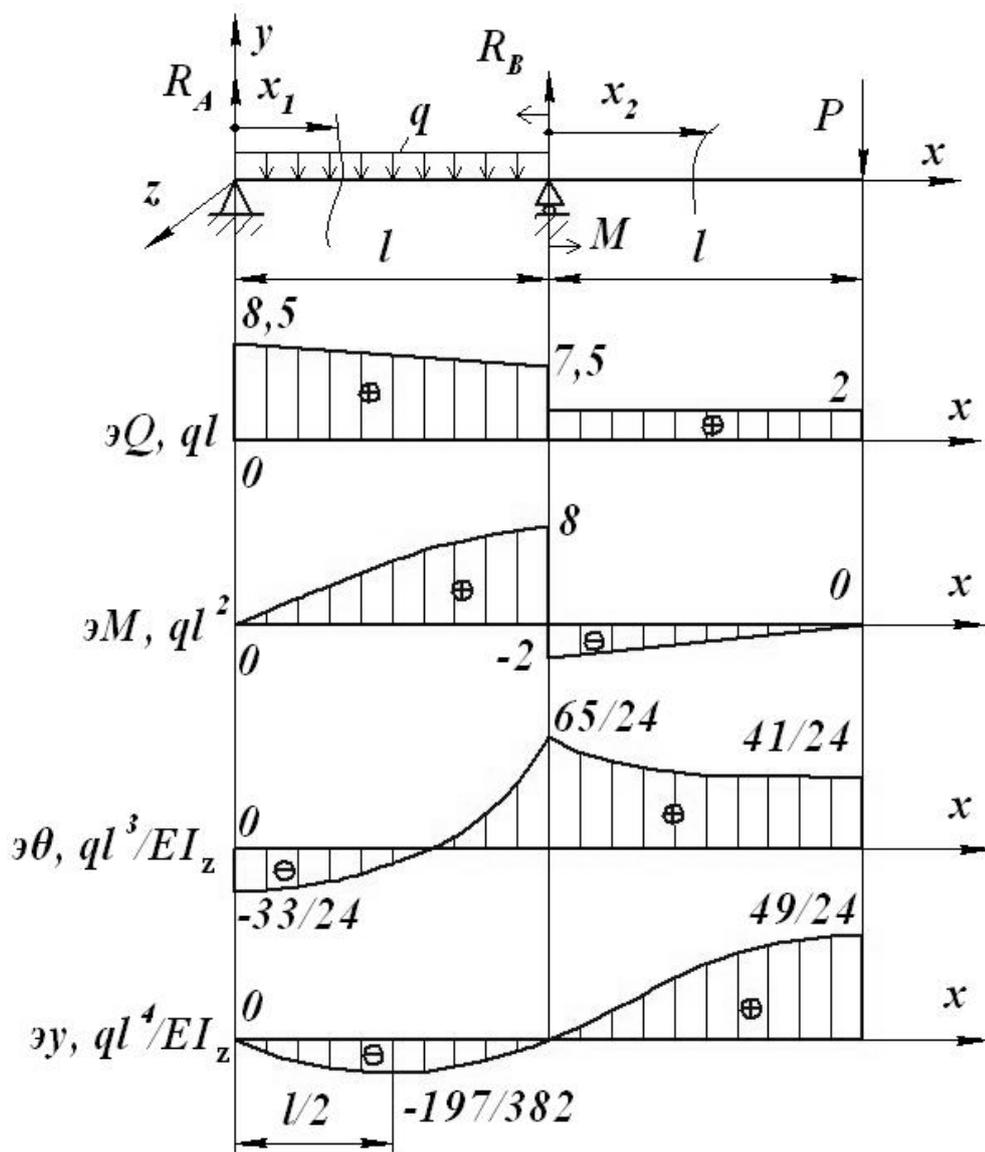


Рисунок П2.1 – Расчетная схема балки, эпюры внутренних силовых факторов, углов поворота сечений и погибов

**Решение:**

1) Определяем реакции в опорах.

$$\sum M_{Ai} = 0,$$

$$-\frac{ql^2}{2} + M + R_B l - P2l = 0,$$

откуда  $R_B = -5,5 ql$ .

$$\sum M_{Bi} = 0,$$

$$\frac{ql^2}{2} + M - R_A l - Pl = 0,$$

тогда получаем  $R_A = 8,5 ql$ .

Проверка:

$$\sum P_{yi} = 0,$$

$$R_A + R_B - ql - P = 0,$$

$$8,5ql - 5,5ql - ql - 2ql = 0,$$

$$0 \equiv 0.$$

2) Находим поперечные силы и изгибающие моменты.

1-й участок ( $0 \leq x_1 \leq l$ )

$$Q_{y1} = R_A - qx_1; Q_{y1} = R_A = 8,5ql, (x_1 = 0), Q_{y1} = R_A - ql = 7,5ql, (x_1 = l).$$

$$M_{z1} = R_A x_1 - \frac{qx_1^2}{2}; M_{z1} = 0, (x_1 = 0), M_{z1} = R_A l - \frac{ql^2}{2} = 8ql^2, (x_1 = l).$$

2-й участок ( $0 \leq x_2 \leq l$ )

$$Q_{y2} = R_A - ql + R_B = 2ql.$$

$$M_{z2} = R_A(l + x_2) - ql\left(\frac{l}{2} + x_2\right) - M + R_B x_2; M_{z2} = -2ql^2, (x_1 = 0),$$

$$M_{z2} = 0, (x_1 = l).$$

Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рисунок П2.1).

3) Составляем условие прочности.

$$\sigma_{max} = \left| \frac{M_z}{W_z} \right|_{max} \leq [\sigma].$$

Так как  $|M_z|_{max} = 8ql^2$ ,

то

$$W_z \geq \frac{8ql^2}{[\sigma]} = \frac{8 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 0,5^2}{120 \cdot 10^6} = 33,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 33,3 \text{ см}^3.$$

4) По справочным данным стали прокатной подбираем:

Двутавр № 10 ( $W_z = 39,7 \text{ см}^3, F_d = 12 \text{ см}^2$ );

Швеллер № 10 ( $W_z = 34,8 \text{ см}^3, F_{uu} = 10,9 \text{ см}^2$ ).

Подбираем размеры круга и прямоугольника.

Для круга  $W_z = \pi d^3/32$ ,

тогда

$$d = \sqrt[3]{\frac{32W_z}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 33,3}{\pi}} \approx 7 \text{ см.}$$

Площадь круга составит  $F_k = \pi d^2/4 = \pi 7^2/4 = 38,46 \text{ см}^2$ .

Для прямоугольника  $W_z = bh^2/6 = 2b^3/3$ ,

поэтому

$$b = \sqrt[3]{\frac{3W_z}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 33,3}{2}} \approx 4 \text{ см.}$$

Определим площадь  $F_{\Pi} = bh = 32 \text{ см}^2$ .

Из четырех сечений наиболее выгодным является швеллер № 10 ( $W_z = 34,8 \text{ см}^3, F_{uu} = 10,9 \text{ см}^2, I_z = 174 \text{ см}^4$ ), как обладающий наименьшей площадью.

5) Определяем углы поворота сечений и прогибы.

Расчетная схема для второго участка показана на рисунке П.2.2.

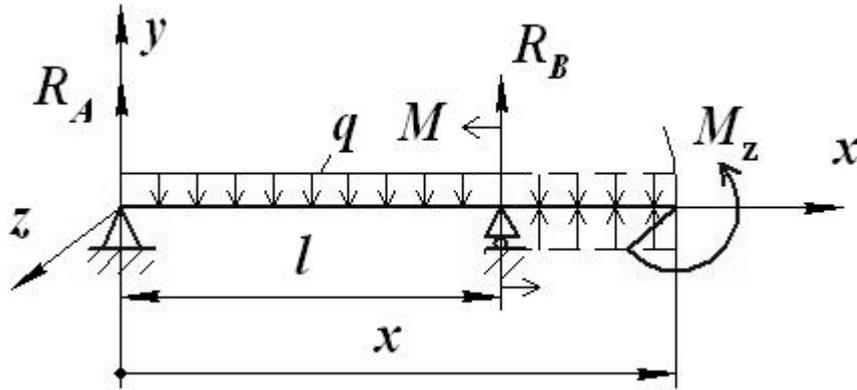


Рисунок П.2.2 – Расчетная схема для второго участка

Запишем обобщенную функцию изгибающего момента  $M_z$  и подставим ее в примерное дифференциальное уравнение упругой линии балки:

$$M_z = R_A x - \frac{qx^2}{2} \Big|_{\leftarrow 1} - M(x-l)^0 + R_B(x-l) + \frac{q(x-l)^2}{2} \Big|_{\leftarrow 2},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{EI_z} \left( R_A x - \frac{qx^2}{2} \Big|_{\leftarrow 1} - M(x-l)^0 + R_B(x-l) + \frac{q(x-l)^2}{2} \Big|_{\leftarrow 2} \right).$$

Последнее выражение проинтегрируем дважды без раскрытия скобок:

$$\frac{dy}{dx} = \theta = \frac{1}{EI_z} \left( C + \frac{R_A x^2}{2} - \frac{qx^3}{6} \Big|_{\leftarrow 1} - M(x-l) + \frac{R_B(x-l)^2}{2} + \frac{q(x-l)^3}{6} \Big|_{\leftarrow 2} \right),$$

$$y = \frac{1}{EI_z} \left( Cx + D + \frac{R_A x^3}{6} - \frac{qx^4}{24} \Big|_{\leftarrow 1} - \frac{M(x-l)^2}{2} + \frac{R_B(x-l)^3}{6} + \frac{q(x-l)^4}{24} \Big|_{\leftarrow 2} \right).$$

Постоянные интегрирования  $C$  и  $D$  найдем из граничных условий: при  $x = 0$ ;  $y = 0$  (шарнирно-неподвижная опора в начале 1-го участка)

$$C \cdot 0 + D + \frac{R_A 0^3}{6} - \frac{q 0^4}{24} = 0,$$

откуда  $D = 0$ ;

при  $x = l$ ;  $y = 0$  (шарнирно-подвижная опора в конце 1-го или в начале 2-го участка)

$$Cl + 0 + \frac{R_A l^3}{6} - \frac{ql^4}{24} = 0,$$

откуда  $C = -33ql^3/24$ .

Для первого участка ( $0 \leq x \leq l$ )

$$\theta = \frac{1}{EI_z} \left( \frac{R_A x^2}{2} - \frac{qx^3}{6} - \frac{33ql^3}{24} \right); \theta = -\frac{33ql^3}{24EI_z}, (x = 0); \theta = \frac{65ql^3}{24EI_z}, (x = l).$$

$$y = \frac{1}{EI_z} \left( \frac{R_A x^3}{6} - \frac{qx^4}{24} - \frac{33ql^3}{24} x \right); y = 0, (x = 0); y = -\frac{197ql^4}{384EI_z}, \left( x = \frac{l}{2} \right);$$

$$y = 0, (x = 0).$$

Для второго участка ( $l \leq x \leq 2l$ )

$$\theta = \frac{1}{EI_z} \left( \frac{R_A x^2}{2} - \frac{qx^3}{6} - M(x-l) + \frac{R_B(x-l)^2}{2} + \frac{q(x-l)^3}{6} - \frac{33ql^3}{24} \right);$$

$$\theta = \frac{65ql^3}{24EI_z}, (x = l); \theta = \frac{41ql^3}{24EI_z}, (x = 2l).$$

$$y = \frac{1}{EI_z} \left( \frac{R_A x^3}{6} - \frac{qx^4}{24} - \frac{M(x-l)^2}{2} + \frac{R_B(x-l)^3}{6} + \frac{q(x-l)^4}{24} - \frac{33ql^3}{24} x \right);$$

$$y = 0, (x = l); y = \frac{49ql^4}{24EI_z}, (x = 2l).$$

Эпюры углов поворота  $\theta$  сечений и прогибов  $y$  построены на рисунке П2.1.

Задача решена.

### ЗАДАНИЕ № 3. КРУЧЕНИЕ ВАЛОВ

На приводном валу установлен ведущий шкив  $B$  и два рабочих 1, 2, от которых последовательно берутся мощности  $N_1, N_2, кВт$  (рисунок 3).

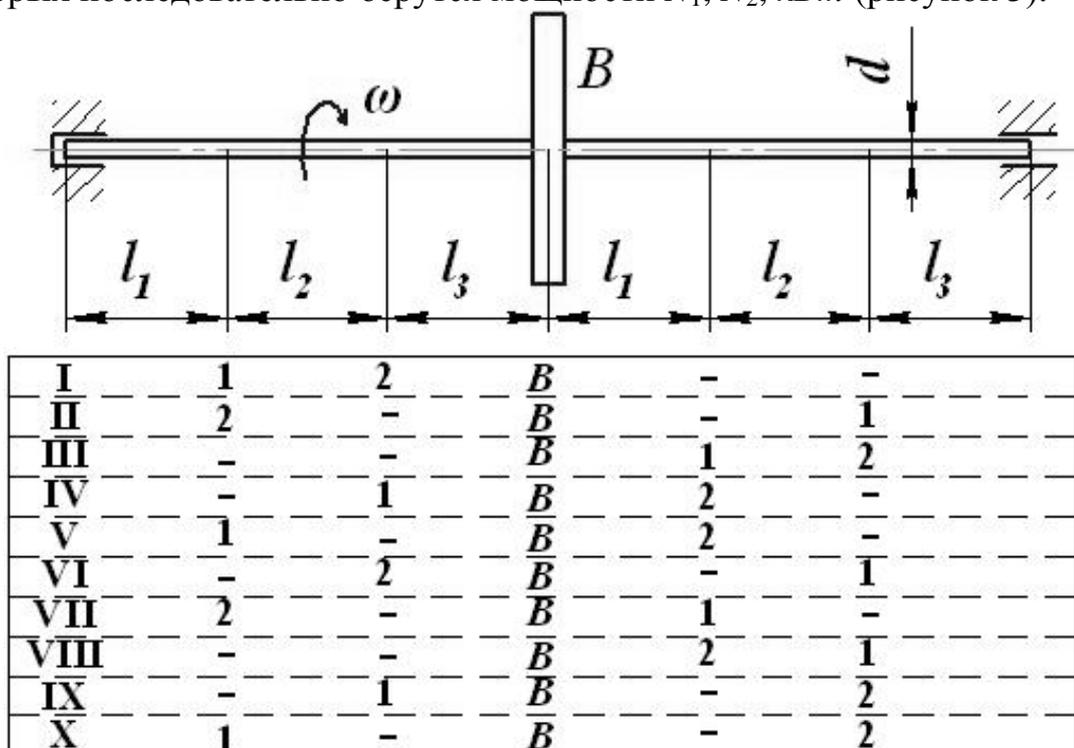


Рисунок 3 – Приводной вал

Требуется:

1. Построить эпюру крутящих моментов.
2. По заданным  $[\tau]$  и  $[\varphi]$  определить необходимый диаметр  $d$  сплошного вала и округлить его до ближайшей величины, соответственно равной 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 125, 140, 160, 180, 200 (мм).
3. Построить эпюру углов закручивания вала.  
Данные взять из таблицы 3.

Таблица 3 – Данные к заданию 3

№ строки	№ схемы	$l_1, \text{ м}$	$l_2, \text{ м}$	$l_3, \text{ м}$	$N_1, \text{ кВт}$	$N_2, \text{ кВт}$	$n_0, \text{ об/мин}$	$[\varphi], \text{ град.}$	$[\tau], \text{ МПа}$
1	I	1,0	1,5	2,0	40	130	600	2	100
2	II	1,2	1,6	1,8	50	120	900	3	120
3	III	1,4	1,7	1,6	60	110	1200	4	140
4	IV	1,6	1,8	1,4	70	100	1500	3	160
5	V	1,8	2,0	1,2	80	90	1200	2	180
6	VI	2,0	1,8	1,4	90	80	900	3	200
7	VII	1,8	1,7	1,6	100	70	600	4	180
8	VIII	1,6	1,6	1,8	110	60	900	3	160
9	IX	1,4	1,5	2,0	120	50	1200	2	140
0	X	1,2	1,4	2,2	130	40	1500	4	120
	в	б	а	г	а	в	б	г	в

**Пример:**

На стальной вал насажены три шкива:  $B, 1, 2$  (рисунок П3). Мощность, передаваемая шкивами, составляет  $N_1 = 40 \text{ кВт}$ ,  $N_2 = 50 \text{ кВт}$ . Частота вращения вала  $n_0 = 600 \text{ об/мин}$ . Принять  $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l = 1 \text{ м}$ ,  $[\tau] = 100 \text{ МПа}$ ,  $[\varphi] = 3^\circ = 0,052 \text{ рад}$ ,  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ .

**Решение:**

Мощность  $N_B$  на ведущем шкиве равна сумме мощностей на ведомых шкивах

$$N_B = N_1 + N_2 = 40 + 50 = 90 \text{ кВт.}$$

1) Величины скручивающих моментов от отдельных шкивов:

$$M_B = 9550 \frac{N_B}{n_0} = 9550 \frac{90}{600} = 1432,5 \text{ Нм;}$$

$$M_1 = 9550 \frac{N_1}{n_0} = 9550 \frac{40}{600} = 636,7 \text{ Нм;}$$

$$M_2 = 9550 \frac{N_2}{n_0} = 9550 \frac{50}{600} = 795,8 \text{ Нм.}$$

Условие равновесия

$$M_B = M_1 + M_2$$

выполняется.

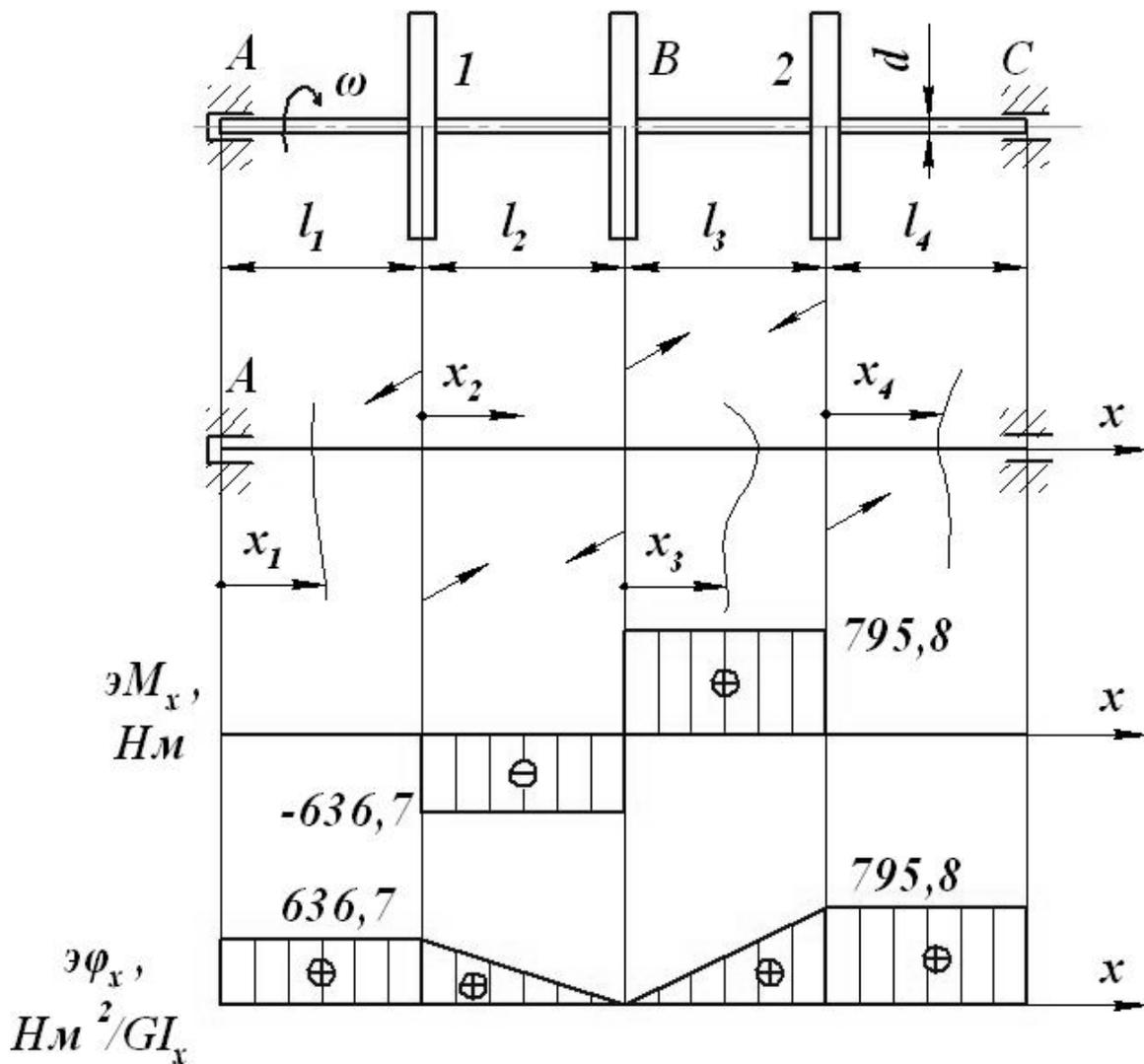


Рисунок ПЗ – Расчетная схема вала, эпюры крутящих моментов и углов закручивания

2) Определяем крутящие моменты.

Первый участок ( $0 \leq x_1 \leq l_1$ )

$$M_{x1} = 0.$$

Второй участок ( $0 \leq x_2 \leq l_2$ )

$$M_{x2} = -M_1 = -636,7 \text{ Нм.}$$

Третий участок ( $0 \leq x_3 \leq l_3$ )

$$M_{x3} = -M_1 + M_B = -636,7 + 1432,5 = 795,8 \text{ Нм.}$$

Четвертый участок ( $0 \leq x_4 \leq l_4$ )

$$M_{x4} = -M_1 + M_B - M_2 = -636,7 + 1432,5 - 795,8 = 0.$$

Эпюра крутящих моментов построена на рисунке ПЗ.

3) Определяем углы закручивания.

Принимаем

$$\varphi_B = 0.$$

Первый участок ( $0 \leq x_1 \leq l_1$ )

$$\Delta\varphi_{1A} = - \int_0^{l_1} \frac{M_{x1} dx}{GI_x} = 0.$$

Второй участок ( $0 \leq x_2 \leq l_2$ )

$$\Delta\varphi_{B1} = - \int_0^{l_2} \frac{M_{x2} dx}{GI_x} = 636,7 \frac{\text{Нм}^2}{GI_x}.$$

Третий участок ( $0 \leq x_3 \leq l_3$ )

$$\Delta\varphi_{2B} = \int_0^{l_3} \frac{M_{x3} dx}{GI_x} = 795,8 \frac{\text{Нм}^2}{GI_x}.$$

Четвертый участок ( $0 \leq x_4 \leq l_4$ )

$$\Delta\varphi_{C2} = \int_0^{l_3} \frac{M_{x4} dx}{GI_x} = 0.$$

Абсолютные углы закручивания

$$\varphi_1 = \varphi_B + \Delta\varphi_{B1} = 636,7 \frac{\text{Нм}^2}{GI_x},$$

$$\varphi_A = \varphi_B + \Delta\varphi_{B1} + \Delta\varphi_{1A} = 636,7 \frac{\text{Нм}^2}{GI_x},$$

$$\varphi_2 = \varphi_B + \Delta\varphi_{2B} = 795,8 \frac{\text{Нм}^2}{GI_x}$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \Delta\varphi_{2B} + \Delta\varphi_{C2} = 795,8 \frac{\text{Нм}^2}{GI_x}$$

Эпюра углов закручивания показана на рисунке ПЗ.

4) Определяем диаметр вала из условия прочности.

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16|M_{xi}|_{max}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 795,8}{\pi \cdot 100 \cdot 10^6}} = 34,35 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Принимаем  $d_1 = 35 \text{ мм.}$

5) Определяем диаметр вала из условия жесткости.

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32|M_{xi}|_{max}}{\pi G[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32M_{x3}l_3}{\pi G[\varphi]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 795,8 \cdot 1}{\pi \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,052}} = 37,37 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Принимаем  $d_2 = 40 \text{ мм.}$

Из  $d_1$  и  $d_2$  выбираем больший, т.е. принимаем  $d = 40 \text{ мм.}$

Задача решена.

## Литература

1. Сурин, В.М. Прикладная механика: учеб. пособие для студ. вузов / В.М. Сурин. Минск: Новое знание, 2005. – 387 с.
2. Олофинская, В.П. Техническая механика: учеб. пособие / В.П. Олофинская. – М.: ФОРУМ, 2009. – 349 с.
3. Александров, А.В. Сопротивление материалов: учеб. для вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин Б.П. – М.: Высш. шк., 2004. – 560 с.
4. Дородов, П.В. Избранные задачи республиканских олимпиад по сопротивлению материалов с решениями и комментариями / П.В. Дородов, А.А. Кулагин. – Ижевск: ФГБОУ ВПО Ижевская ГСХА, 2012. – 27 с.
5. Кочетов В.Т., Павленко А.Д., Кочетов М.В. Сопротивление материалов. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2001. – 368с.
6. Саргсян, А.Е. Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности. Основы теории с примерами расчетов. – М.: Высш. шк., 2002. – 268 с.