

Тема: Теория поля

Студент _____

Группа _____

Вариант 1

1. Построить семейство линий уровня скалярного поля $U = x^2 + 4y^2$. Среди этих линий найти ту, которая ограничивает фигуру площадью $S = \pi$.

2. Найти угол между градиентами скалярных полей:

$$U = \frac{x^3 y^2}{z}, \quad V = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{z\sqrt{6}}, \quad M_0 \left(1; 2; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

3. Найти производную скалярного поля $U = x^2 + y^2 + z^2$ по направлению касательной к

кривой $L: \begin{cases} x = R \cdot \cos t \\ y = R \cdot \sin t \\ z = a \cdot t \end{cases}$ в точке $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

4. Построить векторные линии векторного поля $\vec{F} = x\vec{i} + 3z\vec{k}$ в R^3 .

5. Вычислить $\operatorname{div} \vec{F}$ и $\operatorname{rot} \vec{F}$ векторного поля. Указать потенциальные и соленоидальные поля:

а) $\vec{F} = (yz + x) \cdot \vec{i} + xz \cdot \vec{j} + xy \cdot \vec{k}$

б) $\vec{F} = (1 + 2xy) \cdot \vec{i} - y^2 z \cdot \vec{j} + (yz^2 - 2zy + 1) \cdot \vec{k}$

в) $\vec{F} = x^3 \cdot \vec{i} + y^3 \cdot \vec{j} + xz^3 \cdot \vec{k}$

6. Найти поток Π векторного поля $\vec{F} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ через замкнутую поверхность $\mathcal{P}: \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z \leq 2 \end{cases}$ двумя способами: а) непосредственно и б) по формуле Остроградского.

7. Вычислить циркуляцию \mathcal{C} векторного поля $\vec{F} = 2xz\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$ вдоль замкнутого контура $L: \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \end{cases}$ двумя способами:
а) непосредственно и б) по формуле Стокса.

8. Установить потенциальность векторного поля $\vec{F} = 2xyz\vec{i} + x^2z\vec{j} + x^2y\vec{k}$, найти его потенциал U и вычислить линейный интеграл $I = \int_{AB} \vec{F} \cdot \vec{dr}$, где $A(1, 1, -2)$, $B(2, 3, -1)$.

ОТВЕТЫ

1. Семейство линий уровня:

Рисунок:

2. $\vec{\nabla}U =$

$$\vec{\nabla}U(M_0) =$$

$$\vec{\nabla}V =$$

$$\vec{\nabla}V(M_0) =$$

$$\cos \alpha =$$

$$\alpha =$$

3. $\vec{l}_0 =$

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{l}}(M_0) =$$

4. Векторные линии:

Рисунок:

5. а) $\operatorname{div} \vec{F} =$

$$\operatorname{rot} \vec{F} =$$

б) $\operatorname{div} \vec{F} =$

$$\operatorname{rot} \vec{F} =$$

в) $\operatorname{div} \vec{F} =$

$$\operatorname{rot} \vec{F} =$$

Соленоидальные поля: _____

Потенциальные поля: _____

6. а) $\Pi =$

Рисунок:

б) $\Pi =$

7. а) $\zeta =$

Рисунок:

б) $\zeta =$

8. $U =$

$$I =$$