##### Конспект лекций

**глава 7 Неопределённый интеграл**

**глава 8 Определённый интеграл**

### Предисловие

Разработанное пособие адресовано студентам ТГТУ всех форм обучения и состоит из нескольких отдельных брошюр в виде конспективного изложения лекционного материала курса высшей математики в соответствии с действующими программами для инженерно-технических специальностей. Конспект может быть использован независимо по каждой рассмотренной теме. Излагаемый материал и нумерация разделов разбиты по главам в порядке, традиционно сложившимся на кафедре высшей математики. Пособие имеет следующую структуру:

Глава 1. Линейная алгебра.

Глава 2. Векторная алгебра.

Глава 3.Аналитическая геометрия.

Глава 4. Кривые второго порядка.

Глава 5. Начала анализа.

Глава 6. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Глава 7. Неопределенный интеграл.

Глава 8. Определенный интеграл.

Глава 9. Функции нескольких переменных.

Глава 10. Кратные интегралы.

Глава 11. Дифференциальные уравнения.

Глава 12. Ряды.

В качестве дополнительного материала предлагаются также:

Глава 13. Комплексные числа.

Глава 14. Элементы дифференциальной геометрии.

Глава 15. Криволинейные интегралы.

Глава 16. Элементы теории поля.

В заключении отметим, что конспект лекций в основном ориентирован на среднего студента и, усвоение содержащегося в нем материала гарантирует удовлетворительные и хорошие знания по курсу высшей математики. А одаренным и отлично успевающим студентам, предлагаем все-таки обратиться к первоисточникам ,список которых приводится в конце каждой брошюры.

***Успехов всем на тернистом пути познания.***

С уважением авторы*.*

**Гл. 7 Неопределенный интеграл.**

Замечания:

‑ 4 ‑

**§ 7.1.Основные понятия.**

**Определение 1:** *Функция  называется первообразной функцией для функции  на интервале , если  дифференцируема на  и .*

**Теорема.7.1.** Если функция непрерывна на каком-нибудь промежутке, то она имеет на нем первообразную. (Без доказательства)

**Пример**  **а)**  является первообразной для  на

, т.к. 

**б)**  есть первообразная для  на ,

т.к. .

**Теорема 7.2.** Если  - первообразная для функции  на , то  - также первообразная, где С – любое число.

Доказательство: Найдём производную,но  (см.гл.6), значит 

**Теорема 7.3.** Если  и - две первообразные для функции  на , то они на этом промежутке отличаются на постоянную: .

Доказательство: По условию . Составим функцию . Очевидно, что  

(согласно следствию из теоремы Лагранжа, см. гл. 6).

На основании рассмотренных теорем справедлив вывод, что если - первообразная для функции  на , то любая другая первообразная имеет вид .

Например: Для функции  первообразной является не только функция , но и ,  и т.д.

**Определение 1:** *Совокупность всех первообразных функции  на  называется* ***неопределенным интегралом*** *от функции  и обозначается символом:*

*.*

**

где  - подынтегральная функция,

 - дифференциал независимой переменной,

 - подынтегральное выражение.

**Примеры :**  ;  ; ;

Замечания:

‑ 5 ‑

 ;. .

**§ 7.2. Свойства неопределенного интеграла.**

**1)**. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

 или .

**2)**. Неопределенный интеграл от дифференциала непрерывно дифференцируемой функции равен самой этой функции с точностью до постоянной:

 или .

**3)**. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

, где .

**4)**. Неопределенный интеграл от суммы двух непрерывных функций равен сумме неопределенных интегралов от этих функций:

.

**5)**. Если  есть первообразная функции , то

.

Данные свойства вытекают непосредственно из определения неопределенного интеграла. Процесс нахождения по известной производной  искомой функции  называется интегрированием. Суть его состоит в преобразовании подынтегрального выражения с целью приведения его к одному из стандартных видов называемому табличным интегралом.

На основании определения неопределенного интеграла, правил интегрирования и таблицы производных основных элементарных функций можно составить ***таблицу основных неопределенных интегралов*:**

1. , .

2. , на интервале не содержащем .

3. , .

4. , .

5. , .

6. , .

7. , .

8. .

9. .

Замечания:

‑ 6 ‑

10. .

11. 

12. , .

**§ 7.3. Непосредственное интегрирование.**

Непосредственным интегрированием называется способ вычисления неопределенных интегралов с помощью тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств 3°-5°.

## **Пример 1.**

**Пример 2.** 

**§ 7.4.Интегрирование методом замены переменной.**

В основе метода замены переменной (подстановки) лежит утверждение о независимости вида неопределенного интеграла от выбора аргумента, то есть если, то для любой непрерывно дифференцируемой функции  также существует неопределенный интеграл, причем .

Доказательство:  (свойство 1), следовательно , то есть  и  является первообразной функции .

Можно также записать, что :

.

Получаем формулу интегрирования подстановкой:

, где 

**Пример 3.**



(Обратная подстановка) =.

Замечания:

‑ 7 ‑

**Пример 4.**



.

Во многих случаях бывает удобно вместо обозначения новой переменной интегрирования, ввести часть подынтегральной функции под знак дифференциала: . При этом оказываются полезны следующие соотношения:

|  |  |
| --- | --- |
| 1. | 6. |
| 2. | 7. |
| 3. | 8*.* |
| 4. | 9. |
| 5. | 10. |

**Пример 5.**

, где аргумент принял значения .

Заметим, что для любой дифференцируемой функции  имеем следующие соотношения:

****;

****

Применим первое из данных соотношений для вычисления интегралов от тригонометрический функций.

**Пример 5..**

**Пример 6..**

Данные интегралы не являются табличными, но их рекомендуется запомнить, так как они часто встречаются в задачах.

**§ 7.4.Интегрирование по частям.**

Представим подынтегральное выражение в виде двух неизвестных множителей 

Пусть  и  функции аргумента , имеющие производные  и . По правилу диференцирования известно: , значит по свойствам 2 и 4 ,

Замечания:

‑ 8 ‑

где. , а  .

Получаем формулу интегрирования по частям:



Применять её целесообразно, когда интеграл в правой части формулы более прост для нахождения, нежели исходный. Отметим, что в некоторых случаях данную формулу необходимо применять несколько раз. Метод применяется, когда имеется произведение алгебраического многочлена  на одну из следующих элементарных функций:

1. Тригонометрические функции (, );
2. Трансцендентные функции (, );
3. Обратные тригонометрические функции (,  и т.д.).

Возможна также комбинация произведения функций 1-й тип на 2-ой, 2ой на 3- й и т.д.

Например: , .

При использовании метода интегрирования по частям выполняются следующие действия для  и ;

Находим , как производную от  и , как интеграл от (без учёта постоянной C).

Применяем формулу интегрирования по частям.

Иногда бывает трудно сделать выбор  и . В таких случаях можно воспользоваться правилами:

**а)** В качестве  выбирается та из функций, которая при дифференцировании упрощается больше.

Например: , .

**б)** В качестве  выбирается та из функций, которую легче внести под знак дифференциала.

Например: , , тогда .

**Пример 1.**

****.

**Пример 2**

Замечания:

‑ 9 ‑

****

****.

**§ 7.5. Интеграл, приводящийся к исходному.**

Это частный случай применения формулы интегрирования по частям, когда в результате мы получаем выражение:

, 

где а = const., - исходный интеграл.

Тогда получаем, что .

**Пример 1.**

; .

Формула интегрирования по частям может применяться неоднократно, но всякий раз используются одни и те же правила.

**Пример 2.**





,

Замечания:

‑ 10 ‑

т.е. получим исходный интеграл  с коэффициентом ⇒

+С

**§ 7.6. Интегралы, содержащие в знаменателе**

**квадратный трехчлен**

К такому виду относятся интегралы:

1. ; ;
2. ; .

Интегрирование выражений I – го типа производится путем выделения полного квадрата в квадратном трехчлене и последующего применения формул табличных интегралов 8-11.

Напомним, если в интеграле квадратный трехчлен имеет вид , то для выделения полного квадрата  выносят за скобки  и затем применяют формулу для приведенного квадратного трехчлена

**Пример 1.**  приведём знаменатель к виду, содержащему полный квадрат 

**Пример 2.**



Выражения II-го типа разбивают на сумму двух интегралов, путем выделения в числителе производной от трехчлена, стоящего в знаменателе.

Так как  , то  и можно записать

 интеграл I-го типа.

Замечания:

‑ 11 ‑

Аналогично можно представить:

II тип интеграла.

**Пример 3.**





**§ 7.7. Интегрирование рациональных функций.**

Рациональной функцией называется дробь вида:  (1)

где и - целые рациональные многочлены соответственно

m-ой и n-ой степеней. ;

.

Если , то  называется правильной дробью, если  - неправильной дробью.

Всякую неправильную дробь путем деления числителя на знаменатель можно представить в виде суммы некоторого многочлена и правильной дроби.

**Пример 1.** 

Таким образом, интегрирование рациональных функций сводится к интегрированию правильных дробей. Для того, чтобы рассмотреть метод интегрирования вспомним некоторые свойства многочленов с действительными коэффициентами.

- многочлен n-ой степени. Степенью многочлена называют максимальную степень при . Корнем многочлена называют такое число, подстановка которого обращает многочлен в 0.

Рассмотрим виды простейших многочленов.

1. Линейный: , его нельзя разложить на множители. Корень многочлена .
2. Квадратный трехчлен: . При наличии действительных корней  и  можно разложить на множители. .
3. Многочлены степени .

**Теорема7.2** Всякий многочлен с действительными коэффициентами степени выше второй может быть представлен в виде произведения линейных и квадратных сомножителей  (2)

Замечания:

‑ 12 ‑

где *a, b* – корни многочлена кратностей соответственно α и β. (Если α=1, то *a* – простой корень, при α>1, *a –* кратный корень). У квадратных трехчленов действительных корней нет.

**Пример 2.** 

****; простой корень; ; корень кратности 2; ; корень кратности 3, многочлены  и - не имеют действительных корней.

Интегрирование рациональных дробей производиться путем представления исходных подынтегральных выражений в виде суммы простейших дробей.

*Простейшей дробью* называется дробь одного из следующих четырех видов:

1.) ; 2.) ;

3.) ; 4.) .

Интегралы от этих дробей находятся легко.

1. ,
2. ,
3. Интеграл, содержащий квадратный трехчлен подробно рассмотрен в разделе.7.6. пример 3.
4. Выделением производной от трехчлена и приведением к полному квадрату сводится к виду . Интегралы такого вида находят с помощью *рекуррентной формулы понижения степени знаменателя*:  Данную формулу легко вывести с помощью интегрирования по частям.

**Теорема 7.3** Всякую правильную рациональную дробь  со знаменателем представленном в виде (2) , можно разложить в сумму простейших рациональных дробей вида 1-4. В данном разложении каждому действительному корню *a* кратности α множителя  соответствует сумма дробей вида

, (3)

а каждой паре комплексно-сопряженных корней кратности π множителя  соответствует сумма дробей вида

. (4)

Для вычисления значений *A*, *М, N* в разложении функции *R(х)* на сумму простейших рациональных дробей часто используют **метод неопределенных коэффициентов**, суть которого заключается в следующем. С учетом формул (3), (4) *R(х)* представим в виде суммы простейших рациональных дробей с неопределенными коэффициентами *А, М, N.* Полученное равенство является тождеством. Поэтому, если привести все дроби к общему знаменателю  в числителе получим многочлен  степени *п—*1, тождественно равный многочлену , стоящему в числителе дроби *R(x).* Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях *х* в этих многочленах, получим систему *п* уравнений для определения *п* неизвестных коэффициентов *А, М, N* Система линейных уравнений решается известными методами линейной алгебры .

Замечания:

‑ 13 ‑

В некоторых случаях с целью упрощения вычислений можно воспользоваться следующим соображением. Так как многочлены  и  тождественно равны, то их значения равны при любых числовых значениях *х.* Придавая *х* конкретные числовые значения, получаем систему уравнений для определения коэффициентов. Такой метод нахождения неизвестных коэффициентов называется *методом частных значений.* Если значения *х* совпадают с действительными корнями знаменателя, получаем уравнение с одним неизвестным коэффициентом.

**Пример 3.** Найти 

В соответствии с формулой (3) разложение на элементарные дроби имеет вид

 (5)

Числители подынтегральных функций в левой и правой частях формулы (5) будут тождественно равными, таким образом, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *х* в обеих частях тождества, получаем систему уравнений



решение которой: *А* =-3/2, *В* =1, С =1/2.

Теперь найдем коэффициенты разложения методом частных значений. Подставим в числитель (5) вместо *х* частные значения, равные корням знаменателя *x*=0, *x=*1, *x*=2. Соответственно получим равенства –3=2*A*, , . Значения коэффициентов совпадают с найденными ранее. Теперь можно использовать это разложение для нахождения интеграла.

**Пример 4.** Найти .

На основании теоремы о разложении правильной дроби в сумму простейших дробей имеем



Приводя дроби в обеих частях последнего равенства к общему знаменателю, имеем . При  и  находим, что , , то есть и . Для нахождения *С* приравняем коэффициенты при *x2*. Получим , то есть . Окончательно

Замечания:

‑ 14 ‑



**Пример 5.** Найти .



следовательно

. При получим . Далее

 Откуда , .

.

**§ 7.8. Интегрирование тригонометрических выражений.**

I. При нахождении интегралов вида   возможны следующие случаи:

1.) Одно из чисел *m* или *n* – нечетное. Тогда производится “отщепление” одной из нечетных степеней с последующим внесением под знак дифференциала.

2.) Оба числа *m* и *n* – четные. Тогда рекомендуется использовать тригонометрические формулы понижения степени.

,  .

**Пример 1.**

****

.

“Отщепление” степени лучше производить у функции с меньшим показателем степени.

**Пример 2.**

****

В ряде случаев полезны следующие рекуррентные соотношения, позволяющие понизить показатель степени.



II. Интегралы вида , ,  вычисляются на основании формул тригонометрии:

Замечания:

‑ 15 ‑







**Пример 3. **

III. Интегралы вида  и  вычисляются путем “отщепления” четной степени и использования тригонометрических формул  и . После упрощения подынтегрального выражения пользуются методом внесения функции под знак дифференциала или вышеприведенными рекуррентными соотношениями.

**Пример 4. **

****

IV. Интегралы вида  , где *R* – рациональная функция, приводятся к интегралам от рациональных функций с новой переменной  использованием *универсальной тригонометрической подстановки *. В этом случае

, , .

**Пример 5.**

****



В случае, когда имеет место тождество , для приведения подынтегральной функции к рациональному виду можно применять *упрощенную подстановку* .

При этом

,  , .

Замечания:

‑ 16 ‑

**Пример 6.** 

**§ 7.9. Интегрирование иррациональных функций.**

Рассмотрим интегралы от некоторых иррациональных функций, которые с помощью подстановок приводятся к интегралам от рациональных функций новой переменной.

I. Интегралы вида  сводятся к рациональной функции подстановкой , где *N* – наименьшее общее кратное (НОК) значений *m* и *n*.

**Пример 1.** Найти ****.

Так как НОК(2, 4)=4, то соответствующая подстановка .

****



II. Интегралы вида , где - рациональная функция, *a*, *b*, *c*, *d* – постоянные, приводится к интегралу от рациональной функции нового аргумента с помощью подстановки , где *N* – наименьшее общее кратное *m* и *n*.

**Пример 2.** Найти . НОК(2, 3, 6)=6.





III. Иррациональные функции вида  выделением полного квадрата сводятся к 3-м видам функций, для каждой, из которой применяется свой вид подстановки:

1). , подстановка ;

2). , подстановка ;

3). , подстановка .

**Пример 3. **

Замечания:

‑ 17 ‑



**Пример 4.**





Для того чтобы перейти от новой переменной  к переменной , воспользуемся формулами тригонометрии. Так как , то . Поэтому . Окончательный ответ: .

Примечание. В интегралах, содержащих выражение  можно применять подстановку Эйлера: .

**§ 7.10. Интегралы, не выражающиеся через комбинацию элементарных функций.**

При вычислении неопределенных интегралов возникает вопрос

1) всякая ли непрерывная функция  имеет первообразную,

2) каким образом найти неопределенный интеграл, если он существует.

На первый вопрос отвечает теорема Коши.

**Теорема Коши**: Всякая непрерывная функция имеет первообразную.

###### Или

Для каждой непрерывной в интервале  функции  существует функция , производная от которой в интервале в точности равна данной функции . .

Однако теорема Коши не утверждает, что первообразную данной функции можно отыскать с помощью конечного числа известных операций и выразить ответ в элементарных функциях. Под “неберущимися” интегралами подразумевают интегралы, которые не могут быть выражены через конечное число арифметических операций и суперпозиций элементарных функций. Например, доказано, что следующие интегралы не интегрируются в элементарных функциях:

- интеграл Пуассона ,

Замечания:

‑ 18 ‑

, - интегралы Френеля,

- интегральный логарифм,

- интегральный косинус,

- интегральный синус.

Указанные интегралы хотя и существуют, но не являются элементарными функциями. Их можно представить, например, с помощью разложения в бесконечный степенной ряд. См. гл.12.

**Гл. 8 Определенный интеграл.**

Замечания:

‑ 19 ‑

**§8.1 Основные понятия**

Пусть на отрезке  определена функция .

Отрезок  разобьем на  частей (разбиение R) точками: 

На любом интервале  выберем по произвольной точке . (Рис 1.)

Составим  – ную интегральную сумму функции  на отрезке .

 ; где 

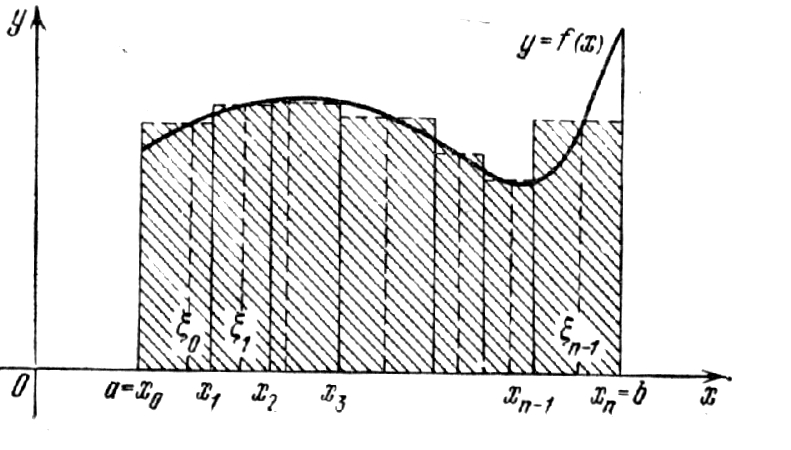


Рис.1

**Геометрический смысл** суммы - это есть алгебраическая сумма площадей прямоугольников, в основании которых лежат отрезки , а высоты равны . (В том случае если функция неотрицательна.)

Обозначим через - максимальную длину отрезков  разбиения R.

**Определение1**: *Предел (если он существует), к которому стремится*

*интегральная сумма , при , называется определенным интегралом от функции  на отрезке  и обозначается как:*

*, (1)*

*где , - нижний и верхний пределы интегрирования,*

Предел (1) называют интегралом Римана и функцию, для которой этот предел существует, называют интегрируемой в смысле Римана.

Данное определение эквивалентно следующему:

**Определение 2:** *Определенным интегралом от функции f на отрезке*

Замечания:

‑ 20 ‑

 *называется число I, удовлетворяющее следующему свойству: для всякого  можно найти число  такое, что для любого разбиения R отрезка* *, у которого* , *выполняется неравенство:*

**

*при произвольном выборе точек* .

В случае непрерывных функций понятие определенного интеграла введено Коши. Говорят, что непрерывная на  функция интегрируема в смысле Коши.

Непосредственное вычисление определенного интеграла по формуле (1) связано с рядом трудностей, так как интегральные суммы имеют сложный вид, и найти их предел нелегко.

**§8.2 Вычисление определенного интеграла.**

**Формула Ньютона-Лейбница.**

В начале XVII века Ньютон и Лейбниц указали общий метод вычисления определённых интегралов путем сведения таких задач к отысканию первообразной функции.

 , (2)

где - есть первообразная от функции 

Формула (2) носит название правила Ньютона-Лейбница.

Доказательство:

Пусть R произвольное разбиение  отрезка . Запишем:



 (\*)

Согласно теореме Лагранжа о среднем:

, где 

Подставив в выражение (\*), получим:

. 

**§8.3 Основные свойства определенного интеграла.**

Замечания:

‑ 21 ‑

1).  2). 

3). 

4). 

5). 

6). Если функция  интегрируема на каждом из отрезков  и

( ), то она интегрируема на  и .

**Замечание1:**Обозначение переменной интегрирования в определённом интеграле никакой роли не играет, то есть:



Пусть на отрезке  задана интегрируемая функция .Зададим произвольное число . Теперь определенный интеграл  есть некоторая функция от .

**Замечание2:** Если функция интегрируема на некотором отрезке, то она ограничена на нем. (без доказательства).

**Теорема 8.1.** Если функция  интегрируема на отрезке , то функция непрерывна в любой точке .

**Теорема 8.2.** Если интегрируемая на  функция  непрерывна в точке , то в этой точке существует производная от :

 или .

На основе вышеприведенного определения приведем еще одно доказательство формулы Ньютона-Лейбница.

Так как , то и .

Согласно теореме 8.2  есть первообразная функции  на . Если любая другая первообразная , то . То есть .

Приведем примеры простейших случаев применения формулы Ньютона-Лейбница:

**Пример 1.** 

Замечания:

‑ 22 ‑

**Пример 2.** 

**Теорема 8.3.** (Замена переменной). Имеет место равенство:

, где - непрерывно дифференцируема на , , и  непрерывна на .

**Пример 3.**

Верхний и нижний пределы в интеграле с новой переменной получены из условияи .

**Теорема 8.4.** Формула интегрирования по частям для определенного интеграла , где - непрерывно дифференцируемые на  функции.

**Пример 4.** 



**Теорема 8.5.** (Теорема о среднем).Определенный интеграл от непрерывной функции равен произведению длины интервала интегрирования на значение подынтегральной функции при некотором промежуточном значении аргумента, то есть , .

Доказательство: На основании формулы Ньютона-Лейбница

, где .

По теореме Лагранжа о конечных приращениях функции

, так как 

Геометрический смысл формулы.

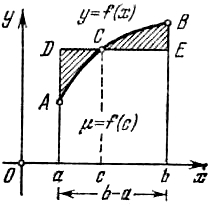


Рис.2

При  формула показывает, что криволинейная трапеция  (рис.2) имеет площадь равную некоторому прямоугольнику . Высота этого прямоугольника носит название среднего значения функции  на промежутке . То есть .

Замечания:

‑ 23 ‑

Следствие: Если , , то и при  из теоремы 8.5. следует . (Данное свойство позволяет оценить величину определенного интеграла.)

**Теорема 8.6.** При , интеграл от неотрицательной функции, есть число неотрицательное.

 Так как  и (по теореме о среднем) интеграл от неотрицательной функции есть число неотрицательное.

**Теорема 8.7.** Неравенство между непрерывными функциями можно интегрировать почленно при условии, что верхний предел больше нижнего. То есть если  и .

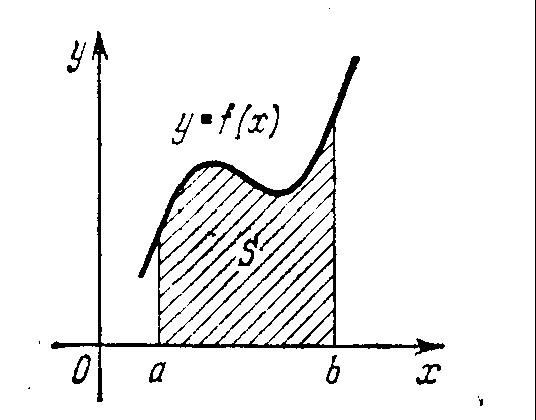
Доказательство:  

Так как в последнем интеграле подынтегральная функция  то



**Приложения определенного интеграла.**

**§8.4 Вычисление площадей плоских фигур.**



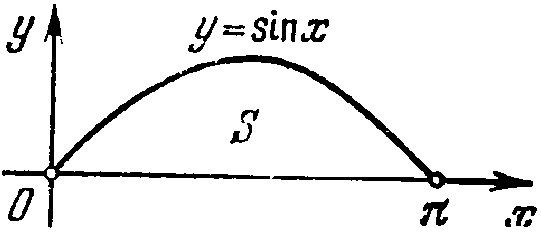


Рис.3 Рис.4

Задача 1. Найти площадь криволинейной трапеции (рис 3.), ограниченной дугой графика функции , отрезком оси ОХ и двумя вертикалями  ; .

На основании геометрического смысла интеграла

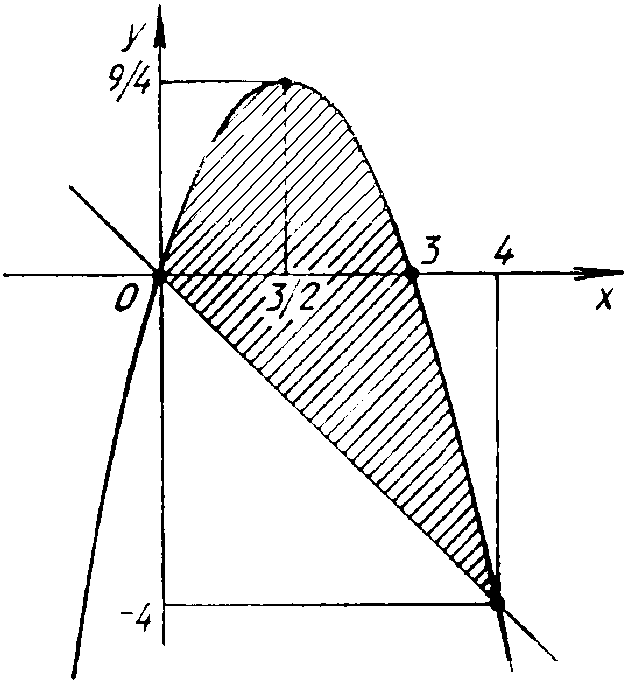
 (1)

**Пример 1.** Вычислить площадь одной волны синусоиды  . (Рис 4.)

Замечания:

‑ 24 ‑





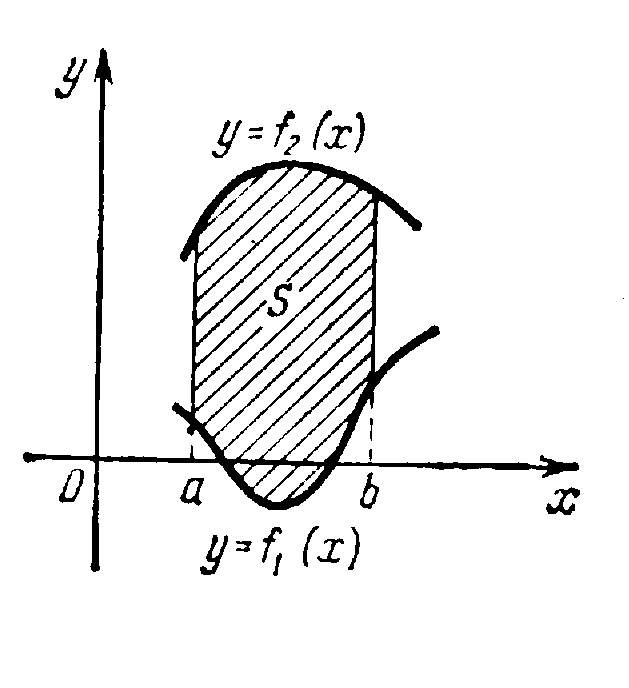


Рис.5

Рис.6

Задача 2. Найти площадь области, ограниченной графиками непрерывных функций  и ,  и двумя прямыми , . (рис 5)

Искомую площадь можно рассматривать как разность двух криволинейных трапеций.  (2)

**Пример 2.** Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями  и .

Находим точки пересечения данных кривых и строим искомую фигуру (рис. 6):

 и .

Следовательно .

**Замечание**. Если кривая, ограничивающая криволинейную трапецию (рис 5), задана параметрическими уравнениями , , то площадь криволинейной трапеции:

 (3)

где и  определяются из уравнений , .

**Пример 3.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом: .

Запишем параметрическое уравнение эллипса: , . С учетом симметрии фигуры получаем 

.

**§8.5 Площадь в полярных координатах.**

Замечания:

‑ 25 ‑

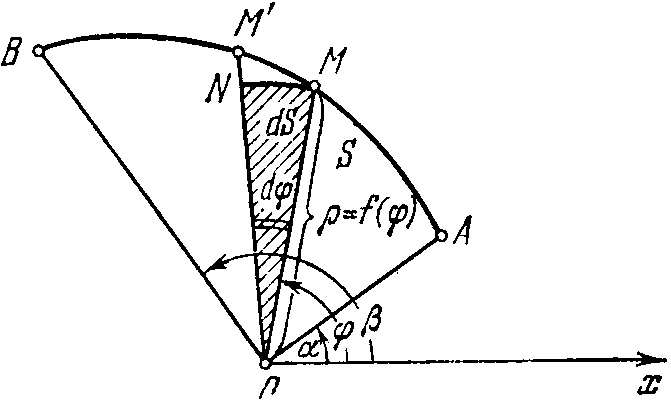
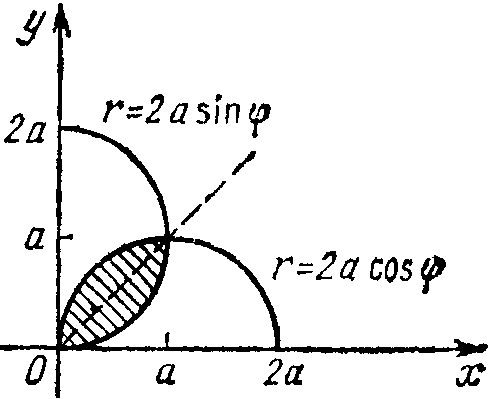


Рис.7

Задача 3. Найти площадь сектора ОАВ, ограниченную данной линией  и двумя лучами ,  (Рис. 7.) где  и - полярные координаты.

Для решения задачи разобьем сектор ОАВ на секторы лучами . Элемент -ного сектора можно приближенно считать круговым сектором, ограниченным окружностью радиуса . Площадь такого сектора . Чтобы получить общую площадь суммируем площади всех полученных секторов. .

Таким образом, получаем формулу для вычисления площади в полярных координатах:  (4)



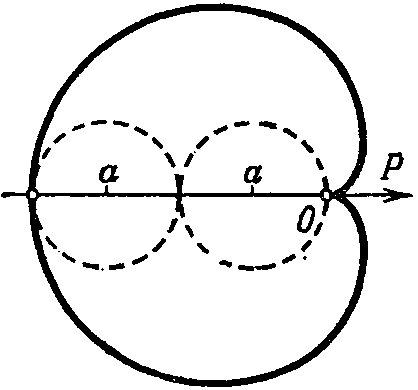


Рис.8 Рис.9

**Пример 4.** Вычислить площадь фигуры ограниченной кардиоидой  (Рис. 8)

Учитывая симметрию фигуры можно записать: 

**Пример 5.** Найти площадь фигуры, ограниченной дугами окружностей  и . (Рис. 9)

Замечания:

‑ 26 ‑

Окружности пересекаются при ; рассматриваемая фигура симметрична относительно луча , следовательно, ее площадь можно вычислить так:





**§8.6 Вычисление объемов тел вращения.**

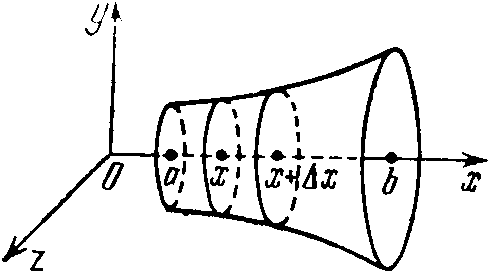


Рис.10

Пусть *L* есть кривая , . Вычислим объем тела вращения, ограниченного плоскостями  и  и поверхностью вращения кривой *L* вокруг ОХ. (Рис. 10)

Производим разбиение отрезка  на части



Считаем, что элемент объема  тела ограниченного плоскостями  и  приближенно равен объему цилиндра высоты , радиуса . То есть .

Величина  приближенно выражает . При переходе к пределу получим формулу объема тела вращения:

 (5)

Аналогично можно получить формулу объема тела вращения вокруг оси ОУ.

 (6)

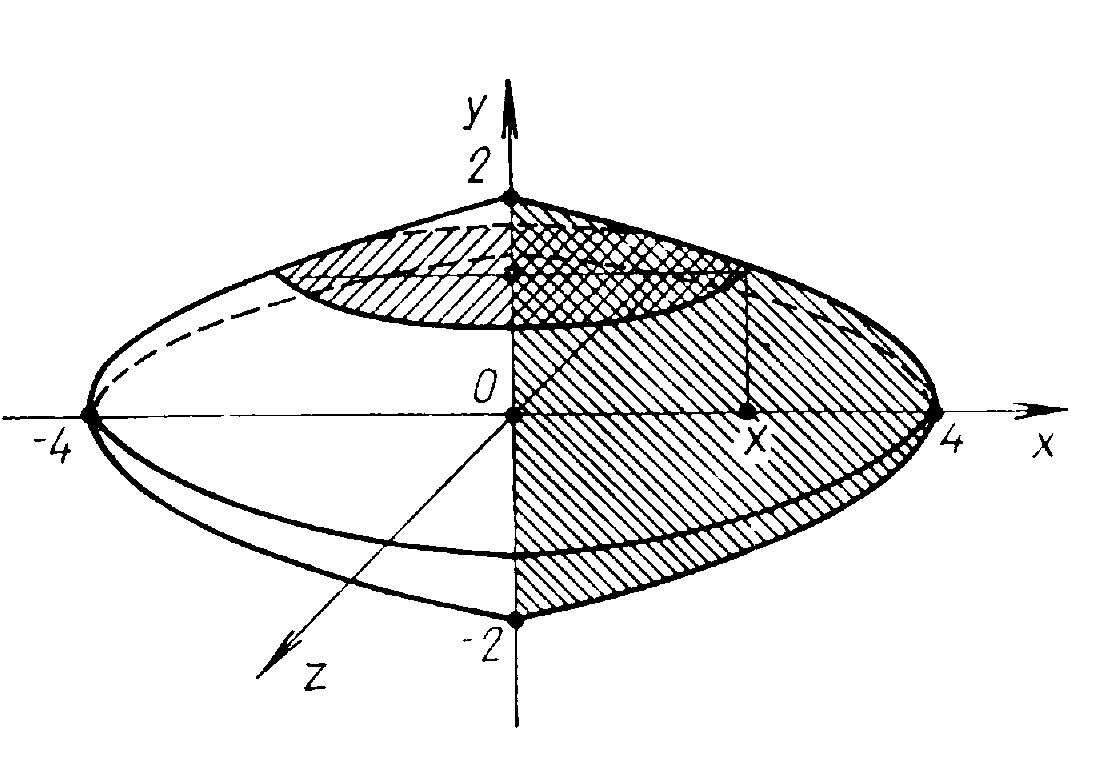


Рис.11

**Пример 6.** Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси фигуры, лежащей в плоскости  и ограниченной линиями , .(Рис. 11)

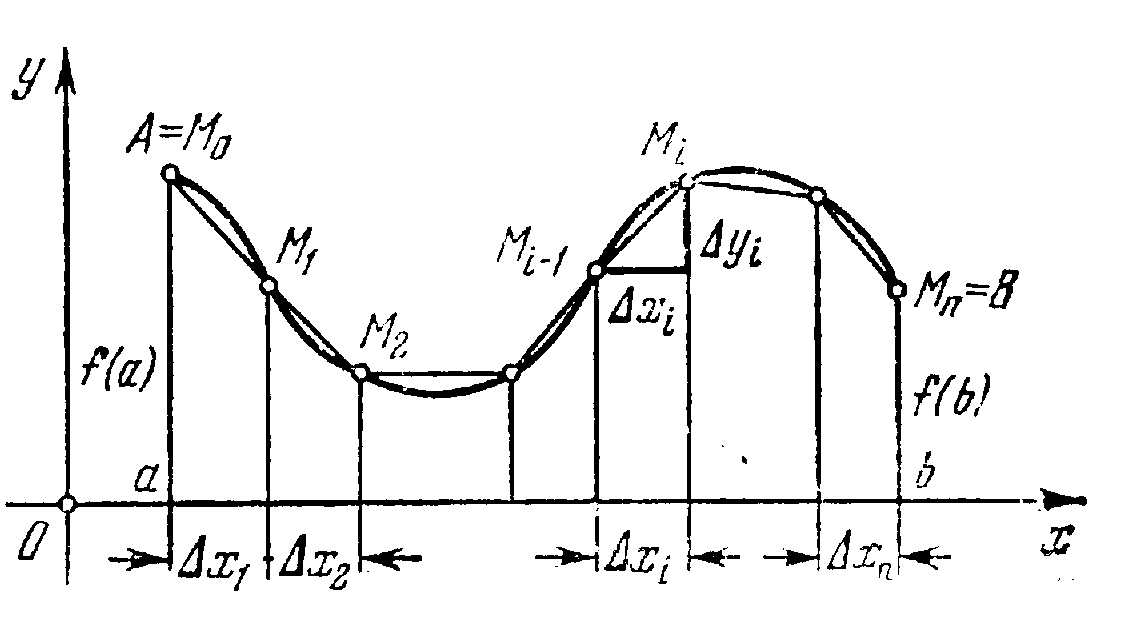
Очевидно, что: 



Замечания:

‑ 27 ‑

**§8.7 Длина дуги кривой.**



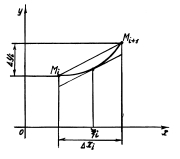


Рис.12 Рис.13

**Определение 3 :***Под длиной дуги АВ понимается предел, к которому стремиться длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда число звеньев ломанной возрастает неограниченно, а длина наибольшего звена ее стремиться к нулю.*

Кривая называется гладкой, если она непрерывна и в каждой точке имеет касательную непрерывно меняющую свое положение от точки к точке.

Рассмотрим вопрос о длине дуги  кривой, заданной , .

Впишем в данную гладкую кривую ломаную линию . (Рис. 12)

Проектируя точки  на  получим разбиение отрезка  на  частей . Рассмотрим -тое звено ломаной  (Рис. 13), где -приращение функции  на .



Согласно теореме Лагранжа , .

Тогда , а длину всей ломаной можно получить, суммируя все ее звенья. . Перейдем к пределу, считая, что длина наибольшего звена стремиться к нулю.

Замечания:

‑ 28 ‑

 (7)

**Пример 7.** Найти длину дуги кривой между точками с абсциссами  и .

Согласно формулы (7) имеем: .

Случай параметрически заданной кривой.

Если линия задана в параметрическом виде, то есть  , где  и  непрерывно дифференцируемые на отрезке  функции.

При стремлении длины отрезка ломаной к нулю можно считать, что , то есть дифференциал дуги. Тогда аналогично ,

соответствующие дифференциалы. Тогда можно записать

 (8)

Это формула для вычисления дифференциала дуги.

Так как  и , то  , тогда т.к  , то

 (9)

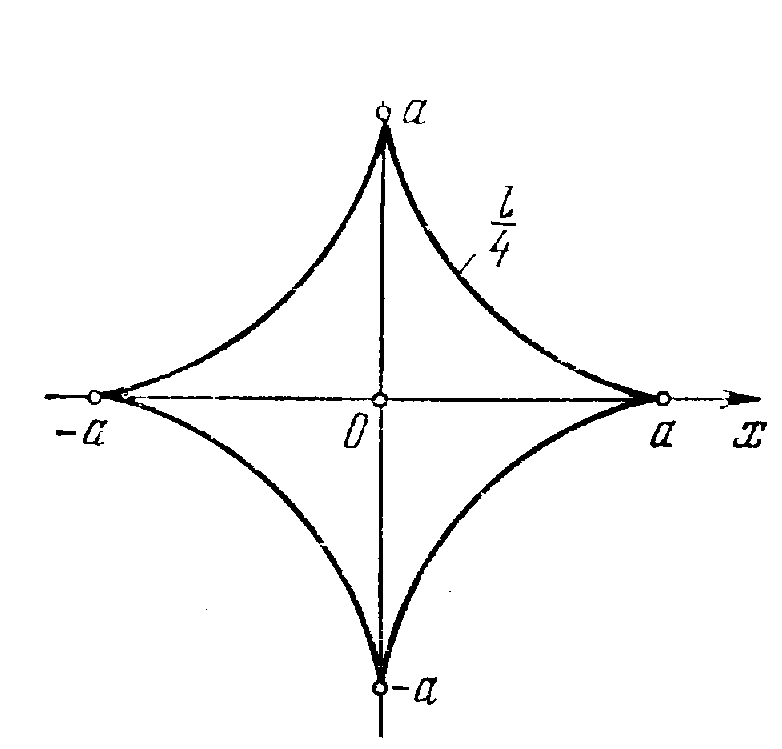


Рис.14

**Пример 8.** Найти длину дуги астроиды . (Рис. 14.)

, 



Замечания:

‑ 29 ‑

Длина дуги в полярных координатах.

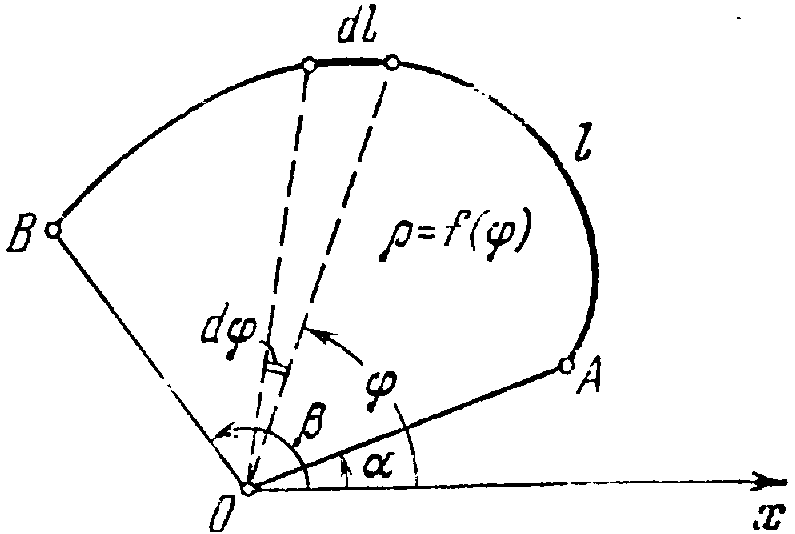


Рис.15

Выведем сначала дифференциал дуги *dl* в полярных координатах. Из предыдущего раздела известно, что , где *х* и *у—* прямоугольные декартовы координаты точки дуги.

Как известно, формулы перехода от полярных координат  и  к прямоугольным *х* и *у* следующие: , . Тогда



.

Возводя в квадрат и складывая, получим



Следовательно,  (\*)

Для того чтобы найти длину дуги непрерывно дифференцируемой кривой

 между точками А и В (Рис. 15) необходимо проинтегрировать равенство (\*) в пределах от  до .

 (10)

**Пример 9.**. Вычислить полную длину дуги кардиоиды (Рис. 8. ) .

 В силу симметрии фигуры запишем







**§8.8 Физические и механические приложения определенного интеграла.**

Замечания:

‑ 30 ‑

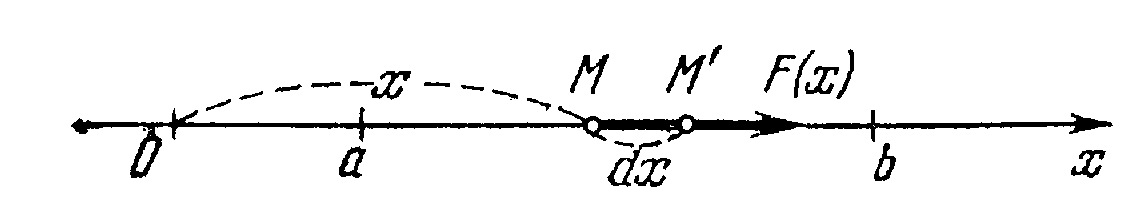


Рис.16

Одно из основных применений определенного интеграла – вычисление работы переменной силы.

Задача. Найти работу А непрерывной переменной силы *F(x),* приложенной к материальной точке М, при перемещении последней вдоль оси *Ох* из положения  в положение , пред­полагая, что направление силы совпадает с направлением перемещения.

Пусть точка М переместилась из положения *х* в положение *х* + *dx*  (Рис. 16.). На бесконечно малом промежутке длины *dx* силу *F(x)* при­ближенно можно счи­тать постоянной. По­этому *элементарная ра­бота силы* равна



Интегрируя данное выражение в пределах от *х=а* до *х=b*, полу­чим всю работу

 (11)

Кроме того, определенный интеграл применяется для вычисления некоторых механических величин, например: статистические моменты, координаты центра масс криволинейной трапеции:

Статический момент относительно оси OX  (12)

Статический момент относительно оси OY 

Координаты центра масс :



где S – площадь криволинейной трапеции.

**§8.9 Несобственный интеграл.**

При определении интеграла  предполагалось, что первое: промежуток интегрирования  конечен и второе: подынтегральная функция - определена и непрерывна на . Иногда от одного (или обоих) этих предположений можно отказаться в этом случае интеграл имеет название несобственный интеграл.

1. Интеграл по бесконечному промежутку.

(несобственный интеграл I рода)

Замечания:

‑ 31 ‑

**Определение 4:***Пусть функция  задана и непрерывна на полуинтервале . Тогда для любого  существует интеграл . Если существует конечный предел , то этот предел называют несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом интегрирования функции  на интервале  и записывают в виде:*

 (1)

При этом говорят, что интеграл сходится. В противном случае (предел не существует или равен ) говорят, что интеграл расходится.

**Примеры.**

1.  Предел не существует.

Несобственный интеграл не существует.

2.  Несобственный интеграл расходится.

3.  Интеграл сходится.

**Теорема 8.8** Если , то интеграл  возрастает

вместе с В.

Доказательство: Пусть , так как (интеграл от положительной функции), то 

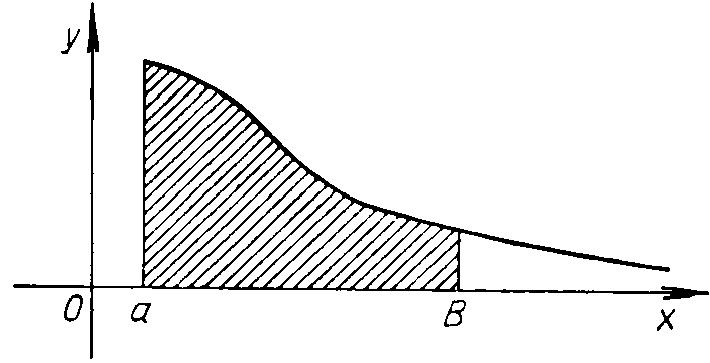


Рис.17

Известно, что всякая возрастающая переменная имеет предел (конечный или бесконечный), то есть при  интеграл  имеет (конечное или бесконечное) числовое значение. Геометрически – это площадь фигуры, ограниченная слева прямой , снизу осью , сверху графиком  и неограниченно простирающаяся направо. (Рис. 17.)

Замечания:

‑ 32 ‑

Пусть первообразная для , тогда

. Если ввести обозначение

, то приходим к обобщенной формуле Ньютона-Лейбница

 (2)

Мы подробно рассмотрели вычисление интеграла . Аналогично можно определить интегралы *с бесконечным нижним пределом*  и *с обоими бесконечными пределами*:

 ;

, где .

**Пример 4.** 



II Интегралы от разрывных функций. (несобственный интеграл Iрода)

Допустим, что отрезок  - конечен, но функция  не ограничена на нем, а стремится к бесконечности при приближении к одной из особых точек , ., которые называются точками разрыва

Рассмотрим сначала одну особую точку . Во всех остальных точках функция  непрерывна.

**Определение 5**:*Пусть точка  такова, что , тогда на отрезке  определен интеграл . Если существует конечный предел , то несобственный интеграл от разрывной функции сходится. В противном случае интеграл расходится.*

Аналогичным образом можно рассмотреть интеграл с особой точкой .

**Примеры.**

5. . Интеграл расходится.

6. . Интеграл сходится.

Замечания:

‑ 33 ‑

Если обе точки  и - особые, то интеграл определяется как сумма

, где .

Несобственный интеграл с разрывами в нескольких точках.

Пусть  непрерывна всюду на  кроме точек , лежащих между  и . (То есть  при .) Тогда под интегралом от  до  понимается сумма

.

Если не учитывать разрывность функции на отрезке интегрирования можно получить ошибочное значение интеграла.

**Пример.** Применим формулу Ньютона-Лейбница для интеграла . Полученный результат неверен, поскольку подынтегральная функция положительна.

Ошибка получена, так как не учтено, что на отрезке интегрирования  существует особая точка , в которой функция  терпит разрыв II рода. Необходимо вычислить данный интеграл как несобственный, а именно:



**§8.10 Приближенное вычисление определенных интегралов.**

Часть интегралов ,как уже было сказано, не имеют первообразных в элементарных функциях, поэтому для их нахождения применяют приближенные вычисления.

1. *Формула трапеций.*

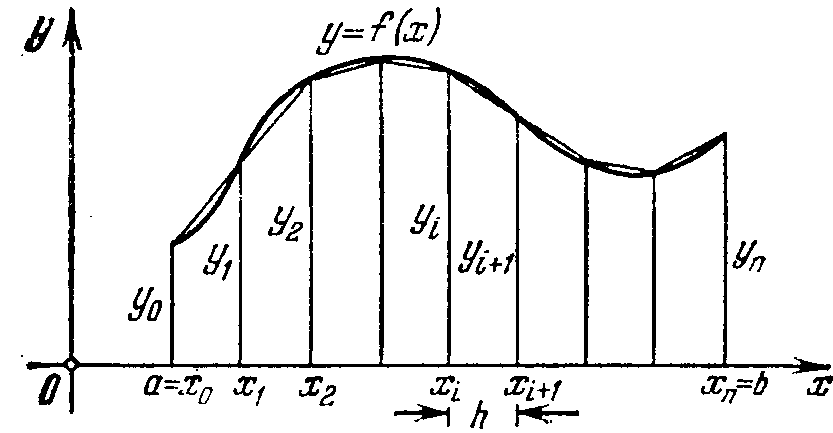


Рис.18

Чтобы приближенно вычислить интеграл  воспользуемся его геометрическим смыслом. Как известно такой интеграл представляет собой площадь криволинейной трапеции ограниченной линией , осью  и двумя прямыми и  (рис. 18 ).

Разобьем отрезок  на частей длины . (- шаг разбиения.) - абсциссы точек деления и вычислим значения - соответствующих ординат кривой. По формуле:, где . (). В результате построения наша криволинейная трапеция разбилась на ряд вертикальных полосок одной и той же ширины , каждую из которых приближенно можно принять за трапецию. Суммируя площади этих трапеций, получим формулу трапеций:

Замечания:

‑ 34 ‑

 (1)

**Пример 1.** Вычислить приближенно .

Разобьем промежуток интегрирования на 10 частей (), следовательно .

Абсциссы точек деления  и соответствующие им ординаты , запишем в таблице. Причем для удобства в начальной и конечной точке умножим значение на .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0 | 0,0 | 0,5000\* |
| 1 | 0,1 | 1,0050 |
| 2 | 0,2 | 1,0198 |
| 3 | 0,3 | 1,0440 |
| 4 | 0,4 | 1,0770 |
| 5 | 0,5 | 1,1180 |
| 6 | 0,6 | 1,1662 |
| 7 | 0,7 | 1,2207 |
| 8 | 0,8 | 1,2806 |
| 9 | 0,9 | 1,3454 |
| 10 | 1,0 | 0,7071\* |

Находим . И по формуле трапеций имеем . Точное значение этого же интеграла, полученное по формуле Ньютона-Лейбница .

*II. Формула Симпсона.*

Более точную формулу можно получить, если профиль криволинейной полоски считать параболой, а не прямой линией как в формуле трапеций. В этом случае применяют формулу Симпсона:



, . (2)

**Пример 2.** Вычислить приближенно .

Промежуток интегрирования разбиваем на 10 частей (), .

В таблицу запишем абсциссы точек деления  и соответствующие им ординаты .

Табл. результ.

Замечания:

‑ 35 ‑

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0 | 0,0 | 1,00000 |
| 1 | 0,1 | 0,99010 |
| 2 | 0,2 | 0,96153 |
| 3 | 0,3 | 0,91743 |
| 4 | 0,4 | 0,86206 |
| 5 | 0,5 | 0,80000 |
| 6 | 0,6 | 0,73529 |
| 7 | 0,7 | 0,67114 |
| 8 | 0,8 | 0,60975 |
| 9 | 0,9 | 0,55249 |
| 10 | 1,0 | 0,50000 |

Отдельно суммируем значения , стоящие на четных местах  и на нечетных местах





Точное значение интеграла .

**Список рекомендуемой литературы.**

*1. Бугров Я. С., Никольский С. М.* Дифференциальное и интегральное исчисление.

- М.: Наука, 1988.— 432 с.

2. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа

В 2 ч. - М.: Наука, 1971- 1973. Ч. 1. 1971.- 6ПО с.; Ч. 2.— 1973.— 448 с.

3. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс высшей математики.

- М.: Высш. шк., 1988, 712 с.

4. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления:

В 2 т.— М.: Наука. 1985.- Т. 1.- 432 с.; Т. 2.— 576 с.

#### Сборники задач и упражнений

1. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа.

- М.: Наука, 1985.—446 с

1. *Гусак А.А* Справочное пособие к решению задач: математический анализ и

дифференциальные уравнения. -. Минск, ТетраСистемс, 1998, 416 с.

1. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* Высшая матема­тика в упражнениях и

задачах: В 2 ч.— М.: Высш. шк., 1986.— Ч. 1.— 446 с.; Ч. 2.— 464 с.

1. *Демидович В. П.* Сборник задач и упражнений по математи­ческому анализу.

- М.: Наука, 1977.— 528 с.

1. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов/Г. С. Бараненков, Б. П.

Демидович, В. Ефименко и др.; Под ред. Б. П. Демндовича. - М.: Наука, 1978. - 380 с.

1. *Лихолетов И. И., Мацкевич И. П.* Руководство к решению задач по высшей

математике, теории вероятностей и математической стати­стике.

- Мн.: Выш. шк., 1976.— 456 с.