8. Лабораторная работа №8. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

8.1. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

8.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка.

Задача Коши:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y), \ x \in [x_0, b] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}. \tag{8.1}$$

Пусть требуется найти решение $y(x)$ на отрезке $[a,b]$, где $x_0 = a$. Применим к отрезку $[a,b]$ равномерное разбиение, т. е. получим $h = \dfrac{b-a}{n}$ и $x_k = x_0 + kh$, где $x_n = b$, x_k – узлы сетки, h – шаг сетки.

Обозначим через $y(x_k)$ точное значение функции $y(x)$ в точке x_k, через y_k приближенное вычисленное значение функции $y(x)$ в точке x_k.

8.1.2. Метод Эйлера

Разложим в ряд Тейлора в точке x_k значение функции $y(x_k + h) = y(x_{k+1})$.

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2} y''(\xi), \text{ где } x_k < \xi < x_{k+1}.$$

Согласно задаче Коши (8.1) $y'(x_k) = f(x_k, y(x_k))$, тогда разложение Тейлора $y(x_{k+1}) = y(x_k) + hf(x_k, y(x_k)) + \dfrac{h^2}{2} y''(\xi)$.

Полагая, что значение функции в следующем узле получается, таким образом,

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)\,. \tag{8.2}$$

Эта формула и определяет ***метод Эйлера***.

Замечание. Метод Эйлера имеет первый порядок точности $O(h)$.

8.1.3. Методы Рунге – Кутта

I. ***Метод Рунге – Кутта II порядка***

Проинтегрируем дифференциальное уравнение (8.1) на отрезке $[x_k; x_{k+1}]$, получим

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y)dx,\quad y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y)dx\,.$$

Воспользуемся формулой трапеций, тогда получим

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \frac{h}{2}\big(f(x_k, y(x_k)) + f(x_{k+1}, y(x_{k+1}))\big).$$

Эта формула дает приближенное значение

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\big(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\big). \tag{8.3}$$

Формула (8.3) – это неявная формула ***метода Рунге–Кутта II порядка***.

Воспользуемся методом предиктор – корректор для избавления от «неявности». Заменим y_{k+1} в правой части равенства (8.3) по формуле Эйлера на

$$y^*_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)\,. \tag{8.4}$$

Затем подставим y^*_{k+1} в формулу (8.3) вместо y_{k+1} в правой части

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\big(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y^*_{k+1})\big). \tag{8.5}$$

Формула (8.5) – явная формула Рунге–Кутта II порядка. Формула (8.4) – предиктор, формула (8.5) – корректор. Точность метода $O(h^2)$.

II. ***Метод Рунге–Кутта IV порядка***

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4\right). \tag{8.6}$$

$$F_1 = f(x_k, y_k),$$

$$F_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_1\right),$$

$$F_3 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_2\right),$$

$$F_4 = f\left(x_{k+1}, y_k + hF_3\right).$$

Замечание. Точность метода $O(h^4)$.

8.1.4. Выбор шага интегрирования

Точность расчетов существенным образом зависит от величины шага интегрирования h, поэтому важно правильно выбрать его начальное значение h_0.

Выбор начального шага h_0 проведем на примере метода Рунге–Кутта IV порядка. Итак, пусть ε – заданная точность счета. Поскольку метод Рунге–Кутта имеет точность четвертого порядка относительно шага h, должно выполняться условие $h^4 = \varepsilon$. Кроме того, отрезок $[a,b]$ должен быть разбит на четное число частей. Поэтому начальный шаг h_0 должен быть определен из двух условий:

$$h_0 = \sqrt[4]{\varepsilon}, \quad \frac{b-a}{h_0} \text{ – четно.} \tag{8.7}$$

Наибольшее h_0, удовлетворяющее условиям (8.7), является грубым приближением начального шага. Для его уточнения поступаем следующим образом. Находим решение задачи Коши в точке $x_0 + 2h_0$ по формулам Рунге–Кутта с шагами h_0 и 2 h_0, получаем два значения y_2 и $\widetilde{y}_2$. Путем увеличения или уменьшения шага в два раза (не обязательно однократного) подберем наибольшее значение

h_0, при котором будет выполнено неравенство $|y_2 - \tilde{y}_2| < \varepsilon$. Это и будет величина шага h, с которым решается задача Коши методом Рунге–Кутта.

8.1.5. Многошаговые методы Адамса

Рассмотренные методы Рунге–Кутта описываются формулой $y_{k+1} = \Phi(x_k, y_k)$, т. е. только в одной точке используется только один шаг.

Идея: получить значение, на следующем шаге используя значение не только в одной точке, но и в точках, стоящих перед ней (N + 1 шаг)

$$y_{k+1} = \Phi(x_k, ..., x_{k-N}; y_k, ..., y_{k-N}).$$

Рассмотрим интегральное представление дифференциального уравнения (8.1)

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y)dx. \tag{8.8}$$

Идея: построить интерполяционный полином Лагранжа $L(x_{k-N}, x_{k-N+1}, ..., x_{k-1}, x_k)$ для функции $f(x, y)$.

I. ***Явные методы Адамса***

Пусть известны значение $y_k, y_{k-1}, ..., y_{k-m}$, т. е. известны значения $f(x_k, y_k), ..., f(x_{k-m}, y_{k-m})$. На данных значениях построим интерполяционный полином Лагранжа степени *m.* Рассмотрим два случая.

а) Пусть $m = 0$, т. е. известно $f(x_k, y_k)$.

$$L_0(x) = f(x_k, y_k).$$

Тогда из (8.8) получим метод Эйлера $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$.

б) Пусть $m = 1$, т. е. известны две точки. Получим

$$L_1(x) = \frac{x - x_{k-1}}{h} f_k - \frac{x - x_k}{h} f_{k-1}.$$

Тогда из (8.8) следует, что

$$y_{k+1} = y_k + \left[\frac{(x - x_{k-1})^2}{2h} f_k - \frac{(x - x_k)^2}{2h} f_{k-1} \right]_{x_k}^{x_{k+1}} = y_k + \frac{4h}{2} f_k - \frac{h}{2} f_k - \frac{h}{2} f_{k-1},$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\big(3 f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1})\big). \tag{8.9}$$

Формула (8.9) определяет ***явный метод Адамса***. Метод Адамса имеет второй порядок точности.

II. ***Неявные методы Адамса***

Построим полином Лагранжа на значениях: $f(x_{k+1}, y_{k+1}), ..., f(x_{k-m}, y_{k-m})$.

Пусть $m = 0$, тогда

$$L_1(x) = -\frac{x - x_{k+1}}{h} f_k - \frac{x - x_k}{h} f_{k+1}$$

и из (8.8) получаем ***неявный метод Адамса***

$$y_{k+1} = y_k + \left[-\frac{(x - x_{k-1})^2}{2h} f_k + \frac{(x - x_k)^2}{2h} f_{k-1} \right]_{x_k}^{x_{k+1}} = y_k + \frac{h}{2} f_k + \frac{h}{2} f_{k+1},$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\big(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\big). \tag{8.10}$$

Так как (8.10) неявная формула (требуется разрешение относительно y_{k+1}), применяют схемы предиктора – корректора.

То есть предиктор по (8.9)

$$y_{k+1}^* = y_k + \frac{h}{2}\big(3 f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1})\big),$$

и корректор по (8.10)

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\big(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^*)\big).$$

Замечание. Неявные схемы неудобны в применении, но являются наиболее эффективными средствами противодействия неустойчивости численных расчетов.

8.2. Пример выполнения лабораторной работы

8.2.1. Задание к лабораторной работе

Решается задача Коши: $y' = f(x, y), \quad y(a) = y_0$ на отрезке $[a, b]$.

1. Найти шаг интегрирования для решения задачи Коши методом Рунге–Кутта (IV) с точностью 10^{-4}.

2. Найти решение задачи Коши на отрезке $[a, b]$ методом Рунге–Кутта (IV) с точностью 10^{-4}. Построить приближенную интегральную кривую.

3. Найти решение задачи Коши на отрезке $[a, b]$ методом Эйлера. Построить на одном графике (с п. 2) приближенную интегральную кривую.

4. Найти точное решение задачи Коши. Сравнить точное решение с приближенным. Найти максимум модуля отклонений в узловых точках приближенного решения от точного.

5. Записать результаты расчетов в сводную таблицу.

8.2.2. Решение типового примера

Решим задачу Коши: $xy' + y = 2y^2 \ln x, \quad y(1) = 1{,}5; \quad a = 1, \quad b = 3$.

1. Найдем шаг интегрирования для решения задачи Коши методом Рунге–Кутта (IV) с точностью 10^{-4}.

$$y' = \frac{y}{x}(2y \ln x - 1).$$

Найдем начальный шаг интегрирования h_0. Согласно первому условию (8.7)

$$h_0 = \sqrt[4]{0{,}0001} \approx 0{,}1 .$$

Выберем $x_0 = a = 1$, $y_0 = 1{,}5$. Найдем решение данной задачи Коши методом Рунге–Кутта (IV) сначала в точке $x_0 + h_0$, затем в точке $x_0 + 2h_0$, получим соответственно

$y_1 \approx 1{,}3813$ и $y_2 \approx 1{,}3078$.

Далее снова найдем решение задачи Коши в точке $x_0 + 2h_0$, но с шагом $2h_0$, получим $\tilde{y}_2 \approx 1{,}3078$.

Погрешность $|y_2 - \tilde{y}_2| = 1{,}7 \cdot 10^{-6} < 0{,}0001$, следовательно, увеличиваем шаг в два раза $h_0 = 0{,}2$.

Затем проделываем те же вычисления с новым шагом. Получаем

$y_1 \approx 1{,}3078$, $y_2 \approx 1{,}2402$, $\tilde{y}_2 \approx 1{,}2401$.

Погрешность $|y_2 - \tilde{y}_2| = 8{,}9 \cdot 10^{-6} < 0{,}0001$, следовательно, увеличиваем шаг в два раза $h_0 = 0{,}4$, получим

$y_1 \approx 1{,}2401$, $y_2 \approx 1{,}2891$, $\tilde{y}_2 \approx 1{,}2929$.

Погрешность $|y_2 - \tilde{y}_2| = 0{,}0003 > 0{,}0001$, следовательно, для решения выбираем шаг $h_0 = 0{,}4$.

Определим $n = \dfrac{b-a}{h_0} = \dfrac{2}{0{,}4} = 5$. Так как n должно быть четным числом, то выбираем $n = 6$. При таком значении n шаг $h_0 = 0{,}33$. Снова вычислим погрешность $|y_2 - \tilde{y}_2|$ с шагами 0,33 и 0,66.

$y_1 \approx 1{,}2545$, $y_2 \approx 1{,}2493$, $\tilde{y}_2 \approx 1{,}2507$.

Погрешность $|y_2 - \tilde{y}_2| = 8 \cdot 10^{-5}$, что укладывается в заданную точность.

2. Найдем решение задачи Коши на отрезке $[a, b]$ методом Рунге–Кутта (IV) с точностью 10^{-4} шагом $h = 0{,}33$, $2h = 0{,}66$.

x_i	Метод Рунге–Кутта (IV)		
	y_{i}	$\widetilde{y}_i$	$\Delta_i = \lvert y_i - \widetilde{y}_i \rvert$
1	1,5	1,5	0
1,33	1,2545		
1,66	1,2493	1,2507	$8{,}7 \cdot 10^{-5}$
1,99	1,3830		
2,32	1,6948	1,6955	$4{,}3 \cdot 10^{-5}$
2,65	2,4025		
3	4,7040	4,5124	0,013

$\Delta = \max\limits_i | y_i - \widetilde{y}_i | \approx 0{,}013$.

Построим приближенную интегральную кривую, полученную методом Рунге–Кутта (IV).

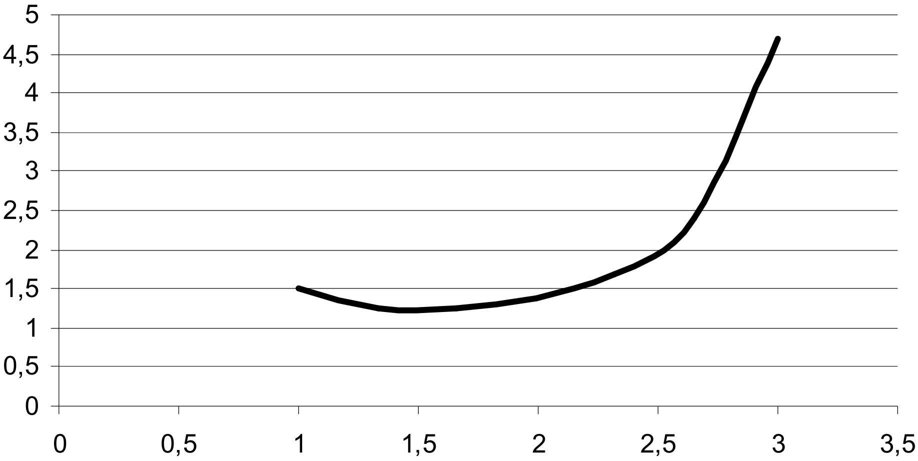

Рис. 8.1. Интегральная кривая, полученная методом Рунге–Кутта (IV)

3. Найдем решение задачи Коши на отрезке $[a,b]$ методом Эйлера с шагом h = 0,33, $2h$ = 0,66.

x_i	Метод Эйлера		
	y_i	$\widetilde{y}_i$	$\Delta_i = \lvert y_i - \widetilde{y}_i \rvert$
1	1,5	1,5	0
1,33	1,0050		
1,66	0,8986	0,5100	0,3886
1,99	0,8826		
2,32	0,9141	0,4121	0,5020
2,65	0,9841		
3	1,0966	0,3761	0,7205

$$\Delta = \max_i | y_i - \widetilde{y}_i | \approx 0{,}7205 .$$

Построим на одном графике (с п. 2) приближенную интегральную кривую.

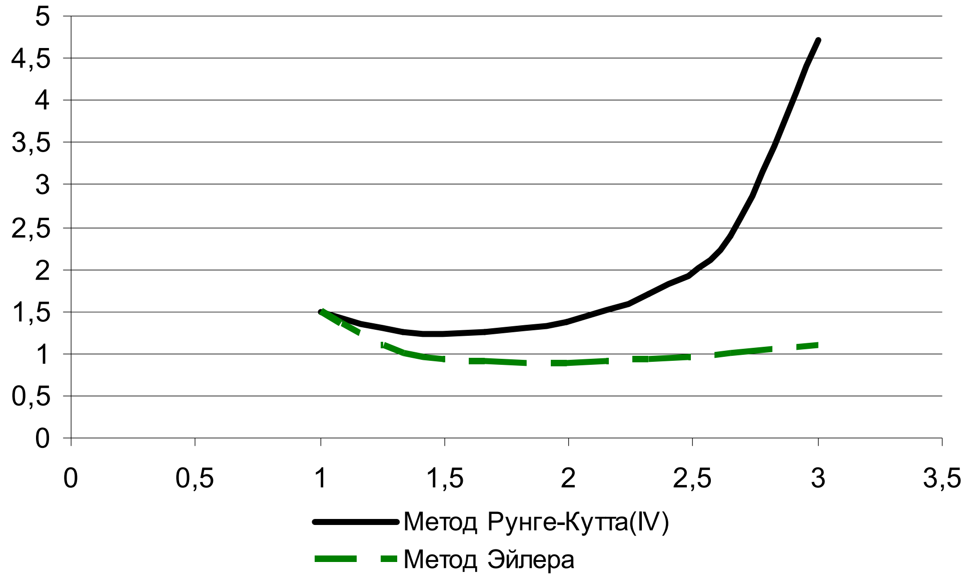

Рис. 8.2. Интегральные кривые, полученные методами Рунге–Кутта (IV) и Эйлера

4. Найдем точное решение задачи Коши.

$$xy' + y = 2y^2 \ln x, \quad y(1) = 1{,}5 .$$

Это уравнение Бернулли, значит, нужно привести его к линейному виду. Разделим все уравнение на y^2, получим

$$\frac{x}{y^2}y' + \frac{1}{y} = 2\ln x.$$

Далее делаем замену $z = y^{1-\alpha}$, $z = 1/y$, $y = 1/z$, $z' = -z/z^2$.

$$-xz^2\frac{z'}{z^2} + z = 2\ln x,$$

разделим все уравнение на $-x$,

$$z' - \frac{z}{x} = -\frac{2}{x}\ln x,$$

и мы получили линейное дифференциальное уравнение.

Решение будем искать в виде

$z = U(x)V(x)$,

$z' = U'V + UV'$,

$U'V + UV' - UV/x = -2(\ln x)/x$, $U'V + U(V' - V/x) = -2(\ln x)/x$.

$$\begin{cases} V' - \dfrac{V}{x} = 0, \\ U'V = -\dfrac{2}{x}\ln x. \end{cases}$$

$\dfrac{dV}{dx} = \dfrac{V}{x}$; $\dfrac{dV}{V} = \dfrac{dx}{x}$; $\ln V = \ln x + c$, положим $c = 0$, тогда $V = x$,

$$\frac{dU}{dx}x = -\frac{2}{x}\ln x \Rightarrow dU = -\frac{2}{x^2}\ln x dx,$$

$$U = -2\int\frac{\ln x}{x^2}dx = \begin{vmatrix} U = \ln x; & V = \dfrac{1}{x} \\ dU = \dfrac{1}{x}; & dV = -\dfrac{1}{x^2} \end{vmatrix} = 2\left(\frac{\ln x}{x} - \int\frac{1}{x^2}dx\right) = 2\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right) + c =$$

$$= \frac{2}{x}(\ln x + 1) + c,$$

$z = U(x)V(x)$, $z = 2(\ln x + 1) + cx$,

$y = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2(\ln x + 1) + cx}$, далее определим константу c.

Так как $y(1)=1{,}5$, то $\dfrac{1}{2+c} = 1{,}5$; $2 + c = \dfrac{2}{3}$; $c = -\dfrac{4}{3}$, тогда точное решение задачи Коши

$$y = \frac{1}{2\ln x + 2 - \frac{4}{3}x}.$$

Сравним точное решение с приближенным. Найдем максимум модуля отклонений в узловых точках приближенного решения от точного.

x_i	Точное решение	Метод Рунге–Кутта	Δ_i
	y_i	y_i	
1	1,5	1,5	0
1,33	1,2547	1,2545	10^{-4}
1,66	1,2495	1,2493	$2 \cdot 10^{-4}$
1,99	1,3832	1,3830	$3 \cdot 10^{-4}$
2,32	1,6954	1,6948	$6 \cdot 10^{-4}$
2,65	2,4050	2,4025	0,003
3	5,0704	4,7040	0,366

Максимум модуля отклонения точного значения от приближенного: $\delta = \max\limits_i |\, y(x_i) - y_i \,| = 0{,}366$.

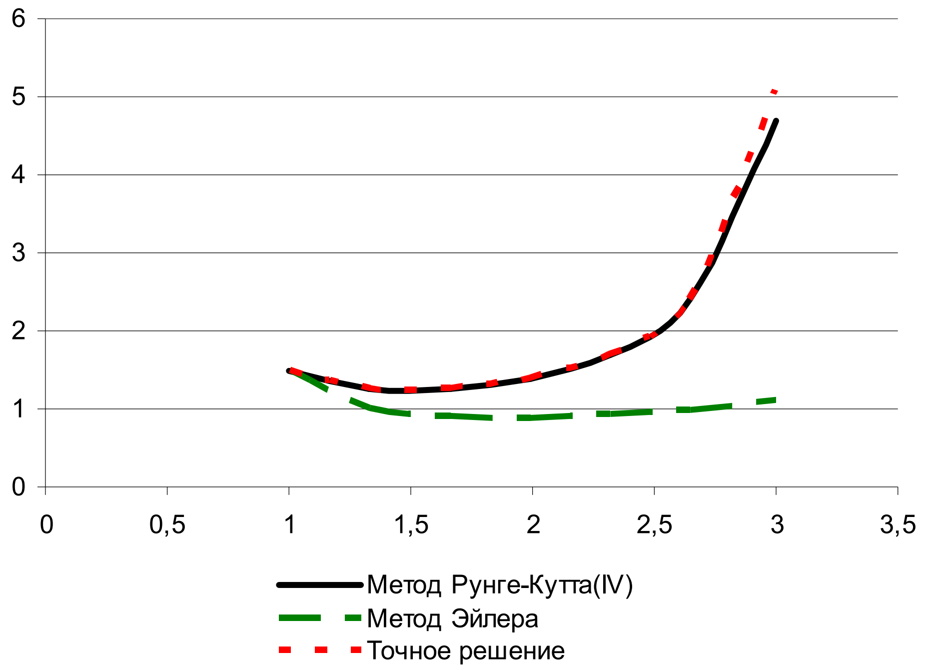

Рис. 8.3. Интегральные кривые