Алгоритм деления пополам

Рассмотрим следующую задачу условной оптимизации: найти минимум одномерной унимодальной функции $\Phi(x)$, определенной в замкнутой области допустимых значений $D=[a, b]$,

$$\min_{X\in[a,b]} \Phi(x)=\Phi(x^*).$$

В алгоритм деления пополам или *алгоритме равномерного дихотомического поиска* испытания проводятся парами. Координаты каждой последующей пары испытаний разнесены между собой на величину $\delta_x<\varepsilon_x$, где ε_x - требуемая точность решения. Испытания производятся в середине ТИН. По значениям $\Phi(x)$, полученным в этих точках, одна половина ТИН в силу унимодальности функции $\Phi(x)$ исключается из дальнейшего рассмотрения. Величина δ_x определяется требуемой точностью решения. Алгоритм относится к классу методов последовательного поиска.

Более строго описанную схему алгоритма можно записать в нижеследующем виде.

1. Выполняем присваивания $r=1$, $a^1=a$, $b^1=b$, $\text{ТИН}_1=[a^1, b^1]$.
2. Вычисляем величины (см. рис. 1)

$$x_0^r=\frac{a^r-b^r}{2}, x_1^r=x_0^r-\frac{\delta_x}{2}, x_2^r=x_0^r+\frac{\delta_x}{2}.$$

3- Вычисляем значения $\Phi(x_1^r), \Phi(x_2^r)$ функции $\Phi(x)$.

4-Если $\Phi(x_1^r)<\Phi(x_2^r)$,товыполняем присваивания $a^{r+1}=a^r$, $b^{r+1}=x_0^r$, $\text{ТИН}_{r+1}=[a^{r+1}, b^{r+1}]$. Иначе - выполняем присваивания $a^{r+1}=x_0^r$, $b^{r+1}=b^r$, $\text{ТИН}_{r+1}=[a^{r+1}, b^{r+1}]$

5- Если $|ТИН_{r+1}| \le \varepsilon_x$, то заканчиваем вычисления. Иначе - выполняем присваивание $r = r + 1$ и переходим на п.2. ●

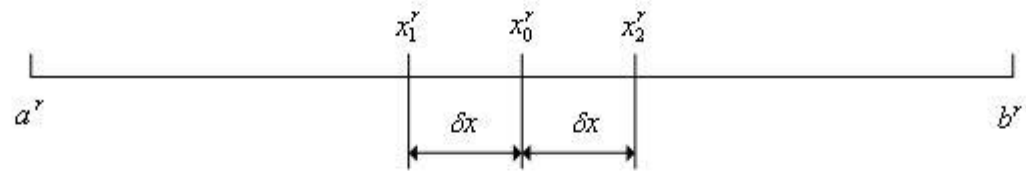

Рис. 1. К определению величин X_0^r, X_1^r, X_2^r.

В качестве приближенного значения точки минимума x^* с равными основаниями может быть принята любая точка последнего текущего интервала неопределенности.

Приведенную схему алгоритма равномерного дихотомического поиска иллюстрирует рис. 2

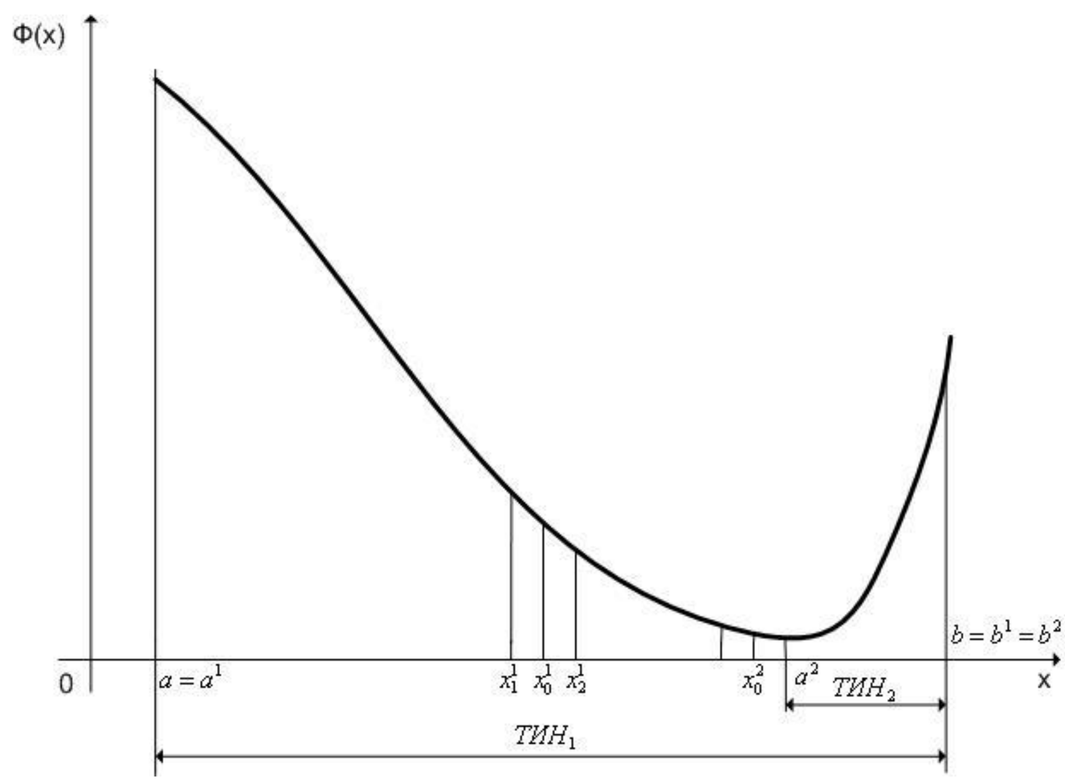

Рис. 2. Первые две итерации поиска минимума одномерной унимодальной функции с помощью алгоритма равномерного дихотомического поиска.

Легко видеть, что после одной итерации алгоритма равномерного поиска ТИН уменьшается в 2 раза. Поэтому количество итераций r, необходимых для нахождения минимума функции с точностью ε_x, находится из условия

$$\frac{b-a}{2^r} \leq \varepsilon_x.$$