

Пример К1

Движение точки задано уравнениями : $x = 3t, y = \frac{3}{t}$ (см).

Определить: в моменты времени $t_1=1$ с и $t_2=2$ с скорость точки, ускорение точки, касательное и нормальное ускорение и радиус кривизны траектории. Определить и построить траекторию точки.

Решение. Для определения уравнения точки исключаем параметр t из

уравнений движения: $t = \frac{x}{3}$. Подставляем это значение в уравнение

координаты y : $y = \frac{9}{x}$ – уравнение гиперболы.

Точка движется по ветви гиперболы, расположенной в верхнем правом квадрате, так как при подстановке времени $t > 0$ в уравнения движения обе координаты принимают положительное значение. Движение точки происходит сверху вниз.

Траекторию строим по координатам (см. таблицу)

Время $t, \text{с}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	∞
$X_{\text{см}}$	0	1	1,5	3	6	9	∞
$Y_{\text{см}}$	∞	9	6	3	1,5	1	0

Определяем скорость точки по её проекциям на координатные оси:

$$V_x = \dot{x} = 3 \frac{CM}{c};$$

$$V_y = \dot{y} = -\frac{3}{t^2} \frac{CM}{c}.$$

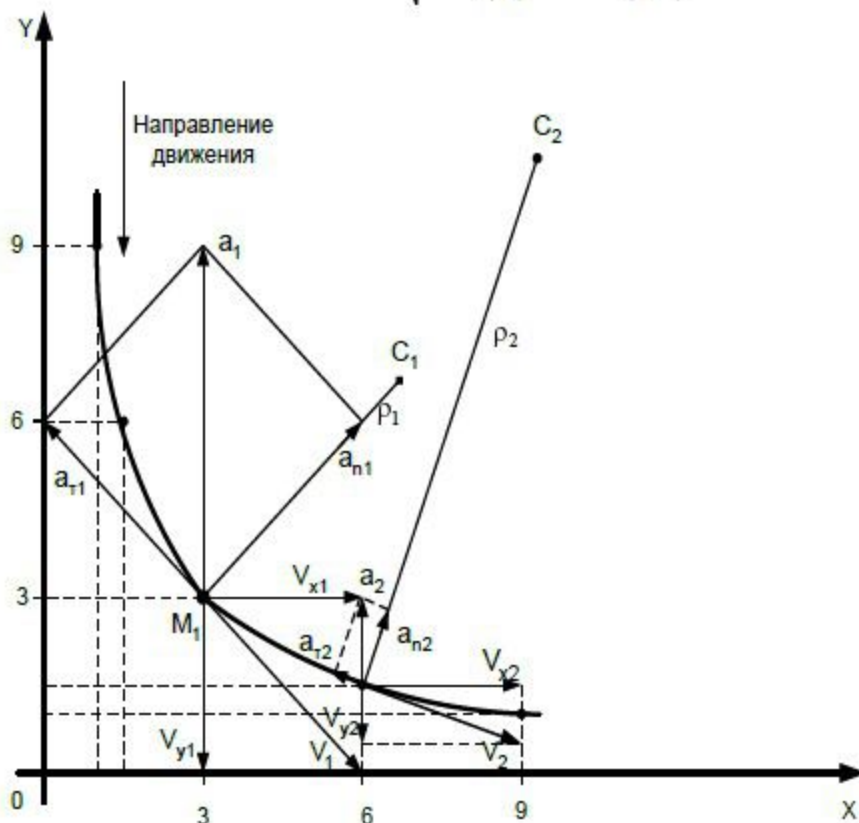
Проекции скорости и их значения для точек в заданный момент времени:

При $t_1 = 1c$; $V_{x1} = 3 \frac{CM}{c}$; $V_{y1} = -\frac{3}{1^2} = -3 \frac{CM}{c}$;

$$V_1 = \sqrt{V_{x1}^2 + V_{y1}^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 4,2 \left(\frac{CM}{c} \right).$$

При $t_2 = 2c$; $V_{x2} = 3 \left(\frac{CM}{c} \right)$; $V_{y2} = -\frac{3}{2^2} = -\frac{3}{4} \left(\frac{CM}{c} \right)$;

$$V_2 = \sqrt{V_{x2}^2 + V_{y2}^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{4} \right)^2} = 3,1 \left(\frac{CM}{c} \right).$$



Определяем проекции ускорения точки на координатные оси:

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x} = 0$$

$$a_y = \dot{V}_y = \ddot{y} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{3}{t^2} \right) = \frac{6}{t^3} \left(\frac{см}{с^2} \right).$$

Проекции ускорения и их значения для точек в заданный момент времени:

$$\text{При } t_1 = 1с : a_{x1} = 0; a_{y1} = \frac{6}{1^3} = 6 \left(\frac{см}{с^2} \right); a_1 = |a_{y1}| = 6 \left(\frac{см}{с^2} \right).$$

$$\text{При } t_2 = 2с : a_{x2} = 0; a_{y2} = \frac{6}{2^3} = \frac{3}{4} \left(\frac{см}{с^2} \right); a_2 = |a_{y2}| = \frac{3}{4} \left(\frac{см}{с^2} \right).$$

Для определения касательного и нормального ускорений переходим к естественному способу задания движения точки.

Касательное ускорение

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \frac{d}{dt} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y}}{2\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}.$$

$$\text{При } t_1 = 1с : a_{\tau 1} = \frac{3 \cdot 0 + -3 \cdot 6}{4,2} = -\frac{18}{4,2} = -4,2 \left(\frac{см}{с^2} \right);$$

$$a_{\tau 2} = \frac{3 \cdot 0 - 0,75 \cdot 0,75}{3,1} = -0,18 \left(\frac{см}{с^2} \right).$$

$$\text{Нормальные ускорения: } a_n = \sqrt{a^2 - a_{\tau 2}^2}.$$

$$\text{При } t_1 = 1с : a_{n1} = \sqrt{a_1^2 - a_{\tau 1}^2} = \sqrt{6^2 - (-4,2)^2} = 4,2 \left(\frac{см}{с^2} \right).$$

$$\text{При } t_2 = 2с : a_{n2} = \sqrt{a_2^2 - a_{\tau 2}^2} = \sqrt{0,75^2 - (-0,18)^2} = 0,71 \left(\frac{см}{с^2} \right).$$

Определяем радиус кривизны траектории в заданные моменты времени:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}; \rho = \frac{V^2}{a_n}.$$

$$\text{При } t_1 = 1с : \rho_1 = \frac{V_1^2}{a_{n1}} = \frac{4,2^2}{4,2} = 4,2 \text{ см}.$$

При $t_2 = 2c$; $\rho_2 = \frac{V_2^2}{a_{n2}} = \frac{3,1^2}{0,71} = 13,5 \text{ см} .$

Все результаты решения показаны на чертеже.

Ответ: при $t_1 = 1c$: $V_1 = 4,2 \left(\frac{\text{см}}{c} \right)$, $a_1 = 6 \left(\frac{\text{см}}{c^2} \right)$, $a_{r1} = -4,2 \left(\frac{\text{см}}{c^2} \right)$,
 $a_{n1} = 4,2 \left(\frac{\text{см}}{c^2} \right)$, $\rho_1 = 4,2 \text{ см}$; при $t_2 = 2c$: $V_2 = 3,1 \left(\frac{\text{см}}{c} \right)$,
 $a_2 = \frac{3}{4} \left(\frac{\text{см}}{c^2} \right)$, $a_{r2} = -0,18 \left(\frac{\text{см}}{c^2} \right)$, $a_{n2} = 0,71 \left(\frac{\text{см}}{c^2} \right)$, $\rho_2 = 13,5 \text{ см} .$