

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ	4
8. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.....	4
8.1. Виды квантования в дискретных системах управления.	4
8.2. Классификация дискретных систем управления	5
8.3. Типовая структура импульсных систем.	6
8.4. Выводы	9
8.5. Вопросы	9
8.6. Задания	9
8.7. Практикум по главе 8.....	10
9. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ (ИСАУ)	11
9.1. Дискретное преобразование Лапласа и его свойства	11
9.2. Описание ИСАУ в области изображений. Дискретные передаточные функции. Структурные схемы и их преобразования.....	20
9.3. Получение дискретных передаточных функций - по непрерывным передаточным функциям	24
9.4. Описание ИСАУ во временной области. Определение значений временных сигналов ..	26
9.5. Временные характеристики ИСАУ	31
9.6. Спектр сигнала при амплитудно-импульсной модуляции	32
9.7. Частотные характеристики разомкнутой ИСАУ	35
9.8. Условия, когда импульсную систему автоматического управления можно исследовать методами непрерывных систем	44
9.9. Выводы.....	46
9.10. Вопросы.....	47
9.11. Задания.....	47
9.12. Практикум по главе 9	55
10. АНАЛИЗ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ	63

10.1. Понятие устойчивости, необходимые и достаточные условия устойчивости	63
10.2. Алгебраический критерий устойчивости Гурвица	67
10.3. Частотные критерии устойчивости	70
10.4. Прямые показатели качества управления в импульсных системах	75
10.5. Системы с конечной длительностью переходного процесса.....	80
10.6. Оценка точности обработки задающего воздействия замкнутой импульсной системой	81
10.7. Выводы	83
10.8. Вопросы	84
10.9. Задания.....	85
10.10. Практикум по главе 10	86
11. СИНТЕЗ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ.....	89
11.1 Постановка задачи синтеза и способ реализации корректирующего устройства	89
11.2. Условие осуществимости и грубости ИСАУ.....	90
11.3. Основные уравнения аналитического синтеза.....	92
11.4. Синтез корректирующих устройств на основе ЛАЧХ.....	95
12. ПЕРЕМЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ В ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМАХ	100
12.1. Представление линейных одномерных ИСАУ в пространстве состояний.....	102
12.2. Описание многомерных дискретных систем в пространстве состояний.....	104
12.3. Модели многомерных линейных динамических систем	105
12.2.1. Модель в виде матрицы передаточных функций	105
12.2.2. Модель в виде импульсной переходной функции.....	107
12.2.3. Представление системы в пространстве состояний	108
12.2.4. Дробно-матричное представление	109
12.4. Список литературы к главе 12.....	110
НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ	111
13.1. Понятие о нелинейных системах управления.....	111
13.1.1. Классификация нелинейных элементов.	111
13.1.2. Структурные схемы нелинейных систем.	112
13.1.3. Особенности нелинейных систем.	118
13.1.4. Вопросы и задачи	119
13.2. Исследование нелинейных систем на основе метода фазовой плоскости.	120
13.2.1. Фазовые траектории.....	120

13.2.2. Возможные виды фазовых портретов и типы особых точек	122
13.2.3. Свойства фазовых траекторий. Особые точки и траектории.	129
13.2.4. Применение метода фазовой плоскости для расчёта нелинейных систем.	132
13.3. Исследование динамики релейных систем.	136
13.4. Методы стабилизации нелинейных систем с релейными элементами.	141
13.4. Вопросы и задачи	145
13.5. Исследование нелинейных систем методом гармонического баланса.....	146
13.5.1. Предпосылки метода.....	146
13.5.2. Эквивалентный комплексный коэффициент усиления нелинейного элемента.....	148
13.5.3. Методика определения эквивалентного комплексного коэффициента усиления нелинейного элемента	149
13.6. Определение свободных периодических колебаний методом гармонического баланса.	153
13.7. Вопросы и задачи	160
13.8. Исследование устойчивости нелинейных САУ	161
13.8.1. Определение понятия устойчивости по Ляпунову.....	161
13.8.2. Первый метод Ляпунова	163
13.8.3. Второй (прямой) метод Ляпунова.....	164
13.8.4. Критерий абсолютной устойчивости Попова В.М. для САУ с устойчивой линейной частью	165
13.8.5. Критерий абсолютной устойчивости Попова для САУ с неустойчивой и нейтрально-устойчивой линейной частью.	169
13.8.6. Некоторые обобщения критерия абсолютной устойчивости Попова	172
13.8.6.1. Параболический критерий Попова.	172
13.8.6.2. Критерий Чо-Нарендры.	173
13.8.6.3. Критерий Гелига.....	174
13.8.6.4. Критерий Цыпкина	175
13.8.7. Вопросы и задачи	175
13.9. Список литературы	176
10.5. Список литературы по главе 9.....	Ошибка! Закладка не определена.

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

8. Общие сведения о дискретных системах автоматического управления

(**знать:** виды квантования и классификацию дискретных систем управления; **уметь:** определять передаточные функции формирователей импульсов и строить типовые структурные схемы импульсных систем; **владеть:** приемами построения типовых структурных схем ИСАУ.)

8.1. Виды квантования в дискретных системах управления.

Процессы передачи и преобразования сигналов лежат в основе работы систем связи, контроля и управления. Известные способы передачи сигналов можно разделить на непрерывные и дискретные. При непрерывном способе передается и преобразуется *каждое мгновенное значение сигнала*. При дискретизации (квантовании) сигнала проводится замена *непрерывных его значений дискретными, выбранными по заданному правилу*. Дискретизация может быть осуществлена *по времени, уровню или времени и уровню*.

На рис. 8.1 представлены три вида квантования сигнала, здесь точками отмечены его дискретные значения. При квантовании по времени выделяются значения сигнала в заранее фиксированные моменты времени, отстоящие друг от друга на постоянное значение T , называемое *периодом квантования*. Квантование по уровню соответствует выделению значений сигнала при достижении им заранее фиксированных уровней, отстоящих друг от друга на постоянное значение σ , называемое *интервалом квантования по уровню* (рис. 8.1). Дискретизация сигнала по времени и уровню соответствует выделению в заранее фиксированные моменты времени значений сигнала, ближайших к заранее фиксированным уровням (рис. 8.1). Типичный пример квантования по времени представляет собой кинолента, примером квантования по уровню могут служить цифровые весы, а примером квантования по времени и уровню (по аргументу и функции) служат таблицы и сигналы в цифровых системах, использующих ЭВМ.

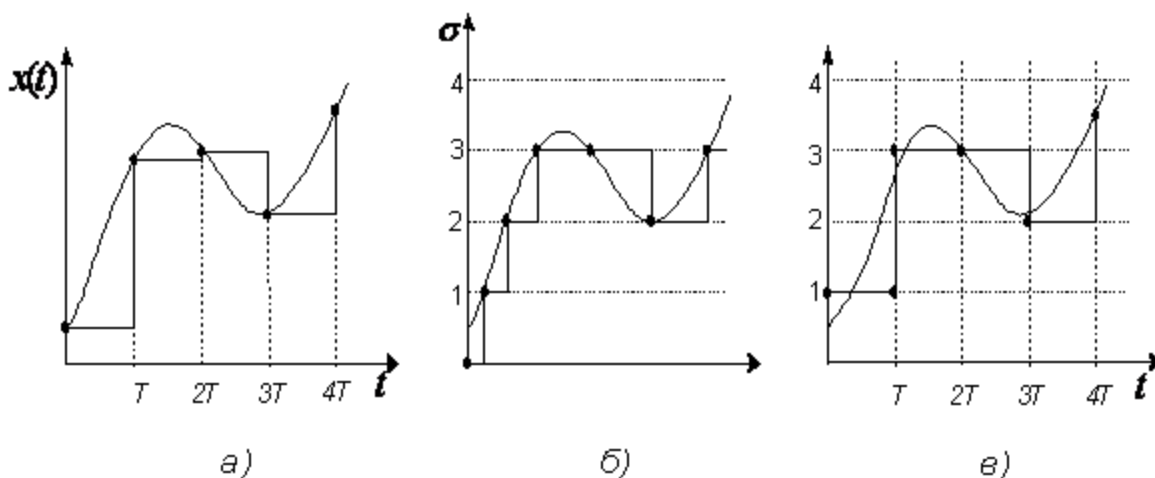


Рис.8.1. Виды квантования (а) по времени, б) по уровню, в) по времени и уровню

Дискретный способ передачи и преобразования информации обеспечивает высокую помехозащищенность сигнала и в связи с этим позволяет повысить точность работы системы. Кроме того, при дискретизации возможна передача большого числа сигналов по одному каналу.

Дискретные системы в настоящее время получили широкое распространение. Большая часть из них является дискретной по своей физической природе, т.е. информация в этих системах существует только в дискретные моменты времени. К ним относятся процессы в социальных и экономических сферах, ряд биологических и физических явлений, а также большое число технических систем, где дискретизация сигнала является одной из основ принципа действия. Существует и вторая категория дискретных систем, в которых информация существует непрерывно, но специально квантуется, что обеспечивает ряд достоинств и новых возможностей по сравнению с непрерывными системами. К ним относятся повышение надежности, увеличение точности, уменьшение габаритов и стоимости, новое решение структуры элементов систем автоматического управления.

8.2. Классификация дискретных систем управления

Системы автоматического управления (САУ), работающие с дискретным сигналом, в зависимости от вида квантования классифицируются следующим образом:

- 1) *импульсные системы*, в которых происходит квантование по времени;
- 2) *релейные системы*, в которых происходит квантование по уровню;
- 3) *цифровые системы*, в которых происходит квантование по времени и уровню.

В квантованном по времени сигнале носителем информации является импульс произвольной формы $s(t)$, $t \in [0, T]$. Значение дискретизируемого сигнала передается параметром импульса. Это может быть амплитуда импульсов при постоянной его ширине, ширина импульсов при постоянной амплитуде, частота импульсного сигнала или фаза при постоянной ширине и амплитуде. Применительно к перечисленным вариантам, имеет место амплитудная (АИМ), широтная (ШИМ), частотная (ЧИМ) или фазовая (ФИМ) импульсные модуляции.

Если модулируемый параметр последовательности импульсов определяется значениями входного сигнала в фиксированные равноотстоящие моменты времени и остается постоянным в течение времени существования импульса, то такой вид модуляции называется *импульсной модуляцией первого рода*. В отличие от этого типа возможны случаи, когда модулируемый параметр последовательности импульсов в течение времени существования импульса изменяется в соответствии с текущим значением входного сигнала. Такой вид модуляции называется *импульсной модуляцией второго рода*. Примером систем с модуляцией второго рода являются системы прерывистого регулирования (системы с конечным временем замыкания импульсного элемента).

8.3. Типовая структура импульсных систем.

Импульсные системы с амплитудно-импульсной модуляцией являются наиболее распространенными, и поэтому при их обозначении, как правило, форма модуляции не указывается. Процесс квантования и импульсной модуляции в системе осуществляется импульсным элементом (ИЭ), который преобразует непрерывно изменяющуюся величину, поступающую на его вход, в последовательность модулированных по амплитуде импульсов. Основными параметрами импульсного элемента являются коэффициент усиления $k_{\text{и}}$ (статическая характеристика), период квантования T (или частота квантования $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$), длительность импульсов γT (или скважность γ) и форма выходных импульсов $S(t)$. Зависимость амплитуды выходной импульсной последовательности от соответствующих дискретных значений входной величины называется статической характеристикой ИЭ. Эта характеристика может быть линейной и нелинейной. В диапазоне линейности крутизна характеристики определяет коэффициент усиления импульсного элемента (ИЭ) как отношение значения модулируемого параметра (в рассматриваемом случае амплитуды A) выходной последовательности импульсов к соответствующему дискретному значению $x(T)$ входной величины ИЭ.

$$k_{\text{и}} = \frac{A(T)}{x(T)} = \text{tg } \alpha. \quad (8.1)$$

Непрерывная часть, входящая в состав импульсной системы, представляет собой динамическую систему, физическая природа которой может быть различной: электрическая, механическая, гидравлическая, термодинамическая, с распределёнными и сосредоточенными параметрами. Её математическое описание может быть линейным, нелинейным с постоянными и переменными параметрами.

В дальнейшем будем рассматривать линейные импульсные системы, где непрерывная часть (НЧ) описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Простейшая функциональная блок-схема замкнутой ИСАУ представлена на рис. 8.2.

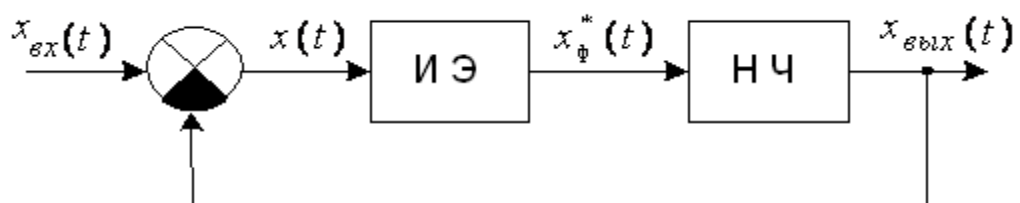


Рис.8.2. Функциональная блок-схема замкнутой ИСАУ

Функциональная роль обозначенных сигналов понятна из рисунка, а относительно их свойства следует сказать: сигналы $x_{вх}(t)$, $x_{вых}(t)$, $x(t)$ непрерывные, сигнал $x_{\phi}^*(t)$ дискретный и представляет собой последовательность модулированных импульсов. Дискретность сигнала $x_{\phi}^*(t)$ отмечена звёздочкой, а индекс “ф”, указывает, что импульсы модулирующей последовательности имеют определённую форму. Как показывает практика, форма используемых импульсов может быть весьма разнообразной, что и продемонстрировано на рис. 8.3.

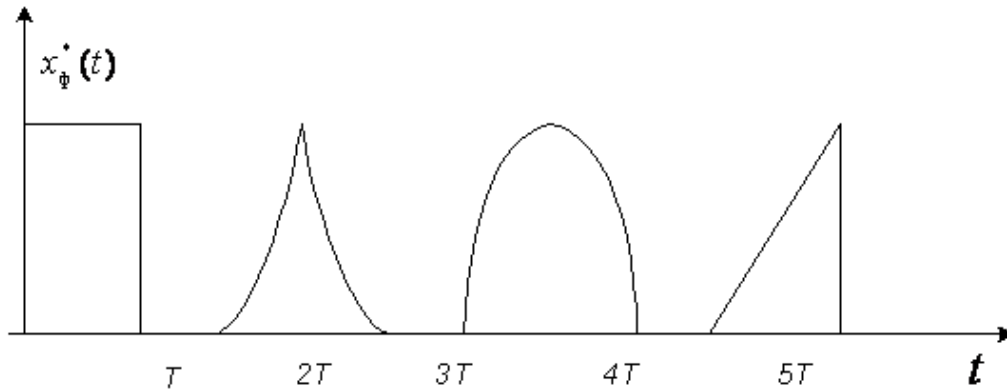


Рис.8.3. Последовательность модулированных импульсов

Совершенно очевидно, что форма импульса окажет влияние на динамику процессов в ИСАУ, что должно быть учтено в описании системы. В настоящее время во всех методиках по исследованию импульсных систем принято представлять ИЭ в виде двух звеньев: идеального импульсного элемента (ИИЭ), генерирующего последовательность $\delta[t - lT]$ функций, и формирователя импульсов с передаточной функцией $W_{\phi}(p)$. Известно, что если на вход звена с заданной передаточной функцией подать сигнал, имитирующий $\delta(t)$, то на выходе получим весовую функцию этого звена в виде $w(t)$. Следовательно, нужно подобрать звено-формирователь с передаточной функцией $W_{\phi}(p)$ таким образом, чтобы его весовая функция $w_{\phi}(t)$ имела форму модулируемых импульсов, тогда два звена - ИИЭ и $W_{\phi}(p)$ достаточно точно будут представлять реальный импульсный элемент.

Самая распространенная форма сигнала при АИМ – прямоугольный импульс длительности γT , где $0 < \gamma \leq 1$, и условной единичной амплитуды. Аналитически можно записать

$$x_{\phi}^*(t) = 1_0(t) - 1_0(t - \gamma T),$$

или

$$x_{\phi}^*(t) = \begin{cases} 1_0(t) & \text{при } 0 \leq t < \gamma T; \\ 0 & \text{при } \gamma T \leq t \leq T. \end{cases}$$

Тогда передаточная функция формирователя имеет вид

$$W_{\phi}(p) = L\left\{x_{\phi}^*(t)\right\} = \frac{1 - e^{-\gamma p T}}{p}.$$

Если форма импульса – треугольник с единичной амплитудой, то аналитическая форма представления имеет вид

$$x_{\phi}^*(t) = \begin{cases} \frac{2}{\gamma T} t 1_0(t) & \text{при } 0 \leq t \leq \gamma \frac{T}{2}; \\ 1 - \frac{2}{\gamma T} t 1_0(t - \frac{\gamma T}{2}) & \text{при } \gamma \frac{T}{2} \leq t \leq \gamma T; \\ 0 & \text{при } \gamma T < t \leq T. \end{cases}$$

В этом случае передаточная функция формирователя

$$W_{\phi}(p) = \frac{2}{\gamma T} \frac{(1 - e^{-\gamma p \frac{T}{2}})^2}{p^2}.$$

С учётом введенного представления ИЭ простейшая структурная схема замкнутой системы показана на рис. 8.4.

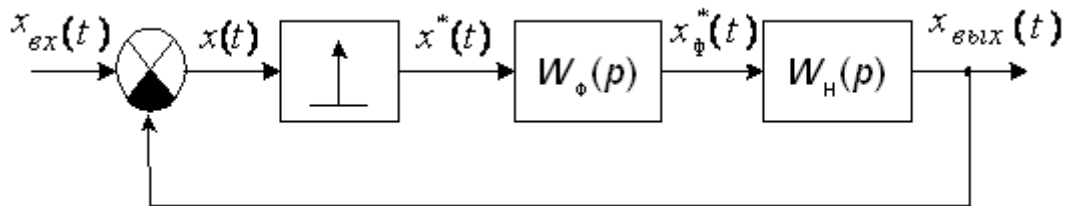


Рис. 8.4. Простейшая структурная схема замкнутой импульсной системы

Непрерывная часть задана своей передаточной функцией $W_n(p)$, а условное обозначение ИИЭ ясно из рисунка. При проведении исследований обычно два непрерывных звена системы $W_{\phi}(p)$ и $W_n(p)$ заменяют одним $W_{\Pi}(p)$ и называют его непрерывной приведённой частью:

$$W_{\Pi}(p) = W_{\phi}(p)W_n(p).$$

Выходной сигнал ИИЭ представляет собой модулированную сигналом $x(t)$ последовательность $\delta(t)$ функции. Если считать, что $x(t) = 0$ при $t < 0$, то выходной сигнал ИИЭ можно записать в виде:

$$x^*(t) = x(t) \sum_{l=0}^{\infty} \delta(t - lT) = \sum_{l=0}^{\infty} x[lT] \delta(t - lT) = x(t) \delta_T(t), \quad (8.2)$$

$$\text{где } \delta_T(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \delta(t - lT).$$

8.4. Выводы

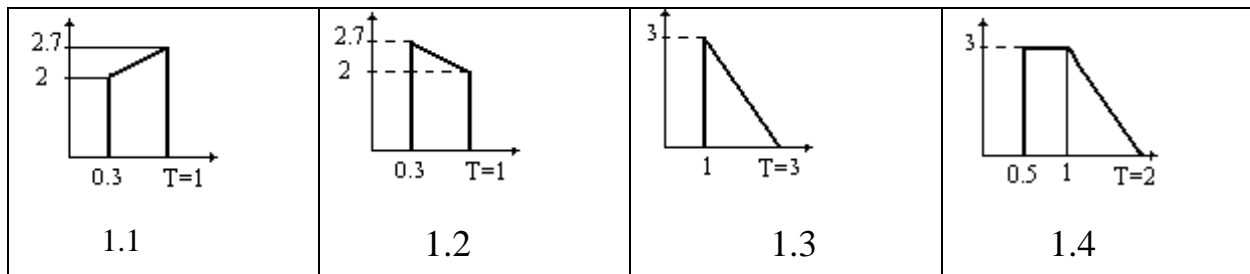
Дискретные системы обладают рядом достоинств (помехозащищенностью, возможностью передачи по одному каналу нескольких сигналов и т.д.) и широко используются в автоматическом управлении. Известны 3 вида дискретизации: по уровню (пример – цифровые приборы), по времени (пример – съемка на киноленту), по уровню и по времени одновременно (при передаче сигналов в ЭВМ). В соответствии с этим системы делятся на релейные, импульсные и цифровые. Наибольшее распространение получили импульсные системы с амплитудной импульсной модуляцией, в которых на выходе импульсного элемента снимается сигнал, амплитуда которого пропорциональна входному сигналу в моменты времени kT ($k=0,1,2,\dots$). Поскольку форма импульса может быть разной, импульсный элемент заменяется идеальным, вырабатывающим последовательность δ -функций, и формирователем импульсов с весовой функцией, соответствующей форме импульса. Таким образом, приходим к простейшей универсальной структурной схеме импульсной системы, представленной на рис. 8.4.

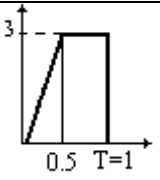
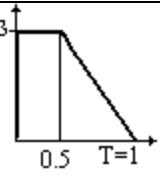
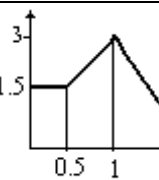
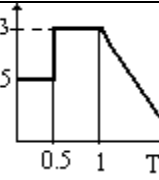
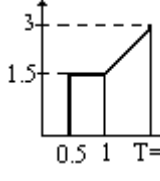
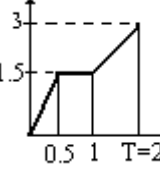
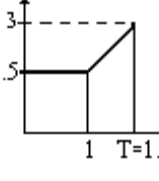
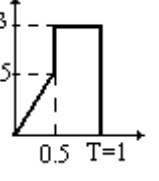
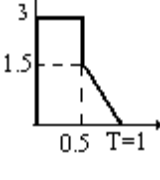
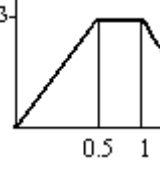
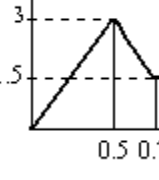
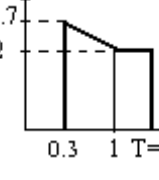
8.5. Вопросы

1. Перечислите достоинства дискретных систем.
2. Назовите виды квантования и приведите примеры их использования.
3. Какие параметры меняются в зависимости от входного сигнала при АИМ, ШИМ, ФИМ, ЧИМ?
4. Каким образом заменяется импульсный элемент?
5. Найдите передаточную функцию формирователя импульсов прямоугольной формы с единичной скважностью?
6. Что такое приведенная непрерывная часть системы?

8.6. Задания

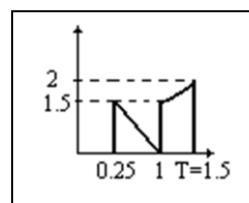
1. Найти передаточные функции формирователей импульсов следующей формы:



			
1.5	1.6	1.7	1.8
			
1.9	1.10	1.11	1.12
			
1.13	1.14	1.15	1.16

8.7. Практикум по главе 8

Рассмотрим определение передаточной функции формирователя импульсов для импульса, имеющего вид:



Опишем импульс прямыми с известными наклонами в соответствии с рис.8.5.

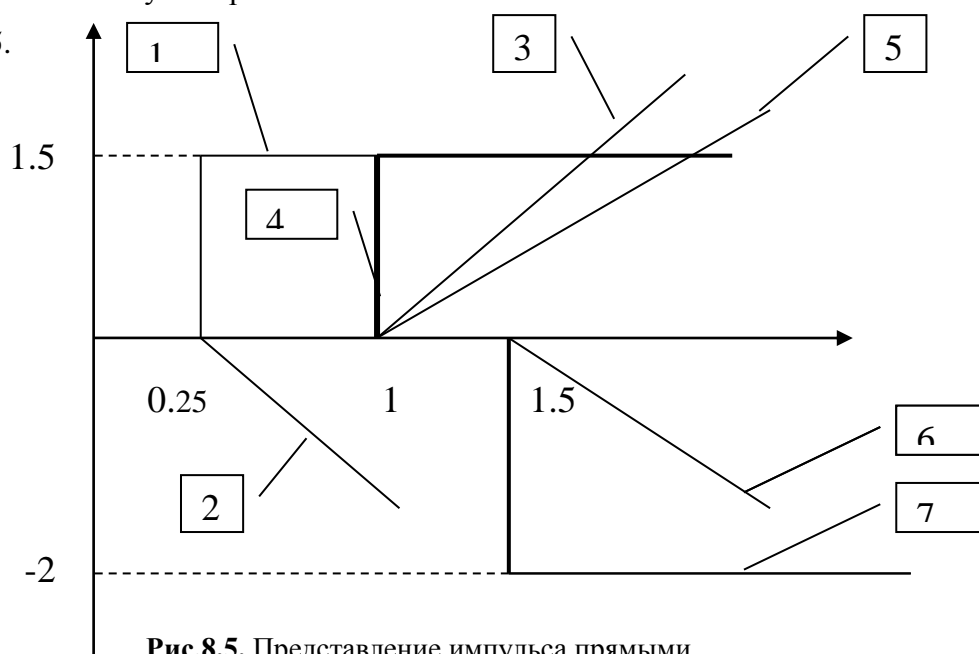


Рис.8.5. Представление импульса прямыми

1. $x_1(t) = 1.5 \cdot 1(t - 0.25)$
2. $x_2(t) = -2 \cdot (t - 0.25) \cdot 1(t - 0.25)$
3. $x_3(t) = 4 \cdot (t - 1) \cdot 1(t - 1)$

4. $x_4(t) = 1.5 \cdot 1(t - 1)$
5. $x_5(t) = (t - 1) \cdot 1(t - 1)$
6. $x_6(t) = -2 \cdot (t - 1.5) \cdot 1(t - 1.5)$
7. $x_7(t) = -2 \cdot 1(t - 1.5)$

$$x(t) = 1.5 \cdot 1(t - 0.25) - 2 \cdot (t - 0.25) \cdot 1(t - 0.25) + 4 \cdot (t - 1) \cdot 1(t - 1) + 1.5 \cdot 1(t - 1) + (t - 1) \cdot 1(t - 1) - 2 \cdot (t - 1.5) \cdot 1(t - 1.5) - 2 \cdot 1(t - 1.5)$$

Найдем передаточную функцию, соответствующую импульсу заданной формы.

$$W(p) = \frac{1.5}{p} e^{-0.25p} - \frac{2}{p^2} e^{-0.25p} + \frac{4}{p^2} e^{-p} + \frac{1.5}{p} e^{-p} + \frac{1}{p^2} e^{-p} - \frac{2}{p^2} e^{-1.5p} - \frac{2}{p} e^{-1.5p}$$

9. Математическое описание импульсных систем автоматического управления (ИСАУ)

(знать: свойства дискретного преобразования Лапласа, определение дискретных передаточных функций, частотных и временных характеристик, описание дискретных типовых динамических звеньев; уметь: определять дискретные передаточные функции по непрерывным передаточным функциям и по линейным разностным уравнениям звеньев и систем, частотные и временные характеристики; владеть: приемами построения дискретных передаточных функций, частотных и временных характеристик.)

9.1. Дискретное преобразование Лапласа и его свойства

Согласно структурной схеме типовой ИСАУ, представленной на рис.8.4 в импульсной системе управляющее воздействие $x^*(t)$ содержит только дискретные значения сигнала рассогласования $x(t)$, взятые в моменты времени, отдаленные друг от друга на время квантования T , и представляющие собой модулированную сигналом $x(t)$ последовательность $\delta(t - lT)$ функций [3]:

$$x^*(t) = x(t) \delta_T[lT], \quad (9.1)$$

$$\text{где} \quad \delta_T(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - lT) \quad \delta[t - lT] = \begin{cases} \infty & \text{при } t = lT; \\ 0 & \text{при } t \neq lT. \end{cases}$$

Из выражения (9.1) следует, что переменная $x^*(t)$ отлична от нуля только в моменты времени $t = lT$. Функции, которые определены только в дискретные равноотстоящие моменты времени, называют *решетчатыми функциями* и обозначают $x[lT] = x[l]$, где l - любое целое

число. Следовательно, сигнал после ИИЭ представляет собой решетчатую функцию. На рис. 9.1 представлен график произвольной решетчатой функции.

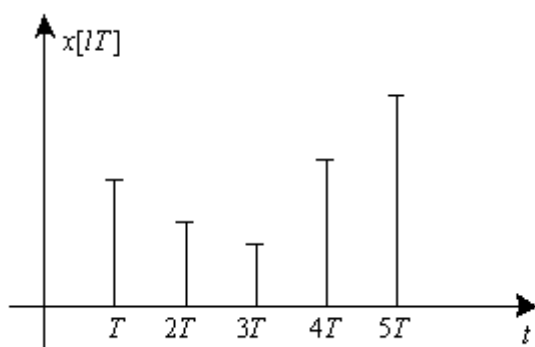


Рис.9.1. Решетчатая функция

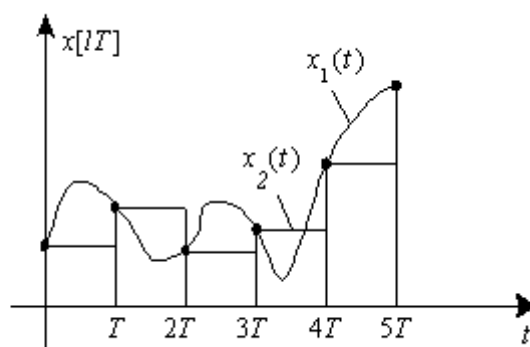


Рис. 9.2. Непрерывная функция $x_1(t)$ и ступенчатая функция $x_2(t)$

Для того чтобы получить решетчатую функцию по заданной непрерывной, нужно в ней заменить t на lT . Так, например, если $x(t) = e^{\alpha t}$, то $x[lT] = e^{\alpha lT}$. Одной и той же решетчатой функции могут соответствовать различные непрерывные или разрывные функции, если только их ординаты в дискретные моменты времени $t = lT$ равны дискретам решетчатой функции. Это положение демонстрируется на рис. 9.2, где непрерывная функция $x_1(t)$ и ступенчатая функция $x_2(t)$ представляются как огибающие функции $x[lT]$. Можно рассмотреть решетчатую функцию в моменты времени $t = lT + \Delta t$, где Δt — фиксированная величина в интервале $0 \leq \Delta t \leq T$. Такие решетчатые функции называются смещенными и обозначаются $x[lT, \Delta t]$. При этом значения ординат функции определяются из условия $x[lT, \Delta t] = x[lT + \Delta t]$. Следует отметить, что решетчатые функции необязательно образуются из соответствующих непрерывных функций времени. Любую числовую последовательность, в которой аргумент изменяется через равные интервалы, можно рассматривать как решетчатую функцию.

Как известно, при исследовании и синтезе непрерывных линейных систем широко используется преобразование Лапласа, которое существенно упрощает как процедуры структурного анализ, так и определение временных и частотных характеристик. Рассмотрим преобразование Лапласа для дискретной переменной $x^*(t)$ и обозначим его $X^*(p)$:

$$X^*(p) = L\{x^*(t)\} = \int_0^{\infty} x^*(t) e^{-pt} dt. \quad (9.2)$$

Подставим в это соотношение выражение для $x^*(t)$, учтём теорему об интегрировании функции $\delta(t-lT)$, умноженной на непрерывную функцию [1], поменяем местами процедуру интегрирования и суммирования и тогда получим с учетом ограничения $x(t)$ по времени:

$$X^*(p) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} x(t) \delta(t-lT) e^{-pt} dt = \sum_{l=0}^{\infty} x[lT] e^{-p l T}. \quad (9.3)$$

Соотношение $X^*(p) = \sum_{l=0}^{\infty} x[lT] e^{-p l T}$ называется дискретным преобразованием

Лапласа, или *D-преобразованием*. Оно является функциональным преобразованием решетчатой функции, которое позволяет получить её изображение:

$$D\{x[lT]\} = X^*(p).$$

Представление $X^*(p)$ в виде бесконечного ряда неудобно для проведения вычислительных процедур. Однако здесь можно воспользоваться формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, равной первому члену прогрессии, деленному на ее знаменатель (в нашем случае 1 и e^{-pT}):

$$\sum_{l=0}^{\infty} e^{-p l T} = 1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-pT}} = \frac{e^{pT}}{e^{pT} - 1}.$$

Рассмотрим примеры определения *D-преобразования*.

Пример 1. Имеем непрерывный сигнал $x(t) = e^{-\alpha t}$.

Решетчатая функция этого сигнала $x[lT] = e^{-\alpha l T}$.

Дискретное преобразование этой функции:

$$D\{e^{-\alpha l T}\} = X^*(p) = \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\alpha l T} e^{-p l T} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha T - pT}} = \frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{-\alpha T}}.$$

При $\alpha \rightarrow 0$ $x(t) = 1_0(t)$, тогда $X^*(p) = D\{1_0(t)\} = \frac{e^{pT}}{e^{pT} - 1}$.

Пример 2. Непрерывный сигнал $x(t) = \beta t$, решетчатая функция $x[lT] = \beta l T$.

Применяем дискретное преобразование:

$$\begin{aligned}
D\{\beta lT\} &= \sum_{l=0}^{\infty} \beta lT e^{-plT} = \beta (Te^{-pT} + 2Te^{-2pT} + 3Te^{-3pT} + \dots) = \\
&= \beta T \left[e^{-pT} (1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots) + e^{-2pT} (1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots) + \dots \right] = \\
&= \beta T e^{-pT} \left(\sum_{l=0}^{\infty} e^{-plT} \right)^2 = \frac{\beta T e^{-pT}}{(1 - e^{-pT})^2} = \frac{\beta T e^{pT}}{(e^{pT} - 1)^2}.
\end{aligned}$$

Для того чтобы изображение решетчатой функции было определено, нужно потребовать, чтобы ряд (9.3) был сходящимся. Величина $\sigma_0 = \operatorname{Re} p$, при которой ряд сходится, называется *абсциссой сходимости*. Сходимость ряда означает соблюдение условия

$$|e^{-(\sigma_0 + j\omega T)l} x[lT]| = e^{-\sigma_0 l} |x[lT]| < M \quad \forall l,$$

где M - ограниченное число.

Если для данной функции $x[lT]$ абсцисса сходимости $\sigma_0 < \infty$, то $x[lT]$ называется преобразуемой [1].

В ИСАУ решетчатая функция получается из непрерывной, для которой, как правило, известно изображение Лапласа. В связи с этим весьма желательно иметь соотношение, позволяющее получать изображение дискретного сигнала $X^*(p)$ по изображению непрерывного $X(p)$. Это соотношение называется \overline{D} -преобразованием и имеет вид

$$\overline{D}\{X(p)\} = X^*(p) = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} X(p - j\omega_0 l), \quad (9.4)$$

где $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ - частота квантования; $X(p) = L\{x(t)\}$.

Для получения выражения (9.4) представим периодическую функцию $\delta_T[t]$ рядом Фурье:

$$\delta_T[t] = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 l t}. \quad (9.5)$$

Тогда с учётом (9.1) преобразование Лапласа функции $x^*(t)$ можно получить следующим

$$\text{образом: } L\left[x^*(t)\right] = \int_0^{\infty} x^*(t) e^{-pt} dt = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} x(t) e^{-(p - j\omega_0 l)t} dt = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} X(p - j\omega_0 l) = X^*(p).$$

Для успешного использования дискретного преобразования Лапласа при исследовании импульсных систем совершенно необходимо знание основных свойств и теорем преобразования, так как они содержат информацию о соотношениях между операциями, совершаемыми над решетчатыми функциями, и операциями, совершаемые над их изображениями, что во многих

случаях позволяет существенно упростить процедуры преобразования. Вначале рассмотрим D -преобразование.

1. *Свойство линейности.* Если решетчатые функции $f_1[lT], f_2[lT], \dots, f_k[lT]$ являются оригиналами, а их изображения $F_1^*(p), F_2^*(p), \dots, F_k^*(p)$, то справедливо равенство

$$D \left\{ \sum_{v=1}^k c_v f_v[lT] \right\} = \sum_{v=1}^k c_v F_v^*(p) \quad (9.6)$$

где c_v - произвольные постоянные.

Это утверждение легко обосновать, если подставить сумму решетчатых функций в формулу (9.3) D -преобразования.

2. *Смещение во временной области.* Для смещенной во времени решетчатой функции D -преобразование определяется следующими соотношениями:

$$D \{ f[(l-m)T] \} = e^{-pmT} F^*(p) \quad ; \quad (9.7)$$

при нулевых начальных условиях, т.е. $f[-mT] = f[-(m-1)T] = \dots = f[0] = 0$

$$D \{ f[(l+m)T] \} = e^{pmT} F^*(p) - e^{pmT} \sum_{s=0}^{m-1} f(sT) e^{-psT} . \quad (9.8)$$

при нулевых начальных условиях, т.е. $f[0] = f[T] = \dots = f[(m-1)T] = 0$

В качестве примера рассмотрим доказательство формулы (9.8):

$$\begin{aligned} D \{ f[lT + mT] \} &= \sum_{l=0}^{\infty} f[lT + mT] e^{-plT} = \sum_{k=m}^{\infty} f[kT] e^{-pT(k-m)} = \\ &= e^{pmT} \sum_{k=0}^{\infty} f[kT] e^{-pkT} - e^{pmT} \sum_{k=0}^{m-1} f[kT] e^{-pkT} , \end{aligned}$$

где принято: $k = l + m$.

3. *Смещение в области изображений.* Если решетчатая функция $f[lT]$ имеет изображение $F^*(p)$, то справедливо равенство

$$F^*(p \pm \alpha) = D \{ e^{\mp \alpha p T} f[lT] \} \quad . \quad (9.9)$$

Для доказательства достаточно найти D -преобразование в правой части равенства и учесть свойства (9.7, 9.8).

4. *Теорема о свертке во временной области.* Свертка решетчатых функций $f_1[lT]$ и $f_2[lT]$ имеет изображение в виде произведения D -преобразования этих функций:

$$D \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} f_1[mT] f_2[(l-m)T] \right\} = F_1^*(p) F_2^*(p), \quad (9.10)$$

где $\sum_{m=0}^{\infty} f_1[mT] f_2[(l-m)T]$ - свертка двух функций.

Для доказательства (9.10) представим $F_1^*(p)$ в виде

$$F_1^*(p) = \sum_{m=0}^{\infty} f_1[mT] e^{-pmT}$$

и умножим на $F_2^*(p)$ правую и левую части этого выражения. Тогда получим

$$F_1^*(p) F_2^*(p) = \sum_{m=0}^{\infty} f_1[mT] e^{-pmT} F_2^*(p).$$

Согласно теореме сдвига, во временной области

$$e^{-pmT} F_2^*(p) = D\{f_2[(l-m)T]\},$$

следовательно,

$$F_1^*(p) F_2^*(p) = D\left\{\sum_{m=0}^{\infty} f_1[mT] f_2[(l-m)T]\right\}.$$

В верхний предел суммы можно поставить l вместо ∞ , так как $f_2[(l-m)T] \equiv 0$ при $(l-m) < 0$.

5. Теорема дифференцирования по параметру. Пусть оригинал $f[lT, \lambda]$ и изображение

$F^*(p, \lambda)$ содержат параметр λ , не зависящий от l и p :

$$F^*(p, \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} f[lT, \lambda] e^{-plT}.$$

При дифференцировании по λ справедливо соотношение:

$$\frac{\partial F^*(p, \lambda)}{\partial \lambda} = D\left\{\frac{\partial}{\partial \lambda} f[lT, \lambda]\right\}. \quad (9.11)$$

Следовательно, дифференцирование по параметру перестановочно с D -преобразованием.

6. Изображение разностей и сумм. Первая разность решетчатой функции равна

$$\Delta f[lT] = f[(l+1)T] - f[lT].$$

Применяем D -преобразование и на основании теорем линейности и сдвига во временной области получаем:

$$D\{\Delta f[lT]\} = e^{pT} (F^*(p) - f[0]) - F^*(p) = (e^{pT} - 1)F^*(p) - e^{pT} f[0] \quad (9.12)$$

Общая формула для изображения k -й разности решетчатой функции имеет вид

$$D \left\{ \Delta^k f[lT] \right\} = \left(e^{pT} - 1 \right)^k F^*(p) - e^{pT} \sum_{\nu=0}^{k-1} \left(e^{pT} - 1 \right)^{k-1-\nu} \Delta^\nu f[0] .$$

Следует добавить, что изображение разности может быть получено, если разность как решетчатая функция является преобразуемой.

Определим сумму решетчатой функции в виде суммы её ординат: $\sum_{l=0}^{n-1} f[lT]$ и составим

первую разность этой суммы:

$$\Delta \sum_{l=0}^{n-1} f[lT] = \sum_{l=1}^n f[lT] - \sum_{l=0}^{n-1} f[lT] = f[nT] .$$

Согласно предыдущей теореме (8.12), изображение этой разности

$$D \left\{ \Delta \sum_{l=0}^{n-1} f[lT] \right\} = \left(e^{pT} - 1 \right) D \left\{ \sum_{l=0}^{n-1} f[lT] \right\} = D \{ f[lT] \} ,$$

если $f[lT] \equiv 0$ при $l \leq 0$.

Из последнего выражения следует

$$D \left\{ \sum_{l=0}^{n-1} f[lT] \right\} = \frac{F^*(p)}{\left(e^{pT} - 1 \right)} . \quad (9.13)$$

Таким образом, суммированию в области оригиналов соответствует в области изображений деление на $\left(e^{pT} - 1 \right)$.

7. *Предельные значения решетчатых функций.* Весьма полезными в практических приложениях являются соотношения между предельными значениями решетчатой функции и ее изображением. Так для значений времени $t = lT \rightarrow \infty$ имеет место следующая теорема:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f[lT] = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^{pT} - 1}{e^{pT}} F^*(p) = \lim_{p \rightarrow 0} (1 - e^{-pT}) F^*(p) \quad (9.14)$$

Для доказательства используем соотношение

$$f[lT] = \sum_{m=0}^{l-1} \Delta f[mT] + f[0] ,$$

из которого следует, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f[lT] = \sum_{m=0}^{\infty} \Delta f[mT] + f[0] .$$

Согласно (8.12), изображение первой разности имеет вид

$$D\{\Delta f[lT]\} = \sum_{l=0}^{\infty} \Delta f[lT] e^{-plT} = (e^{pT} - 1)F^*(p) - e^{pT} f[0].$$

Если правая часть этого выражения не имеет полюсов на мнимой оси и в правой полуплоскости, то в нем возможен переход к пределу при $p \rightarrow 0$, что приводит к соотношению

$$\lim_{p \rightarrow 0} \{(e^{pT} - 1)F^*(p) - e^{pT} f[0]\} = \sum_{l=0}^{\infty} \Delta f[lT] = \lim_{l \rightarrow \infty} f[lT] - f[0],$$

из которого следует равенство (9.14)

Начальное значение решетчатой функции определяется соотношением

$$f[0] = \lim_{p \rightarrow \infty} (1 - e^{-pT}) F^*(p). \quad (9.15)$$

Для доказательства рассмотрим изображение первой разности для аргумента $[lT - 1]$ и используем теорему сдвига:

$$D\{\Delta f[lT - 1]\} = e^{-pT} \left[(e^{pT} - 1)F^*(p) - e^{pT} f[0] \right] = (1 - e^{-pT}) F^*(p) - f[0].$$

В этом выражении перейдем к пределу при $p \rightarrow \infty$ и получим

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} e^{-plT} \Delta f[lT - 1] \right\} = \lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ (1 - e^{-pT}) F^*(p) - f[0] \right\} = 0,$$

откуда очень просто выводится соотношение (9.15).

8. *Сумма дискрет или ординат решетчатой функции.* Пусть абсцисса сходимости $f[lT]$ отрицательна: $\sigma_0 < 0$. Тогда в основном соотношении дискретного преобразования (9.3) можно положить $p = 0$, что ведет к соотношению

$$F^*(p) = \lim_{p \rightarrow 0} F^*(p) = \sum_{l=0}^{\infty} f[lT]. \quad (9.16)$$

Следовательно, сумма ординат решетчатой функции во всем диапазоне существования равна начальному значению функции дискретного преобразования.

8. *Формула обратного преобразования.* Если дискретное изображение $F^*(p)$ представляет собой дробно-рациональную функцию, знаменатель которой имеет корни простые и действительные p_v , то существует достаточно простая формула для определения оригинала - временной решетчатой функции $f[lT]$:

$$f[lT] = \sum_{v=1}^n \frac{B^*(p_v)}{A^*(p_v)} e^{p_v(l-1)T}, \quad (9.17)$$

$$\text{где } F^*(p) = \frac{B^*(p)}{A^*(p)}; \quad A^{*'}(p) = \frac{\partial A^*(p)}{\partial (e^{pT})}; \quad n - \text{степень полинома } A^*(p).$$

Вывод формулы основан на разложении дробно-рациональной функции $F^*(p)$ на простые дроби. Для кратных корней функция имеет более сложный вид и ее можно найти в [1,2].

Для общего случая задачу обратного D -преобразования, т.е. D^{-1} решает формула обращения [2], которая имеет вид

$$f[IT] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} F^*(p) e^{pIT} dp = D^{-1} \{F^*(p)\} \quad (9.18)$$

где c - координата прямой, параллельной мнимой оси, относительно которой все особые точки $F^*(p)$ лежат левее; значение c больше значения абсциссы сходимости.

Можно еще указать ряд теорем преобразования, однако они редко используются в практических исследованиях и поэтому здесь не приводятся. При необходимости с ними можно ознакомиться в [1,2].

Перейдем к дискретному \overline{D} - преобразованию. Для этого преобразования также можно рассмотреть ряд теорем, которые наиболее часто находят применение в аналитических исследованиях.

1. *Свойство линейности:*

$$\overline{D} \left\{ \sum_{v=1}^n c_v F_v(p) \right\} = \sum_{v=1}^n c_v F_v^*(p). \quad (9.19)$$

2. \overline{D} -преобразование произведения двух изображений:

$$\begin{aligned} \overline{D} \{F_1(p) F_2^*(p)\} &= F_1^*(p) F_2^*(p); \\ \overline{D} \{F_1(p) F_2(p)\} &= (F_1(p) F_2(p))^* = F^*(p). \end{aligned} \quad (9.20)$$

3. Умножение преобразуемой функции на экспоненту:

$$\overline{D} \{e^{-psT} F(p)\} = e^{-psT} F^*(p), \quad (9.21)$$

где s - целое число.

Как следует из соотношения, экспонента, степень которой содержит оператор p и множитель в виде периода квантования, умноженного на целое число, может быть вынесена за знак преобразования.

4. *Использование таблиц.* При решении практических задач для определения \overline{D} - преобразования функции $F(p)$ можно воспользоваться таблицами, приведенными в [2-4,7]. В

случае сложного выражения $F(p)$ следует функцию $F(p)$ разложить на простые дроби, а затем воспользоваться таблицей.

9.2. Описание ИСАУ в области изображений. Дискретные передаточные функции. Структурные схемы и их преобразования.

Рассмотрим описание импульсной системы в области изображений на примере типовой структуры. Для всех сигналов, действующих в системе, можно получить изображение по Лапласу (непрерывное или дискретное) и внести соответствующие изменения обозначений этих сигналов на структурной схеме, как показано на рис. 9.3.

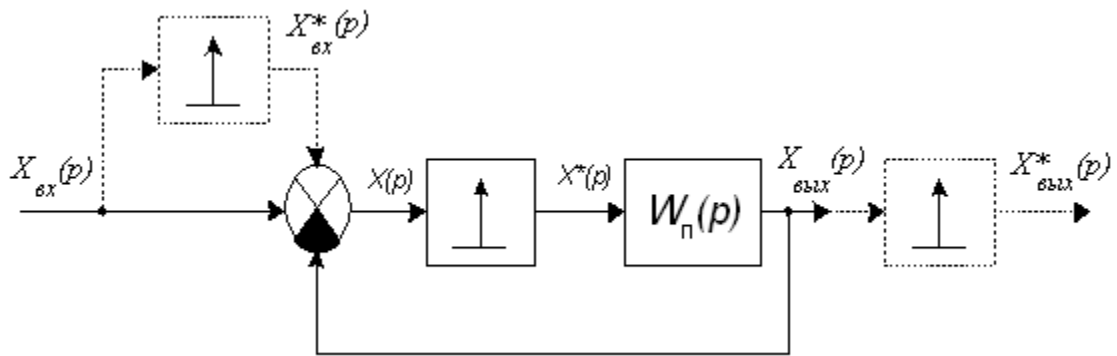


Рис.9.3. Структурная схема замкнутой ИСАУ

Тогда описание замкнутой ИСАУ в изображениях представляется двумя уравнениями:

$$\begin{aligned} X_{\text{вых}}(p) &= W_{\Pi}(p) X^*(p); \\ X(p) &= X_{\text{вх}}(p) - X_{\text{вых}}^*(p). \end{aligned} \quad (9.22)$$

Поскольку описание (9.22) содержит одновременно изображение непрерывных и дискретных сигналов, что неприемлемо для аналитических преобразований, применим дискретное \overline{D} - преобразование к этим уравнениям:

$$\begin{aligned} \overline{D}\{X_{\text{вых}}(p)\} &= \overline{D}\{W_{\Pi}(p) X^*(p)\} \\ \overline{D}\{X(p)\} &= \overline{D}\{X_{\text{вх}}(p) - X_{\text{вых}}^*(p)\} \end{aligned}$$

Тогда, учитывая свойства \overline{D} - преобразования, получаем:

$$\begin{aligned} X_{\text{вых}}^*(p) &= W_{\Pi}^*(p) X^*(p), \\ X^*(p) &= X_{\text{вх}}^*(p) - X_{\text{вых}}^*(p) \end{aligned} \quad (9.23)$$

Следует заметить, что формальная математическая операция \overline{D} - преобразования, в результате которой получены уравнения (9.23), означает, что при описании системы используются только дискретные значения непрерывных сигналов $x_{\text{вх}}(t)$ и $x_{\text{вых}}(t)$. В

теоретическом плане это соответствует наличию ИИЭ на входе и выходе системы. Эти ИИЭ на рис. 9.3 показаны пунктиром. Описание импульсной системы в форме уравнений (9.23) позволяет определить дискретную передаточную функцию относительно любого сигнала в ИСАУ. Передаточная функция замкнутой ИСАУ $W_3^*(p)$ представляет собой отношение изображения дискретного выходного сигнала $X_{\text{вых}}^*(p)$ к изображению дискретного входного сигнала $X_{\text{вх}}^*(p)$ при нулевых начальных условиях состояния непрерывной части ИСАУ, что соответствует использованию $W_{\Pi}^*(p)$. Из соотношений (9.23) имеем:

$$W_3^*(p) = \frac{X_{\text{вых}}^*(p)}{X_{\text{вх}}^*(p)} = \frac{W_{\Pi}^*(p)}{1 + W_{\Pi}^*(p)}. \quad (9.24)$$

Передаточная функция по сигналу ошибки $X^*(p)$, которую мы обозначим $W_x^*(p)$ определяется аналогично и имеет вид

$$W_x^*(p) = \frac{X^*(p)}{X_{\text{вх}}^*(p)} = \frac{1}{1 + W_{\Pi}^*(p)}. \quad (9.25)$$

Как следует из рис. 9.3, разомкнутая ИСАУ состоит из ИИЭ и приведенной непрерывной части, поэтому ее передаточная функция определяется формой $W_{\Pi}(p)$:

$$W_p^*(p) = \frac{X_{\text{вых}}^*(p)}{X^*(p)} = W_{\Pi}^*(p). \quad (9.26)$$

Если система имеет более сложную структуру, ее передаточные функции определяются с привлечением правил структурных преобразований линейных систем. Рассмотрим ИСАУ, структурная схема которой приведена на рис. 9.4.

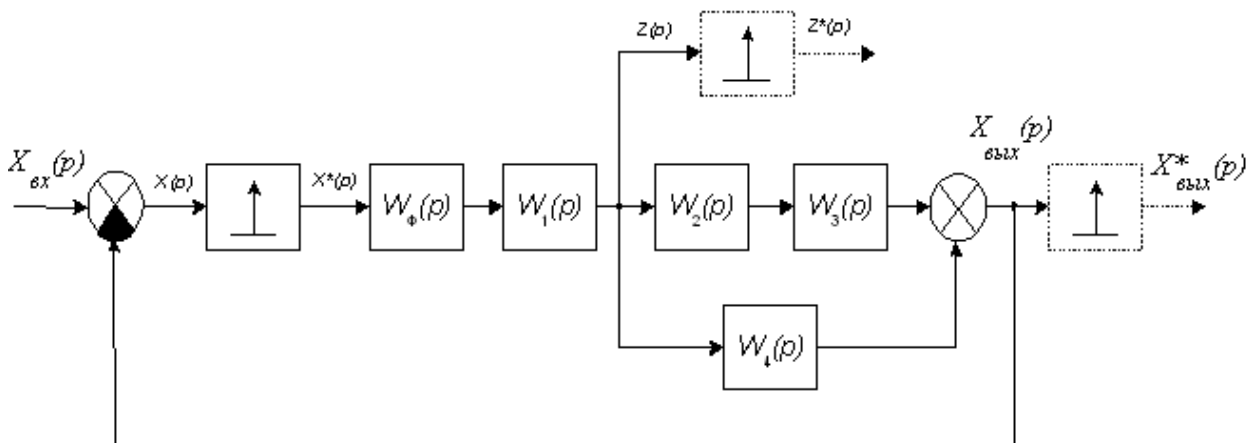


Рис. 9.4. Структурная схема ИСАУ

Передаточные функции непрерывной и приведенной части системы имеют вид:

$$W_H(p) = W_1(p)[W_2(p)W_3(p) + W_4(p)];$$

$$W_\Pi(p) = W_\Phi(p)W_H(p).$$

Преобразование \bar{D} для приведенной передаточной функции можно записать так

$$\begin{aligned}\bar{D}\{W_\Pi(p)\} &= \bar{D}\{W_\Phi(p)W_1(p)W_2(p)W_3(p)\} + \bar{D}\{W_\Phi(p)W_1(p)W_4(p)\} = \\ &= W_{1\Pi}^*(p) + W_{2\Pi}^*(p) = W_\Pi^*(p).\end{aligned}$$

Если известна передаточная функция $W_\Pi^*(p)$, записать передаточную функцию по ошибке или замкнутой системы труда не составляет. Определим дискретную передаточную функцию по сигналу $Z(p)$. Для этого проведем некоторые структурные преобразования и представим систему в виде, приведенном на рис. 9.5.

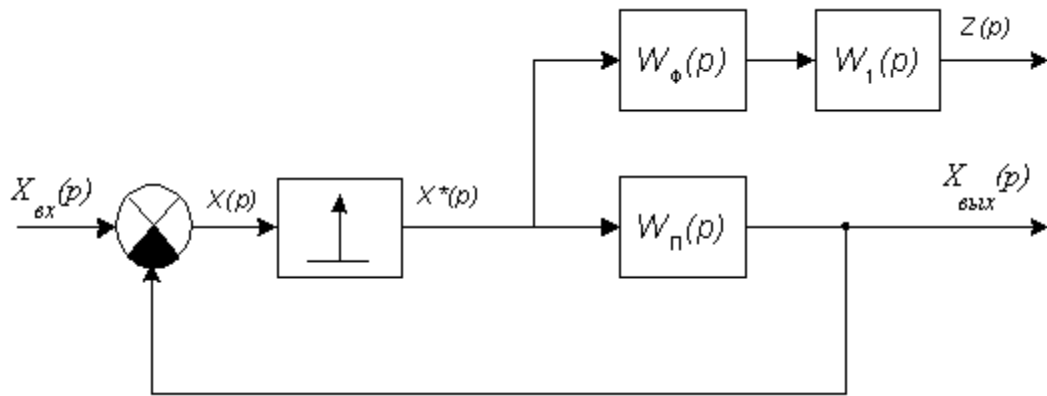


Рис.9.5. Структурная схема замкнутой ИСАУ после преобразования

Уравнения системы относительно сигнала $Z(p)$ имеют вид:

$$\begin{cases} Z(p) = X^*(p)W_\Phi(p)W_1(p); \\ X(p) = X_{\text{вх}}(p) - X_{\text{вых}}(p); \\ X_{\text{вых}}(p) = X^*(p)W_\Pi^*(p). \end{cases} \quad (9.27)$$

Применяем ко всем уравнениям (9.27) \bar{D} -преобразование и определяем передаточную функцию:

$$W_Z^*(p) = \frac{Z^*(p)}{X_{\text{вх}}^*(p)} = \frac{(W_\Phi(p)W_1(p))^*}{1 + W_\Pi^*(p)}. \quad (9.28)$$

На рис. 9.6. представлена импульсная система, в которой импульсный элемент охвачен отрицательной обратной связью, содержащей непрерывное звено с передаточной функцией $W_{H2}(p)$ [3].

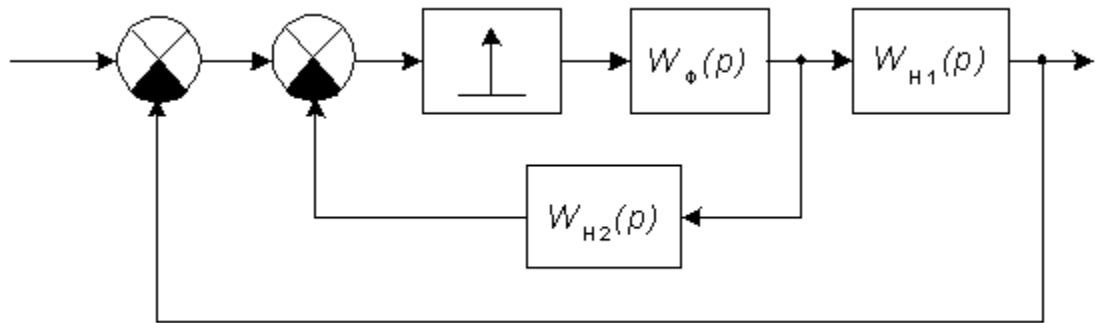


Рис.9.6. Структурная схема ИСАУ

Для определения передаточных функций этой системы проведем структурные преобразования и представим систему так, как показано на рис. 9.7.

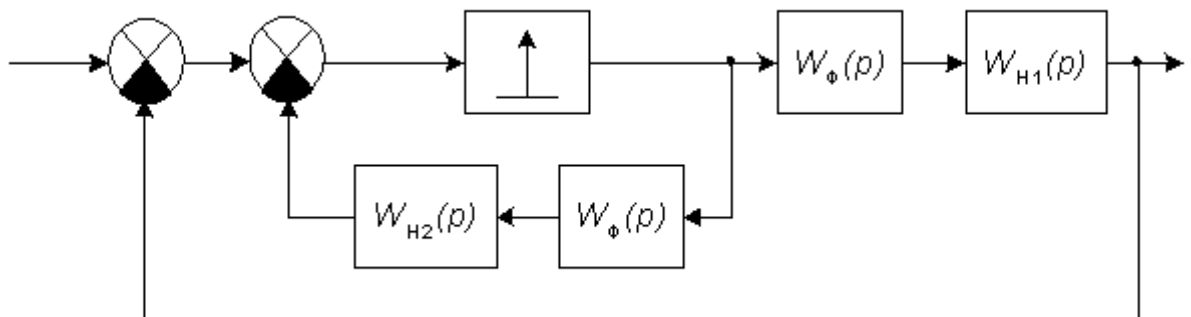


Рис.9.7. Структурная схема ИСАУ после преобразования

Контур с обратной связью можно рассматривать как некоторую обычную замкнутую импульсную систему с передаточной функцией:

$$W_K^*(p) = \frac{1}{1 + W_1^*(p)},$$

где $W_1^*(p) = \overline{D}\{W_\phi(p)W_{H2}(p)\}$.

Тогда передаточная функция разомкнутой общей системы

$$W_p^*(p) = W_K^*(p)(W_\phi(p)W_{H1}(p))^* = W_K^*(p)W_2^*(p).$$

Для замкнутой системы имеем

$$W_3^*(p) = \frac{W_K^*(p)W_2^*(p)}{1 + W_K^*(p)W_2^*(p)} = \frac{W_2^*(p)}{1 + W_1^*(p) + W_2^*(p)}.$$

Таким образом, при преобразовании структурных схем нужно иметь в виду:

1. Нельзя переставлять импульсный элемент с непрерывными передаточными функциями;
2. В непрерывной части системы можно проводить любые преобразования схемы

9.3. Получение дискретных передаточных функций - по непрерывным передаточным функциям

В основе формулы связи дискретных и непрерывных передаточных функций лежит весовая функция системы:

$$w(lT) = w(t)|_{t=lT},$$

которая не меняется при подаче на вход системы дельта-функции Дирака $\delta(t)$

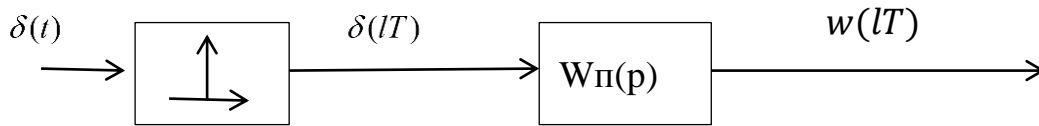


Рис.9.8. Прохождение сигнала $\delta(t)$ через динамическое звено

В соответствии с формулой разложения для непрерывных передаточных функций можно записать для правильной передаточной функции: $W_n(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$, выражение весовой функции в виде: $w_n(t) = \sum_{i=1}^n \frac{B(p_i)}{A'(p_i)} e^{p_i t}$, для которой очевидно, что дискретная передаточная функция будет представлять собой дискретное преобразование Лапласа $W_n^*(p) = \sum_{i=1}^n \frac{B(p_i)}{A'(p_i)} \frac{1}{1 - e^{-p_i T}}$, где n - число корней уравнения $A(p) = 0$, а $A'(p) = \frac{\partial A(p)}{\partial p}$.

Таким образом, для получения дискретных передаточных функций следует выполнить действия:

$$L^{-1} \quad T \quad D$$

$$W(p) \rightarrow w(t) \rightarrow w[mT] \rightarrow W^*(p)$$

Рассмотрим пример.

Пример. Выражение для приведенной передаточной функции имеет вид:

$$W_n(p) = W_\phi(p) \cdot W_1(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p} \frac{k}{(1 + pT_1)} = (1 - e^{-pT}) W_1(p)$$

$$w_1(t) = L^{-1} \left(\frac{k}{p(1 + pT_1)} \right) = k - ke^{-\frac{t}{T_1}}$$

Дискретное преобразование от $W_1(p)$ имеет вид: $W_1^*(p) = \frac{k}{1 - e^{-pT}} - \frac{k}{1 - e^{-pT} e^{-\frac{T}{T_1}}}$

$$W_1^*(p) = \frac{k(1 - e^{-T/T_1})e^{pT}}{(e^{pT} - 1)(e^{pT} - e^{-T/T_1})},$$

Используя множитель $(1 - e^{-pT})$, получим

$$\text{тогда } W_1^*(p) = (1 - e^{-pT}) \frac{k(1 - e^{-T/T_1})e^{pT}}{(e^{pT} - 1)(e^{pT} - e^{-T/T_1})} = \frac{k(1 - e^{-\frac{T}{T_1}})}{(e^{pT} - e^{-\frac{T}{T_1}})}.$$

- по уравнениям в конечных разностях

Другим весьма распространенным способом определения временных сигналов является метод разностных уравнений. Разностные уравнения составляются относительно решетчатой функции и являются аналогом дифференциального уравнения для непрерывной функции. При этом аналогом производной 1-го, 2-го, ..., n-го порядков служат конечные разности 1-го, 2-го, ..., n-го порядков (или просто первая разность, вторая разность...).

Первая прямая разность обозначается $\Delta y[lT]$ и определяется следующим образом:

$$\Delta y[lT] = y[(l+1)T] - y[lT].$$

Первая обратная разность

$$\nabla y[lT] = y[lT] - y[(l-1)T].$$

Вторая конечная прямая разность обозначается $\Delta^2 y[lT]$, берется от первой разности и требует для своего определения значений квантованного сигнала в трех точках

$$\Delta^2 y[lT] = \Delta y[(l+1)T] - \Delta y[lT] = y[(l+2)T] - 2y[(l+1)T] + y[lT].$$

Третья конечная разность (прямая) берется от второй разности и требует для своего определения четыре точки:

$$\Delta^3 y[lT] = \Delta^2 y[(l+1)T] - \Delta^2 y[lT] = y[(l+3)T] - 3y[(l+2)T] + 3y[(l+1)T] - y[lT].$$

Конечная разность k-го порядка представляется в форме:

$$\Delta^k y[lT] = \sum_{\nu=0}^k (-1)^\nu (C_k^\nu) y[(l+k-\nu)T], \quad \text{где } C_k^\nu = \binom{k}{\nu} = \frac{k!}{\nu!(k-\nu)!}.$$

Всякое соотношение, связывающее решетчатую функцию $y[lT]$ и ее разности до некоторого порядка n , называется разностным уравнением. В общем случае разностное уравнение имеет вид:

$$\Phi(y[lT], \Delta y[lT], \Delta^2 y[lT], \dots, \Delta^n y[lT]) = 0.$$

Линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами может быть представлено таким образом:

$$q_n \Delta^n y[lT] + q_{n-1} \Delta^{n-1} y[lT] + \dots + q_0 y[lT] = x[lT],$$

$$a_n y[(l+n)T] + a_{n-1} y[(l+n-1)T] + \dots + a_0 y[lT] = x[lT].$$

Если разностное уравнение содержит в явном виде решетчатую функцию $y[lT]$ и $y[lT + nT]$, то это разностное уравнение имеет порядок n . Порядок разностного уравнения может отличаться от порядка старшей разности.

Получим дискретную передаточную функцию из вышеприведенного уравнения, используя свойство преобразования Лапласа (9.1):

$$W^*(p) = \frac{Y^*(p)}{X^*(p)} = \frac{1}{a_n e^{pnT} + a_{n-1} e^{p(n-1)T} + a_{n-2} e^{p(n-2)T} + \dots + a_0}$$

Пример. Имеем разностное уравнение

$$\Delta^3 x[lT] + \Delta^2 x[lT] + 2\Delta x[lT] + 2x[lT] = f[lT],$$

раскроем его относительно значений $x[lT]$:

$$x[(l+3)T] - 2x[(l+2)T] + 3x[(l+1)T] = f[lT]. \text{ - разностное уравнение третьего порядка.}$$

На основании последнего уравнения запишем:

$$W^*(p) = \frac{X^*(p)}{F^*(p)} = \frac{1}{e^{3pT} - 2e^{2pT} + 3e^{pT}}$$

Разностное уравнение может быть получено на основании описания физических процессов в системе управления, где ИЭ несет функциональную нагрузку. Это часто встречается в электронных схемах, содержащих электронные ключи. Для цифровых систем разностное уравнение обычно получают на основании дискретной передаточной функции той части системы, для которой уравнение составляется.

9.4. Описание ИСАУ во временной области. Определение значений временных сигналов

Рассмотрим описание импульсной системы во временной области применительно к структурной схеме рис. 9.4 и используем принятые там обозначения сигналов. Согласно обозначению, большинство сигналов в системе являются непрерывными. Вспомним при этом, что сигнал на выходе линейного звена с известной весовой характеристикой можно определить на основании интеграла свёртки [1,3]. Тогда описание рассматриваемой замкнутой системы представляется двумя уравнениями:

$$\begin{cases} x_{вых}(t) = \int_0^{\infty} w_{\Pi}(t-\tau) x^*(\tau) d\tau; \\ x(t) = x_{вх}(t) - x_{вых}(t), \end{cases} \quad (9.29)$$

где $w_{\Pi}(t)$ - весовая функция приведённой части.

В первом уравнении сигнал $x^*(t)$ является квантованным и может быть представлен выражением

$$x^*(t) = x(t)\delta_T(t) = x(t) \sum_{s=0}^{\infty} \delta(t - sT).$$

Подставим это выражение в (9.29) и поменяем порядок интегрирования и суммирования

$$x_{\text{блх}}(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \int_0^{\infty} w_{\Pi}(t - \tau) x(\tau) \delta(\tau - sT) d\tau.$$

Учтем теорему об интегрировании функции $\delta(t)$, умноженной на непрерывную функцию, и тогда получим

$$x_{\text{блх}}(t) = \sum_{l=0}^{\infty} w_{\Pi}(t - lT) x[lT]. \quad (9.30)$$

Так как $w_{\Pi}(t) = 0$ при $t < 0$, верхний предел суммы можно заменить на $l = \frac{t}{T}$ - целое число. Если теперь перейти к дискретным моментам времени $t = lT$, то уравнения (9.29) примут вид:

$$\begin{cases} x_{\text{блх}}[lT] = \sum_{s=0}^l w_{\Pi}[lT - sT] x[sT]; \\ x[lT] = x_{\text{вх}}[lT] - x_{\text{блх}}[lT]. \end{cases} \quad (9.31)$$

Эти два уравнения представляют собой описание простейшей одноконтурной ИСАУ во временной области. По своему содержанию первое уравнение (9.31) представляет собой формулу свертки для дискретных сигналов. Если теперь к уравнениям (9.31) применить D -преобразование и вспомнить теорему о свертке во временной области (см. 9.1), и свойство линейности, то из (9.31) непосредственно следует описание ИСАУ в области изображений:

$$\left. \begin{aligned} D\{x_{\text{блх}}[lT]\} &= D\left\{\sum_{s=0}^l w_{\Pi}[lT - sT] x[sT]\right\} \Rightarrow X_{\text{блх}}^*(p) = W_{\Pi}^*(p) X^*(p); \\ D\{x[lT]\} &= D\{x_{\text{вх}}[lT] - x_{\text{блх}}[lT]\} \Rightarrow X^*(p) = X_{\text{вх}}^*(p) - X_{\text{блх}}^*(p). \end{aligned} \right\} \quad (9.32)$$

Описание системы в форме (9.32) позволяет записать все требуемые передаточные функции, как это было определено в разделе 9.3. Однако наша задача - определение временных сигналов. Один из наиболее часто используемых способов вычисления временных сигналов в ИСАУ основан на использовании представленных уравнений (9.31). Приведем рекуррентные соотношения для определения выходного сигнала и сигнала ошибки:

$$x_{\text{вых}}[lT] = \sum_{m=0}^l w_{\Pi}[lT - mT] x_{\text{вх}}[mT] - \sum_{m=0}^l w_{\Pi}[lT - mT] x_{\text{вых}}[mT];$$

$$x[lT] = x_{\text{вх}}[lT] - \sum_{m=0}^l w_{\Pi}[lT - mT] x[mT].$$
(9.33)

При этом следует понимать, что использование только дискретных значений сигналов даже в тех каналах системы, где они непрерывные, означает, что мы ставим в этих местах ИИЭ, как это показано на рис. 9.3.

Допустим, что дискретная передаточная функция разомкнутой ИСАУ является дробно-рациональной и имеет вид

$$W^*(p) = \frac{X_{\text{вых}}^*(p)}{X_{\text{вх}}^*(p)} = \frac{b_m e^{pmT} + b_{m-1} e^{p(m-1)T} + \dots + b_1 e^{pT} + b_0}{a_n e^{pnT} + a_{n-1} e^{p(n-1)T} + \dots + a_1 e^{pT} + a_0},$$

где $X_{\text{вых}}^*(p)$ и $X_{\text{вх}}^*(p)$ - дискретные изображения выходной и входной переменной соответственно.

Разделим числитель и знаменатель выражения для $W^*(p)$ на экспоненту с наибольшей степенью в знаменателе:

$$W^*(p) = \frac{b_m e^{p(m-n)T} + b_{m-1} e^{p(m-1-n)T} + \dots + b_1 e^{p(1-n)T} + b_0 e^{-pnT}}{a_n + a_{n-1} e^{-pT} + \dots + a_1 e^{-p(n-1)T} + a_0 e^{-pnT}}.$$
(9.34)

Составим уравнение относительно $X_{\text{вых}}^*(p)$ и $X_{\text{вх}}^*(p)$:

$$X_{\text{вых}}^*(p) (a_n + a_{n-1} e^{-pT} + \dots + a_1 e^{-p(n-1)T} + a_0 e^{-pnT}) =$$

$$= X_{\text{вх}}^*(p) (b_m e^{-p(n-m)T} + b_{m-1} e^{-p(n-m+1)T} + \dots + b_1 e^{-p(n+1)T} + b_0 e^{-pnT})$$
(9.35)

В выражении (9.35) перейдем к оригиналу и используем теорему о сдвиге во временной области, тогда имеем ☺

$$a_n x_{\text{вых}}[lT] + a_{n-1} x_{\text{вых}}[(l-1)T] + \dots + a_1 x_{\text{вых}}[(l-n+1)T] + a_0 x_{\text{вых}}[(l-n)T] =$$

$$= b_m x_{\text{вх}}[(l-n+m)T] + b_{m-1} x_{\text{вх}}[(l-n-1+m)T] + \dots +$$

$$+ b_1 x_{\text{вх}}[(l-n+1)T] + b_0 x_{\text{вх}}[(l-n)T].$$
9.36

На основании (9.36) можно составить рекуррентное соотношение для определения выходного сигнала $x_{\text{вых}}[lT]$ по значению этого сигнала в предыдущие моменты времени и значению входного сигнала $x_{\text{вх}}[lT]$

$$\begin{aligned}
x_{\text{вых}}[lT] &= \frac{1}{a_n} (b_m x_{\text{вх}}[(l-n+m)T] + b_{m-1} x_{\text{вх}}[(l-n-1+m)T] + \dots + \\
&+ b_1 x_{\text{вх}}[(l-n+1)T] + b_0 x_{\text{вх}}[(l-n)T] - a_{n-1} x_{\text{вых}}[(l-1)T] - \dots - \\
&- a_1 x_{\text{вых}}[(l-n+1)T] - a_0 x_{\text{вых}}[(l-n)T]).
\end{aligned} \tag{9.37}$$

Пример. Передаточная функция замкнутой ИСАУ имеет вид

$$W_3^*(p) = \frac{X_{\text{вых}}^*(p)}{X_{\text{вх}}^*(p)} = \frac{b_1 e^{pT} + b_0}{e^{2pT} + a_1 e^{pT} + a_0}.$$

Требуется определить значение выходной переменной $x_{\text{вых}}[lT]$, если на входе действует сигнал в виде единичного скачка $x_{\text{вх}}(t) = 1_0(t)$. Составим разностное уравнение

$$x_{\text{вых}}[lT] + a_1 x_{\text{вых}}[(l-1)T] + a_0 x_{\text{вых}}[(l-2)T] = b_1 x_{\text{вх}}[(l-1)T] + b_0 x_{\text{вх}}[(l-2)T].$$

Значение выходной переменной определяется выражением

$$x_{\text{вых}}[lT] = b_1 x_{\text{вх}}[(l-1)T] + b_0 x_{\text{вх}}[(l-2)T] - a_1 x_{\text{вых}}[(l-1)T] - a_0 x_{\text{вых}}[(l-2)T].$$

Вычисляем $x_{\text{вых}}[lT]$ по тактам:

$$\text{при } l = 0 \quad x_{\text{вых}}[0] = 0$$

$$\text{при } l = 1 \quad x_{\text{вых}}[T] = b_1 x_{\text{вх}}[0] - a_1 x_{\text{вых}}[0] = b_1$$

$$\text{при } l = 2 \quad x_{\text{вых}}[2T] = b_1 x_{\text{вх}}[T] + b_0 x_{\text{вх}}[0] - a_1 x_{\text{вых}}[T] - a_0 x_{\text{вых}}[0] = b_1 + b_0 - a_1 b_1 \dots$$

Еще один способ определения временных сигналов в ИСАУ состоит в получении дискретного изображения Лапласа искомого сигнала и, воспользовавшись формулой D-преобразования:

$$X_{\text{вых}}^*(p) = \sum_{l=0}^{\infty} x_{\text{вых}}[lT] e^{-pmlT} = \frac{B^*(p)}{A^*(p)}$$

Найти сигнал $x_{\text{вых}}[lT]$ ($l = 0.. \infty$), делением числителя на знаменатель, т.е. $B^*(p)$ на $A^*(p)$, либо разложением на простые дроби.

Пример. Дано D-преобразование переменной $x_{\text{вых}}[lT]$:

$$X_{\text{вых}}^*(p) = \frac{B^*(p)}{A^*(p)} = \frac{\left(1 - e^{-T/T_1}\right)}{\left(e^{pT} - 1\right)\left(e^{pT} - e^{-T/T_1}\right)} = \frac{1 - e^{-T/T_1}}{e^{2pT} - (1 + e^{-T/T_1})e^{pT} + e^{-T/T_1}}.$$

Требуется определить $x_{вых} [lT]$. Воспользуемся формулой (9.17). Знаменатель имеет

корни $p_1 = 0$, $p_2 = -\frac{1}{T_1}$, производная знаменателя

Искомая переменная: $x_{вых} [lT] = 1 - e^{-T/T_1(l-1)}$.

Если поделить числитель на знаменатель, то можно восстановить ординаты выходного сигнала. Допустим, что нам заданы параметры T и T_1 ($T=0.1$, $T_1=1$), тогда дискретное изображение выходного сигнала будет иметь вид:

$$X_{вых}^*(p) = \frac{B^*(p)}{A^*(p)} = \frac{1 - 0,9048}{e^{2pT} - (1,9048)e^{pT} + 0,9048} = \frac{0,095163 e^{-2pT}}{1 - 1,904837 e^{-pT} + 0,904837 e^{-2pT}}$$

Делением числителя на знаменатель мы получаем ряд ординат выходного сигнала: 0,095163; 0,181266; 0,259173; 0,329663; 0,393442; 0,451149; 0,503363....

При определении решетчатой функции из непрерывной можно положить время фиксирования её значения $t = lT + \Delta t$, где Δt имеет заданное значение в интервале $-T \leq \Delta t \leq T$. Тогда функция $f[lT + \Delta t]$ называется смещённой и обозначается $f[lT, \Delta t]$. При $\Delta t > 0$ аргументы решетчатой функции смещены вправо относительно несмещённой функции, а при $\Delta t < 0$ - влево, при этом, очевидно, что при изменении Δt дискреты решетчатой функции будут меняться.

Как правило, в импульсных системах временные сигналы вычисляются как решетчатые функции и моменты съема информации определяются значениями lT . В том случае, когда требуется значение сигнала в момент времени $lT < t < (l+1)T$, можно использовать смещённую решетчатую функцию. Воспользовавшись формулой (9.30) и обозначив $t = lT + \Delta t$, получим

$$x_{вых} [lT + \Delta t] = x^*(t) = \sum_{m=0}^l w[lT + \Delta t - mT] x[mT], \quad (9.38)$$

где $l = \frac{t}{T}$ - целое число; $w[lT]$ - весовая функция динамического звена, через который проходит сигнал $x[mT]$.

На основании (9.38) вычисляются значения временных сигналов в ИСАУ между моментами квантования. Это особенно важно, когда периоды квантования велики по сравнению с динамическими свойствами $w(t)$.

9.5. Временные характеристики ИСАУ

Как и в случае непрерывных САУ, временными характеристиками импульсных систем являются переходная и весовая (импульсная) функции. Обе характеристики позволяют оценить динамические свойства системы и определить показатели качества регулирования.

Переходная характеристика представляет собой реакцию на входной сигнал в виде единичного скачка, весовая - реакцию на входной сигнал в виде $\delta(t)$ функции, что означает на практике единичный импульс малой длительности.

Для замкнутой ИСАУ наиболее просто определяются дискретные значения этих характеристик. Так, согласно, (9.33) переходная характеристика замкнутой ИСАУ $h[lT]$ как переменная на выходе системы определяется выражением

$$h[lT] = \sum_{m=0}^l w_{\Pi}[(l-m)T] 1_0[mT] - \sum_{m=0}^l w_{\Pi}[(l-m)T] h[mT], \quad (9.39)$$

где $w_{\Pi}[(l-m)T]$ - весовая функция приведенной части.

Кроме того, $h[lT]$ можно определить по разностному уравнению, если известно дискретное преобразование переходной функции $D\{h[lT]\} = H^*(p)$.

Аналитическое выражение для $H^*(p)$ легко определить на основании передаточной функции $W_3^*(p)$ замкнутой ИСАУ:

$$H^*(p) = W_3^*(p) 1_0^*(p) = W_3^*(p) \frac{e^{pT}}{e^{pT} - 1} \quad (9.40)$$

Пусть $W_3^*(p)$ представляет собой дробно-рациональную функцию:

$$W_3^*(p) = \frac{B^*(p)}{A^*(p)} = \frac{b_m e^{pmT} + b_{m-1} e^{p(m-1)T} + \dots + b_1 e^{pT} + b_0}{a_n e^{pnT} + a_{n-1} e^{p(n-1)T} + \dots + a_1 e^{pT} + a_0}.$$

Тогда, согласно (9.39), рекуррентное соотношение для вычисления $h[lT]$ имеет вид

$$h[lT] = \frac{1}{a_n} (b_m 1_0[(l-n+m)T] + \dots + b_0 1_0[(l-n)T] - a_{n-1} h[(l-1)T] - \dots - a_1 h[(l-n+1)T] - a_0 h[(l-n)T]). \quad (9.41)$$

Если нетрудно вычислить корни p_v характеристического полинома $A^*(p)$, то для определения $h[lT]$ можно воспользоваться формулой разложения [4]:

$$h[lT] = \frac{B^*(0)}{A^*(0)} + \sum_{\nu=1}^n \frac{B^*(p_\nu)}{A'^*(p_\nu)(e^{p_\nu T} - 1)} e^{p_\nu lT}, \quad (9.42)$$

где $A'^*(p) = \frac{\partial A^*(p)}{\partial (e^{pT})}$; n - степень полинома $A^*(p)$.

Когда известны значения $h[lT]$, дискретные значения весовой функции замкнутой ИСАУ определяются как первая разность переходной характеристики:

$$w_3[lT] = \Delta h[lT] = h[(l+1)T] - h[lT].$$

Однако следует помнить, что $w_3[lT]$ представляет собой обратное преобразование от дискретной передаточной функции $W_3^*(p)$, поэтому для определения $w_3[lT]$ применима формула обратного преобразования (9.17):

$$w_3[lT] = \sum_{\nu=1}^n \frac{B^*(p_\nu)}{A'^*(p_\nu)} e^{p_\nu (l-1)T}.$$

На основании формулы дискретного преобразования для $W_3^*(p)$, значения весовой функции можно определить путем разложения $W_3^*(p)$ в ряд по степеням e^{-pT} :

$$\begin{aligned} W_3^*(p) &= \sum_{l=0}^{\infty} w_3[lT] e^{-plT} = \frac{b_m e^{pmT} + b_{m-1} e^{p(m-1)T} + \dots + b_1 e^{pT} + b_0}{a_n e^{pnT} + a_{n-1} e^{p(n-1)T} + \dots + a_1 e^{pT} + a_0} = \\ &= c_0 + c_1 e^{-pT} + c_2 e^{-2pT} + \dots \end{aligned} \quad (9.43)$$

Здесь $w_3[0] = c_0$, $w_3[T] = c_1$, $w_3[2T] = c_2 \dots$

В случае разомкнутых импульсных систем $h_p[lT]$ и $w_p[lT]$ являются соответственно переходной и весовой функциями приведенной непрерывной части и могут быть определены по соответствующим непрерывным функциям $h_\Pi(t)$ и $w_\Pi(t)$ в дискретные моменты времени $t = lT$:

$$h_\Pi[lT] = h_\Pi(t)|_{t=lT}; \quad w_\Pi[lT] = w_\Pi(t)|_{t=lT}.$$

9.6. Спектр сигнала при амплитудно-импульсной модуляции

В импульсных системах всегда присутствует сигнал, квантованный по времени и модулированный по амплитуде. Согласно принятой типовой структуре рис. 8.4 этот сигнал

обозначен $x^*(t)$ и является выходным для ИИЭ. Фурье -преобразование для $x^*(t)$ обозначим $X^*(j\omega)$:

$$X^*(j\omega) = \int_0^{\infty} x^*(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (9.44)$$

Согласно выражению (8.2),

$$x^*(t) = x(t) \sum_{l=0}^{\infty} \delta(t - lt) = x(t) \delta_T(t),$$

где периодическая функция $\delta_T(t)$ с периодом T имеет представление в виде ряда Фурье:

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 lt}, \quad (9.45)$$

где $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ - частота квантования.

Подставим выражение (9.45) в (9.44) и изменим очередность интегрирования и суммирования. Тогда искомое Фурье преобразование $X^*(j\omega)$ можно представить соотношением

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} x(t) e^{jt(\omega - \omega_0 l)} dt = \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} X(j\omega - j\omega_0 l). \quad (9.46a)$$

Таким образом, можно записать формулу связи спектров дискретного и непрерывного сигналов, которая с учетом ненулевых начальных значений $x(0) \neq 0$ принимает вид:

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} X(j\omega - j\omega_0 l) + \frac{x(0)}{2}. \quad (9.46 б)$$

При ненулевых начальных условиях и отсутствии запаздывания

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} X(j\omega - j\omega_0 l) - \frac{x(0)}{2}. \quad (9.46 в)$$

При ненулевых начальных условиях и наличии запаздывания.

Это соотношение называется дискретным преобразованием Фурье, оно устанавливает связь между преобразованием Фурье непрерывного сигнала $X(j\omega)$ и дискретного $X^*(j\omega)$, квантованного по времени. Дискретное преобразование представляет функцию, если она абсолютно суммируема. Это условие выполняется, когда преобразование Лапласа $X(p)$ для этой функции имеет все полюсы левые.

Известно, что для непрерывных абсолютно интегрируемых функций преобразования Лапласа и Фурье совпадают, поэтому для абсолютно интегрируемой весовой функции $w(t)$

частотную характеристику (комплексный коэффициент передачи) $W(j\omega)$ можно получить по передаточной функции $W(p)$ путем замены оператора p на $j\omega$, $W(j\omega) = W(p)|_{p=j\omega}$. Это положение справедливо и для дискретных преобразований для абсолютно суммируемых функций. Поэтому для определения Фурье - преобразования $X^*(j\omega)$ дискретного сигнала можно воспользоваться соотношениями, полученными для D - преобразования этого сигнала. На основании выражения (9.3) можно записать

$$X^*(j\omega) = \sum_{l=0}^{\infty} x[lT] e^{-j\omega lT}, \quad (9.47)$$

на основании формулы разложения имеем

$$X^*(j\omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B(p_v)}{A'(p_v)} \frac{e^{j\omega T}}{e^{j\omega T} + e^{p_v T}}, \quad (9.48)$$

где $X(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$ - преобразование Лапласа для сигнала $x(t)$; p_v - корни полинома $A(p)$ степени n ; $A'(p) = \frac{\partial A(p)}{\partial p}$.

Анализ выражения (9.46) показывает, что спектральная характеристика является периодической функцией с периодом ω_0 и представляется бесконечным числом слагаемых, каждое из которых является спектральной характеристикой непрерывного сигнала $X(j\omega)$, умноженной на коэффициент $\frac{1}{T}$ и сдвинутой по оси частот на $l\omega_0$, где $-\infty \leq l \leq \infty$. Такая спектральная характеристика называется транспонированной, а слагаемые при $l \neq 0$ - транспонированными составляющими. На рис. 9.9 представлен вариант вещественной частотной составляющей этой спектральной характеристики $\text{Re}\{X^*(\omega)\}$ (такое же соотношение можно записать и для мнимой частотной характеристики $\text{Im}\{X^*(\omega)\}$) и показана вещественная частотная спектральная характеристика непрерывного сигнала $\text{Re}\{X(j\omega)\}$. Как следует из рисунка и выражения (9.46), транспонированный спектр содержит бесконечное число гармоник и тем самым существенно отличается от спектральной характеристики непрерывного сигнала. Это означает, что квантование вносит серьезное искажение в передаваемый сигнал, происходит потеря информации. Возникает вопрос - можно ли из квантованного сигнала восстановить исходный непрерывный?

В зависимости от соотношения частоты квантования ω_0 и граничной частоты $\omega_{гр}$, при которой $|X(\omega_{гр})| \leq \xi$, где ξ - малая величина, графики транспонированных составляющих могут пересекаться и иметь общие частоты (например, на рис. 9.9 частота ω_1). Они могут быть так раздвинуты, что общих частот не возникает (рис. 9.10). В этом случае в диапазоне частот $-\frac{\omega_0}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2}$ спектральные характеристики $\text{Re}\{X^*(j\omega)\}$ и $\frac{1}{T}\text{Re}\{X(j\omega)\}$ совпадают. Если поставить идеальный фильтр низких частот с единичным коэффициентом усиления и равномерным пропусканием в полосе $-\frac{\omega_0}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2}$, то на его выходе будет получен восстановленный сигнал $\frac{1}{T}x(t)$. Этот результат сформулирован в известной импульсной теореме Котельникова, согласно которой условием восстановления непрерывного сигнала из квантованного по времени является соотношение $\omega_0 \geq 2\omega_{гр}$.

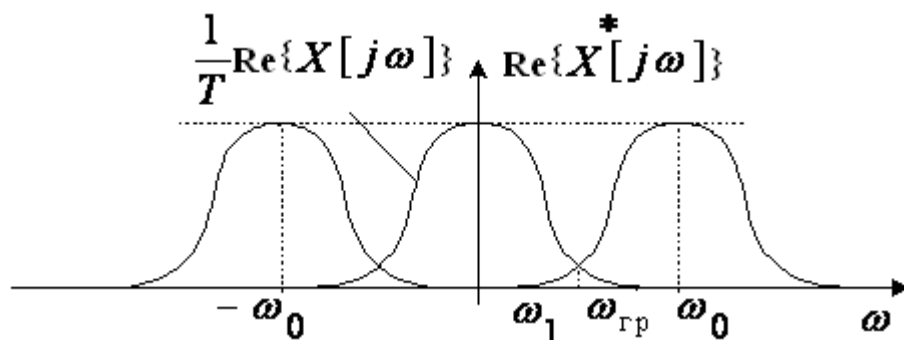


Рис. 9.9. Вещественные спектральные составляющие непрерывного и дискретного сигналов (с наложением характеристик)

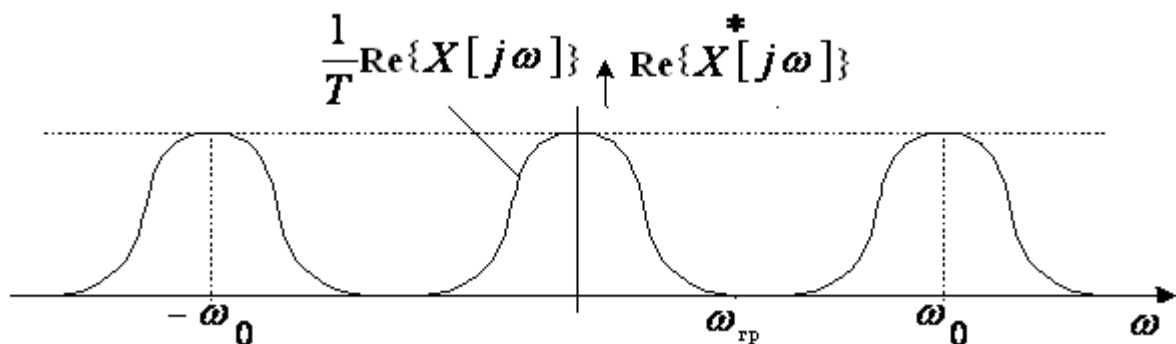


Рис. 9.10. Вещественные спектральные составляющие непрерывного и дискретного сигналов (без наложения характеристик)

9.7. Частотные характеристики разомкнутой ИСАУ

Частотные характеристики разомкнутой линейной ИСАУ позволяют судить о реакции системы в установившемся режиме при подаче на вход системы гармонического воздействия.

Пусть на вход разомкнутой линейной ИСАУ, имеющей передаточную функцию $W^*(p)$, приложено гармоническое воздействие (рис.9.11), и соответствующая ему решетчатая функция

$$x[lT] = x_m \cos(\omega lT + \alpha) = \operatorname{Re}(x_m e^{j(\omega lT + \alpha)}),$$

где ω - частота воздействия; α - фаза.

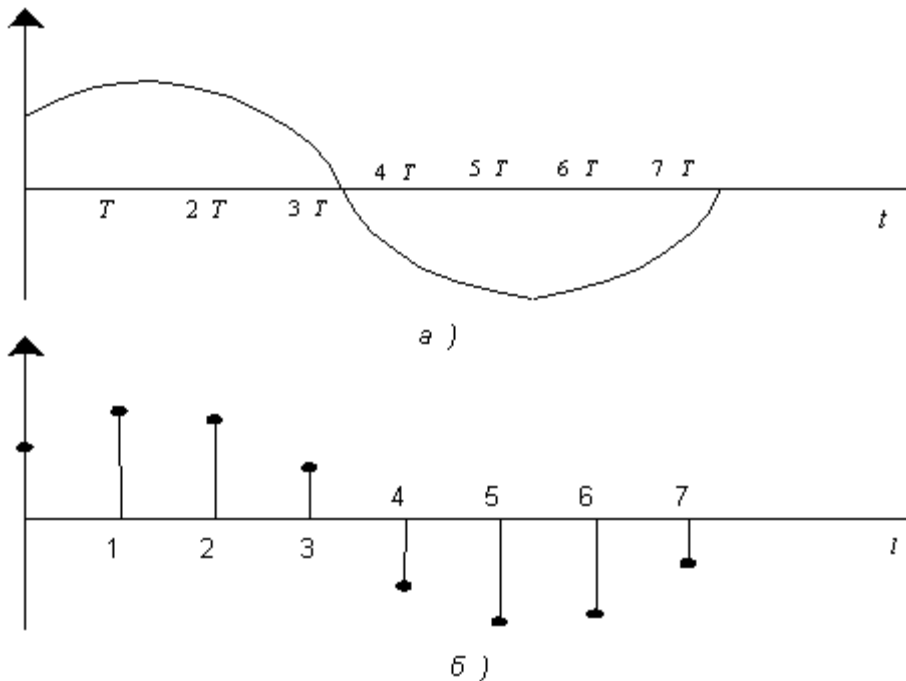


Рис.9.11. Гармонический сигнал (а - непрерывный; б - дискретный)

Можно показать [2,3], что выходная переменная системы $x_{\text{вых}}[lT]$ представляет собой гармонический сигнал и определяется выражением:

$$x_{\text{вых}}[lT] = \operatorname{Re}(x_{\text{вых}m} e^{(j\omega lT + \theta)}), \quad x_{\text{вых}m} e^{(j\omega lT + \theta)} = W^*(j\omega) x_m e^{(j\omega lT + \alpha)}.$$

Заметим, что в отличие от непрерывной гармонической функции гармоническая решетчатая функция в общем случае не является периодической функцией lT . Кроме того, амплитуды x_m и $x_{\text{вых}m}$ необязательно являются теми максимальными значениями, которых могут достигать те или иные члены последовательностей $x[lT]$ и $x_{\text{вых}}[lT]$. Амплитуды всегда будут определять лишь верхние границы, но необязательно - максимумы членов этих последовательностей.

Величина $W^*(j\omega)$ называется амплитудно-фазовой характеристикой (АФХ) разомкнутой системы или её комплексным коэффициентом передачи. Она может быть представлена в показательной форме:

$$W^*(j\omega) = A^*(\omega) e^{j\varphi^*(\omega)}, \quad (9.49)$$

где $A^*(\omega) = |W^*(j\omega)|$; $\varphi^*(\omega) = \arg(W^*(j\omega))$.

Величина $A^*(\omega)$ называется амплитудно-частотной характеристикой и определяет коэффициент передачи системы по каждой гармонике, а функция $\varphi^*(\omega)$ называется фазо-частотной характеристикой, которая определяет сдвиг по фазе приложенного гармонического воздействия. Если оригинал функции $W^*(p)$ в виде $w[IT]$ является абсолютно суммируемой функцией, то так же, как в непрерывных системах, $W^*(j\omega)$ может быть определена по дискретной передаточной функции $W^*(p)$ путем подстановки $p = j\omega$. Это означает, что для $W^*(j\omega)$ справедливо выражение

$$W^*(j\omega) = \sum_{l=0}^{\infty} w[IT] e^{-j\omega IT} . \quad (9.50)$$

Из (9.50) следует, что амплитудно-фазовую характеристику $W^*(j\omega)$ можно рассматривать как спектральную характеристику сигнала в виде весовой функции системы и для нее справедливы все выводы, полученные для спектра сигнала в § 9.7. Самым важным для нашего случая является утверждение, что для абсолютно суммируемых функций $w[IT]$ имеется возможность получения $W^*(j\omega)$ из $W^*(p)$. На основании выражения (9.50) для $W^*(j\omega)$ имеем формулу

$$W^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} W(j\omega - j\omega_0 l) , \quad (9.51 \text{ а})$$

$$W^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} W(j\omega - j\omega_0 l) + \frac{w(0)}{2} \quad (9.51 \text{ б})$$

При ненулевых начальных условиях и отсутствии запаздывания.

$$W^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} W(j\omega - j\omega_0 l) - \frac{w(0)}{2} \quad (9.51 \text{ в})$$

При ненулевых начальных условиях и наличии запаздывания,

где ω_0 - частота квантования импульсного элемента.

Анализ этого выражения показывает, что амплитудно-фазовая характеристика является периодической функцией с периодом ω_0 . Физический смысл и причина этого явления определяются свойством ИИЭ. Пусть ко входу ИИЭ приложено гармоническое воздействие $x(t) = \cos(\omega_1 t)$. На выходе получим

$$x^*(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \delta(t - lT) \cos(\omega_1 lT). \quad (9.52)$$

Пусть теперь приложено другое воздействие $x(t) = \cos((\omega_1 + \omega_0)t)$, причём $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Имеем

$$\cos\left(\left(\omega_1 + \frac{2\pi}{T}\right)lT\right) = \cos(\omega_1 lT) \quad \text{и на выходе по-прежнему справедливо (9.52).}$$

Таким образом, оба воздействия дают одну и ту же реакцию на выходе импульсного элемента.

В связи с периодичностью характеристики $W^*(j\omega)$ все её свойства можно наблюдать в диапазоне частот $0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2}$. При частотах $-\frac{\omega_0}{2} \leq \omega < 0$ она является сопряжённой и на более высоких частотах повторяет характер низкочастотной до указанной частоты $\frac{\omega_0}{2}$. Если в (9.51) экспоненту разложить по формуле Эйлера:

$$W^*(j\omega) = \sum_{l=0}^{\infty} w[lT] \cos(\omega lT) - j \sum_{l=0}^{\infty} w[lT] \sin(\omega lT),$$

то можно заметить, что действительная часть $W^*(j\omega)$ является функцией четной, а мнимая - нечетной, и при частоте $\pm \frac{\omega_0}{2}$ функция $W^*\left(j\frac{\omega_0}{2}\right)$ всегда является действительной величиной.

Представление АФХ $W^*(j\omega)$ на комплексной плоскости называется годографом разомкнутой ИСАУ. На основании вышесказанного годограф строится в диапазоне частот $0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2}$ и всегда заканчивается на действительной оси. Для приближенного построения годографа используется формула (9.51). Для подавляющего большинства практических задач при построении достаточно взять два-три слагаемых из бесконечной суммы. Первое слагаемое представляет собой АФХ (или годограф) непрерывной разомкнутой системы. Строится эта характеристика достаточно просто и позволяет сделать некоторые суждения о местоположении годографа и его свойствах, что очень важно для проверки результатов построения годографа по точным формулам разложения (9.49). При использовании формулы (9.49) необходимо также представить экспоненту по формуле Эйлера.

Пример 1. Построить годограф разомкнутой ИСАУ, передаточная функция приведённой непрерывной части, которой имеет вид:

$$W(p) = \frac{k}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}.$$

Определяем

$$W^*(p) = \frac{k}{T_1 - T_2} \left[\frac{e^{-T/T_1} - e^{-T/T_2}}{(e^{pT} - e^{-T/T_1})(e^{pT} - e^{-T/T_2})} \right].$$

Тогда для точного построения годографа:

$$W_T^*(j\omega) = \frac{k}{T_1 - T_2} \left[\frac{e^{-T/T_1} - e^{-T/T_2}}{\left(e^{j\omega T} - e^{-T/T_1} \right) \left(e^{j\omega T} - e^{-T/T_2} \right)} \right]$$

для приближенного построения годографа:

$$W_{np}^*(j\omega) \cong \frac{1}{T} \left[\frac{k}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)} + \frac{k}{(1 + j(\omega - \omega_0)T_1)(1 + j(\omega - \omega_0)T_2)} \right].$$

Пример 2. Передаточная функция приведенной непрерывной части имеет вид

$$W(p) = W_\phi(p)W_n(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p} \frac{k}{p(1 + pT_1)}$$

Определяем

$$W^*(p) = \frac{kT}{e^{pT} - 1} - \frac{kT \cdot (1 - e^{-T/T_1})}{e^{pT} - e^{-T/T_1}}$$

Тогда для точного построения годографа:

$$W_T^*(j\omega) = \frac{kT}{e^{j\omega T} - 1} - \frac{kT(1 - e^{-T/T_1})}{e^{j\omega T} - e^{-T/T_1}}.$$

для приближенного построения годографа:

$$W_{np}^*(j\omega) \cong \frac{k(1 - e^{-j\omega T})}{(j\omega)^2(1 + j\omega T_1)} + \frac{k(1 - e^{-j(\omega - \omega_0)T})}{(j(\omega - \omega_0))^2(1 + j(\omega - \omega_0)T_1)}$$

На рис. 9.12.а,б соответственно представлены годографы рассмотренных в примере 1 разомкнутых ИСАУ. При выбранном масштабе разница между точным и приближенным годографами не заметна.

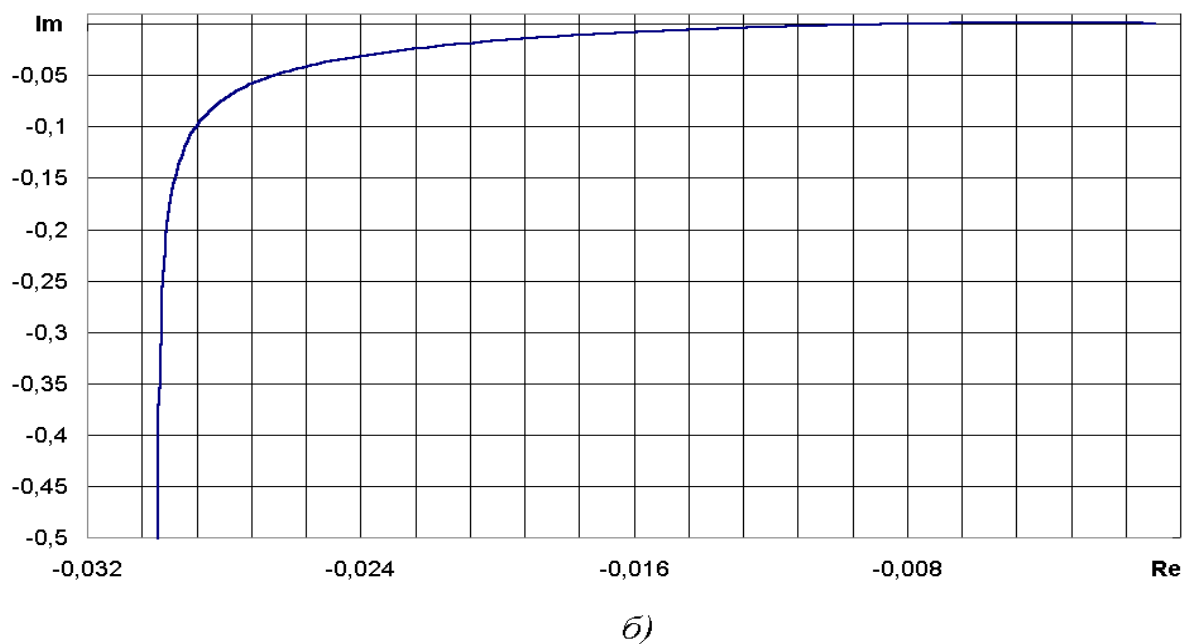
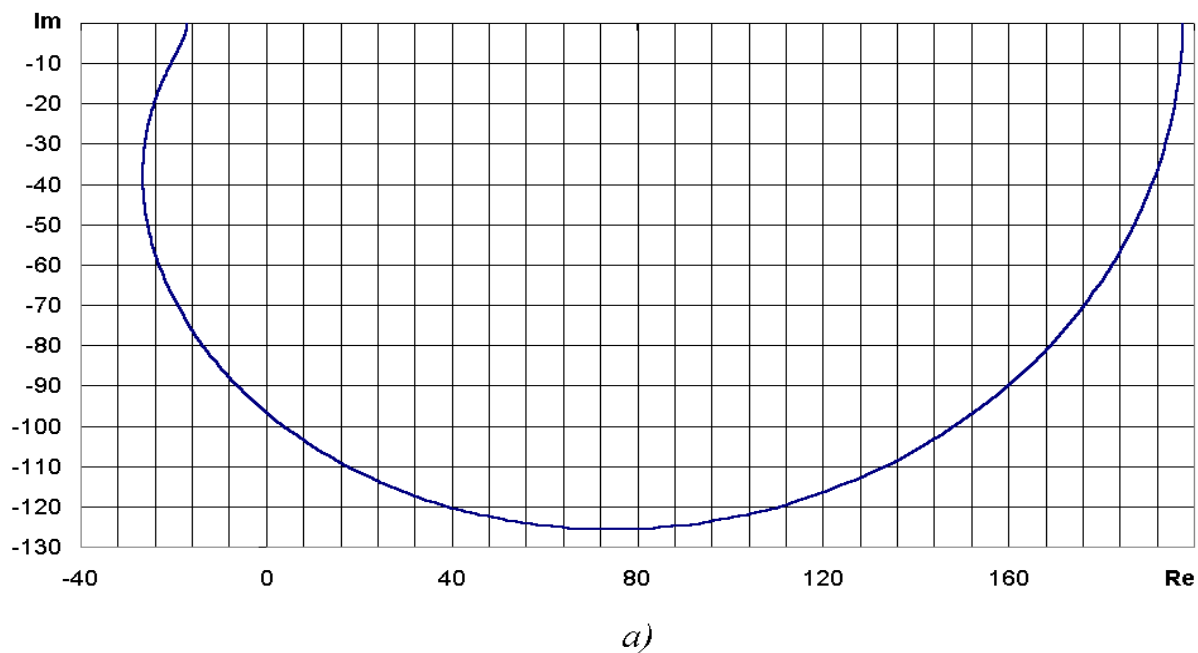


Рис.9.12. Годографы импульсных систем

При исследовании непрерывных систем большое распространение получили асимптотические логарифмические частотные характеристики (ЛАЧХ) разомкнутой системы, так как строятся они значительно проще, чем годографы и обеспечивают необходимую информацию о динамических свойствах системы. Однако непосредственное построение ЛАЧХ ИСАУ по $w^*(j\omega)$ не может быть выполнено теми же приемами, что и построение ЛАЧХ непрерывной системы. Это связано с тем, что характеристика $w^*(j\omega)$ не является дробно-рациональной функцией по отношению к $j\omega$ и, кроме того, она периодическая и строится в ограниченном

диапазоне частот $0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2}$. Для того, чтобы использовать обычную методику построения ЛАЧХ, нужно выполнить отображение отрезка мнимой оси $-\pi \leq \omega T \leq \pi$ $\left(-\frac{\omega_0}{2} < \omega < \frac{\omega_0}{2}\right)$ на всю мнимую ось, причем так, чтобы функция $W^*(j\omega)$ стала дробно-рациональной. Необходимое отображение можно реализовать с помощью билинейного преобразования:

$$z = \frac{1 + v}{1 - v} \quad z = e^{j\omega T} \quad (9.53)$$

Переход от оператора $e^{j\omega T}$ к оператору z переводит отображение отрезка мнимой оси $-\pi \leq \omega T \leq \pi$ $\left(-\frac{\omega_0}{2} < \omega < \frac{\omega_0}{2}\right)$ в окружность с единичным радиусом на плоскости комплексной переменной z (рис 9.12,а). На основании (8.53) представим функцию

$$v = \frac{z - 1}{z + 1}, \quad (9.54)$$

которая является дробно-линейной и в соответствии со свойствами дробно-линейных преобразований [1] обеспечивает взаимно однозначное преобразование во всех точках расширенной плоскости комплексной переменной z , за исключением точки $z = -1$. Окружность с единичным радиусом $|z| = 1$, проходящая через эту точку, отображается в мнимую ось:

$$v = \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = j \frac{\sin \omega T}{1 + \cos \omega T} = j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}. \quad (9.55)$$

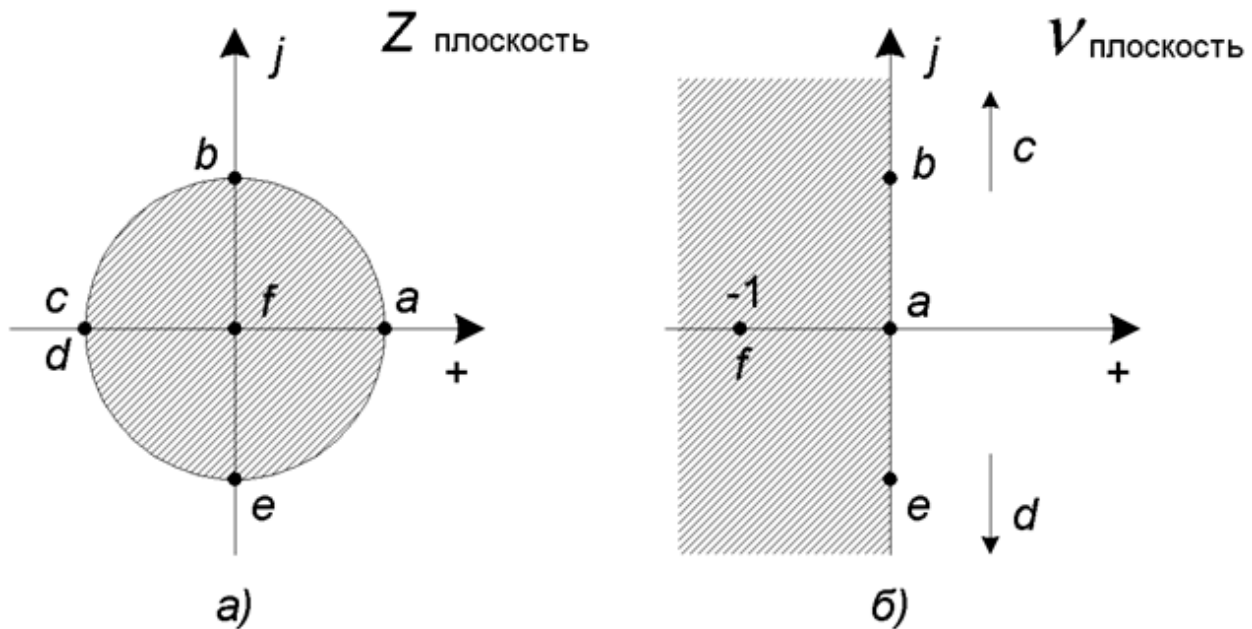


Рис.9.13. Преобразование плоскости Z в плоскость V

При изменении ω от $-\frac{\omega_0}{2}$ до $\frac{\omega_0}{2}$ (или ωT от $-\pi$ до π) значение переменной ν изменяется от $-j\infty$ до $j\infty$, т. е. имеем мнимую ось. Все точки, лежащие внутри окружности $|z| = 1$, отображаются в левую часть комплексной плоскости ν , а все точки, лежащие с внешней стороны окружности, – в правую полуплоскость плоскости ν (рис. 9.13,б).

Введем понятие псевдочастоты:

$$\omega^* = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}, \quad (9.56)$$

тогда $\nu = j \frac{T}{2} \omega^*$.

При изменении ω от $-\frac{\omega_0}{2}$ до $\frac{\omega_0}{2}$ псевдочастота изменяется от $-\infty$ до ∞ , причём при малых значениях ω $\omega^* \approx \frac{2}{T} \frac{\omega T}{2} \approx \omega$, т. е. численные значения частоты ω и псевдочастоты практически совпадают.

Если в импульсной передаточной функции $W^*(z) = W^*(e^{pT})$ провести подстановку (9.54), то можно получить передаточную функцию системы относительно переменной ν .

Пример 3. Имеем импульсную передаточную функцию аperiodического звена:

$$W^*(p) = k \frac{1 - e^{-T/T_1}}{e^{pT} - e^{-T/T_1}}.$$

Реализуем подстановку $e^{pT} = \frac{1+\nu}{1-\nu}$ и получаем

$$W^*(\nu) = k \frac{1-\nu}{1+\nu\tau}, \text{ где } \tau = \frac{1+e^{-T/T_1}}{1-e^{-T/T_1}} = \operatorname{cth} \frac{T}{2T_1}.$$

Как следует из примера и характера подстановки (9.54), $W^*(\nu)$ является дробно-рациональной функцией переменной ν . Если в формулу для $W^*(\nu)$ подставить $\nu = j\frac{T}{2}\omega^*$, то получим амплитудно-фазовую характеристику относительно псевдочастоты, которая по своему характеру не отличается от частотных характеристик непрерывных систем. По полученному выражению $W^*(j\omega^*)$ можно определить амплитудную и фазовую характеристики:

$$A^*(\omega^*) = |W^*(j\omega^*)|; \quad \varphi^*(\omega^*) = \arg W^*(j\omega^*). \quad (9.57)$$

На основании аналитического выражения для $A^*(\omega^*)$ легко строятся логарифмические амплитудно-частотные характеристики. В качестве примера рассмотрим построение ЛАЧХ для разомкнутой ИСАУ, рассмотренной в примере 3.

В выражении для функции $W^*(\nu)$ сделаем замену $\nu = j\frac{T}{2}\omega^*$ и получим

$$W^*(j\omega^*) = k \frac{1 - j\frac{T}{2}\omega^*}{1 + j\omega^*\tau_1},$$

$$\text{где } \tau_1 = \tau \frac{T}{2}.$$

Логарифмические частотные характеристики представлены на рис. 9.14. Аналитические выражения для них имеют вид:

$$L(\omega^*) = 20 \lg |W^*(j\omega^*)| = 20 \lg k + 20 \lg \left| 1 - j\frac{T}{2}\omega^* \right| - 20 \lg |1 + j\omega^*\tau_1|; \\ \varphi(\omega^*) = \operatorname{arctg} \omega^* \frac{T}{2} - \operatorname{arctg} \omega^* \tau_1.$$

Амплитудная логарифмическая характеристика имеет две точки излома: $\omega_1^* = \frac{1}{\tau_1}$ и

$$\omega_2^* = \frac{2}{T}. \text{ Если } T < 2T_1, \text{ то } \operatorname{cth} \frac{T}{2T_1} \approx \frac{2T_1}{T} \text{ и, следовательно, } \tau_1 \approx T_1.$$

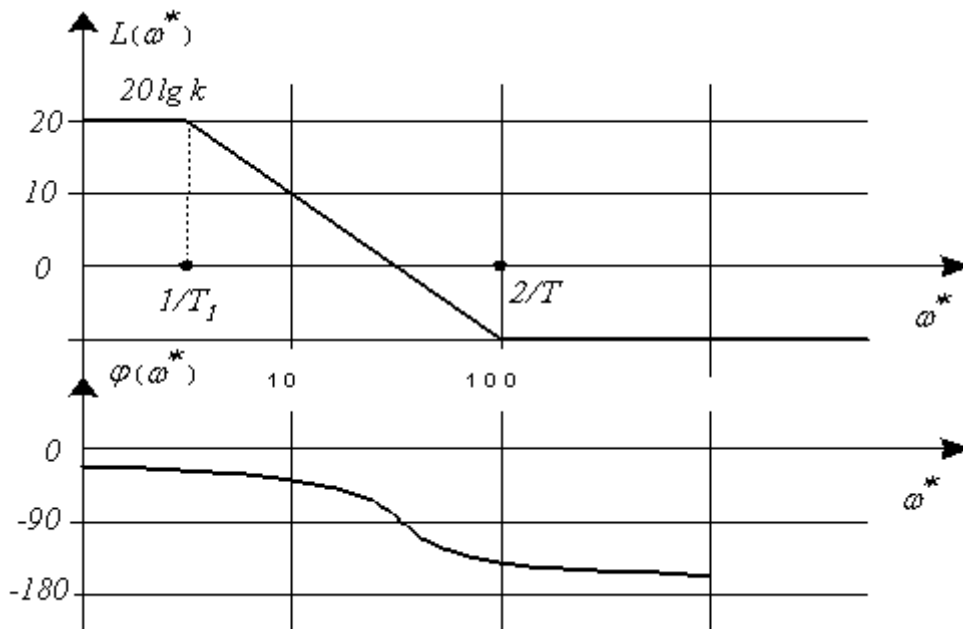


Рис. 9.14. Логарифмическая амплитудная частотная характеристика дискретного аperiodического звена

Как видно из рис. 9.14, в области частот $\omega^* < \frac{2}{T}$ логарифмические частотные характеристики импульсной системы совпадают с частотными характеристиками ее непрерывной части. В области высоких частот фильтрующие свойства аperiodического звена практически не проявляются. Можно заметить, что при увеличении периода квантования T область, где проявляются фильтрующие свойства, становится меньше.

9.8. Условия, когда импульсную систему автоматического управления можно исследовать методами непрерывных систем

Рассмотрим условия, когда импульсную систему автоматического управления можно исследовать методами непрерывных систем, на примере простой типовой структуры ИСАУ (см. рис. 9.4). В этой системе в канале между идеальным импульсным элементом и ее непрерывной частью действует дискретный сигнал, который получается в результате квантования по времени непрерывного сигнала, поступающего на вход ИЭ. Между тем в результате фильтрующих свойств непрерывной части системы выходной сигнал ИСАУ $x_{вых}(t)$ (рис. 9.4) является непрерывным. В общем случае этот непрерывный сигнал будет существенно отличаться от сигнала на выходе непрерывной части системы $x_{вых}(t)$ при отсутствии ИЭ, т. е. на выходе непрерывной САУ с аналогичным математическим описанием. Очевидно, степень отличия будет зависеть от периода квантования T и динамических свойств приведенной непрерывной части системы, которые достаточно информативно представляются частотной характеристикой. При малых значениях T и

сильных фильтрующих свойствах $W_{\Pi}(j\omega)$ отличие может быть столь незначительным, что эффект дискретизации сигнала в одном канале системы (между ИЭ и НЧ, рис. 9.4) практически не скажется на форме сигналов в остальных каналах системы. В этом случае динамические процессы в ИСАУ будут совпадать с динамическими процессами аналогичной непрерывной системы. Это совпадение дает право исследовать ИСАУ методами непрерывных систем. Надо полагать, что совпадение форм временных сигналов означает совпадение форм их амплитудно-частотных характеристик $|X_{\text{вх}}(j\omega)|$ и $|X_{\text{вх}}^*(j\omega)|$. На основании анализа амплитудно-частотных характеристик выходного сигнала в непрерывной САУ $|X_{\text{вых}}(j\omega)|$ и в импульсной системе $|X_{\text{вых}}^*(j\omega)|$ можно вывести соотношения, позволяющие судить о близости динамических свойств непрерывной и импульсной САУ, у которых совпадают непрерывные части.

На рис. 9.14 показана амплитудно-частотная характеристика входного сигнала $|X_{\text{вх}}(j\omega)|$ и показан приближенный вид амплитудно-частотного спектра выходного сигнала:

$$|X_{\text{вых}}(j\omega)| = |W_{\Pi}(j\omega)| |X_{\text{вх}}(j\omega)|.$$

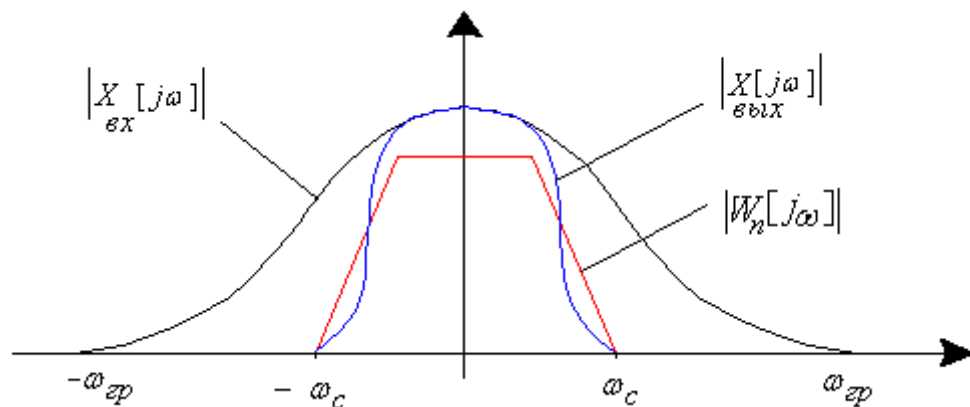


Рис. 9.14. Частотные характеристики входного, выходного сигналов и непрерывной части импульсной системы

На рисунке приняты следующие обозначения: $\omega_{\text{гр}}$ - граничная частота спектра входного сигнала; $\omega_{\text{с}}$ - максимальная частота пропускания фильтра $W_{\Pi}(j\omega)$. Построение $|X_{\text{вых}}(j\omega)|$ проведено в предположении, что $|W_{\Pi}(j0)| = 1$.

На рис. 9.15 проведено построение спектра $|X_{\text{вых}}^*(j\omega)|$ на основании выражения

$$|X_{\text{вх}}^*(j\omega)| = |W_{\pi}(j\omega)| |X_{\text{вх}}^*(j\omega)|.$$

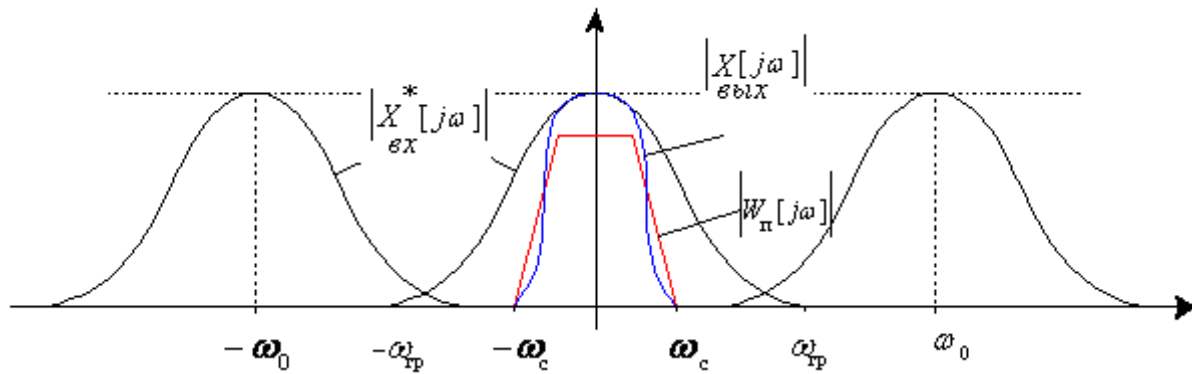


Рис.9.15. Спектр $X_{\text{вх}}^*(j\omega)$

Из этого рисунка видно, что в спектральной характеристике $|X_{\text{вх}}^*(j\omega)|$ отсутствуют частоты транспонированных составляющих спектра $|X_{\text{вх}}^*(j\omega)|$. Следовательно, спектры $|X_{\text{вх}}^*(j\omega)|$ при наличии в системе ИЭ и без него будут совпадать. Условием этого совпадения является соотношение:

$$\omega_0 \geq \omega_{\text{гр}} + \omega_c.$$

9.9. Выводы

В главе рассматриваются импульсные системы, полученные при использовании импульсного элемента, осуществляющего амплитудно-импульсную модуляцию сигнала на входе системы. При описании такой системы используется дискретное преобразование Лапласа (**D** – преобразование), для которого в главе получено выражение и выведены его свойства. **D** – преобразование позволяет описывать импульсную систему в дискретные моменты времени ($l = 0, 1, 2, \dots$).

По аналогии с непрерывными системами получено описание систем дискретными передаточными функциями и представление импульсных систем (ИСАУ) в виде структурных схем, как соединение дискретных передаточных функций, для которых получены некоторые правила преобразования и приведены приемы составления этих схем.

При наличии структурных схем приводятся правила получения временных сигналов с помощью разностных уравнений и разложения в ряд делением числителя

на знаменатель в дискретном представлении сигнала. Приведены приемы для построения временных характеристик системы (весовой и переходной функций).

Показано, что спектр дискретного сигнала представляет собой наложение спектров непрерывных сигналов и при малом T его после фильтрации можно восстановить. Приводится формула для приближенного построения амплитудно-фазовой (АФХ) частотной характеристики дискретной системы по АФХ непрерывной системы.

9.10. Вопросы

1. Какой вид может иметь сигнал между точками съема данных и от чего он зависит?
2. Выведите формулу дискретного преобразования Лапласа от единичной ступенчатой функции, экспоненты, линейно возрастающего сигнала.
3. Чем различаются D -преобразование Лапласа от \bar{D} -преобразование и каковы свойства последнего?
4. Что такое дискретная передаточная функция и какой вид она имеет для выходного сигнала замкнутой системы и сигнала ошибки?
5. Какие преобразования можно проводить в непрерывной части структурной схемы импульсной системы?
6. Как получить дискретную передаточную функцию из непрерывной?
7. Какие процессы могут быть описаны конечными разностями?
8. Что такое разностное уравнение и как оно используется для получения временных сигналов в импульсной системе. Пример.
9. Можно ли получить сигнал в аналитической форме делением числителя на знаменатель в его дискретном представлении?
10. Какова связь спектров дискретного и непрерывного сигналов, можно ли восстановить непрерывный сигнал по дискретному и каковы условия его восстановления?
11. От чего зависит количество членов разложения, которые необходимо учитывать в формуле, связывающей дискретную передаточную функцию с непрерывной?
12. В каких пределах по частоте строятся логарифмические амплитудные частотные характеристики импульсных систем?

9.11. Задания

- 1) Вычисление дискретных изображений по Лапласу от непрерывных функций.
Найти дискретное изображение по Лапласу от функций, заданных в таблице:

$X(t) \quad (t \geq 0)$	$X(mT) \quad (m \geq 0)$	$X^*(p)$
$\delta(t)$	$\delta(mT)$	
$1(t)$	$1(mT)$	

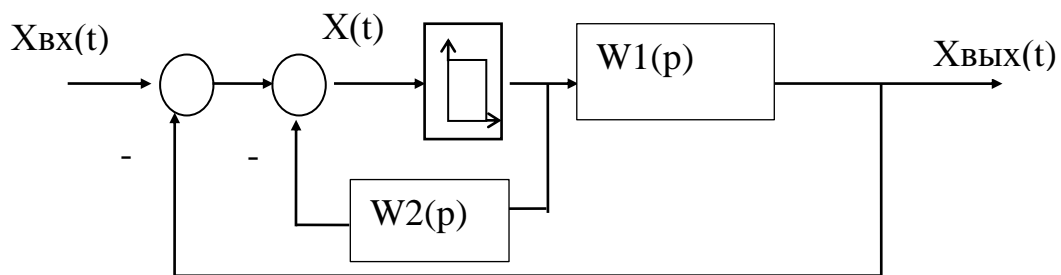
T	mT	
$e^{-\alpha t}$	$e^{-\alpha mT}$	
$e^{\alpha t}$	$e^{\alpha mT}$	
$e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$	$e^{-\alpha mT} \cdot \sin(\omega mT + \varphi)$	
$e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$	$e^{-\alpha mT} \cdot \cos(\omega mT + \varphi)$	

2) Найти начальные и конечные значения сигнала по его дискретному изображению

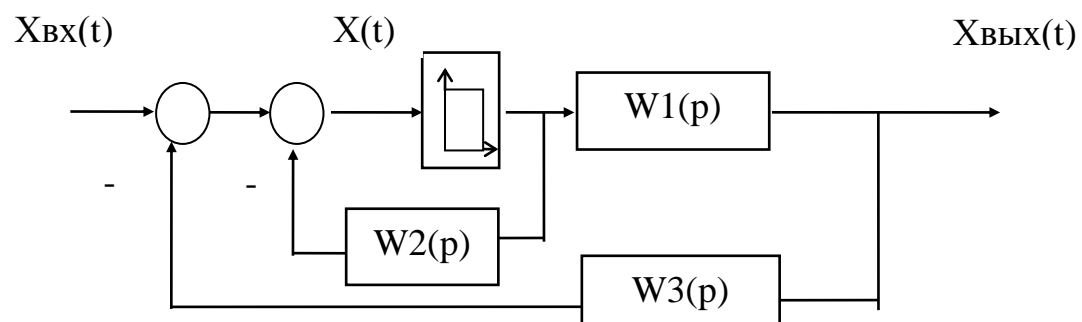
$X^*(p) = \frac{b_0 + b_1 e^{-pT} + b_2 e^{-2pT} + \dots + b_m e^{-mpT}}{1 + a_1 e^{-pT} + a_2 e^{-2pT} + \dots + a_n e^{-npT}}$ <p>m=1, n=1, b₀=1, b₁=0.3, a₁=-0.85.</p>	$x(0)=?$ $x(\infty)=?$
$X^*(p) = \frac{1 + 0.3 e^{-pT}}{1 - 1.85 e^{-pT} + 0.85 e^{-2pT}}$	$x(0)=?$ $x(\infty)=?$
$X^*(p) = \frac{b_0 + b_1 e^{-pT} + b_2 e^{-2pT} + \dots + b_m e^{-mpT}}{1 + a_1 e^{-pT} + a_2 e^{-2pT} + \dots + a_n e^{-npT}}$ <p>m=1; n=1; b₀=1; b₁=0.5; a₁=-0.7;</p>	$x(0)=?$ $x(\infty)=?$
$X^*(p) = \frac{1 + 0.5 e^{-pT}}{(1 - 0.7 e^{-pT})(1 - e^{-pT})}$	$x(0)=?$ $x(\infty)=?$
$X^*(p) = \frac{b_0 + b_1 e^{-pT} + b_2 e^{-2pT} + \dots + b_m e^{-mpT}}{1 + a_1 e^{-pT} + a_2 e^{-2pT} + \dots + a_n e^{-npT}}$ <p>m=2; n=2; b₀=1; b₁=0.5; b₂=0.7; a₁=-0.7; a₂=0.8</p>	$x(0)=?$ $x(\infty)=?$
$X^*(p) = \frac{b_0 + b_1 e^{-pT} + b_2 e^{-2pT} + \dots + b_m e^{-mpT}}{1 + a_1 e^{-pT} + a_2 e^{-2pT} + \dots + a_n e^{-npT}}$ <p>m=2; n=2; b₀=1; b₁=0.5; b₂=0.7; a₁=-1.7; a₂=0.7</p>	$x(0)=?$ $x(\infty)=?$
$X^*(p) = \frac{1}{(1 - 0.75 e^{-pT})(1 - e^{-pT})}$	$x(0)=?$ $x(\infty)=?$
$X^*(p) = \frac{5 - e^{-pT}}{(1 - 1.95 e^{-pT} + 0.95 e^{-2pT})}$	$x(0)=?$ $x(\infty)=?$

3) Преобразовать структурную схему и найти выражения для сигналов $X^*(p)$, $X_{\text{ВЫХ}}^*(p)$

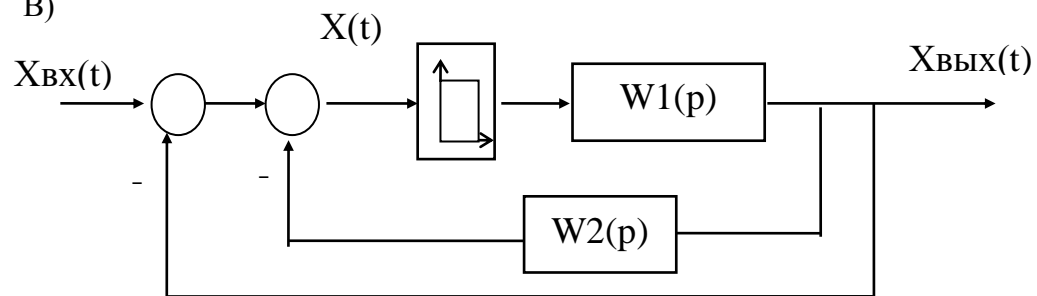
А)



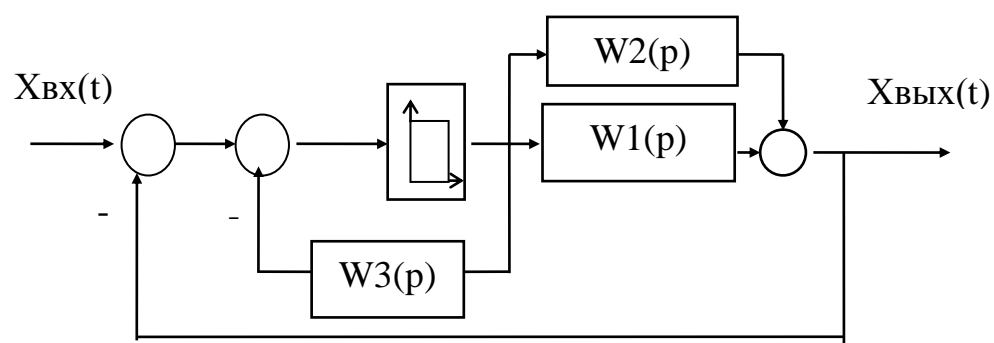
Б)



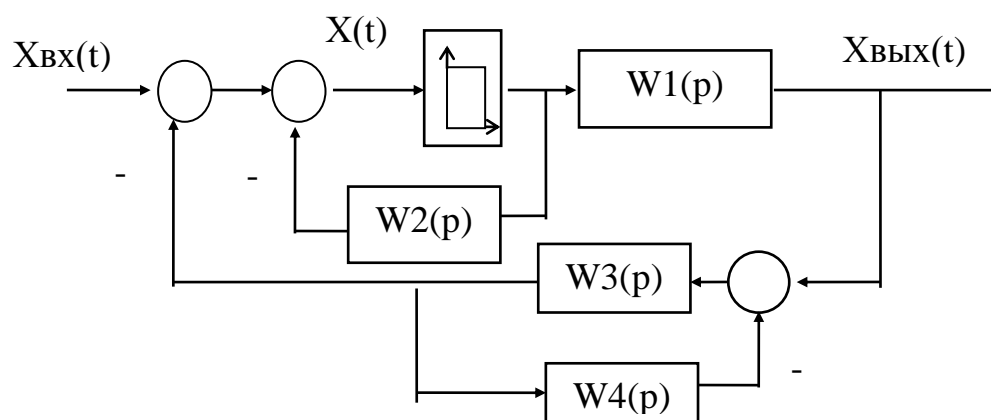
В)



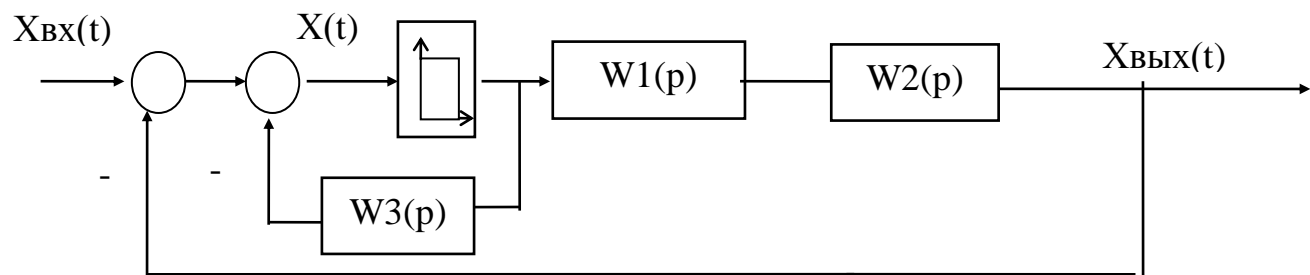
Г)



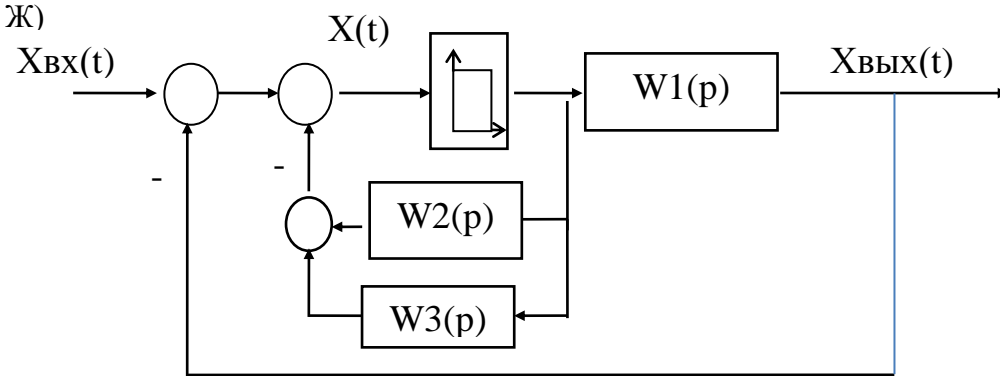
Д)



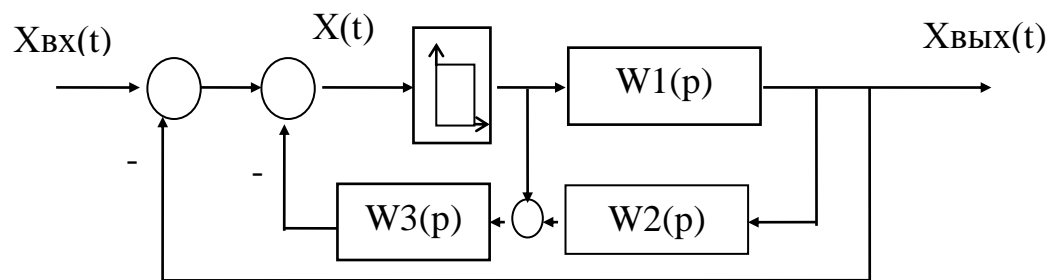
Е)



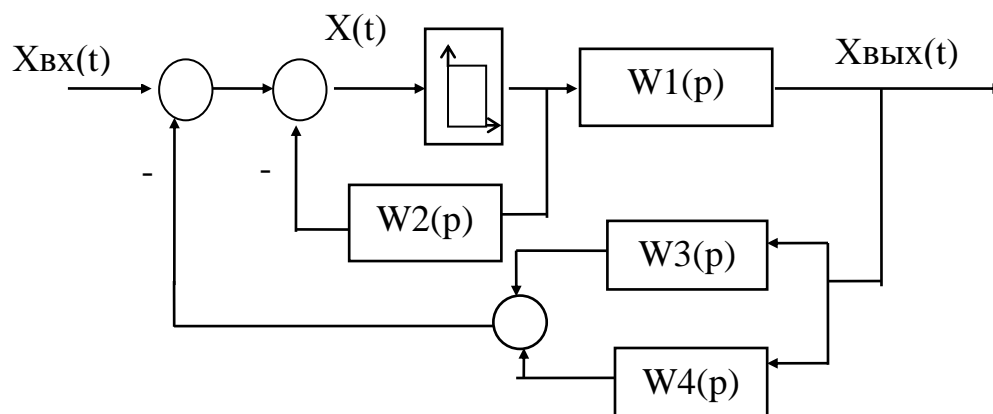
Ж)



З)



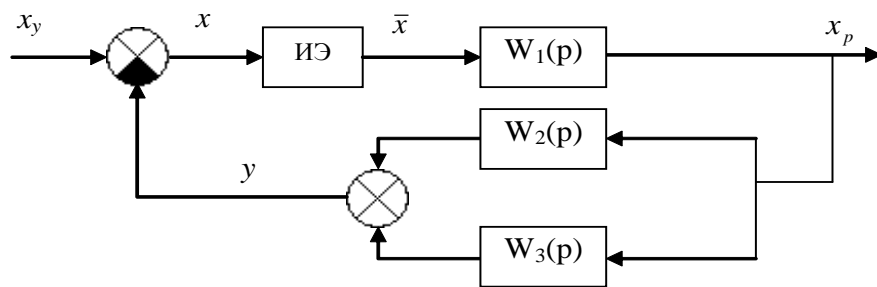
И)



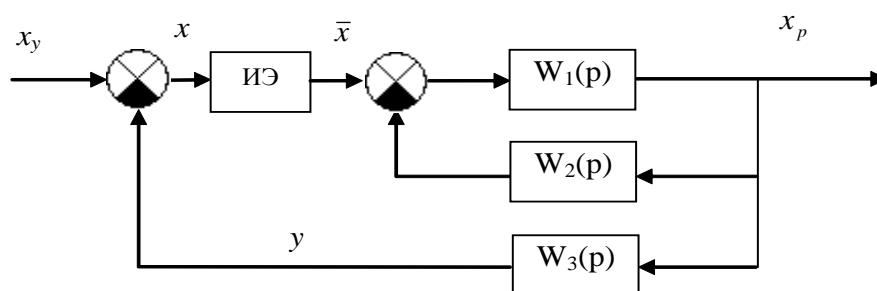
- 4) Найти дискретную передаточную функцию по непрерывной передаточной функции (формирователь импульсов считать идеальным):

$W(p) = \frac{10}{p(1+5p)}, \quad T = 0,5$	$W(p) = \frac{1}{p^2(1+5p)}, \quad T = 0,5$
$W(p) = \frac{10}{(1+2p)(1+5p)}, \quad T = 0,2$	$W(p) = \frac{10e^{-pT}}{p(1+5p)}, \quad T = 0,5$
$W(p) = \frac{15p}{(1+3p)(1+5p)}, \quad T = 0,1$	$W(p) = \frac{10p}{(1+2p)(1+5p)}, \quad T = 0,2$
$W(p) = \frac{10e^{-2pT}}{(1+2p)(1+5p)}, \quad T = 0,2$	$W(p) = \frac{5e^{-pT}}{p^2(1+3p)}, \quad T = 0,1$
$W(p) = \frac{10(1+p)e^{-pT}}{p(1+5p)}, \quad T = 0,1$	$W(p) = \frac{10(1+p)}{p(1+5p)}, \quad T = 0,1$

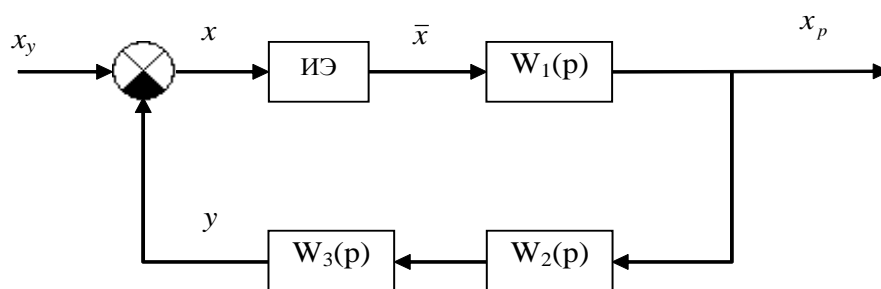
- 5) Для импульсных систем с заданными структурными схемами и дискретными передаточными функциями найти вид сигналов $y(mT)$ ($T=0.01$)



а.)

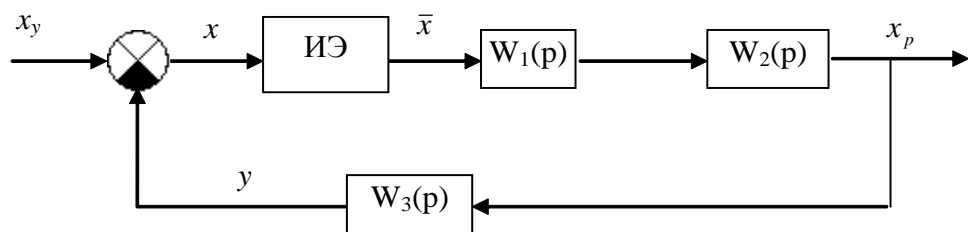


б.)

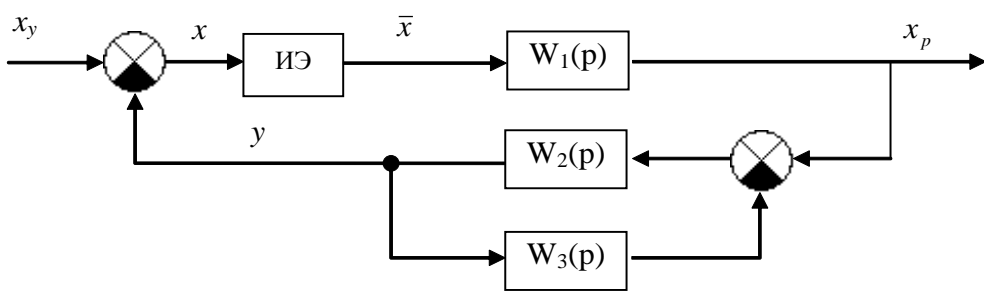


в.)

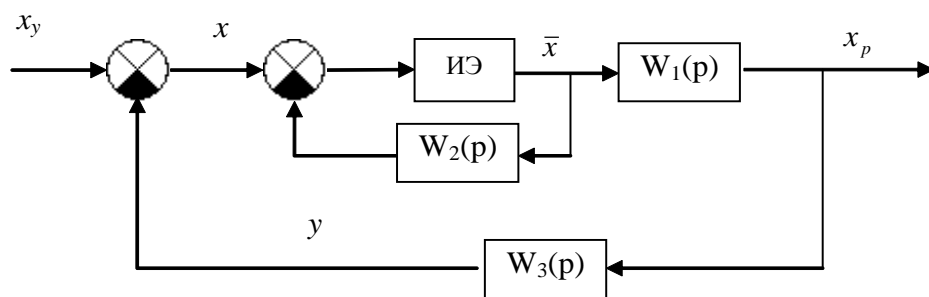
Рис.1. Структурные схемы импульсных систем



а.)



б.)

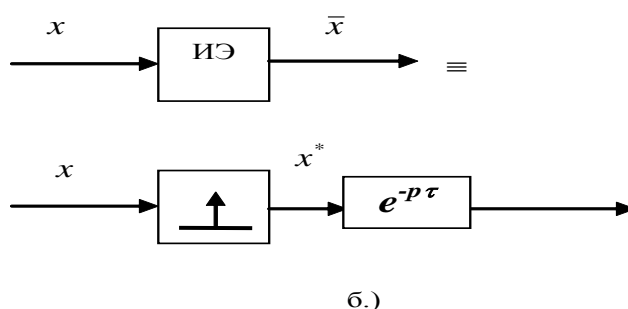
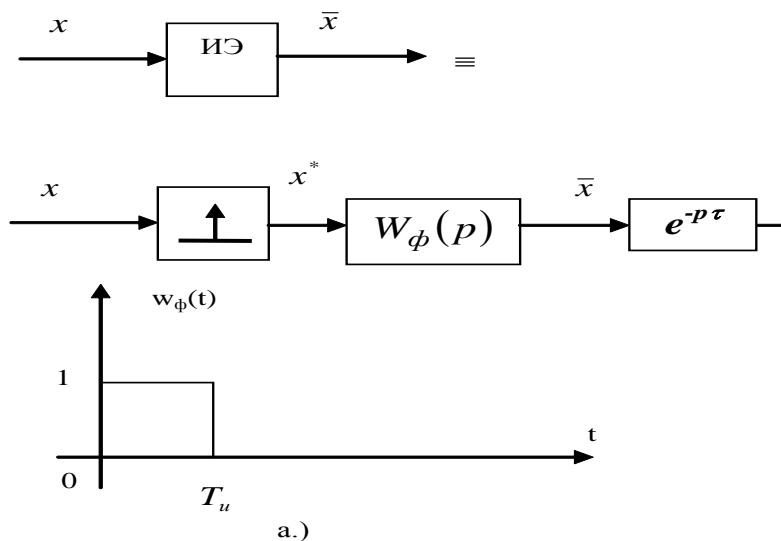


в.)

Рис.2. Структурные схемы импульсных систем

№ п/п	Схема САУ № рис.	Т _{ип} ИЭ		Передаточные функции звеньев, входящих в состав САУ		
		№	τ	W ₁ (p)	W ₂ (p)	W ₃ (p)
1	1а	А	0	$\frac{2}{p}$	$\frac{10}{1 + 0.8 \cdot p}$	$\frac{6}{1 + 1.5 \cdot p}$
2	1а	А	Т	$\frac{7 \cdot (1 + 0.1 \cdot p)}{1 + 0.3 \cdot p}$	10	$\frac{2}{p}$
3	1б	Б	0	$\frac{1.5}{p}$	10	$\frac{2}{1 + 0.2 \cdot p}$
4	1б	Б	Т	$\frac{2}{p}$	$\frac{3}{1 + 0.1 \cdot p}$	$\frac{5}{1 + p}$
5	1в	А	0	$\frac{7}{p}$	2	$\frac{10 \cdot (1 + p)}{1 + 5 \cdot p}$
6	1в	А	Т	$\frac{7}{1 + p}$	$\frac{10 \cdot (1 + 2 \cdot p)}{1 + 3 \cdot p}$	$\frac{3}{p}$
7	2а	Б	0	$\frac{5 \cdot (1 + 0.7 \cdot p)}{p}$	2	$\frac{10}{1 + 0.7 \cdot p}$
8	2а	Б	Т	$\frac{5}{p}$	7	$\frac{10 \cdot (1 + 0.8 \cdot p)}{1 + 0.7 \cdot p}$
9	2б	А	0	$\frac{5 \cdot (1 + 0.1 \cdot p)}{1 + 0.5 \cdot p}$	10	$\frac{2}{p}$
10	2б	А	Т	$\frac{1}{1 + p}$	10	$\frac{5}{1 + 5 \cdot p}$
11	2в	Б	0	$\frac{5 \cdot (1 + 0.5 \cdot p)}{p}$	2	$\frac{10}{1 + 2 \cdot p}$
12	2в	Б	Т	$\frac{5}{1 + 0.1 \cdot p}$	2	$\frac{2}{p}$

Схемы замещения импульсного элемента



- 6) Для приведенного выше задания построить годографы (АФХ) дискретных разомкнутых систем и проверить их по приближенной формуле (8.46).
- 7) Для приведенного выше задания построить логарифмические амплитудные частотные характеристики разомкнутых систем (ЛАЧХ).

9.12. Практикум по главе 9

- 1) Найти дискретное преобразование Лапласа от функции: $\cos(\omega t + \varphi)$

Представим $\cos(\omega t + \varphi)$ как действительную часть от экспоненты, т.е. в виде:

$$\operatorname{Re}\{e^{j(\omega t + \varphi)}\}.$$

Тогда для выражения $\cos(\omega mT + \varphi)$ легко записать $\operatorname{Re}\{e^{j(\omega mT + \varphi)}\}$, из чего следует, что дискретное изображение по Лапласу можно будет получить как действительную часть преобразования по Лапласу от экспоненты, т.е.

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} e^{j(\omega mT + \varphi)} e^{-pmT} &= e^{j\varphi} \sum_{m=0}^{\infty} e^{j\omega mT} e^{-pmT} = e^{j\varphi} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-mT(p - j\omega)} = \frac{\cos\varphi + j\sin\varphi}{1 - e^{-pT} e^{j\omega T}} \\ &= \frac{\cos\varphi + j\sin\varphi}{1 - e^{-pT} \cos\omega T - je^{-pT} \sin\omega T} = \\ &= \frac{(\cos\varphi + j\sin\varphi)(1 - e^{-pT} \cos\omega T + je^{-pT} \sin\omega T)}{(1 - e^{-pT} \cos\omega T)^2 + (e^{-pT} \sin\omega T)^2} \end{aligned}$$

Беря в последнем выражении действительную часть, получаем:

$$D\{\cos(\omega t + \varphi)\} = \frac{\cos\varphi - e^{-pT} \cos\omega T \cdot \cos\varphi - e^{-pT} \sin\omega T \cdot \sin\varphi}{1 - 2e^{-pT} \cos\omega T + (e^{-pT} \cos\omega T)^2 + (e^{-pT} \sin\omega T)^2} = \frac{\cos\varphi - e^{-pT} (\cos\omega T - \varphi)}{1 - 2e^{-pT} \cos\omega T + e^{-2pT}}$$

- 2) Найти начальные и конечные значения сигнала по его дискретному изображению

$$X^*(p) = \frac{b_0 + b_1 e^{-pT} + b_2 e^{-2pT} + \dots + b_m e^{-mpT}}{1 + a_1 e^{-pT} + a_2 e^{-2pT} + \dots + a_n e^{-npT}}, \text{ где } m=n=2$$

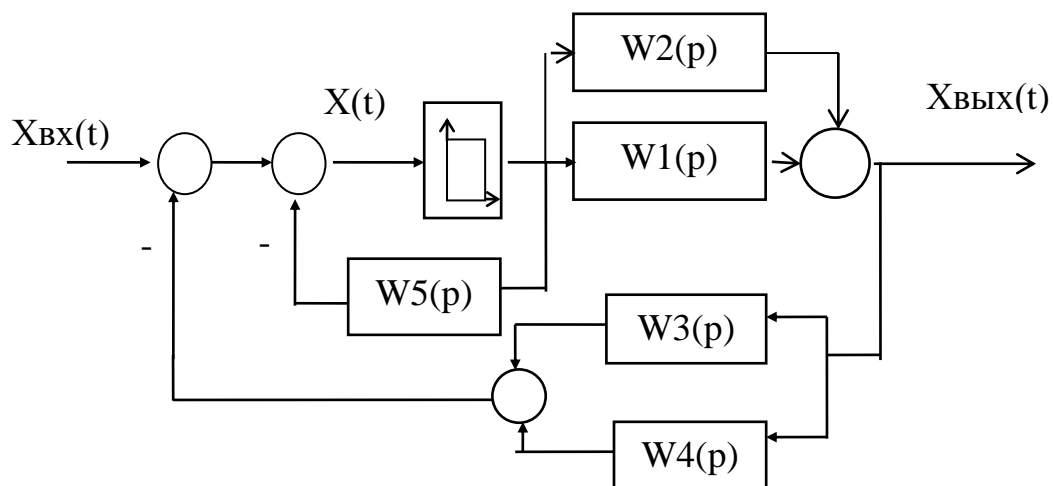
$$b_0=2, \quad b_1=1,5, \quad b_2=2, \quad a_1=-1,5, \quad a_2=0,9$$

Вычисления проведем по формулам предельного перехода (9.14) и (9.15):

$$X(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} (1 - e^{-pT}) \frac{2 + 1,5e^{-pT} + 2e^{-2pT}}{1 - 1,5e^{-pT} + 0,9e^{-2pT}} = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{pT} - 1}{e^{pT}} \right) \frac{2e^{2pT} + 1,5e^{pT} + 2}{e^{2pT} - 1,5e^{pT} + 0,9} = 2$$

$$X(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} (1 - e^{-pT}) \frac{2 + 1,5e^{-pT} + 2e^{-2pT}}{1 - 1,5e^{-pT} + 0,9e^{-2pT}} = 0$$

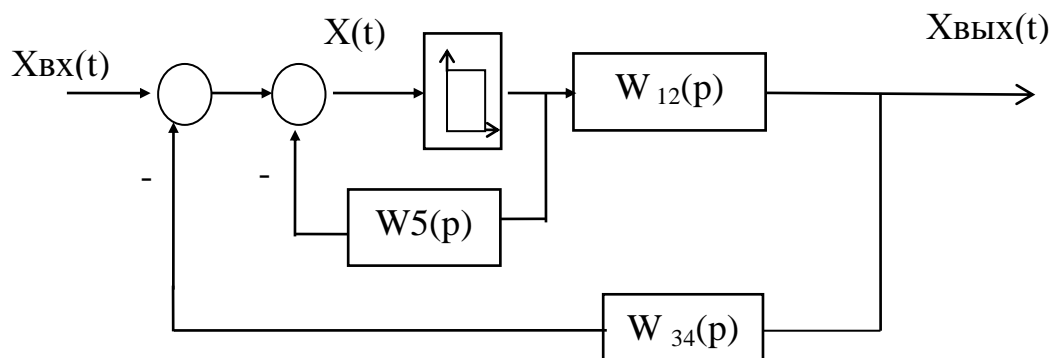
- 3) Преобразовать структурную схему и найти выражения для сигналов $X^*(p)$, $X_{\text{ВЫХ}}^*(p)$



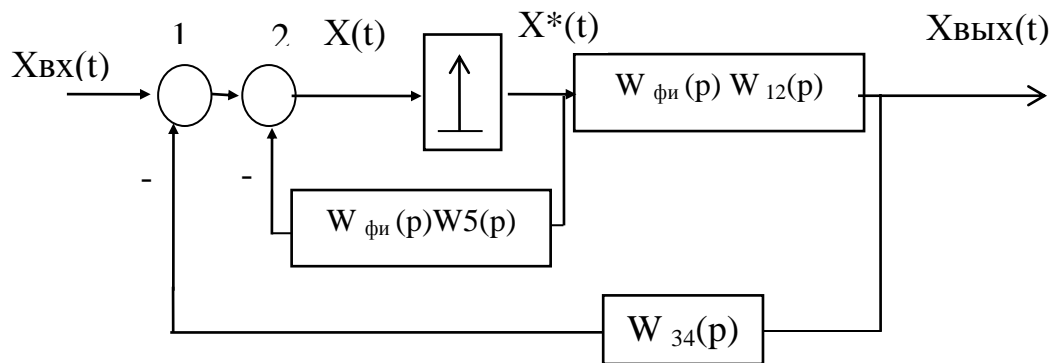
Прежде чем записывать соотношения между сигналами найдем передаточные функции параллельных соединений и заменим их подходящими передаточными функциями

$$W_{12}(p) = W1(p) + W2(p)$$

$$W_{34}(p) = W3(p) + W4(p)$$



Представим импульсный элемент соединением идеального импульсного элемента с формирователем импульсов и перенесем формирователь через узел так, как показано на рисунке:



Запишем равенства относительно сигналов $X(t)$ и $X^*(t)$ в изображениях по Лапласу:

$$X(p) = X_{вх}(p) - W_{34}(p) W_{фи}(p) W_{12}(p) X^*(p) - W_{фи}(p) W_5(p) X^*(p)$$

Преобразуя это выражение, применяя \bar{D} -преобразование легко получить:

$$X^*(p) = X_{вх}^*(p) - (W_{34}(p) W_{фи}(p) W_{12}(p))^* X^*(p) - (W_{фи}(p) W_5(p))^* X^*(p)$$

Откуда следует, что

$$X^*(p) = \frac{X_{вх}^*(p)}{1 + (W_{34}(p) W_{фи}(p) W_{12}(p))^* + (W_{фи}(p) W_5(p))^*}$$

Из схемы следует, что $X_{вых}^*(p) = (W_{фи}(p) \cdot W_{12}(p))^* \cdot X^*(p)$, откуда следует, что

$$X_{вых}^*(p) = \frac{(W_{фи}(p) \cdot W_{12}(p))^*}{1 + (W_{34}(p) W_{фи}(p) W_{12}(p))^* + (W_{фи}(p) W_5(p))^*} \cdot X_{вх}^*(p)$$

- 4) Найти дискретную передаточную функцию при идеальном формирователе импульсов для

$$W(p) = \frac{2}{p(1+p)(1+5p)} \quad (T=0.1)$$

Определять дискретную передаточную функцию будем по схеме, представленной в разделе 8.4, для чего найдем первоначально весовую функцию системы в соответствии с формулой

$$\text{разложения: } w(t) = \sum_{i=1}^n \frac{B(p_i)}{A'(p_i)} e^{p_i t}, \quad n=3, \quad B(p)=2, \quad A(p)=p(1+p)(1+5p)=5p^3+6p^2+p,$$

$$A'(p)=15p^2+12p+1, \quad p=0, \quad p_1=-1, \quad p_2=-0.2.$$

$$\text{Вычислим } w(t) = \frac{2}{1} e^{0 \cdot t} + \frac{2}{4} e^{-t} + \frac{2}{-0.8} e^{-0.2t} = 2 - 2.5e^{-0.2t} + 0.5e^{-t}.$$

$$\text{Тогда } w[mT] = (2 - 2.5e^{-0.2mT} + 0.5e^{-mT}) \cdot 1[mT]$$

Используя дискретное преобразование Лапласа, получим:

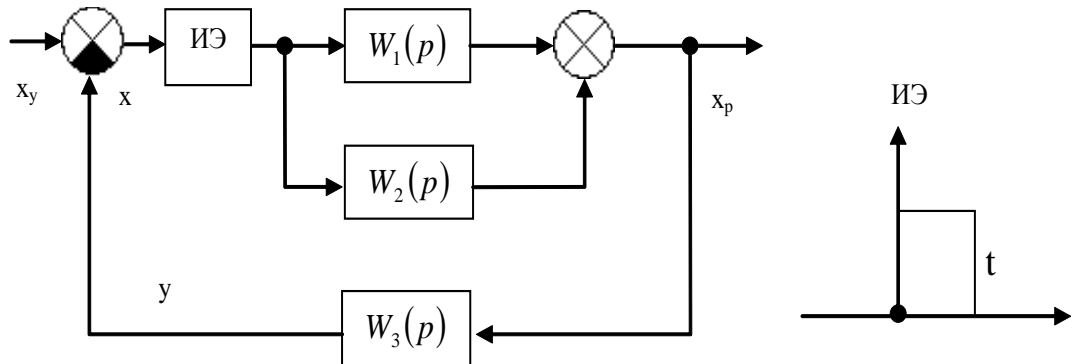
$$W^*(p) = \sum_{m=0}^{\infty} 2e^{-pmT} - 2.5 \sum_{m=0}^{\infty} e^{-0.2mT} \cdot e^{-pmT} + 0.5 \sum_{m=0}^{\infty} e^{-mT} \cdot e^{-pmT}.$$

Воспользовавшись формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$b_0 + b_0 q + b_0 q^2 + b_0 q^3 + \dots = \frac{b_0}{1-q} \quad (q < 1), \text{ получим } W^*(p) = \frac{2}{1-e^{-pT}} - \frac{2.5}{1-e^{-pT} \cdot e^{-0.2T}} + \frac{0.5}{1-e^{-pT} \cdot e^{-T}}$$

- 5) Для импульсных систем с заданными структурными схемами и дискретными передаточными функциями найти вид сигналов $y(mT)$. ($T=0.01$)

Исходная структурная схема импульсной САУ и выходной сигнал импульсного элемента



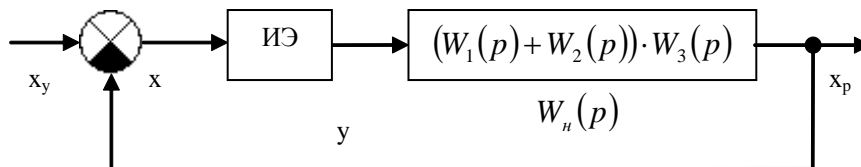
$$T = 0,01$$

$$W_1(p) = k_1 \quad k_1 = 2 \quad T_2 = 0,1$$

$$W_2(p) = \frac{k_2}{1 + p \cdot T_2} \quad k_2 = 3$$

$$W_3(p) = \frac{k_3}{p} \quad k_3 = 5$$

Преобразуем к виду, представленному ниже и получим типовую структурную схему импульсной САУ



Запишем выражение для непрерывной передаточной функции разомкнутой системы:

$$W_n(p) = (W_1(p) + W_2(p)) \cdot W_3(p) = \left(k_1 + \frac{k_2}{1 + p \cdot T_2} \right) \cdot \frac{k_3}{p} = \frac{k_1 \cdot k_3}{p} + \frac{k_2 \cdot k_3}{p \cdot (1 + p \cdot T_2)} = \frac{(k_1 + k_2) \cdot k_3 + k_1 \cdot k_3 \cdot T_2 \cdot p}{p \cdot (1 + p \cdot T_2)}$$

Таким образом, ясно, что коэффициент усиления разомкнутой непрерывной системы равен

$$k_p = (k_1 + k_2) \cdot k_3 = 25.$$

Передаточная функция звена формирователя:

$$W_\phi(p) = \frac{1 - e^{-p \cdot T}}{p}$$

Передаточная функция приведенной непрерывной части:

$$W_{nn}(p) = W_{\phi}(p) \cdot W_n(p) = (1 - e^{-p \cdot T}) \cdot \left[\frac{(k_1 + k_2) \cdot k_3 + k_1 \cdot k_3 \cdot T_2 \cdot p}{p^2 \cdot (1 + p \cdot T_2)} \right] =$$

$$= (1 - e^{-p \cdot T}) \cdot \left[\frac{(k_1 + k_2) \cdot k_3}{p^2} - \frac{k_2 \cdot k_3 \cdot T_2}{p} + \frac{k_2 \cdot k_3 \cdot T_2}{p + \frac{1}{T_2}} \right]$$

Применяя дискретное преобразование Лапласа к последнему выражению, получим дискретную передаточную функцию разомкнутой импульсной системы:

$$W_p^*(p) = D(W_{nn}(p)) =$$

$$= \frac{e^{p \cdot T} - 1}{e^{p \cdot T}} \cdot \left[\frac{(k_1 + k_2) \cdot k_3 \cdot T \cdot e^{p \cdot T}}{(e^{p \cdot T} - 1)^2} - \frac{k_2 \cdot k_3 \cdot T_2 \cdot e^{p \cdot T}}{e^{p \cdot T} - 1} + \frac{k_2 \cdot k_3 \cdot T_2 \cdot e^{p \cdot T}}{e^{p \cdot T} - e^{-\frac{T}{T_2}}} \right]$$

$$W_p^*(p) = k_3 \cdot \left[k_1 \cdot \frac{T}{e^{p \cdot T} - 1} + k_2 \cdot \left[-T_2 + \frac{T}{e^{p \cdot T} - 1} + \frac{T_2 \cdot (e^{p \cdot T} - 1)}{e^{p \cdot T} - e^{-\frac{T}{T_2}}} \right] \right] = \frac{k_3 \cdot (k_1 + k_2) \cdot (b_1 \cdot e^{p \cdot T} + b_0)}{(e^{p \cdot T} - 1) \cdot (e^{p \cdot T} - e^{-\frac{T}{T_2}})}$$

В результате дальнейших преобразований искомая передаточная функция приводится к виду:

$$W_p^* = k_3 \cdot (k_1 + k_2) \cdot \frac{b_1 \cdot e^{p \cdot T} + b_0}{a_2 \cdot e^{2 \cdot p \cdot T} + a_1 \cdot e^{p \cdot T} + a_0}$$

где

$$b_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \cdot T_2 \cdot \left(e^{\frac{T}{T_2}} - 1 \right) + T \quad b_1 = 0,00429$$

$$b_0 = - \left[\frac{k_2}{k_1 + k_2} \cdot T_2 \cdot \left(e^{\frac{T}{T_2}} - 1 \right) + T \cdot e^{-\frac{T}{T_2}} \right] \quad b_0 = -0,003339$$

$$a_2 = 1$$

$$a_1 = - \left(e^{\frac{T}{T_2}} + 1 \right) \quad a_1 = -1,905$$

$$a_0 = e^{-\frac{T}{T_2}} \quad a_0 = 0,905$$

Передаточную функцию рассматриваемой импульсной САУ в разомкнутом состоянии можно определить на основе весовой функции приведенной непрерывной части $w_{nn}(t)$, согласно следующему соотношению:

$$W_p^*(p) = \sum_{l=0}^{\infty} w_{nn}(l \cdot T_u) \cdot e^{-p \cdot l \cdot T}$$

$$w_{nn}(t) = L^{-1}\{W_{nn}(p)\} = k_1 \cdot k_3 \cdot t \cdot 1_0(t) + k_2 \cdot k_3 \cdot \left[-T_2 \cdot 1_0(t) + t \cdot 1_0(t) + T_2 \cdot e^{-t/T_2} \cdot 1_0(t) \right] -$$

$$- k_1 \cdot k_3 \cdot (t - \tau) \cdot 1_0(t - \tau) - k_2 \cdot k_3 \cdot \left[-T_2 \cdot 1_0(t - T) + (t - T) \cdot 1_0(t - T) + T_2 \cdot e^{-(t-T)/T_2} \cdot 1_0(t - \tau) \right]$$

Так как $w_{nn}(l \cdot T) = w_{nn}(t)|_{t=l \cdot T_u}$, то:

$$W_p^*(p) = \sum_{l=0}^{\infty} w_{nn}(l \cdot T) \cdot e^{-p \cdot l \cdot T} = k_1 \cdot k_3 \cdot \frac{T \cdot e^{p \cdot T}}{(e^{p \cdot T} - 1)^2} + k_2 \cdot k_3 \cdot$$

$$\cdot \left[-\frac{T_2 \cdot e^{p \cdot T}}{e^{p \cdot T} - 1} + \frac{T \cdot e^{p \cdot T}}{(e^{p \cdot T} - 1)^2} - \frac{T_2 \cdot e^{p \cdot T}}{e^{p \cdot T} - e^{-T/T_2}} \right] - k_1 \cdot k_3 \cdot \frac{T \cdot e^{p \cdot T}}{(e^{p \cdot T} - 1)^2} \cdot e^{-p \cdot T} -$$

$$- k_2 \cdot k_3 \cdot \left[-\frac{T_2 \cdot e^{p \cdot T}}{e^{p \cdot T} - 1} \cdot e^{-p \cdot T} + \frac{T \cdot e^{p \cdot T}}{(e^{p \cdot T} - 1)^2} \cdot e^{-p \cdot T} - \frac{T_2 \cdot e^{p \cdot T}}{e^{p \cdot T_u} - e^{-T/T_2}} \cdot e^{-p \cdot T} \right]$$

После преобразований, получим искомое выражение для $w_p^*(p)$, совпадающее с ранее

$$\text{полученным, т.е. } W_p^*(p) = 25 \cdot \frac{0.00429 \cdot e^{p \cdot T} - 0.003339}{e^{2 \cdot p \cdot T} - 1.905 \cdot e^{p \cdot T} + 0.905}$$

б) Построить годограф (АФХ) дискретной передаточной функции и его приближенное значение.

Годограф импульсной разомкнутой системы построим двумя способами:

точным (непосредственно по найденной ранее передаточной функции)

приближенным – по формуле:

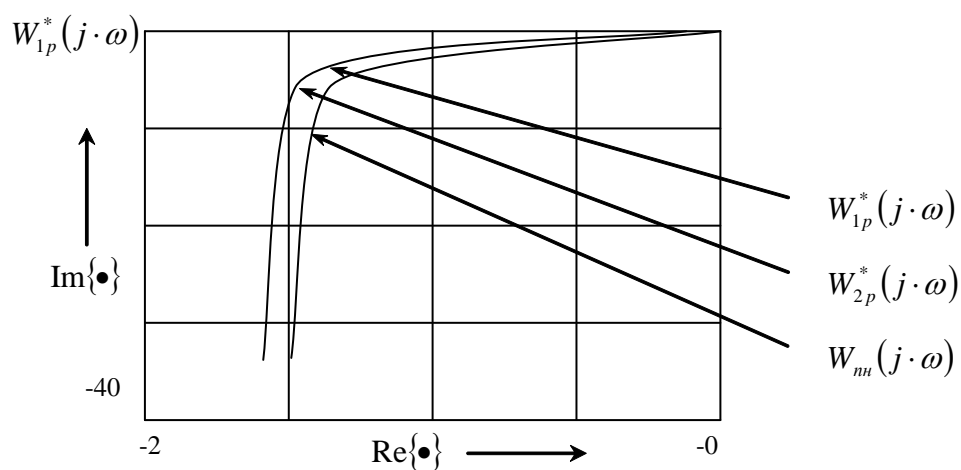
$$W_p^*(j\omega) = \frac{\omega_0}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} W_{nn}(j\omega - j \cdot \omega_0 \cdot l) \pm \frac{w_{nn}(0)}{2}$$

или в приближении:

$$W_p^*(j\omega) = \frac{\omega_0}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{l=-3}^3 W_{nn}(j\omega - j \cdot \omega_0 \cdot l) \pm \frac{w_{nn}(0)}{2},$$

В формуле ставится знак «+», если в приведенной непрерывной части системы отсутствует запаздывание, и «-» - в противном случае. В нашем случае $w_{nn}(0) = 0$

Годографы для $W_p^*(j \cdot \omega)$ и $W_{nn}(j\omega)$

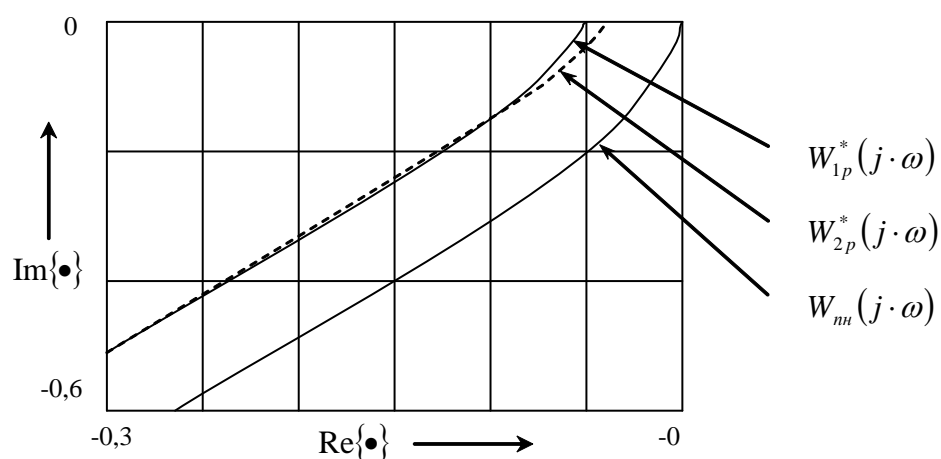


$W_{1p}^*(j \cdot \omega)$ – годограф, построенный точным методом;

$W_{2p}^*(j \cdot \omega)$ – годограф, построенный по приближенной формуле;

$W_{nn}(j \cdot \omega)$ – годограф приведенной непрерывной части.

А)



Б)

Как видно из рисунка 10, годографы импульсной разомкнутой системы, построенные точным и приближенным методом совпадают.

Численные значения амплитудно - фазовых характеристик импульсной разомкнутой системы, построенных точным и приближенным методами:

$$W_p\left(\frac{n}{16} \cdot \frac{w_0}{2}\right) =$$

	0
0	-0.372-0.634i
1	-0.144-0.256i
2	-0.092-0.16i
3	-0.073-0.115i
4	-0.064-0.088i
5	-0.059-0.07i
6	-0.056-0.057i
7	-0.054-0.047i
8	-0.053-0.038i
9	-0.052-0.031i
10	-0.051-0.025i
11	-0.051-0.019i
12	-0.05-0.014i
13	-0.05-9.215i·10 ⁻³
14	-0.05-4.562i·10 ⁻³
15	-0.05

$$\cdot W_{np}\left(\frac{n}{16} \cdot \frac{w_0}{2}\right) =$$

	0
0	-0.372-0.633i
1	-0.143-0.256i
2	-0.091-0.159i
3	-0.072-0.114i
4	-0.063-0.087i
5	-0.058-0.069i
6	-0.055-0.055i
7	-0.053-0.045i
8	-0.051-0.037i
9	-0.05-0.03i
10	-0.049-0.024i
11	-0.048-0.018i
12	-0.048-0.013i
13	-0.047-8.654i·10 ⁻³
14	-0.047-4.274i·10 ⁻³
15	-0.047+2.821i·10 ⁻⁶

7) Построить ЛАЧХ дискретного звена разомкнутой системы с передаточной функцией:

$$W_p^*(p) = 25 \cdot \frac{0.00429 \cdot e^{p \cdot T} - 0.003339}{e^{2 \cdot p \cdot T} - 1.905 \cdot e^{p \cdot T} + 0.905}$$

Заменим в этой функции $e^{p \cdot T}$ на приближенную формулу $e^{p \cdot T} \approx \frac{1+v}{1-v}$, а затем v на $\frac{T}{2}jw$, w -

псевдочастота. После замен получаем $W_p^*(v) = 25 \cdot \frac{0.00429 \cdot \frac{1+v}{1-v} - 0.003339}{\frac{(1+v)^2}{(1-v)^2} - 1.905 \cdot \frac{1+v}{1-v} + 0.905}$ и после

преобразования $W_p^*(v) = \frac{678v - 829v^2 + 151}{v(15240v + 760)}$. Подставляя $\frac{T}{2}jw$, где $T=0.01$, получаем:

$$W_p^*(w) = \frac{678 \cdot j \cdot 0.005 \cdot w + 829 \cdot (0.005 \cdot w)^2 + 151}{0.005 \cdot j \cdot w \cdot (15240 \cdot 0.005 \cdot j \cdot w + 760)}$$

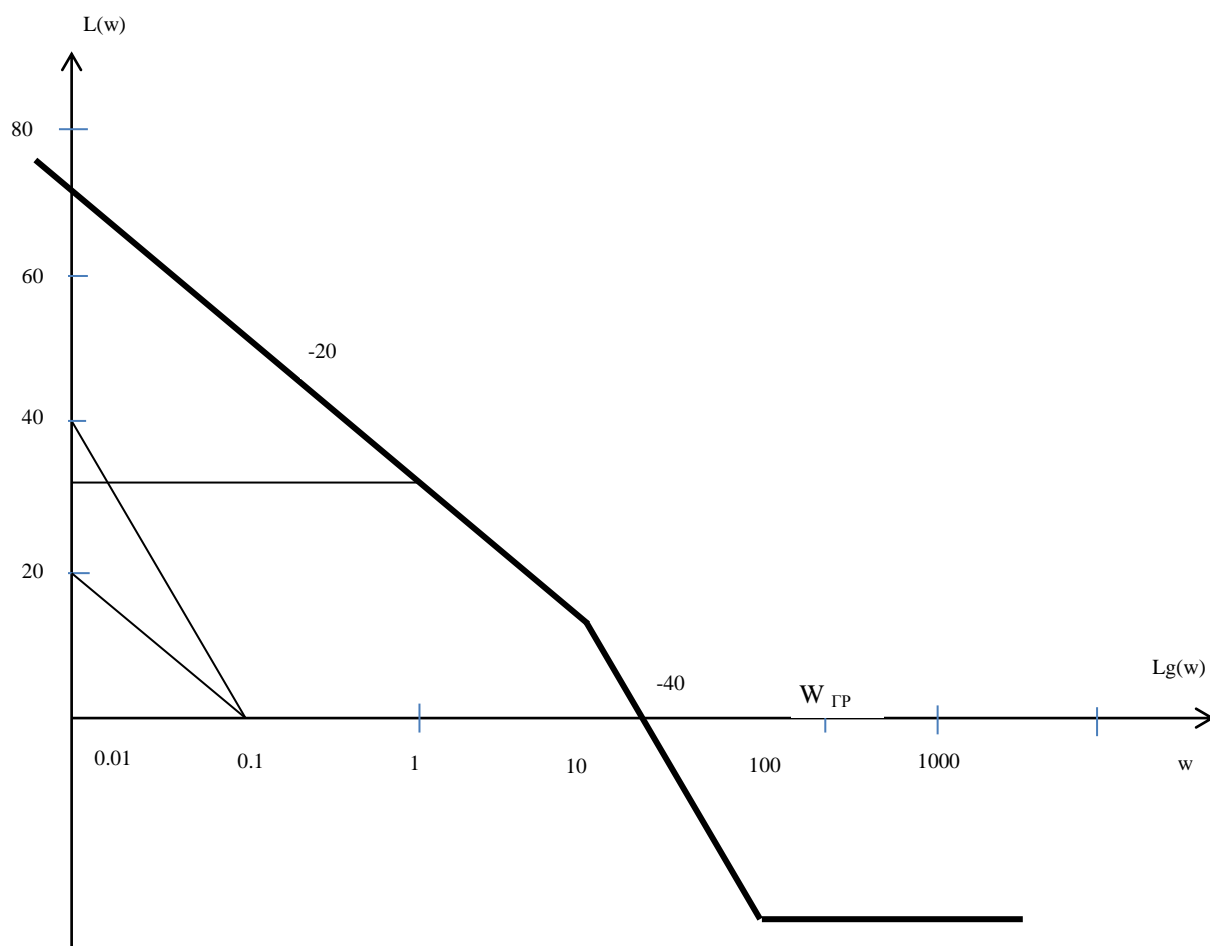
И после преобразования:

$$W_p^*(w) = \frac{39.74 \cdot ((0.0117 \cdot w)^2 + 2 \cdot 0.0117 \cdot 0.958 \cdot j \cdot w + 1)}{w \cdot (j - 0.1 \cdot w)}$$

На основании полученного выражения записываем выражение для передаточной функции:

$$L(w) = 20 \lg(39.74) - 20 \lg(w) + 20 \lg(\sqrt{(1 - (0.0117w)^2)^2 + (2 \cdot 0.0117 \cdot 0.958 \cdot w)^2} - 20 \lg(\sqrt{1 + (0.1w)^2})$$

Таким образом, ЛАЧХ выглядит следующим образом (на рисунке показана граничная частота $W_{гп}=2/T=200$):



10. Анализ импульсных систем

(**знать:** понятие устойчивости, необходимые и достаточные условия устойчивости, критерии устойчивости дискретных систем, различать понятия качества дискретных систем; **уметь:** различать наиболее удобные для применения критерии устойчивости и анализа качества дискретных систем; **владеть:** приемами построения характеристик дискретных систем для анализа устойчивости и качества процессов в них)

10.1. Понятие устойчивости, необходимые и достаточные условия устойчивости

Согласно физическому представлению, импульсная автоматическая система *устойчива* тогда и только тогда, когда ее реакция на ограниченное входное воздействие ограничена. Если же реакция импульсной системы хотя бы на одно ограниченное входное воздействие не ограничена, то такая система неустойчива.

Воспользуемся этим определением для установления условий устойчивости. Сигнал на выходе импульсной системы можно представить как

$$x_{\text{вых}}[mT] = \sum_{l=0}^m w[lT] x_{\text{вх}}[(m-l)T],$$

где $x_{\text{вх}}[lT]$ – входной сигнал системы; $w[lT]$ – весовая (импульсная переходная) функция импульсной системы в дискретные моменты времени lT ($l = 0 \dots m$).

Предположим, что входное воздействие при любом значении аргумента ограничено:

$$|x_{\text{вх}}[mT]| \leq M \quad \text{для всех } m \geq 0. \quad (10.1)$$

Тогда, учитывая, что абсолютное значение суммы не превосходит сумму абсолютных значений, получим

$$|x_{\text{вых}}[mT]| \leq \sum_{l=0}^m |w[lT]| |x_{\text{вх}}[(m-l)T]|, \text{ или } |x_{\text{вых}}[mT]| \leq M \sum_{l=0}^m |w[lT]|. \quad (10.2)$$

Увеличив верхний предел суммы до ∞ , мы лишь усилим неравенство. Таким образом,

$$|x_{\text{вых}}[mT]| \leq M \sum_{l=0}^{\infty} |w[lT]| \quad \text{при } m = 0, 1, 2, \dots \quad (10.3)$$

Импульсная система устойчива, если ряд, стоящий в правой части (10.3) сходится, т.е. если

$$\sum_{l=0}^{\infty} |w[lT]| < \infty. \quad (10.4)$$

Таким образом, импульсная система устойчива, если ряд дискрет ее импульсной переходной функции абсолютно сходится.

Легко доказать [3], что *абсолютная сходимость дискрет импульсной переходной функции является необходимым и достаточным условием устойчивости импульсной системы*

Можно сказать, что весовая функция, представленная на рис. 10.1.а соответствует устойчивой, на рис.10.1.б – нейтральной, а на рис. 10.1.в – неустойчивой системе (как непрерывной, так и импульсной).

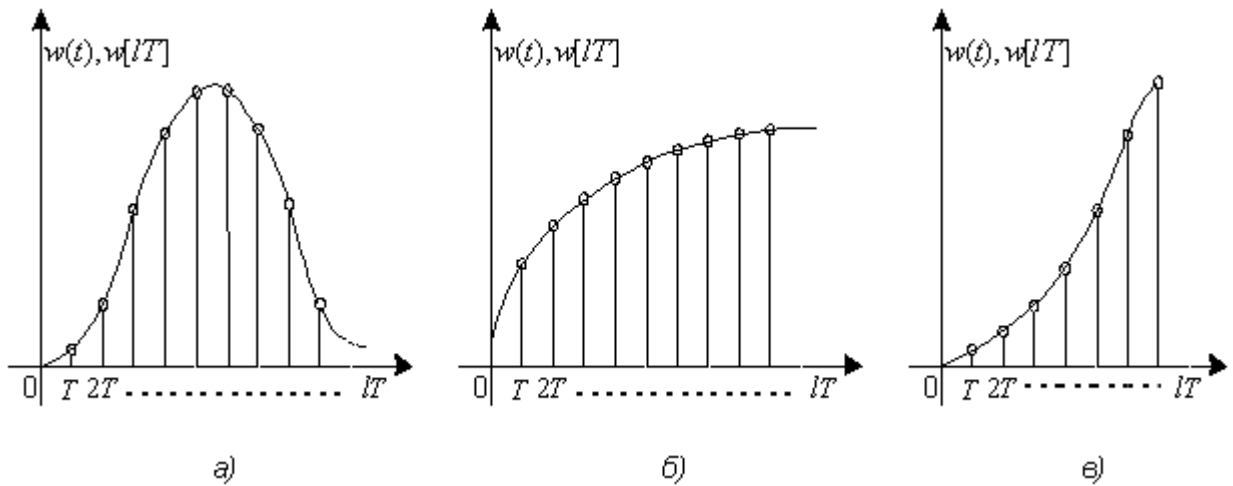


Рис.10.1. Весовые функции а- устойчивой, б- нейтральной, в- неустойчивой систем

Дискретная передаточная функция замкнутой импульсной системы представляет собой D -преобразование весовой функции:

$$W_3^*(p) = \sum_{l=0}^{\infty} w_3[lT] e^{-plT}$$

Если известно выражение для $W_3^*(p)$ и корни p_v знаменателя простые и действительные, то согласно формуле обращения

$$w_3[lT] = D^{-1} \left(W_3^*(p) \right) = \sum \frac{B^*(p_v)}{A^*(p_v)} e^{p_v(l-1)T}. \quad (10.5)$$

Из (10.5) следует, что ряд (10.4) будет сходиться, если корни p_v уравнения $A^*(e^{pT}) = 0$ будут лежать слева от мнимой оси. То же самое можно сказать и в случае комплексных корней [1,2]. Формула обращения в этом случае будет сложнее.

Таким образом, импульсная система будет *устойчива* только тогда, когда все полюсы $W_3^*(p)$ будут расположены в левой полуплоскости комплексной плоскости. Импульсная система находится на *границе устойчивости*, если хотя бы один из ее полюсов лежит на мнимой оси. Она *неустойчива*, если хотя бы один из её полюсов лежит в правой части комплексной плоскости.

Рассмотрим корни p_v . В связи с тем, что корни входят в показатель степени экспоненты $e^{p_v T}$, они являются периодическими по мнимой оси с периодом ω_0 . Пусть $p_v = -\alpha_v + j\beta_v$, тогда $p_{vk} = -\alpha_v + j\beta_v + j\omega_0 k$, где $k = 1, 2, \dots$ тоже является корнем полинома $A^*(e^{pT})$ в плоскости P , так как

$$e^{(-\alpha_v + j\beta_v)T + j\omega_0 kT} = e^{(-\alpha_v + j\beta_v)T} e^{j\frac{2\pi}{T}Tk} = e^{(-\alpha_v + j\beta_v)T}.$$

Поэтому уравнение $A^*(e^{pT}) = 0$ имеет бесчисленное множество корней (рис. 10.2). Корни, расположенные в полосе частот $-\frac{\omega_0}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2}$, называются основными, и по их расположению следует судить об устойчивости ИСАУ. Основные корни по своим значениям совпадают с корнями непрерывной системы.

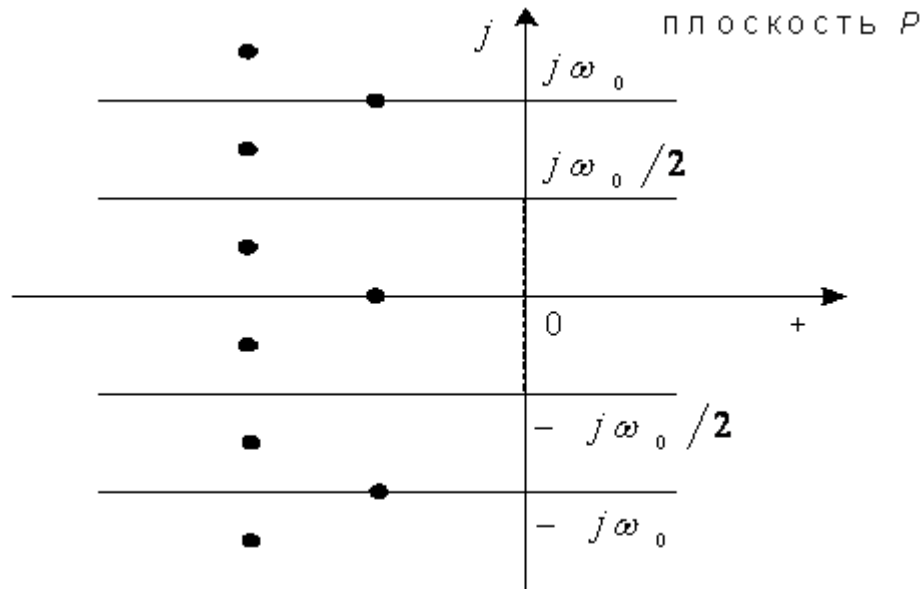


Рис.10.2. Расположение полюсов импульсных систем в плоскости P

Если для исследования ИСАУ используется Z -преобразование, то $e^{pT} = z$ ($e^{-pT} = z^{-1}$) и полоса частот по мнимой оси $-\frac{\omega_0}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2}$ комплексной плоскости P (рис. 10.2) отображается в окружность единичного радиуса в комплексной плоскости Z . Корни характеристического уравнения $A^*(z) = 0$, лежащие в левой полуполосе, будут расположены внутри окружности, а корни, лежащие в правой полуполосе, – вне окружности (рис. 10.3).

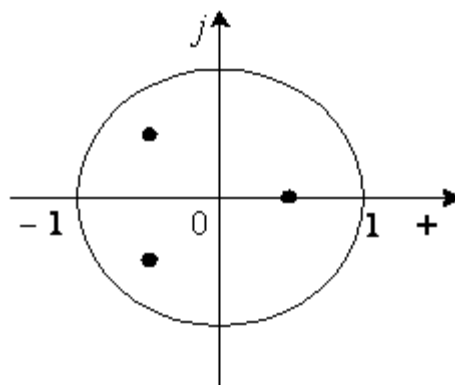


Рис.10.3. Расположение полюсов импульсных систем в плоскости Z

Из вышесказанного становятся очевидными необходимые и достаточные условия устойчивости в плоскости Z . Импульсная система *устойчива*, если все полюса ее дискретной передаточной функции (корни характеристического полинома $A^*(z)$) лежат внутри окружности единичного радиуса. Импульсная система находится *на границе устойчивости*, если хотя бы один полюс z_v^* лежит на окружности единичного радиуса. Импульсная система *неустойчива*, если хотя бы один полюс z_v^* лежит вне окружности единичного радиуса.

Если степень характеристического уравнения велика, определение его корней является непростой задачей.

10.2. Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Критерий Гурвица позволяет оценить устойчивость замкнутых и разомкнутых систем ИСАУ. Исходной информацией для применения критерия являются коэффициенты характеристического уравнения соответствующей системы:

$$A^*(p) = a_n \cdot e^{p \cdot n \cdot T} + a_{n-1} \cdot e^{p \cdot (n-1) \cdot T} + a_{n-2} \cdot e^{p \cdot (n-2) \cdot T} + \dots + a_1 \cdot e^{p \cdot T} + a_0. \quad (10.6)$$

Наиболее простой путь получения алгебраического критерия устойчивости импульсных систем состоит в сведении этой задачи к уже известной формулировке алгебраического критерия для непрерывных систем. У непрерывных САУ корни характеристического уравнения располагаются на всей комплексной плоскости. В ИСАУ основные корни характеристического уравнения лежат в ограниченной по мнимой составляющей полосе комплексной плоскости

$$P \left(j \frac{\omega_0}{2} \geq \text{Im } P \geq -j \frac{\omega_0}{2} \right). \quad \text{Чтобы можно было применить формулировку критерия,}$$

используемую для непрерывных систем, необходимо полосу $j \frac{\omega_0}{2} \geq \text{Im } P \geq -j \frac{\omega_0}{2}$ «растянуть» на всю мнимую ось в бесконечных пределах. Для решения этой задачи в характеристическом уравнении $A^*(e^{pT})$ вначале проводится замена $e^{pT} = z$, а затем применяется билинейное преобразование :

$$z = \frac{1 + v}{1 - v} \quad (10.7)$$

При этом

$$v = \frac{z-1}{z+1} = \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = jtg \frac{\omega T}{2}. \quad (10.8)$$

В результате характеристическое уравнение представляет полином переменной v :

$$A^*(v) = A_n v^n + A_{n-1} v^{n-1} + \dots + A_1 v + A_0. \quad (10.9)$$

Коэффициенты A_i , $i = \overline{0, n}$ определяются с учетом коэффициентов a_i полинома $A^*(e^{pT})$ и преобразования (10.8).

Из выражения (10.8) следует, что точки $+j\frac{\omega_0}{2}$ и $-j\frac{\omega_0}{2}$ в плоскости p будут лежать в бесконечности в плоскости v , точка $v = 0$ соответствует точке $j\omega = 0$ плоскости p . Положительная полуполоса превратилась в положительную полуплоскость v , а отрицательная полуполоса - в отрицательную полуплоскость v . Следовательно, если в исходном полиноме $A^*(z)$ сделать замену (10.7), то относительно коэффициентов полученного полинома $A^*(v)$ можно применить известную формулировку критерия для непрерывных систем.

Импульсная система устойчива, если все определители Гурвица Δ_i , $i = 1 \dots n$, где n - степень характеристического уравнения, больше нуля ($\Delta_i > 0$) и коэффициент при старшей степени полинома также больше нуля.

Определители Гурвица составляются по таблице, которая строится на основании коэффициентов полинома $A^*(v)$ так же, как для непрерывных систем, и имеет вид:

$$\begin{vmatrix} A_{n-1} & A_{n-3} & A_{n-5} & A_{n-7} & \dots & \dots \\ A_n & A_{n-2} & A_{n-4} & A_{n-6} & \dots & \dots \\ 0 & A_{n-1} & A_{n-3} & A_{n-5} & A_{n-7} & \dots \\ 0 & A_n & A_{n-2} & A_{n-4} & A_{n-6} & \dots \\ 0 & 0 & A_{n-1} & A_{n-3} & A_{n-5} & \dots \\ 0 & 0 & A_n & A_{n-2} & A_{n-4} & \dots \end{vmatrix}$$

Определители Δ_i формируются путем отчеркивания i строк и i столбцов. Для представленной выше таблицы

$$\Delta_1 = A_{n-1} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_{n-1} & A_{n-3} \\ A_n & A_{n-2} \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} A_{n-1} & A_{n-3} & A_{n-5} \\ A_n & A_{n-2} & A_{n-4} \\ 0 & A_{n-1} & A_{n-3} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим применение критерия Гурвица для анализа устойчивости ИСАУ первого, второго и третьего порядков.

1. Характеристическое уравнение первого порядка имеет вид

$$A^*(p) = a_1 e^{pT} + a_0 = a_1 z + a_0 = 0.$$

После соответствующей подстановки

$$A^*(v) = a_1 \frac{1+v}{1-v} + a_0 = \frac{a_1(1+v) + a_0(1-v)}{1-v} = 0.$$

Условие устойчивости импульсной системы первого порядка запишется как

$$a_1 + a_0 > 0, \quad a_1 - a_0 > 0.$$

2. Характеристическое уравнение второго порядка:

$$A^*(p) = a_2 e^{2pT} + a_1 e^{pT} + a_0 = a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0.$$

После подстановки (9.8) имеем:

$$A^*(v) = a_2 \left(\frac{1+v}{1-v} \right)^2 + a_1 \frac{1+v}{1-v} + a_0 = 0;$$

$$A^*(v) = A_2 v^2 + A_1 v + A_0 = (a_2 - a_1 + a_0) v^2 + (2a_2 - 2a_0) v + (a_2 + a_1 + a_0) = 0.$$

Условие устойчивости ИСАУ второго порядка:

$$a_2 + a_1 + a_0 > 0, \quad a_2 - a_0 > 0, \quad a_2 - a_1 + a_0 > 0.$$

3. Характеристическое уравнение третьего порядка имеет вид

$$A^*(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0.$$

После подстановки (9.8), получим:

$$A^*(v) = A_3 v^3 + A_2 v^2 + A_1 v + A_0 = (a_3 - a_2 + a_1 - a_0) v^3 + (3a_3 - a_2 - a_1 + 3a_0) v^2 + (3a_3 + a_2 - a_1 - 3a_0) v + (a_3 + a_2 + a_1 + a_0) = 0.$$

Имеем условие устойчивости ИСАУ третьего порядка:

$$\begin{aligned} a_3 - a_2 + a_1 - a_0 &> 0; & 3a_3 - a_2 - a_1 + 3a_0 &> 0; & 3a_3 + a_2 - a_1 - 3a_0 &> 0; \\ a_3 + a_2 + a_1 + a_0 &> 0; & a_0^2 - a_0 a_2 + a_1 a_3 - a_3^2 &> 0. \end{aligned}$$

Аналогично могут быть получены условия, которым должны удовлетворять коэффициенты характеристического полинома импульсной системы более высокого порядка для того, чтобы обеспечить ее устойчивость. Заметим, что для анализа устойчивости импульсной системы по ее характеристическому полиному $A^*(v)$ можно использовать и критерий Рауса, сформулированный для непрерывных систем.

10.3. Частотные критерии устойчивости

Частотные критерии устойчивости позволяют анализировать устойчивость системы по ее частотным характеристикам. В основе частотных критериев устойчивости лежит *принцип аргумента*, позволяющий судить об устойчивости системы по поведению годографа $A(j\omega)$ (годографа Михайлова). Принцип аргумента позволяет выяснить, каким будет приращение аргумента характеристического полинома исследуемой импульсной системы $A^*(e^{j\omega T})$ при изменении частоты в диапазоне $-\frac{\omega_0}{2} < \omega < \frac{\omega_0}{2}$ или в диапазоне $0 < \omega < \frac{\omega_0}{2}$. Известно, что полином $A^*(e^{j\omega T})$ можно представить в виде произведения сомножителей:

$$A^*(e^{j\omega T}) = a_0^* \prod_{v=1}^n (e^{j\omega T} - e^{p_v T}) = a_0^* \prod_{v=1}^n (e^{j\omega T} - z_v), \quad (10.10)$$

где p_v, z_v - корни характеристического полинома импульсной системы в плоскостях P и Z соответственно.

Рассмотрим приращение аргумента каждого сомножителя (9.10) $\Delta \arg (e^{j\omega T} - z_v)$ для $-\frac{\omega_0}{2} < \omega < \frac{\omega_0}{2}$

двух случаев:

- 1) z_v лежит внутри окружности единичного радиуса;
- 2) z_v лежит вне окружности единичного радиуса.

При изменении частоты ω от $-\frac{\omega_0}{2}$ до $\frac{\omega_0}{2}$ вектор $e^{j\omega T} - z_v$ в первом случае повернется на угол 2π , а во втором – на угол, равный 0, что следует из рис. 10.4.

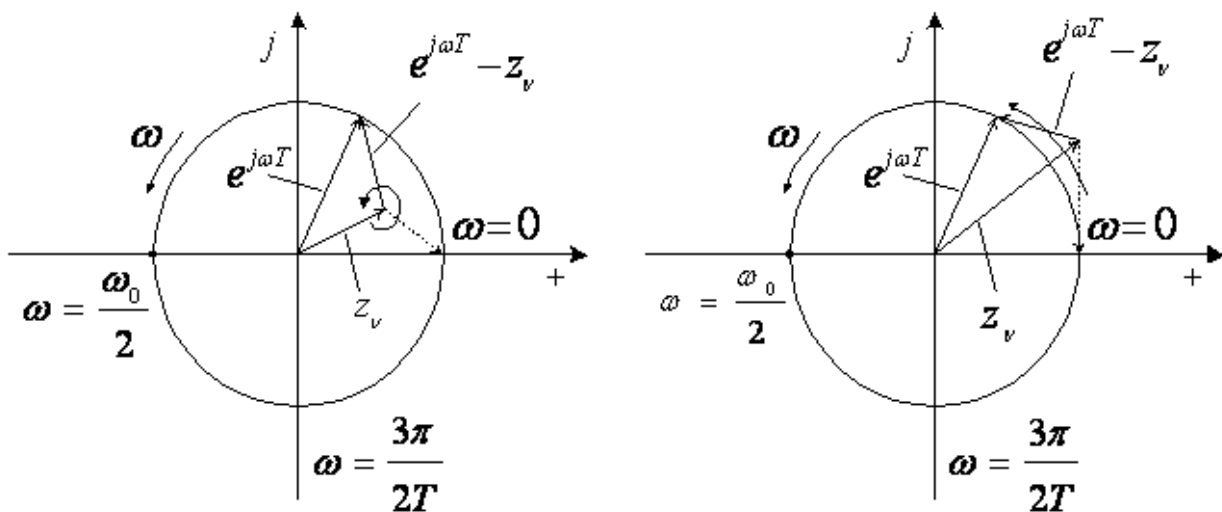


Рис.10.4. Принцип аргумента для импульсных систем

Таким образом, если n корней характеристического полинома исследуемой импульсной системы лежат внутри окружности единичного радиуса, то приращение аргумента

$$\Delta \arg A^*(j\omega) = 2\pi n \text{ и } \Delta \arg A^*(j\omega) = 2n \frac{\pi}{2} \text{ (последнее равенство следует из того, } \\ -\frac{\omega_0}{2} < \omega < \frac{\omega_0}{2} \quad 0 < \omega < \frac{\omega_0}{2}$$

что характеристический полином $A^*(\omega)$ с действительными коэффициентами имеет комплексно-сопряженные корни). Приведенное выше является математической формулировкой принципа аргумента. Геометрической интерпретацией принципа аргумента служит *критерий Михайлова*.

Критерий устойчивости Найквиста позволяет судить об устойчивости замкнутой импульсной системы по амплитудно-частотной характеристике, или годографу Найквиста разомкнутой импульсной системы $W_p^*(j\omega)$. При этом АЧХ может быть построена экспериментально.

По аналогии с критерием для непрерывных систем сформируем функцию $F^*(j\omega) = 1 + W_p^*(j\omega)$. С учетом равенства $W_p^*(j\omega) = \frac{B^*(j\omega)}{D^*(j\omega)}$, где $B^*(p), D^*(p)$ -

полиномы от e^{PT} степеней m и n ($m \leq n$) соответственно, можно записать

$$F^*(j\omega) = \frac{B^*(j\omega) + D^*(j\omega)}{D^*(j\omega)} = \frac{A^*(j\omega)}{D^*(j\omega)}. \quad (10.11)$$

Для системы с единичной обратной связью числитель (10.11) представляет собой характеристический полином замкнутой системы. Найдем приращение аргумента вектора

$$F^*(j\omega) \text{ при изменении частоты в диапазоне } 0 < \omega < \frac{\omega_0}{2} :$$

$$\Delta \arg F^*(j\omega) = \Delta \arg (B^*(j\omega) + D^*(j\omega)) - \Delta \arg D^*(j\omega). \\ 0 < \omega < \frac{\omega_0}{2} \quad 0 < \omega < \frac{\omega_0}{2} \quad 0 < \omega < \frac{\omega_0}{2}$$

Поскольку мы интересуемся условиями устойчивости замкнутой системы, при выполнении которых все n корней характеристического полинома $A^*(j\omega)$ лежат в левой части комплексной плоскости, то в соответствии с принципом аргумента для импульсных систем

$$\Delta \arg A^*(j\omega) = \pi n. \\ 0 < \omega < \frac{\omega_0}{2}$$

Для определения приращения аргумента вектора $D^*(j\omega)$ рассмотрим три случая:

1. *Разомкнутая импульсная система устойчива*, т.е. все n корней ее характеристического полинома лежат внутри окружности единичного радиуса. Тогда в соответствии с принципом аргумента

$$\Delta \arg D^*(j\omega) = \pi n,$$

$$0 < \omega < \frac{\omega_0}{2}$$

а приращение аргумента функции $F^*(j\omega)$ будет равно нулю в соответствии с выражением

$$\Delta \arg F^*(j\omega) = \Delta \arg A^*(j\omega) - \Delta \arg D^*(j\omega) = \pi n - \pi n = 0$$

$$0 < \omega < \frac{\omega_0}{2} \quad 0 < \omega < \frac{\omega_0}{2} \quad 0 < \omega < \frac{\omega_0}{2}$$

Геометрическая интерпретация этого случая представлена на рис.10.5.а, где показано движение вектора $F^*(j\omega)$ при изменении частоты в диапазоне $0 < \omega < \frac{\omega_0}{2}$. Суммарный угол

перемещения равен нулю. Для этого годограф $F^*(j\omega)$ не должен охватывать точку начала координат $(0, j0)$. Чтобы получить годограф $W^*(j\omega)$, нужно сдвинуть кривую $F^*(j\omega)$ на единицу влево (на -1). Тогда условие относительно нулевого приращения аргумента $F^*(j\omega)$ можно сформулировать и относительно $W^*(j\omega)$ так: годограф $W^*(j\omega)$ не должен охватывать точку с координатами $(-1, j0)$ (рис. 10.5.б).

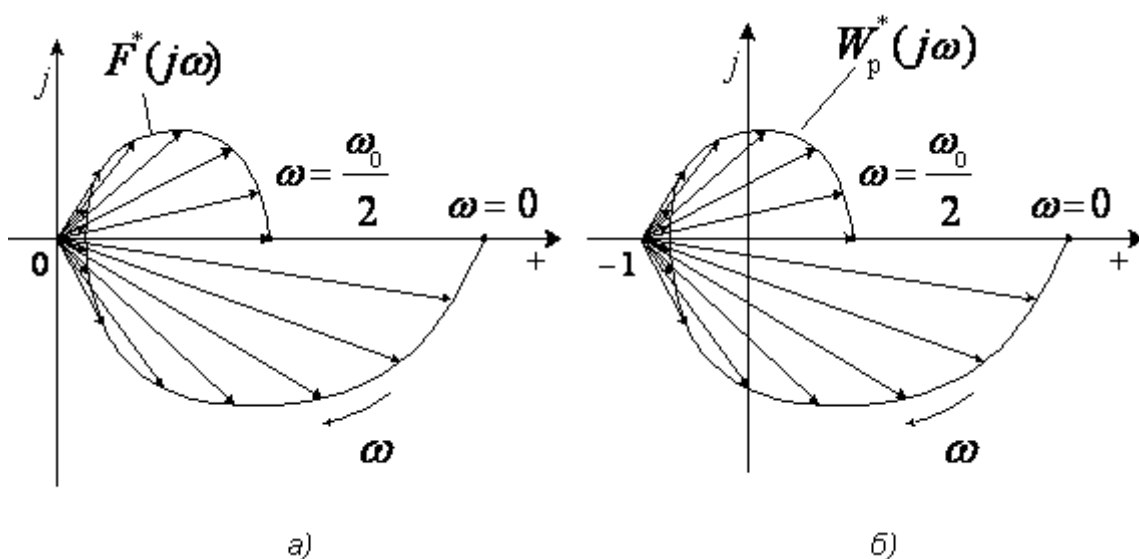


Рис.10.5. Годографы $F^*(j\omega)$, $W_p^*(j\omega)$

Следовательно, формулировка критерия устойчивости Найквиста для этого случая такова:

Если разомкнутая импульсная система устойчива, то для устойчивости замкнутой импульсной системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-частотная характеристика разомкнутой системы не охватывала точку с координатами $(-1, j0)$.

2. Разомкнутая импульсная система неустойчива и l корней ее характеристического уравнения лежат вне окружности единичного радиуса (соответственно $n - l$ корней лежат внутри единичной окружности). По принципу аргумента

$$\Delta \arg D^*(j\omega) = \pi(n - l),$$

$$0 < \omega < \frac{\omega_0}{2}$$

Приращение аргумента функции $F^*(j\omega)$ может быть найдено из выражения:

$$\Delta \arg F^*(j\omega) = \Delta \arg A^*(j\omega) - \Delta \arg D^*(j\omega) = n\pi - (n - l)\pi = \pi l,$$

$$0 < \omega < \frac{\omega_0}{2} \quad 0 < \omega < \frac{\omega_0}{2} \quad 0 < \omega < \frac{\omega_0}{2}$$

Геометрическая интерпретация этой ситуации представлена на рис.10.6. Предположим, что характеристический полином разомкнутой импульсной системы имеет два корня вне единичной окружности, т. е. $l = 2$. На рис. 10.6.а представлен годограф функции $F^*(j\omega)$, для которой изменение аргумента при изменении частоты в диапазоне $0 < \omega < \frac{\omega_0}{2}$ равно $2\pi \frac{l}{2}$ (l – число корней, лежащих вне единичной окружности), а на рис. 10.6.б - годограф соответствующей ей функции $W_p^*(j\omega) = F^*(j\omega) - 1$.

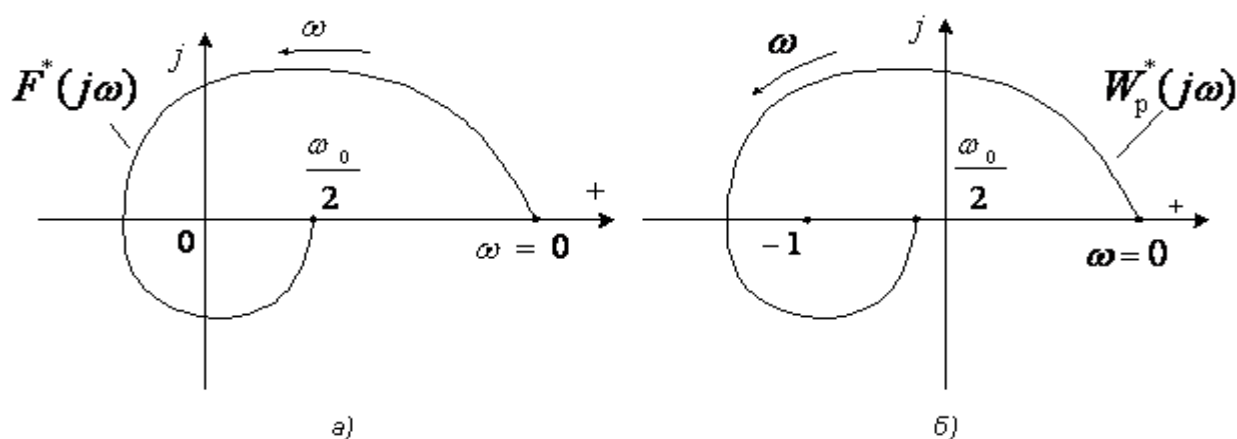


Рис.10.6. Годографы $F^*(j\omega)$, $W_p^*(j\omega)$

Заметим, что годограф $F^*(j\omega)$ охватывает точку с координатами $(0, j0)$ один раз в положительном направлении (против часовой стрелки), аналогично годограф $W_p^*(j\omega)$ охватывает точку с координатами $(-1, j0)$ в положительном направлении один раз. Таким образом, замкнутая импульсная система устойчива. Формулировка критерия устойчивости Найквиста для этого случая следующая:

Если разомкнутая импульсная система неустойчива и ее характеристический полином имеет l корней, лежащих вне окружности единичного радиуса, то для устойчивости замкнутой импульсной системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-частотная характеристика разомкнутой системы охватывала точку с координатами $(-1, j0)$ в положительном направлении (против часовой стрелки) l раз при изменении частоты в диапазоне $-\frac{\omega_0}{2} < \omega < \frac{\omega_0}{2}$ и $\frac{l}{2}$ раз при изменении частоты в диапазоне $0 < \omega < \frac{\omega_0}{2}$.

3. Разомкнутая импульсная система нейтральна, и ее характеристический полином имеет ν нулевых корней, т.е. ее комплексный коэффициент усиления имеет вид

$$W_p^*(j\omega) = \frac{B^*(j\omega)}{(e^{j\omega T} - 1)^\nu D_1^*(j\omega)}.$$

Амплитудно-фазовая характеристика $W_p^*(j\omega)$ при малых ω начинается в бесконечности. Можно рассматривать $W_p^*(j\omega)$ как предел некоторой функции $W_p^{*\beta}(j\omega)$ устойчивой разомкнутой импульсной системы, т. е.:

$$W_p^*(j\omega) = \lim_{\beta \rightarrow 0} W_p^{*\beta}(j\omega) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{B^*(j\omega)}{(e^{j\omega T} - 1 + \beta) D_1^*(j\omega)}.$$

Тогда подобно тому, как это было сделано для непрерывных систем, можно показать, что годографы $W_p^*(j\omega)$ и $W_p^{*\beta}(j\omega)$ отличаются друг от друга дугой бесконечно большого радиуса длиной $\beta\nu$, проведенной к действительной оси и называемой «дополнением в бесконечности» (рис.10.7).

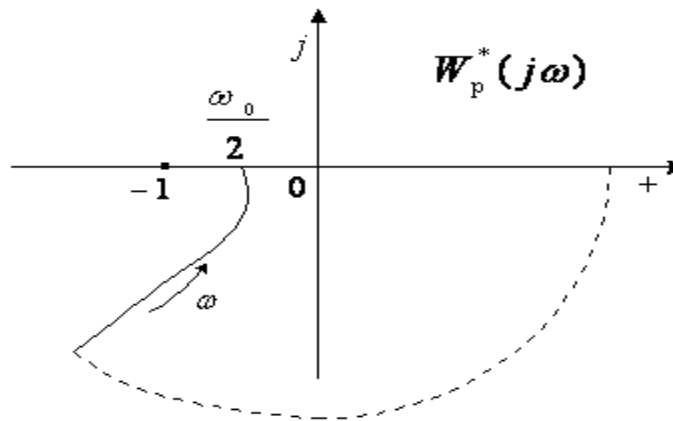


Рис.10.7. Годограф $W_p^*(j\omega)$

Формулировка критерия устойчивости Найквиста для данного случая следующая:

Если разомкнутая импульсная система нейтральна и ее характеристический полином имеет ν нулевых корней, то для устойчивости замкнутой импульсной системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой импульсной системы вместе с «дополнением в бесконечности» не охватывала точку с координатами $(-1, j0)$.

Сравнение устойчивости непрерывной и соответствующей ей импульсной замкнутых систем показывает, что введение импульсного элемента в большинстве случаев ухудшает устойчивость системы, при этом увеличение времени дискретизации (периода квантования) T приводит к ухудшению динамических свойств замкнутой импульсной системы. Поэтому при проектировании импульсных систем стремятся выбрать T намного меньше минимальной постоянной времени непрерывной части системы [4].

При этом, как было отмечено в предыдущих главах, для входных сигналов с ограниченным спектром импульсная система ведет себя практически как непрерывная система с передаточной функцией: $W'_p(p) = \frac{1}{T} W_p(p)$.

В некоторых случаях введение импульсного элемента в замкнутую систему улучшает ее устойчивость. Это происходит в тех случаях, когда годограф непрерывной разомкнутой системы $W_p(j\omega)$ при высоких частотах имеет существенную часть, расположенную в правой полуплоскости. Такими характеристиками обладают системы, содержащие элементы запаздывания, распределенные параметры, резонансные контуры и т.п.[3].

10.4. Прямые показатели качества управления в импульсных системах

Качеством работы импульсной системы автоматического управления называется комплекс требований к ее поведению в установившемся и переходном режимах отработки заданного управляющего воздействия [4]. Оценка качества работы импульсных и цифровых

систем не отличается от оценки в соответствии с методикой, разработанной для непрерывных систем

Как и в случае непрерывных САУ *прямые показатели качества* системы определяются по переходной характеристике системы $h[mT]$, которую можно получить экспериментальным или расчетным путями (рис. 10.8).

Время регулирования t_p служит основной характеристикой быстродействия системы и определяется периодом от момента подачи входного воздействия до момента, когда отклонение функции $h(t)$ или $h[mT]$ от установившегося значения не выходит за пределы некоторой заданной зоны $\pm \Delta$: $h[mT] - h_{уст} \leq \Delta$, где Δ задается обычно в пределах (3 - 5)% установившегося значения $h_{уст} = h(\infty)$.

Точность системы Δh определяется ошибкой, или отклонением установившегося значения переходной функции $h_{уст}$ от заданного значения $h_{зад}$:

$$\Delta h = \frac{h_{зад} - h_{уст}}{h_{зад}}, \quad (10.12)$$

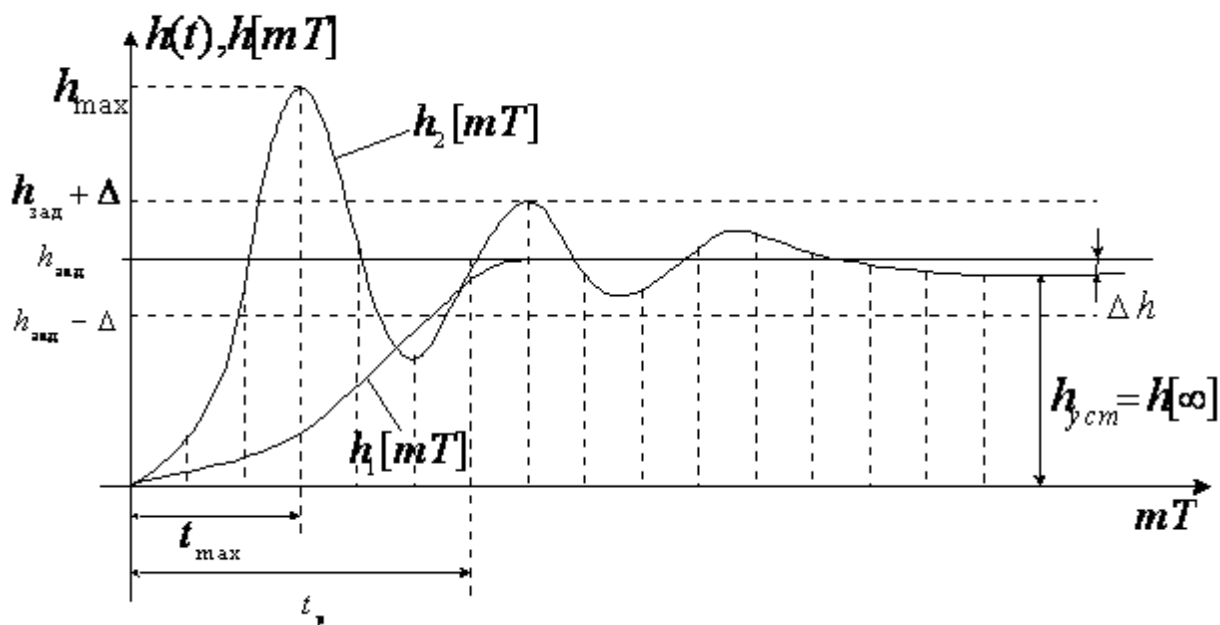


Рис.10.8. Переходные функции непрерывной и импульсной систем

Характер переходного процесса может быть аperiodическим $h_1[mT]$ и колебательным $h_2[mT]$. Колебательный процесс $h_2[mT]$ характеризуется (рис.10.8):

1) *максимальным перерегулированием* σ %:

$$\sigma = \frac{h_{\max} - h_{\text{уст}}}{h_{\text{уст}}} \cdot 100 \% ; \quad (10.13)$$

- 2) временем достижения первого максимума t_{\max} ;
- 3) числом колебаний N за время регулирования t_p .

Помимо прямых показателей качества существуют косвенные показатели, которые позволяют судить о качестве замкнутой системы по некоторым параметрам других характеристик ИСАУ, не прибегая к построению переходных характеристик. Косвенными показателями являются некоторые величины, характеризующие удаленность замкнутой системы от границы устойчивости. Поскольку такую границу можно указать для различных характеристик системы в частотной области и в области корней, то косвенные показатели качества можно разделить на частотные и корневые.

Частотные методы анализа качества импульсных систем основаны на анализе годографа разомкнутой импульсной системы, т.е. АФХ (рис.10.9).

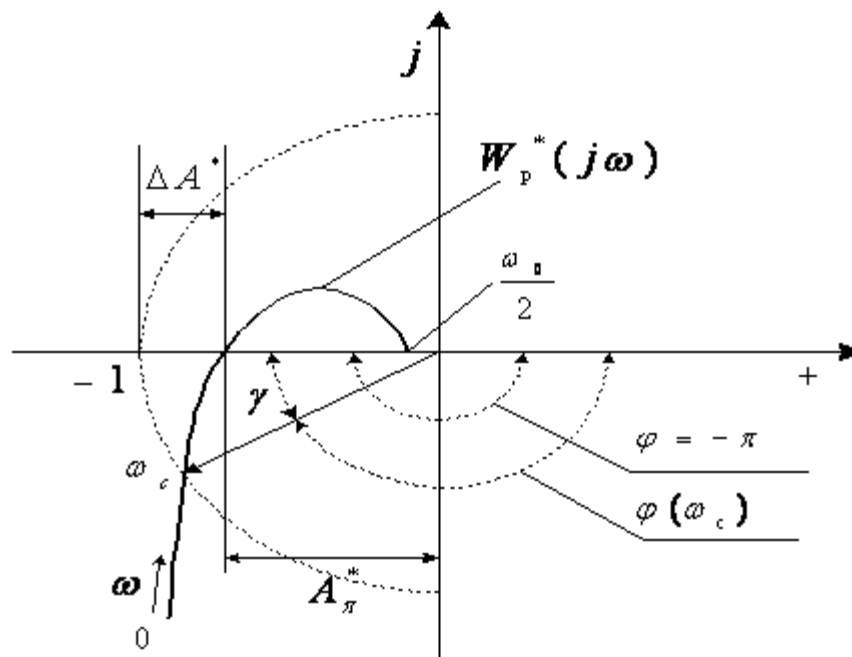


Рис.10.9. Косвенные показатели качества систем, определяемые по годографу

Косвенными показателями качества, определяемыми по годографу разомкнутой импульсной системы, являются:

- 1) запас устойчивости по амплитуде

$$\Delta A^* = 1 - A_\pi^* \quad \text{или} \quad \Delta L = 20 \lg \frac{1}{A_\pi^*},$$

где $A_{\pi}^* = |W_p^*(j\omega_{\pi})|$, $\varphi_p^*(\omega_{\pi}) = -\pi$;

2) *запас устойчивости по фазе*

$$\gamma = \pi + \varphi_p^*(\omega_c),$$

где ω_c - частота среза, при которой $A^*(\omega_c) = 1$, т.е. амплитудно-частотная характеристика разомкнутой импульсной системы равна единице;

3) *степень колебательности*, которая определяется по амплитудно-частотной характеристике замкнутой системы:

$$M = \frac{W_{3.\max}^*}{W_3^*(0)}.$$

С определенными выше показателями качества связано понятие *предельного коэффициента усиления* системы $k_{\text{пр}}$ - такого коэффициента усиления разомкнутой импульсной системы, при котором запас устойчивости по амплитуде становится равным нулю, т.е. замкнутая импульсная система находится на границе устойчивости.

Если известен коэффициент усиления разомкнутой ИСАУ, для которой построен годограф и известно значение A_{π}^* , то величина $k_{\text{пр}}$ определяется:

$$k_{\text{пр}} = \frac{k}{A_{\pi}^*}.$$

Определение устойчивости и показателей качества по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой импульсной системы. Как показано ранее, построение логарифмических частотных характеристик разомкнутой импульсной системы с дискретной передаточной функцией $W_p^*(p)$ производится с помощью билинейного преобразования, т.е. заменой

$$z = e^{pT} = \frac{1+\nu}{1-\nu}, \quad \nu = \frac{z-1}{z+1} = \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$$

$$\text{или} \quad e^{j\omega T} = \frac{1 + j \frac{T}{2} \omega^*}{1 - j \frac{T}{2} \omega^*} = \frac{1 + j \bar{\omega}}{1 - j \bar{\omega}},$$

где $\omega^* = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$ - псевдочастота; $\bar{\omega}^* = \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$ - относительная псевдочастота.

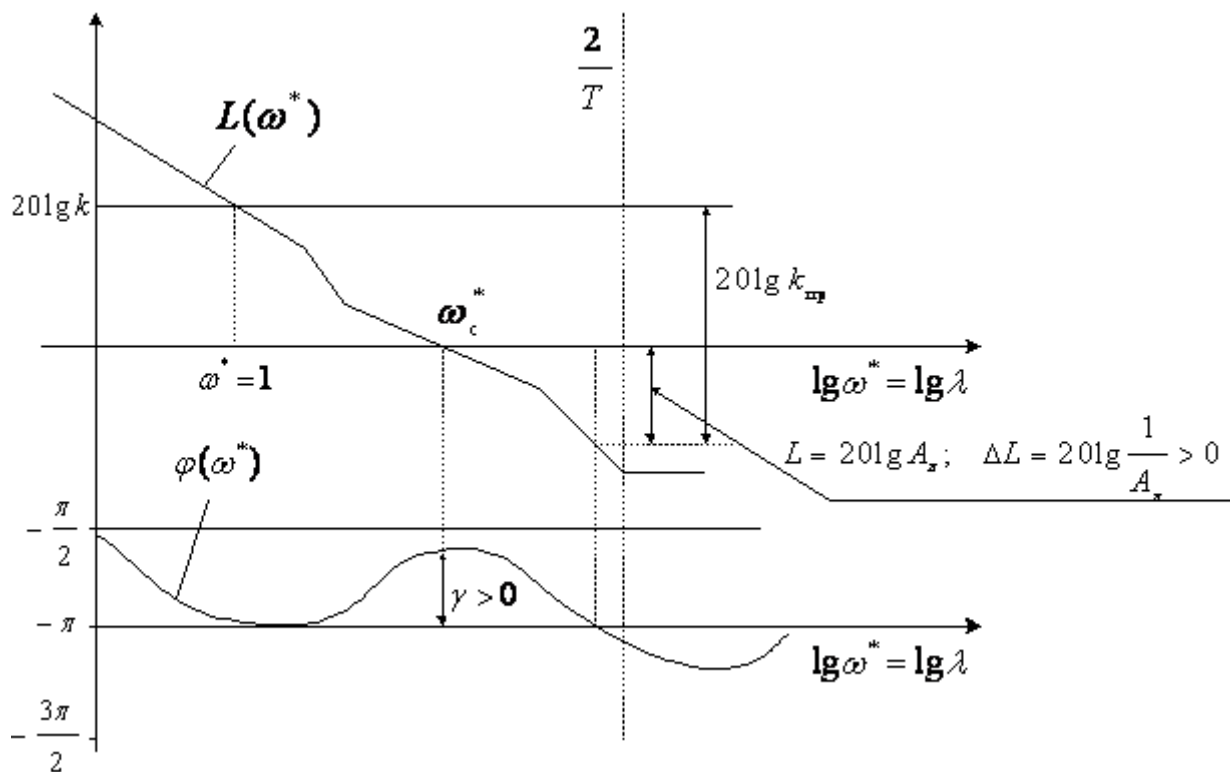


Рис.10.10. Косвенные показатели качества, определяемые по логарифмическим частотным характеристикам

Заметим, что билинейное преобразование (замена z приведенным выше выражением) является приближенным, погрешность этого преобразования мала при малых значениях $\frac{\omega T}{2}$ (при этом граничным значением является частота $\omega = \frac{2}{T}$), поэтому ω^* и носит название псевдочастоты. После вышеприведенного преобразования строятся логарифмические амплитудно-частотные (ЛАЧХ) и фазочастотные (ЛФЧХ) характеристики по тем же правилам, что и соответствующие логарифмические характеристики непрерывных разомкнутых систем.

По построенным логарифмическим характеристикам можно судить об устойчивости замкнутой импульсной системы и определять запасы устойчивости по амплитуде и фазе (рис.10.10).

Если имеется возможность выяснить расположение корней характеристического уравнения на комплексной плоскости, то это позволяет определить еще один косвенный показатель качества работы ИСАУ, характеризующий ее быстродействие. Этот показатель называется *степенью устойчивости*, обозначается λ_0 и определяется как минимальная действительная часть из всех корней характеристического уравнения (рис. 10.11).

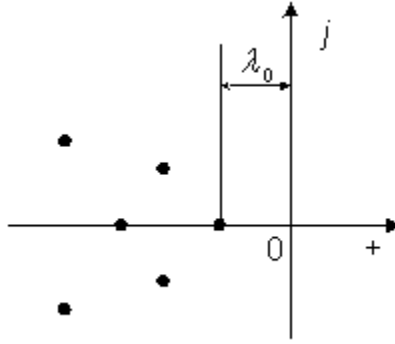


Рис.10.11. Косвенные показатели качества по корням характеристического уравнения

10.5. Системы с конечной длительностью переходного процесса

В общем случае, переходные процессы в устойчивой импульсной системе протекают неограниченно долго. Однако в отличие от непрерывных систем возможны такие условия, при которых переходной процесс длится конечное время. *Это возможно в том случае, когда весовая (импульсная переходная) функция замкнутой импульсной системы обращается в ноль за некоторое конечное число тактов T .*

Согласно формуле дискретного преобразования

$$W_3^*(p) = \sum_{l=0}^{\infty} w_3[lT] e^{-p l T} \quad (10.14)$$

Из (10.14) видно, что $w_3[lT]$ обратится в ноль за конечное время, если сумма будет иметь конечное число членов. В типовом случае $W_3^*(p)$ представляет собой отношение двух полиномов:

$$W_3^*(e^{pT}) = \frac{b_m e^{pmT} + b_{m-1} e^{p(m-1)T} + \dots + b_0}{a_n e^{pnT} + a_{n-1} e^{p(n-1)T} + \dots + a_0} = \frac{B^*(e^{pT})}{A^*(e^{pT})}.$$

Частное от деления двух полиномов в общем случае имеет бесконечное число слагаемых:

$$\frac{B^*(e^{pT})}{A^*(e^{pT})} = c_0 + c_1 e^{-pT} + c_2 e^{-2pT} + c_3 e^{-3pT} + \dots \quad (10.15)$$

Поэтому согласно (10.15) $w_3[lT]$ будет иметь бесконечное число ординат, отличных от нуля, так как $w_3[0] = c_0$, $w_3[T] = c_1$, $w_3[2T] = c_2$, ... и переходный процесс в течение бесконечного времени устанавливается.

Однако, если характеристическое уравнение замкнутой системы содержит всего одно слагаемое $A^*(e^{pT}) = a_n e^{pnT}$, то частное от деления $\frac{B^*(e^{pT})}{A^*(e^{pT})}$ будет иметь ограниченное

число членов, а $w_3[IT]$ - ограниченное число ординат, отличных от нуля. Следовательно, условием наличия переходного процесса конечной длительности в замкнутой ИСАУ является:

$$a_n \neq 0, \quad a_{n-1} = a_{n-2} = \dots = a_0 = 0.$$

Анализ показывает, что такие системы обладают бесконечной степенью устойчивости.

10.6. Оценка точности обработки задающего воздействия замкнутой импульсной системой

Точность замкнутых импульсных систем, как и непрерывных, определяется ошибкой, возникающей в системе при обработке степенных входных сигналов, описываемых функциями вида $\frac{t^\mu}{\mu!}$. Рассмотрим точность системы так называемой типовой структуры, представленной на рис. 10.12.

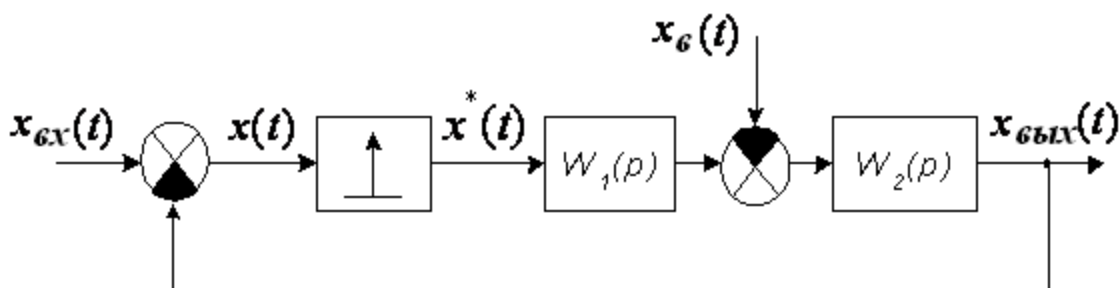


Рис.10.12. Структурная схема импульсной системы

К такому виду с помощью структурных преобразований можно привести большинство замкнутых импульсных систем.

Предположим, что непрерывная передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W_p(p) = W_1(p)W_2(p) = \frac{k(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + 1)}{p^v (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1)},$$

где k — коэффициент усиления разомкнутой системы; v — разность между числом интегрирующих и дифференцирующих звеньев в разомкнутой системе $W_p(p)$, называемая порядком или степенью астатизма системы по управлению. Заметим, что порядок астатизма равен разности числа множителей типа $e^{pT} - 1$ в знаменателе и числителе дискретной передаточной функции $W_p^*(p)$.

Ошибку замкнутой импульсной системы при обработке управляющего воздействия можно найти по формулам

$$x_{\text{уст}} = \lim_{p \rightarrow 0} (e^{pT} - 1) W_x^*(p) X_{\text{ex}}^*(p); \quad W_x^*(p) = \frac{X^*(p)}{X_{\text{ex}}^*(p)} = \frac{1}{1 + W_p^*(p)},$$

где $X_{\text{ex}}^*(p)$, $X^*(p)$ - дискретные изображения задающего сигнала и сигнала ошибки по управлению; $W_p^*(p)$, $W_x^*(p)$ - дискретные передаточные функции разомкнутой системы и передаточной функции по ошибке от задающего сигнала.

Дискретная передаточная функция разомкнутой системы, имеющая ν интегрирующих звеньев, будет иметь вид

$$W_p^*(p) = \frac{(b_n e^{pnT} + b_{n-1} e^{p(n-1)T} + \dots + b_0)}{(e^{pT} - 1)^\nu (a_n e^{pnT} + a_{n-1} e^{p(n-1)T} + \dots + a_0)} = \frac{B^*(p)}{A^*(p)}$$

Дискретное изображение степенного входного сигнала $\frac{t^\mu}{\mu!}$ порядка μ можно представить в виде:

$$G^*(p) = \frac{T^\mu e^{pT}}{(e^{pT} - 1)^{\mu+1}} R_\mu(p);$$

$$\begin{aligned} R_0(p) &= 1; & R_1(p) &= 1; \\ R_2(p) &= \frac{1}{2!}(e^{pT} + 1); & R_3(p) &= \frac{1}{3!}(e^{2pT} + 4e^{pT} + 1); \\ R_4(p) &= \frac{1}{4!}(e^{3pT} + 11e^{2pT} + 11e^{pT} + 1) \dots \end{aligned} \quad (10.16)$$

Выражение для произвольного μ приведено в [2]. Заметим, что $R_\mu(0) = 1$ для всех μ .

Ошибка замкнутой системы по управляющему воздействию может быть найдена из выражения:

$$\begin{aligned} x_{0\text{уст}} &= \lim_{p \rightarrow 0} (e^{pT} - 1) \frac{1}{1 + \frac{B^*(p)}{(e^{pT} - 1)^\nu A^*(p)}} \cdot \frac{T^\mu e^{pT}}{(e^{pT} - 1)^{\mu+1}} R_\mu(p) = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(e^{pT} - 1)^{\nu+1}}{(e^{pT} - 1)^\nu + \frac{B^*(p)}{A^*(p)}} \cdot \frac{T^\mu e^{pT}}{(e^{pT} - 1)^{\mu+1}} R_\mu(p) = \begin{cases} 0 & \nu > \mu; \\ \infty & \nu < \mu; \\ \frac{1}{k} & \text{при } \mu = \nu (\nu > 1); \\ \frac{1}{1+k} & \mu = \nu (\nu = 0). \end{cases} \end{aligned}$$

Следует отметить, что найденное выражение совпадает с аналогичными выражениями ошибок по управлению в замкнутой непрерывной системе. Ошибку замкнутой импульсной системы по возмущающему воздействию следует искать по формуле

$$x_{0\text{уст}} = \lim_{p \rightarrow 0} (e^{pT} - 1) \frac{(X_{\text{в}}(p)W_2(p))^*}{1 + W_p^*(p)}.$$

Приведем окончательную формулу ошибки по возмущающему воздействию, аналогичную выведенной ранее для ошибки по управлению:

$$x_{0\text{уст}} = \begin{cases} 0 & \nu > \mu; \\ \infty & \nu < \mu; \\ \frac{k_2}{k} & \mu = \nu (\nu > 1); \\ \frac{k_2}{1+k} & \mu = \nu (\nu = 0), \end{cases}$$

где ν - порядок (степень) астатизма системы по возмущению, равный разности числа интегрирующих и дифференцирующих звеньев в передаточной функции $W_1(p)$, т.е. лежащих до точки приложения возмущающего воздействия, или множителей типа $e^{pT} - 1$ в знаменателе и числителе дискретной передаточной функции $W_1^*(p)$.

Следует отметить, что выражение $(X_{\text{в}}(p)W_2(p))^*$ означает: сначала надо перемножить непрерывные изображения, а затем от произведения переходить к дискретному изображению по Лапласу.

10.7. Выводы

В главе показано, что в основе поведения дискретной системы лежит ее весовая функция, если весовая функция возвращается в исходное состояние (нулевое), то система – устойчива, если переходит в новое состояние, то нейтральна и если уходит от него, то неустойчива. Таким образом, устойчивость можно проверить, подавая на вход системы δ -функцию (или ее приближение). Это – активный эксперимент.

Но проведение активного эксперимента не всегда удобно и вместо него предлагаются критерии устойчивости, основанные на анализе характеристик систем: (алгебраические) необходимые и достаточные условия устойчивости, критерий устойчивости Гурвица (характеристический полином системы), (частотные) критерий Михайлова, критерий Найквиста, позволяющие перевести известные критерии из непрерывной области в дискретную.

Качество дискретных систем определяется аналогично качеству непрерывных систем, но имеются изменения в соответствующих формулах (для ошибок дискретных систем). В дискретных системах появляется новое качество – конечное время переходных процессов, т.е. , за которое процесс в системе заканчивается.

10.8. Вопросы

1. Какую характеристику надо снять, для того чтобы судить об устойчивости разомкнутой системы, замкнутой системы?
2. Какой полином нужно исследовать для того чтобы сделать суждение об устойчивости разомкнутой дискретной системы, замкнутой дискретной системы по критерию Гурвица?
3. Можно ли воспользоваться формулировкой критерия Гурвица, предложенной для непрерывных систем, как это проделать?
4. Какой полином нужно исследовать для того чтобы сделать суждение об устойчивости разомкнутой дискретной системы, замкнутой дискретной системы по критерию Михайлова?
5. Какая подстановка позволяет воспользоваться критерием устойчивости Михайлова для анализа дискретных систем?
6. Как должен вести себя годограф Михайлова, сформулированный для дискретных систем для устойчивой системы 1-го, 2-го, 3-го порядков?
7. Сформулируйте критерий устойчивости Найквиста для устойчивых замкнутых дискретных систем.
8. Сформулируйте критерий устойчивости Найквиста для неустойчивых замкнутых дискретных систем.
9. Сформулируйте критерий устойчивости Найквиста для нейтральных замкнутых дискретных систем.
10. Перечислите показатели качества для замкнутых дискретных систем апериодических, колебательных.
11. Какое условие надо иметь в виду при определении ошибок в дискретных системах
Сформулируйте критерий устойчивости Найквиста для устойчивых замкнутых дискретных систем.
12. По какой формуле определяется статическая, кинетическая ошибка замкнутой дискретной системы?
13. В каком случае в дискретной замкнутой системе процессы будут закінчаться за конечное время?

10.9. Задания

1. По заданной дискретной передаточной функции разомкнутой системы определить устойчивость замкнутой системы, построив ее весовую функцию:

$W_p^*(p) = \frac{b_0 + b_1 e^{-pT}}{1 + a_1 e^{-pT}}$ $b_0=1, b_1=0.3, a_1=-0.85.$	$W_p^*(p) = \frac{b_0 + b_1 e^{-pT}}{1 + a_1 e^{-pT}}$ $b_0=1, b_1=-0.3, a_1=-0.85.$
$W_p^*(p) = \frac{b_0 + b_1 e^{-pT}}{1 + a_1 e^{-pT}}$ $b_0=0, b_1=-0.3, a_1=-0.85.$	$W_p^*(p) = \frac{b_0 + b_1 e^{-pT}}{1 + a_1 e^{-pT} + a_2 e^{-2pT}}$ $b_0=1, b_1=0.3, a_1=-0.85; a_2=1.$
$W_p^*(p) = \frac{b_0 + b_1 e^{-pT}}{1 + a_1 e^{-pT} + a_2 e^{-2pT}}$ $b_0=1, b_1=0.3, a_1=-0.85; a_2=2,0$	$W_p^*(p) = \frac{b_0 + b_1 e^{-pT}}{1 + a_1 e^{-pT} + a_2 e^{-2pT}}$ $b_0=1, b_1=0.3, a_1=-0.85; a_2=2,2$
$W_p^*(p) = \frac{b_0 + b_1 e^{-pT}}{(1 + a_1 e^{-pT})(1 - e^{-pT})}$ $b_0=1, b_1=0.3, a_1=-0.85.$	$W_p^*(p) = \frac{b_0 + b_1 e^{-pT}}{(1 + a_1 e^{-pT})(1 - e^{-pT})}$ $b_0=1, b_1=0, a_1=-0.85.$
$W_p^*(p) = \frac{b_0 + b_1 e^{-pT}}{1 + a_1 e^{-pT} + a_2 e^{-2pT}}$ $b_0=1, b_1=0.3, a_1=0; a_2=2,0$	$W_p^*(p) = \frac{b_0 + b_1 e^{-pT}}{1 + a_1 e^{-pT} + a_2 e^{-2pT}}$ $b_0=1, b_1=-0.3, a_1=0; a_2=2,0$

2. Для дискретных передаточных функций разомкнутых систем, заданных в предыдущем задании, определить устойчивость замкнутых систем по выполнению необходимых и достаточных условий устойчивости (в Z области).
3. По заданной дискретной передаточной функции разомкнутой системы определить устойчивость замкнутой системы по критерию Гурвица:

$W_p^*(p) = \frac{0.5e^{-2pT}}{1 - 1.7e^{-pT} + 0.2e^{-2pT}}$	$W_p^*(p) = \frac{1 + 0.5e^{-pT}}{1 - 1.7e^{-pT} + 0.7e^{-2pT}}$
$W_p^*(p) = \frac{1 - 2.3e^{-pT}}{0.5e^{-pT} + 0.8e^{-2pT}}$	$W_p^*(p) = \frac{1 - 0.5e^{-pT} + 0.7e^{-2pT}}{1 - 1.8e^{-pT} + 0.8e^{-2pT}}$
$W_p^*(p) = \frac{1 + 2.3e^{-pT}}{-0.5e^{-pT} + 0.8e^{-2pT}}$	$W_p^*(p) = \frac{-2.5e^{-pT}}{1 + 1.7e^{-pT} + 0.9e^{-2pT}}$
$W_p^*(p) = \frac{1 + 2.3e^{-pT}}{-0.5e^{-pT} + 0.8e^{-2pT}}$	$W_p^*(p) = \frac{0.5e^{-pT}}{1 - 2.2e^{-pT} + 0.7e^{-2pT}}$
$W_p^*(p) = \frac{-2.0e^{-pT}}{1 + 0.6e^{-pT} + 0.9e^{-2pT}}$	$W_p^*(p) = \frac{0.5 - 2.5e^{-pT}}{0.5 + 0.6e^{-pT} + 0.9e^{-2pT}}$

4. По заданной дискретной передаточной функции разомкнутой системы определить устойчивость замкнутой системы по критерию Найквиста и предельный коэффициент усиления (T=0.01):

$W_p^*(p) = \frac{0.5e^{-2pT}}{1 - 1.7e^{-pT} + 0.7e^{-2pT}}$	$W_p^*(p) = \frac{1 + 0.35e^{-pT}}{1 - 1.7e^{-pT} + 0.35e^{-2pT}}$
$W_p^*(p) = \frac{1 - 1.3e^{-pT}}{0.5e^{-pT} + 0.8e^{-2pT}}$	$W_p^*(p) = \frac{1 - 0.5e^{-pT}}{1 - 1.8e^{-pT} + 0.8e^{-2pT}}$
$W_p^*(p) = \frac{1 - 2.3e^{-pT}}{0.5e^{-pT} + 0.8e^{-2pT}}$	$W_p^*(p) = \frac{-2.5e^{-pT}}{1 + 1.7e^{-pT} + 0.9e^{-2pT}}$
$W_p^*(p) = \frac{1 + 2.3e^{-pT}}{-0.5e^{-pT} + 0.8e^{-2pT}}$	$W_p^*(p) = \frac{0.5e^{-pT}}{1 - 2.2e^{-pT} + 0.7e^{-2pT}}$
$W_p^*(p) = \frac{-2.0e^{-pT}}{1 + 0.6e^{-pT} + 1.6e^{-2pT}}$	$W_p^*(p) = \frac{0.5 - 2.5e^{-pT}}{0.5 + 0.6e^{-pT} + 0.9e^{-2pT}}$

5. Для схем с дискретной передаточной функцией разомкнутой системы, заданной в п.4 задания, определить статическую и кинетическую ошибки в замкнутой дискретной системе.
6. Для схем с дискретной передаточной функцией разомкнутой системы, заданной в п.4 задания, построить переходной процесс (реакцию на единичную ступенчатую функцию) и найти показатели качества системы.

10.10. Практикум по главе 10

1. По заданной дискретной передаточной функции разомкнутой системы определить устойчивость замкнутой системы, построив ее весовую функцию:

$$W_p^*(p) = \frac{1 + e^{-pT}}{1 - 1.7 \cdot e^{-pT} + 0.8 \cdot e^{-2pT}}$$

Запишем выражение для передаточной функции замкнутой системы:

$$W_3^*(p) = \frac{W_p^*(p)}{1 + W_p^*(p)} = \frac{1 + e^{-pT}}{2 - 0.7 \cdot e^{-pT} + 0.8 \cdot e^{-2pT}} = \frac{0.5 \cdot e^{2pT} + 0.5 \cdot e^{pT}}{e^{2pT} - 0.35 \cdot e^{pT} + 0.4}$$

Разложим $W_3^*(p)$ в ряд и найдем коэффициенты при степенях e^{-pT} , тем самым найдем весовую функцию $w_3^*[mT]$:

0,5	0,5				1	-0,35	0,4			
0,5	-0,175	0,2			0,5	0,675	0,03625	-0,25731	-0,10456	0,066328
	0,675	-0,2								
	0,675	-0,23625	0,27							
		0,03625	-0,27							
		0,03625	-0,0126875	0,0145						
			-0,2573125	-0,0145						
			-0,25731	0,0900585	-0,102924					
				-0,1045585	0,102924					
				-0,10456	0,036596	-0,041824				
					0,066328	0,041824				

Таким образом найденная весовая функция замкнутой исследуемой системы имеет ординаты: 0.5; 0.625; 0.03625; -0,25731; -0.10456; 0.066328..., т.е. явно затухает, и замкнутая система является устойчивой.

2. Для предыдущего задания определить устойчивость замкнутой системы по необходимому и достаточному критерию устойчивости (в Z области).

$$W_3^*(p) = \frac{W_p^*(p)}{1 + W_p^*(p)} = \frac{1 + e^{-pT}}{2 - 0.7 \cdot e^{-pT} + 0.8 \cdot e^{-2pT}} = \frac{0.5 \cdot e^{2pT} + 0.5 \cdot e^{pT}}{e^{2pT} - 0.35 \cdot e^{pT} + 0.4}$$

Запишем передаточную функцию в z-области и произведем подстановку: $z = e^{pT}$

Передаточная функция замкнутой системы запишется в виде: $W_3^*(p) = \frac{0.5 \cdot z^2 + 0.5 \cdot z}{z^2 - 0.35 \cdot z + 0.4}$

Вычисляя корни Z, получим : $Z_{1,2} = \begin{pmatrix} 0.175 - 0.60776228905716090012i \\ 0.175 + 0.60776228905716090012i \end{pmatrix}$, т.е. корни лежат в

окружности единичного радиуса, что говорит об устойчивости системы.

3. Определить устойчивость замкнутой системы по критерию Гурвица:

$$\text{В качестве разомкнутой системы возьмем } W_p^*(p) = \frac{1 + e^{-pT}}{1 - 1.7 \cdot e^{-pT} + 0.8 \cdot e^{-2pT}}.$$

Запишем передаточную функцию замкнутой системы и сделаем подстановку: $z = e^{pT} = \frac{1 + v}{1 - v}$.

При этом получим передаточную функцию замкнутой системы:

$$W_3^*(p) = \frac{W_p^*(p)}{1 + W_p^*(p)} = \frac{1 + e^{-pT}}{2 - 0.7 \cdot e^{-pT} + 0.8 \cdot e^{-2pT}} = \frac{0.5 \cdot e^{2pT} + 0.5 \cdot e^{pT}}{e^{2pT} - 0.35 \cdot e^{pT} + 0.4}$$

И, используя программу Mathcad:

$$\begin{aligned} W3(v) &= \frac{0.5 \cdot \left(\frac{1+v}{1-v}\right)^2 + 0.5 \cdot \frac{1+v}{1-v}}{\left(\frac{1+v}{1-v}\right)^2 - 0.35 \cdot \frac{1+v}{1-v} + 0.4} \\ W3(v) &= \frac{0.571428571428571v + 0.571428571428571}{v^2 + 0.685714285714286v + 0.6} \\ A3 &:= v^2 + 0.685714285714286v + 0.6 \end{aligned}$$

В характеристическом полиноме все коэффициенты – положительные, что говорит об устойчивости замкнутой системы.

4. По заданной дискретной передаточной функции разомкнутой системы определить устойчивость замкнутой системы по критерию Найквиста и предельный коэффициент усиления. Прежде всего определим устойчивость разомкнутой системы, для чего

воспользуемся необходимым и достаточным условием устойчивости в области Z , а именно, записав передаточную функцию разомкнутой системы в плоскости Z :

$$W_p^*(p) = \frac{1 + e^{-pT}}{1 - 1.7 \cdot e^{-pT} + 0.8 \cdot e^{-2pT}} = \frac{e^{2pT} + e^{pT}}{e^{2pT} - 1.7 \cdot e^{pT} + 0.8}.$$

$$W_p^*(z) = \frac{z^2 + z}{z^2 - 1.7 \cdot z + 0.8}.$$

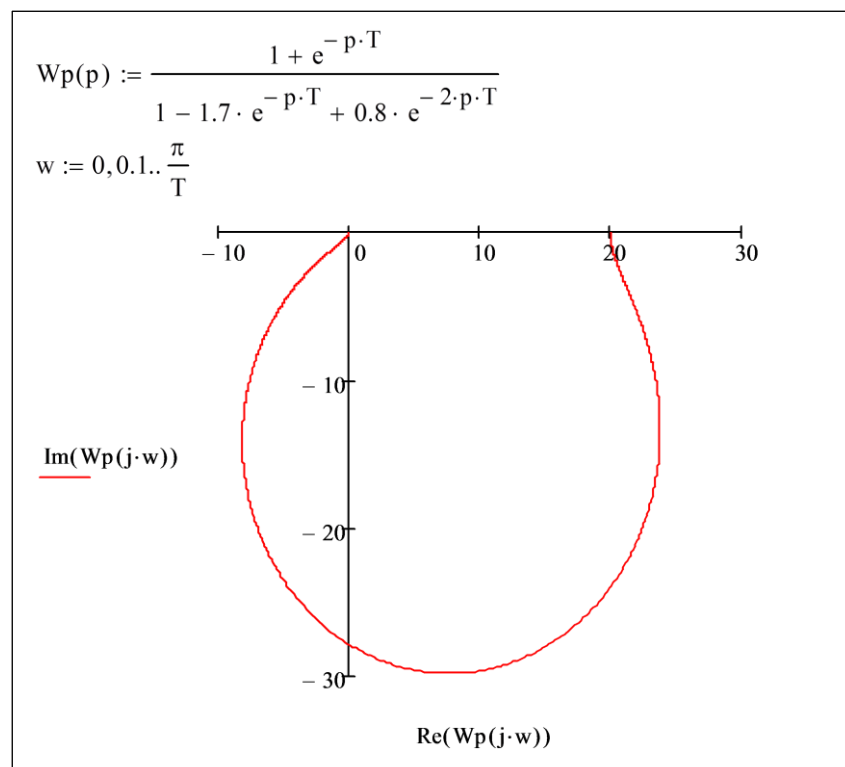
Вычисляя корни знаменателя, находим:

$$z^2 - 1.7 \cdot z + 0.8$$

$$\begin{pmatrix} 0.85 - 0.27838821814150109611i \\ 0.85 + 0.27838821814150109611i \end{pmatrix}$$

$$0.85^2 + 0.27838821814150109611^2 = 0.8$$

Таким образом, разомкнутая система устойчива и для суждения об устойчивости замкнутой системы нужно построить годограф АФХ разомкнутой системы. АФХ



Таким образом, используя Mathcad, строим годограф, по которому определяем, что замкнутая система устойчива (поскольку годограф не охватывает точку с координатами $(-1; j0)$).

5. Для схем с дискретной передаточной функцией разомкнутой системы, заданной в п.4 задания, определить статическую и кинетическую ошибки в замкнутой системе.

$$W_p^*(p) = \frac{1 + e^{-pT}}{1 - 1.7 \cdot e^{-pT} + 0.8 \cdot e^{-2pT}} = \frac{e^{2pT} + e^{pT}}{e^{2pT} - 1.7 \cdot e^{pT} + 0.8}.$$

Статическая ошибка – это ошибка, возникающая в системе при воздействии на входе единичной ступенчатой функции, т.е. $x_{\text{вх}} = 1[mT]$, имеющей изображение по Лапласу в виде:

$x_{\text{вх}}^*[p] = \frac{1}{1-e^{-pT}}$. Запишем дискретную передаточную функцию по Лапласу относительно сигнала

ошибки:
$$W_x^*(p) = \frac{1}{1+W_p^*} = \frac{1}{1 + \frac{1 + e^{-pT}}{1 - 1.7 \cdot e^{-pT} + 0.8 \cdot e^{-2pT}}} = \frac{1 - 1.7e^{-pT} + 0.8e^{-2pT}}{1 - 1.7e^{-pT} + 0.8e^{-2pT} + 1 + e^{-pT}} = \frac{1 - 1.7e^{-pT} + 0.8e^{-2pT}}{2 - 0.7e^{-pT} + 0.8e^{-2pT}}.$$

Для расчета статической ошибки воспользуемся формулой

$$x_{\text{уст}} = \lim_{p \rightarrow 0} (e^{pT} - 1) W_x^*(p) X_{\text{вх}}^*(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-pT}}{e^{-pT}} \cdot \frac{1 - 1.7e^{-pT} + 0.8e^{-2pT}}{2 - 0.7e^{-pT} + 0.8e^{-2pT}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-pT}}$$

Таким образом, очевидно, что $x_{\text{уст}} = \frac{1}{21}$

Кинетическая ошибка – это ошибка, возникающая в системе при воздействии на входе линейного возрастающего сигнала, т.е. $x_{\text{вх}} = mT$, имеющей изображение по Лапласу в виде:

$X_{\text{вх}}^*[p] = \frac{T e^{-pT}}{(1-e^{-pT})^2}$. Запишем дискретную передаточную функцию по Лапласу относительно

сигнала ошибки:
$$W_x^*(p) = \frac{1}{1+W_p^*} = \frac{1}{1 + \frac{1 + e^{-pT}}{1 - 1.7 \cdot e^{-pT} + 0.8 \cdot e^{-2pT}}} = \frac{1 - 1.7e^{-pT} + 0.8e^{-2pT}}{1 - 1.7e^{-pT} + 0.8e^{-2pT} + 1 + e^{-pT}} =$$

$$\frac{1 - 1.7e^{-pT} + 0.8e^{-2pT}}{2 - 0.7e^{-pT} + 0.8e^{-2pT}}.$$

Для расчета кинетической ошибки воспользуемся формулой:

$$x_{\text{уст}} = \lim_{p \rightarrow 0} (e^{pT} - 1) W_x^*(p) X_{\text{вх}}^*(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-pT}}{e^{-pT}} \cdot \frac{1 - 1.7e^{-pT} + 0.8e^{-2pT}}{2 - 0.7e^{-pT} + 0.8e^{-2pT}} \cdot \frac{T e^{-pT}}{(1 - e^{-pT})^2}$$

Легко вычислить, что значение кинетической ошибки равно $x_{\text{уст}} = \infty$

Аналогично можно рассчитать ошибки по возмущающему воздействию.

11. Синтез импульсных систем

11.1 Постановка задачи синтеза и способ реализации корректирующего устройства

Если импульсная САУ неустойчивая или не обладает необходимым качеством, в контур системы можно ввести корректирующие звенья, которые позволяют деформировать частотную характеристику разомкнутой системы желательным образом и тем самым обеспечить заданные показатели качества.

Корректирующие звенья (КЗ) могут быть включены в основной контур системы последовательно, параллельно или в виде цепи обратной связи относительно какого-либо звена системы. В импульсных системах возможны два варианта реализации КЗ. Оно может быть введено в непрерывную часть системы и реализовано как аналоговое звено. В этом случае ставится задача желаемого деформирования частотной характеристики непрерывной приведённой части $W_{\Pi}(p)$. Эта задача решается методами коррекции непрерывных систем.

Другой вариант реализации КЗ цифровой. В этом случае уравнение динамики корректирующего звена воспроизводит цифровое вычислительное устройство. Оно всегда присутствует в цифровых САУ, и поэтому этот вариант коррекции является предпочтительным именно для ЦСАУ. Если при этом ЦСАУ по своим динамическим свойствам является импульсной, параметры цифрового КЗ определяются методами синтеза импульсных САУ. Следовательно, задача синтеза импульсных систем сводится к определению передаточной функции $W_k^*(p)$ или частотной характеристики $W_k^*(j\omega)$ корректирующего звена, при которых замкнутая система обладала бы заранее заданными свойствами, отражающими требования технического задания. К ним можно отнести заданное значение перерегулирования, ошибки в установившемся режиме, астатизм, конечную длительность переходного процесса и т.д.

11.2. Условие осуществимости и грубости ИСАУ

При решении задачи синтеза ИСАУ необходимо обеспечить условие осуществимости корректирующего устройства и условие грубости скорректированной ИСАУ.

Решение задачи синтеза передаточной функции цифрового корректирующего устройства рассмотрим на примере, когда корректирующее устройство включается последовательно с приведённой частью, как показано на рис. 11.1.

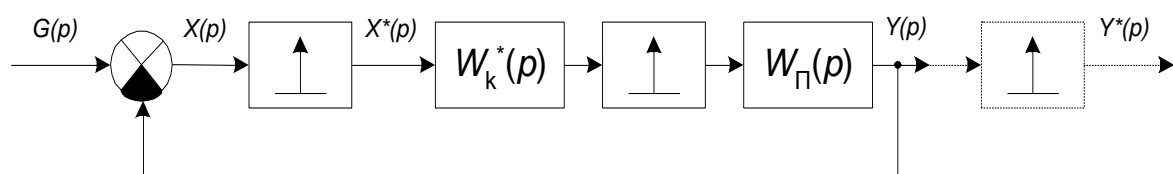


Рис.11.1. Последовательная коррекция

Для этого случая передаточная функция замкнутой системы относительно $Y^*(p)$ имеет вид:

$$K^*(p) = \frac{W_K^*(p)W_\Pi^*(p)}{1 + W_K^*(p)W_\Pi^*(p)}. \quad (11.1)$$

Пусть мы хотим реализовать некую заданную передаточную функцию $K_3^*(p)$ путём выбора $W_K^*(p)$. Тогда на основании (11.1) передаточная функция корректирующего звена определяется в форме:

$$W_K^*(p) = \frac{1}{W_\Pi^*(p)} \frac{K_3^*(p)}{1 - K_3^*(p)} = \frac{Q^*(p)}{P^*(p)} \frac{K_3^*(p)}{1 - K_3^*(p)}, \quad (11.2)$$

где $W_\Pi^*(p) = \frac{P^*(p)}{Q^*(p)}$.

Корректирующее звено $W_K^*(p)$ может быть реализовано практически, если степень числителя будет меньше степени знаменателя.

Назовём порядком передаточной функции n разность степеней знаменателя и числителя. Передаточную функцию $W_K^*(p)$ можно реализовать, если её порядок неотрицателен [2,3]. Следовательно, на основании (11.2) первое условие осуществимости требует, чтобы порядок заданной передаточной функции n_3 был не меньше порядка передаточной функции приведённой части n_Π :

$$n_3 \geq n_\Pi. \quad (11.3)$$

Если $W_\Pi^*(p)$ содержит звено запаздывания со временем запаздывания $\tau = s_0 T$:

$$W_\Pi^*(p) = \frac{P^*(p)}{Q^*(p)} e^{-ps_0 T},$$

то согласно (11.2) корректирующее звено имеет передаточную функцию:

$$W_K^*(p) = \frac{Q_1^*(p)}{P^*(p)} e^{ps_0 T} \frac{K_3^*(p)}{1 - K_3^*(p)}. \quad (11.4)$$

Отсюда видно, что $W_K^*(p)$ должно обеспечить упреждение на s_0 периодов повторения, что физически невозможно. Поэтому второе условие осуществимости $W_K^*(p)$ требует, чтобы при наличии звена запаздывания в $W_\Pi^*(p)$ оно было включено в передаточную функцию заданной системы:

$$K_3^*(p) = K_{31}^*(p) e^{-ps_0 T}. \quad (11.5)$$

Тогда корректирующее звено не будет содержать элемента упреждения:

$$W_K^*(p) = \frac{Q_1^*(p)}{P^*(p)} \frac{K_{31}^*}{1 - K_{31}^*(p) e^{-ps_0 T}}. \quad (11.6)$$

Обеспечить практически точное равенство (11.2) и (11.6) невозможно из-за наличия погрешностей, вызванных непостоянством параметров приведённой части. Если при малых вариациях параметров $W_{\Pi}^*(p)$ и $W_K^*(p)$ погрешностях изменение переменных, характеризующих состояние системы, будут также малы, то такую систему называют *грубой*. Негрубая система неработоспособна, так как незначительное изменение параметров звеньев ведёт к неограниченным изменениям во времени переменных состояния системы.

Для того чтобы замкнутая ИСАУ была грубой, нельзя допускать сокращения правых нулей и полюсов передаточной функции $W_{\Pi}^*(p)$ при помощи передаточной функции $W_K^*(p)$ согласно выражению (11.1). При наличии неточности равенства сокращаемых множителей появляется неустойчивость. Таким образом, условие грубости требует, чтобы передаточная функция $W_K^*(p)$ не содержала нулей и полюсов, близких к правым полюсам и нулям передаточной функции $W_{\Pi}^*(p)$ приведённой части системы.

Как следует из (10.2), для выполнения этого условия необходимо и достаточно, чтобы заданная передаточная функция $K_3^*(p)$ содержала правые нули полинома $P^*(p)$, т. е. правые нули $W_{\Pi}^*(p)$, а $1 - K_3^*(p)$ содержала бы правые нули полинома $Q^*(p)$, т. е. правые полюсы $W_{\Pi}^*(p)$ [3].

11.3. Основные уравнения аналитического синтеза

Уравнения синтеза должны обеспечить синтез осуществимой и работоспособной импульсной системы. Для составления уравнения синтеза представим числитель $P^*(p)$ и знаменатель $Q^*(p)$ передаточной функции $W_{\Pi}^*(p)$ приведённой части системы в виде

$$P^*(p) = P_+^*(p)P_-^*(p) \quad ; \quad Q^*(p) = Q_+^*(p)Q_-^*(p) \quad , \quad (11.7)$$

где $P_+^*(p)$ и $Q_+^*(p)$ - многочлены переменной e^{pT} , содержащие левые корни; $P_-^*(p)$ и $Q_-^*(p)$ - то же, содержащие правые корни полиномов $P^*(p)$ и $Q^*(p)$. Такое разбиение называется факторизацией.

При наличии в приведённой части системы запаздывания полином числителя с учётом (11.7) можно представить:

$$P^*(p) = P_+^*(p)P_-^*(p)e^{-ps_0 T}.$$

Согласно условиям осуществимости и работоспособности, задаваемая передаточная функция $K_3^*(p)$ и многочлен $1 - K_3^*(p)$ осуществимой и грубой системы должны иметь вид:

$$K_3^*(p) = P_-^*(p)e^{-ps_0 T} \frac{M^*(p)}{G^*(p)}; \quad 1 - K_3^*(p) = Q_-^*(p) \frac{N^*(p)}{G^*(p)}, \quad (11.8)$$

где $M^*(p)$, $N^*(p)$, $G^*(p)$ - многочлены переменной e^{pT} степеней n_M , n_N и n соответственно, которые при синтезе подлежат определению. Очевидно, полином $G^*(p)$ является знаменателем передаточной функции $K_3^*(p)$.

Складываем правые и левые части выражений (11.8) и получаем первое полиномиальное уравнение синтеза:

$$P_-^*(p)M^*(p) + Q_-^*(p)e^{ps_0 T} N^*(p) = G^*(p)e^{ps_0 T}, \quad (11.9)$$

которое позволяет определить многочлены $M^*(p)$ и $N^*(p)$.

В ряде случаев для улучшения переходного процесса по управляющему воздействию (сигнала на входе непрерывной части) требуется в выражении для $K_3^*(p)$ включить весь полином $P^*(p)$, а в выражении для $1 - K_3^*(p)$ - весь полином $Q^*(p)$. При выполнении этого условия и отсутствии запаздывания в исходной системе имеем второе уравнение синтеза:

$$P^*(p)M^*(p) + Q^*(p)N^*(p) = G^*(p). \quad (11.10)$$

Когда к импульсной системе предъявляется требование нулевой ошибки в установившемся режиме, то полином $Q^*(p)$ должен содержать в качестве сомножителя двучлен $(e^{pT} - 1)^v$, где v - индекс астатизма. Это будет иметь место, если

$$Q^*(p) = Q_v^*(p)(e^{pT} - 1)^v.$$

тогда получаем третье уравнение синтеза системы с астатизмом первого порядка:

$$P^*(p)M^*(p) + Q_1^*(p)(e^{pT} - 1)N^*(p) = G^*(p). \quad (11.11)$$

Все три уравнения синтеза или их комбинации могут служить для синтеза системы с конечной длительностью переходного процесса, если положить $G^*(p) = e^{pnT}$ [3]. Для этого случая сформируем четвертое уравнение синтеза:

$$P^*(p)M^*(p) + Q_-^*(p)N^*(p) = e^{pnT}. \quad (11.12)$$

Во всех уравнениях синтеза неизвестными являются коэффициенты полиномов $M^*(p)$ и $N^*(p)$:

$$M^*(p) = m_0 + m_1 e^{pT} + \dots + m_{n_M} e^{pn_M T};$$

$$N^*(p) = n_0 + n_1 e^{pT} + \dots + n_{n_N} e^{pn_N T}.$$

Эти коэффициенты определяются из системы алгебраических уравнений, которую можно составить на основании уравнения синтеза, приравнивая сумму коэффициентов правой и левой части его при одинаковых степенях e^{pT} . При этом степень этих многочленов должна быть задана из условия разрешимости системы алгебраических уравнений и физической реализуемости передаточных функций.

Для разрешимости уравнений синтеза нужно, чтобы число уравнений, получаемых из уравнений синтеза относительно коэффициентов искомым многочленов, было бы не больше числа этих коэффициентов. Если число уравнений меньше, то следует часть коэффициентов задать исходя из физических соображений. Число коэффициентов многочленов $M^*(p)$ и $N^*(p)$ равно их степеням, увеличенным на единицу, т.е. $n_M + 1$ и $n_N + 1$ (с учётом свободного члена). Число уравнений, которое можно получить из уравнения синтеза, равно степени многочлена $G^*(p)$, увеличенной на единицу, т.е. $n + 1$. Рассмотрим вопрос разрешимости и реализуемости на примере четвертого уравнения синтеза. Условие разрешимости четвёртого уравнения синтеза имеет вид

$$n + 1 \leq (n_M + 1) + (n_N + 1) \rightarrow n \leq n_M + n_N + 1. \quad (11.13)$$

Из условия осуществимости $K_3^*(p)$ для четвёртого уравнения (11.12) на основании (11.8) следует, что

$$n_P + n_M \leq n. \quad (11.14)$$

Кроме того, из (11.8) очевидно, что

$$n_{Q-} + n_N = n. \quad (11.15)$$

Из соотношений (11.14), (11.15) нетрудно определить допустимые степени многочленов $M^*(p)$ и $N^*(p)$:

$$n_M \geq n_{Q-} - 1; \quad n_N \geq n_P - 1. \quad (11.16)$$

Для четвёртого уравнения синтеза корректирующее звено имеет передаточную функцию

$$W_K^*(p) = \frac{M^*(p)Q_+^*(p)}{N^*(p)}. \quad (11.17)$$

Пример. Рассмотрим синтез процесса конечной длительности. Задана передаточная функция разомкнутой ИСАУ:

$$W^*(p) = \frac{P^*(p)}{Q^*(p)} = \frac{1,84(e^{pT} + 0,718)}{(e^{pT} - 1)(e^{pT} - 0,368)}.$$

Принимаем показатель степени характеристического уравнения $K_3^*(p)$ синтезируемой системы $n = n_Q = 2$. Составляем уравнение синтеза на основании четвёртого уравнения:

$$1,84(e^{pT} + 0,718)M^*(p) + (e^{pT} - 1)N^*(p) = e^{2pT}.$$

Используя соотношения (11.16), задаём $n_M = 0$, $n_N = 1$.

Тогда $M^*(p) = m_0$, $N^*(p) = n_1 e^{pT} + n_0$. Подставляем многочлены $M^*(p)$ и $N^*(p)$ в уравнение синтеза, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях e^{pT} и определяем неизвестные коэффициенты m_0, n_0 и n_1 :

$$1,84 \cdot 0,718 m_0 - n_0 = 0;$$

$$1,84 m_0 + n_0 - n_1 = 0;$$

$$n_1 = 1; \quad m_0 = 0,316; \quad n_0 = 0,418.$$

Теперь на основании (11.17) можно записать передаточную функцию корректирующего звена:

$$W_k^*(p) = \frac{0,316 (e^{pT} - 0,368)}{e^{pT} + 0,418}.$$

Оптимальная передаточная функция замкнутой системы имеет вид:

$$K_{з\text{ опт}}^*(p) = P^*(p) \frac{M^*(p)}{G^*(p)} = \frac{0,582 (e^{pT} + 0,718)}{e^{2pT}}.$$

Из выражения для $K_{з\text{ опт}}^*(p)$ следует, что переходная функция $h[t]$ имеет конечное время установления равное $2T = nT$:

$$h[0] = 0; \quad h[T] = 0,582; \quad h[2T] = 1.$$

11.4. Синтез корректирующих устройств на основе ЛАЧХ

Ранее были рассмотрены частотные характеристики ИСАУ и введено понятие математической амплитудно-частотной характеристики ЛАЧХ, которая строится относительно псевдочастоты ω^* . Было показано, что в этом случае процедура построения ЛАЧХ ИСАУ не является сложной и аналогична процедуре построения ЛАЧХ непрерывных систем. Это положение позволяет ставить вопрос об использовании ЛАЧХ для решения задачи синтеза в импульсных системах. Решение задачи синтеза в ИСАУ может быть проведено двумя способами:

- 1) Введением корректирующих устройств в непрерывную часть системы в соответствии с методикой, известной из теории непрерывных линейных САУ;
- 2) Введением корректирующих элементов в дискретную часть системы в виде дискретных фильтров (реализованных в вычислительном устройстве). Используем методику синтеза импульсных систем по логарифмическим частотным характеристикам на примере, изложенном ранее. При этом рассмотрим три подхода: 1) Последовательная коррекция по ЛАЧХ непрерывной разомкнутой системы и реализация корректирующего устройства в виде непрерывного корректирующего устройства; 2) последовательная коррекция по ЛАЧХ непрерывной разомкнутой системы и реализация корректирующего устройства в виде

дискретного фильтра; 3) последовательная коррекция по ЛАЧХ импульсной разомкнутой системы. Исследуемая система представлена на рис. 11.2.

Передаточная функция разомкнутой непрерывной системы имеет вид $W_p(p) = \frac{100}{p(1+p)}$.

Построив логарифмическую амплитудно-частотную характеристику исходной некорректированной разомкнутой системы $L_{НС}(\omega)$, желаемую скорректированную ЛАЧХ $L_{СК}(\omega)$ и разностную ЛАЧХ $L_0(\omega) = L_{НС}(\omega) - L_{СК}(\omega)$, равную ЛАЧХ непрерывного корректирующего устройства $L_{КУ}(\omega)$ (рис.10.2), восстановим непрерывную передаточную функцию последовательного корректирующего устройства в виде $W_{ку}(p) = \frac{(1+p)(1+2p)}{(1+10p)(1+20p)}$.

Для определения вида дискретного фильтра, реализующего корректирующее устройство $W_{ку}(p)$, воспользуемся приближенным представлением оператора z -преобразования через оператор непрерывного преобразования Лапласа. Для этого представим экспоненту e^{pT} в виде ряда Тейлора

и ограничимся двумя членами разложения: $z = e^{pT} = \frac{e^{p \frac{T}{2}}}{e^{-p \frac{T}{2}}} \approx \frac{1 + p \frac{T}{2}}{1 - p \frac{T}{2}}$, тогда $p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$.

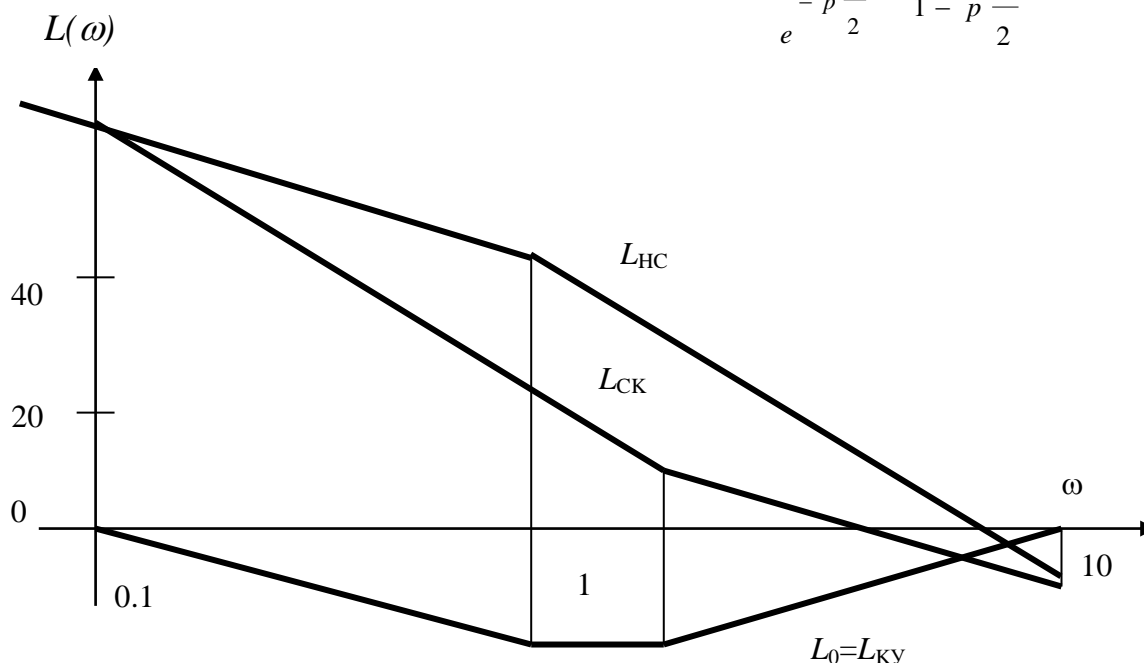


Рис.11.2. Коррекция по ЛАЧХ (1 и 2 путь)

Подставляя последнее выражение в формулу для непрерывной передаточной функции корректирующего устройства $W_{ку}(p)$ получаем искомый фильтр. Заметим, что эту подстановку можно выполнить в Mathcad следующим образом [12]:

$$T := 0.1$$

$$W_{ку}(p) := \frac{(1+p) \cdot (1+2 \cdot p)}{(1+10 \cdot p) \cdot (1+20 \cdot p)} \text{ substitute } p = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

$$W_{\text{кy}}^*(z) = \frac{0,0107 z^2 - 0,01983 z + 0,00919}{z^2 - 1,985 z + 0,9851}$$

$$W_{\text{кy}}^*(z^{-1}) = \frac{0,0107 - 0,01983 z^{-1} + 0,00919 z^{-2}}{1 - 1,985 z^{-1} + 0,9851 z^{-2}}.$$

Реализация этого фильтра возможна в цифровом вычислительном устройстве дискретной части системы в виде рекуррентного соотношения $y[lT] = 0,0107x[lT] -$

$$-0,01983x[(l-1)T] + 0,00919x[(l-2)T] + 1,985y[(l-1)T] - 0,9851y[(l-2)T],$$

где $x[lT]$ и $y[lT]$ – сигналы на входе и выходе дискретного фильтра в l -ый времени. Допустимую область вышеописанного преобразования можно определить в частотной области. Критерием оценки является тождественность (с допустимой погрешностью) частотных характеристик непрерывного и дискретного фильтра. В частотной области приближенное представление имеет

вид экспоненты: $e^{j\omega T} \approx \frac{1 + j\omega \frac{T}{2}}{1 - j\omega \frac{T}{2}}$. Погрешность этого преобразования мала при малых

значениях $\omega \frac{T}{2}$. Граничным значением является частота $\omega_g = \frac{2}{T}$.

Передаточная функция импульсной разомкнутой системы (рис.11.3)

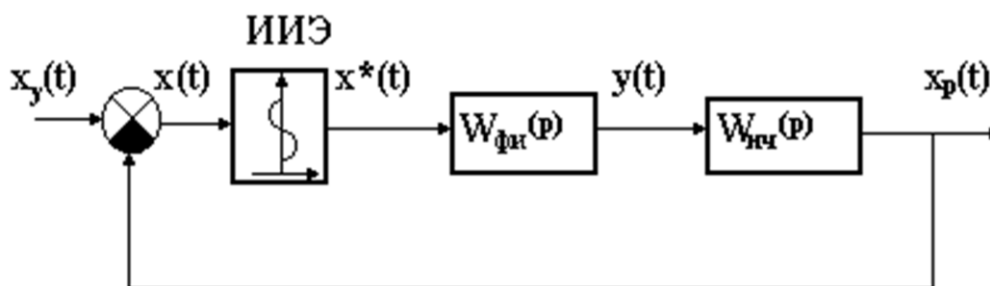


Рис. 11.3. Структурная схема ИСАУ

(где $W_{\text{нч}}(p) = \frac{100}{p(1+p)}$, $W_{\text{фн}}(p) = \frac{1 - e^{-p \cdot T}}{p}$, $T = 0.1$, $W_{\text{фн}}(z) = \frac{z-1}{z}$)),

может быть получена следующим образом:

$$W_p(p) = W_{\text{фн}}(p) \cdot W_{\text{нч}}(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p} \cdot \frac{100}{p \cdot (1+p)} = \frac{e^{pT} - 1}{e^{pT}} \cdot \frac{100}{p^2 \cdot (1+p)} = \frac{e^{pT} - 1}{e^{pT}} \cdot \overline{W}(p)$$

Раскладывая $\overline{W}(p)$ на простые дроби, получим: $\overline{W}(p) = \frac{100}{p^2} - \frac{100}{p} + \frac{100}{1+p}$,

откуда найдем весовую функцию $\overline{w}(t) = (100 \cdot t - 100 + 100 \cdot e^{-t}) \cdot 1(t)$.

Переходя в дискретную область, т.е. производя подстановку $t = nT$, получим:

$$\bar{w}(nT) = (100 \cdot nT - 100 + 100 \cdot e^{-nT}) \cdot 1(nT)$$

Преобразуя $\bar{w}(nT)$ по дискретному преобразованию Лапласа, получим:

$$\begin{aligned} \bar{W}^*(p) &= \frac{100 \cdot T \cdot e^{-pT}}{(1 - e^{-pT})^2} - \frac{100}{(1 - e^{-pT})} + \frac{100}{(1 - e^{-pT}) \cdot e^{-T}}, \text{ или, заменяя } e^{pT} = Z \\ \bar{W}^*(z) &= \frac{10 \cdot z}{(z-1)^2} - \frac{100 \cdot z}{(z-1)} + \frac{100 \cdot z}{(z - e^{-T})}, \text{ из которого получим:} \\ W_p^*(z) &= \frac{z-1}{z} \cdot \bar{W}^*(z) = \frac{10}{z-1} - 100 + \frac{100 \cdot (z-1)}{(z - e^{-T})}. \end{aligned}$$

Упрощая последнее выражение, получим дискретную передаточную функцию разомкнутой системы, которая имеет вид

$$W_p^*(p) = \frac{0,4678 + 0,4837 e^{pT}}{0,90484 - 1,9048 e^{pT} + 1,0 e^{2pT}}.$$

Для построения по ней логарифмической амплитудно-частотной характеристики

произведем подстановку $e^{pT} = z \approx \frac{1 + p \frac{T}{2}}{1 - p \frac{T}{2}}$, что позволит перейти к приближенной

непрерывной передаточной функции:

$$\bar{W}_p(p) = \frac{2383 - 1171 p - 0,9954 p^2}{1 + 238,3 p + 238,5 p^2} = \frac{2383 (1 + 8358 \cdot 10^{-4} p)(1 - 4,997 \cdot 10^{-2} p)}{(1 + 237,9 p)(1 + 1,005 p)}.$$

Заменим в выражении для $\bar{W}_p(p)$ p на $j\omega$ и получим комплексный коэффициент усиления:

$$\bar{W}_p(j\omega) = \frac{2383 (1 + 8358 \cdot 10^{-4} j\omega)(1 - 4,997 \cdot 10^{-2} j\omega)}{(1 + 237,9 j\omega)(1 + 1,005 j\omega)}.$$

Построим асимптотическую логарифмическую амплитудно-частотную характеристику $L_{нс}(\omega)$ по найденной функции $\bar{W}_p(j\omega)$ в зависимости от частоты ω (которая в данном случае в диапазоне

частот $0 \leq \omega < \frac{2}{T}$ совпадает с псевдочастотой) известными из теории непрерывных автоматических систем методами [13] и проведем по ней последовательную коррекцию,

аналогичную представленной ранее. Не приводя промежуточных вычислений, покажем результаты построений на рис.11.4.

Легко видеть, что ЛАЧХ, построенная по приближенной передаточной функции, отличается от ЛАЧХ нескорректированной системы на низких и высоких (больших $2/T$) частотах. Корректирующее устройство не отличается от выше найденного и может быть реализовано как непрерывное и как дискретное корректирующее устройство. Очевидно, что данный метод применим, когда величина периода квантования определяет граничную частоту приближенного преобразования ω_g за пределами среднего частотного диапазона ЛАЧХ.

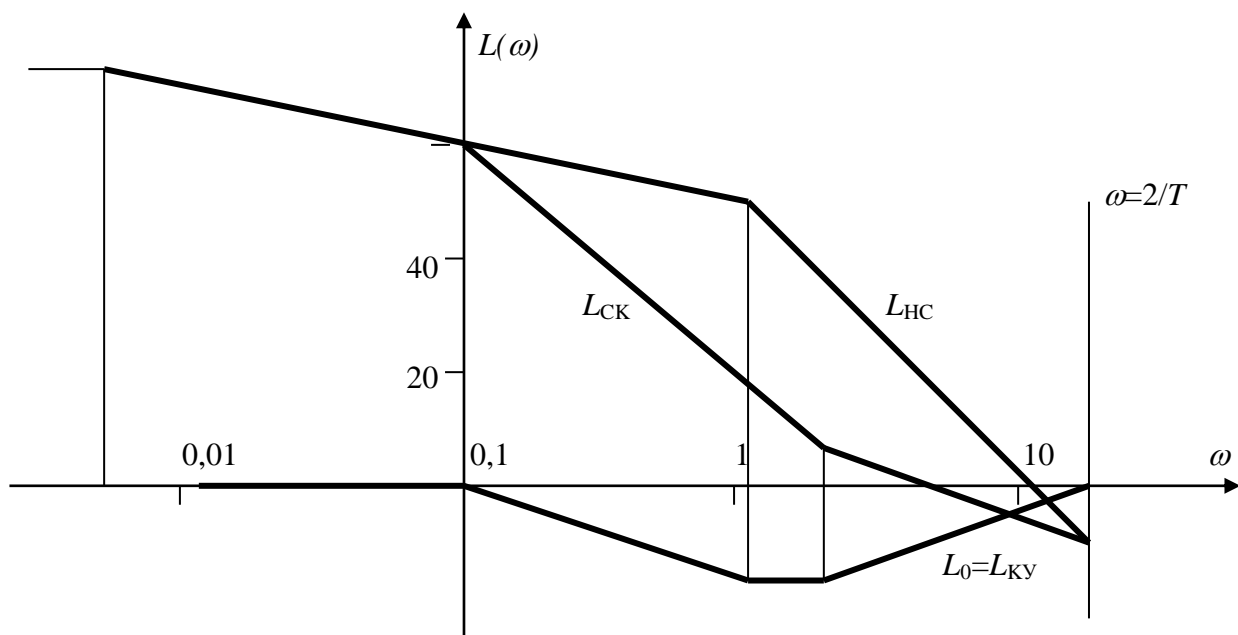


Рис.11.3. Коррекция по ЛАЧХ (3-ий путь)

11.5. Список литературы

1. **Цыпкин Я. З.** Теория линейных импульсных систем. М.: Физматиз, 1963.
2. **Цыпкин Я. З.** Основы теории автоматического управления. М.: Наука, 1977.
3. **Теория автоматического управления.** Ч. 1. / Под ред. А. В. Нетушил М.: Высшая школа, 1976.?
4. **Иванов В. А., Ющенко А. С.** Теория дискретных систем автоматического управления. М.: Физматиз, 1983.
5. **Куо Б.** Теория и проектирование цифровых систем управления. М.: Машиностроение, 1986.
6. **Микропроцессорные системы автоматического управления.** / Под ред. В. А. Бессекерского Л.: Машиностроение, 1976.
7. **Бессекерский В. А.** Цифровые автоматические системы. М.: Наука, 1976.

8. **Микропроцессорные автоматические системы регулирования.** / Под ред. В. В. Солодовникова М.: Высшая школа, 1991.
9. **Бессекерский В. А., Изранцев В. В.** Системы автоматического управления с микроЭВМ. М.: Наука, 1987.
10. **Ягодкина Т.В., Хризолитова С.А.** Применение Mathcad для решения задач теории автоматического управления, Учебное пособие. М.: Изд-во МЭИ, 2004. – 52 с.
11. **Ягодкина Т.В., Хризолитова С.А., Беседин В.М., О.А.Бондин, Грачев Е.Н.** Лабораторный практикум по курсу “Основы автоматического управления”. Исследование САУ с использованием прикладного пакета Matlab, М.: Изд-во МЭИ, 2007. - 89 с.
12. **Цыпкин Я. З.** Теория линейных импульсных систем. М.: Физматиз, 1963.
13. **Цыпкин Я. З.** Основы теории автоматического управления. М.: Наука, 1977.
14. **Теория автоматического управления.** Ч. 1. / Под ред. А. В. Нетушил М.: Высшая школа, 1976.?
15. **Иванов В. А., Ющенко А. С.** Теория дискретных систем автоматического управления. М.: Физматиз, 1983.
16. **Куо Б.** Теория и проектирование цифровых систем управления. М.: Машиностроение, 1986.
17. **Микропроцессорные системы автоматического управления.** / Под ред. В. А. Бессекерского Л.: Машиностроение, 1976.
18. **Бессекерский В. А.** Цифровые автоматические системы. М.: Наука, 1976.
19. **Микропроцессорные автоматические системы регулирования.** / Под ред. В. В. Солодовникова М.: Высшая школа, 1991.
20. **Бессекерский В. А., Изранцев В. В.** Системы автоматического управления с микроЭВМ. М.: Наука, 1987.
21. **Ягодкина Т.В., Хризолитова С.А.** Применение Mathcad для решения задач теории автоматического управления, Учебное пособие. М.: Изд-во МЭИ, 2004. – 52 с.
22. **Ягодкина Т.В., Хризолитова С.А., Беседин В.М., О.А.Бондин, Грачев Е.Н.** Лабораторный практикум по курсу “Основы автоматического управления”. Исследование САУ с использованием прикладного пакета Matlab, М.: Изд-во МЭИ, 2007. - 89 с.

12. Переменные состояния в импульсных системах

В общем случае все переменные, с которыми сталкивается исследователь системы автоматического управления при синтезе и анализе, подразделяются на три группы (рис. 12.1):

- входные переменные или входные воздействия $u_i(t)$, генерируемые системами, внешними по отношению к исследуемой;

- выходные переменные $y_i(t)$, характеризующие реакцию системы и ее поведение при заданных входных воздействиях;
- переменные состояния или промежуточные переменные $x_i(t)$, характеризующие динамическое “внутреннее” поведение исследуемой системы и, как правило, скрытые от наблюдателя.

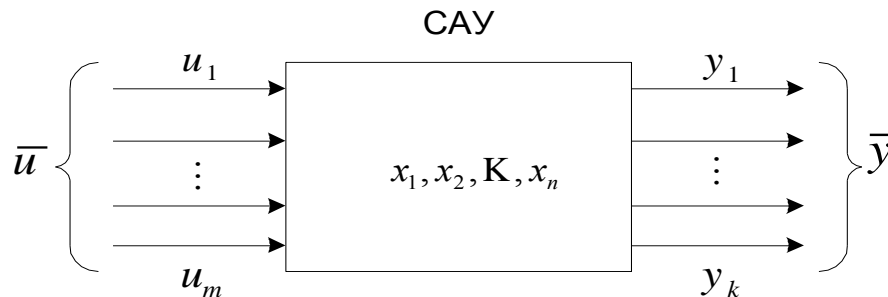


Рис.12.1. Переменные состояния многомерной системы

Все перечисленные переменные в общем случае являются векторными величинами. Множество всех значений, которое может принять вектор, образует некое пространство, поэтому можно говорить о пространстве входных и выходных переменных и о пространстве состояний системы. Вектор переменных состояния системы характеризует состояние системы. Существует и другое определение этого термина. Состояние системы можно рассматривать как минимальную информацию о системе, необходимую для определения выходной переменной по известной входной.

Понятие переменных состояния позволяют представить описание ИСАУ в виде системы разностных уравнений первого порядка, которые в общем случае имеют вид:

$$\bar{x}[(l+1)T] = \bar{f}(\bar{x}[lT], \bar{u}[lT]); \quad (12.1)$$

$$\bar{y}[(l+1)T] = \bar{\varphi}(\bar{x}[lT], \bar{u}[lT]),$$

где $\bar{f}, \bar{\varphi}$ - дифференцируемые функции.

Для линейных стационарных импульсных систем уравнения состояния будут линейными:

$$\bar{x}[(l+1)T] = \mathbf{A} \cdot \bar{x}[lT] + \mathbf{B} \cdot \bar{u}[lT]; \quad (12.2)$$

$$\bar{y}[(l+1)T] = \mathbf{C} \cdot \bar{x}[lT] + \mathbf{D} \cdot \bar{u}[lT]$$

Выбор переменных состояния системы неоднозначен и зависит от типа решаемой задачи и исходных данных, на основании которых определяются переменные состояния. Число переменных состояния равно степени разностного уравнения или степени характеристического уравнения передаточной функции.

Существует несколько способов получения описания ИСАУ в переменных состояниях. Оди

$$\left[\begin{array}{cc} [x] & [y] \\ [z] & [w] \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} [x] & [y] \\ [z] & [w] \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} [0] & [0] \\ [0] & [0] \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} [x] & [y] \\ [z] & [w] \end{array} \right] \quad (10.9)$$

1. *Journal of Management Studies*, 1997, 34, 1, 1-14.

5 3

тогда

Figure 1

$$y[(l+2)T] + 3y[(l+1)T] + 5y[lT] = u[lT].$$

Представим описание ИСАУ в переменных состояния:

$$x_1[lT] = y[lT];$$

$$x_1[(l+1)T] = x_2[lT] = y[(l+1)T];$$

$$x_2[(l+1)T] = -3x_2[lT] - 5x_1[lT] + u[lT].$$

Описание ИСАУ в переменных состояния можно получить на основании дискретной передаточной функции. Пусть имеется передаточная функция системы с одним входным воздействием и одним выходом:

$$W^*(p) = \frac{P^*(p)}{Q^*(p)} = \frac{b_m e^{pmT} + b_{m-1} e^{p(m-1)T} + \dots + b_0}{a_n e^{pnT} + a_{n-1} e^{p(n-1)T} + \dots + a_0} = \frac{Y^*(p)}{U^*(p)} \quad (12.6)$$

Характеристическое уравнение системы (знаменатель передаточной функции) $Q^*(p) = 0$ имеет простые корни, при этом $n > m$. Тогда $W^*(p)$ можно разложить на простые дроби:

$$W^*(p) = \sum_{v=1}^n \frac{P^*(p_v)}{\dot{Q}^*(p_v)(e^{pT} - e^{p_v T})}, \quad (12.7)$$

где n – степень; p_v – корни характеристического уравнения.

Тогда

$$Y^*(p) = \sum_{v=1}^n \frac{c_v}{e^{pT} - e^{p_v T}} U^*(p). \quad (12.8)$$

Примем дискретное изображение переменной состояния с индексом “ v ” в форме

$$X_v^*(p) = \frac{U^*(p)}{e^{pT} - e^{p_v T}}. \quad (12.9)$$

Перейдем к оригиналу выражению (12.9) и добавим оригинал выражения (12.8):

$$x_v[(l+1)T] = e^{p_v T} x_v[lT] + u[lT] \quad \text{при} \quad v = \overline{1, n};$$

$$y[lT] = \sum_{v=1}^n c_v x_v[(l+1)T] \quad (12.10)$$

Система (12.10) является описанием в переменных состояния ИСАУ, которая задана передаточной функцией (12.6). Матрицы коэффициентов имеют вид:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} e^{p_1 T} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{p_2 T} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{p_3 T} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{p_n T} \end{vmatrix} ; \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix} ; \quad \mathbf{C} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \end{vmatrix}.$$

Соотношение (12.8) позволяет ввести другой вариант дискретного изображения переменной состояния:

$$X_v^*(p) = \frac{U^*(p)c_v}{e^{pT} - e^{p_v T}}. \quad (12.11)$$

Перейдем к оригиналу выражения (12.11), добавим оригинал выражения (12.8) и получим описание ИСАУ в переменных $x_v[lT]$ состояния в форме несколько отличной от (12.10):

$$\begin{aligned} x_v[(l+1)T] &= e^{p_v T} x_v[lT] + c_v u[lT] \quad \text{при} \quad v = \overline{1, n}; \\ y[lT] &= \sum_{v=1}^n x_v[(l+1)T] \end{aligned} \quad (12.12)$$

Для этого описания:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} e^{p_1 T} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{p_2 T} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{p_3 T} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{p_n T} \end{vmatrix} ; \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{vmatrix} ; \quad \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

12.2. Описание многомерных дискретных систем в пространстве состояний.

Рассмотрим один из способов представления, заключающийся в замене первой производной – конечной разностью по возрастания, т.е. замене:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \dot{\bar{x}} \approx \Delta \bar{x} = \frac{\bar{x}[n+1] - \bar{x}[n]}{T}.$$

Таким образом, непрерывное представление в пространстве состояний: $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B \cdot \bar{u} \\ \bar{y} = C\bar{x} + D \cdot \bar{u} \end{cases}$

можно заменить дискретным: $\begin{cases} \bar{x}[n+1] = A_d \bar{x}[n] + B_d \cdot \bar{u}[n] \\ \bar{y}[n] = C \bar{x}[n] + D \cdot \bar{u}[n] \end{cases}$, где матрицы A_d, B_d имеют

вид:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} Ta_{11} + 1 & Ta_{12} & \cdots & Ta_{1n} \\ Ta_{21} & Ta_{22} + 1 & \cdots & Ta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Ta_{n1} & Ta_{n2} & \cdots & Ta_{nn} + 1 \end{bmatrix},$$

$$B_d = T \cdot B.$$

12.3. Модели многомерных линейных динамических систем

Модели, используемые для описания многомерных линейных динамических систем, могут быть получены из соответствующих одномерных путем перехода к матричным уравнениям. При этом каждая модель характеризуется набором целых чисел, определяющих структуру модели, которые называются структурными индексами. От этих индексов зависит число оцениваемых параметров.

Рассмотрим основные классы моделей, используемые для описания многомерных динамических систем, при этом с помощью некоторого преобразования всегда можно перейти от одного класса моделей к другому. Будем считать, что исследуемая система имеет p входов, g выходов и порядок n .

Используем следующие обозначения:

$u(k)$ – p мерный входной вектор в момент времени k ;

$y(k)$ – g мерный выходной вектор в момент времени k ;

z – оператор сдвига ($y(k+1) = z \cdot y(k)$).

12.2.1. Модель в виде матрицы передаточных функций

При наличии в ИСАУ нескольких входов $\bar{u} = \{u_1, \dots, u_p\}$ и выходов $\bar{y} = \{y_1, \dots, y_g\}$ передаточная функция представляется в матричном виде. Каждый элемент матрицы $W_{ji}^*(p)$ ($j = \overline{1, g}; i = \overline{1, p}$) представляет собой передаточную функцию между j -м выходом и i -м входом:

$$W_{ji}^*(p) = \frac{Y_j^*(p)}{U_i^*(p)}.$$

Для перехода к описанию в переменных состояния на основании матричной передаточной функции составляем систему уравнений, в которых все $Y_j^*(p)$ представляем через входные переменные:

$$Y_m^*(p) = W_{m1}^*(p)U_1^*(p) + W_{m2}^*(p)U_2^*(p) + \dots + W_{mr}^*(p)U_z^*(p). \quad (12.13)$$

выражений задаем форму дискретного преобразования для каждой переменной состояния $X_k^*(p)$

$$n(F) = n\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, F\right). \quad (12.14)$$

Число $X_k^*(p)$ равно числу вариантов различных элементарных дробей среди всех $Y_j^*(p)$.

Переходим к оригиналам выражений (12.14), что позволяет нам получить описание ИСАУ в переменных состояния в форме (12.2).

Пример. Матричная передаточная функция ИСАУ имеет вид

$$W^*(p) = \left| \begin{array}{cc} \frac{e^{pT}}{(e^{pT} + 1)(e^{pT} + 2)} & \frac{1}{(e^{pT} + 2)} \\ \frac{e^{2pT}}{(e^{pT} + 1)(e^{pT} + 3)} & 4 \end{array} \right|$$

Проводим разложение элементов матрицы на простые дроби и составляем систему уравнений относительно элементов вектора $\bar{Y}^*(p)$:

$$Y_1^*(p) = -\frac{1}{e^{pT} + 1}U_1^*(p) + \frac{2}{e^{pT} + 2}U_1^*(p) + \frac{1}{e^{pT} + 2}U_2^*(p),$$

$$Y_2^*(p) = \frac{0,5}{e^{pT} + 1}U_1^*(p) + \frac{4,5}{e^{pT} + 3}U_1^*(p) + U_1^*(p) + 4U_2^*(p).$$

На основании анализа этих уравнений принимаем:

$$X_1^*(p) = \frac{U_1^*(p)}{e^{pT} + 1}; \quad X_2^*(p) = \frac{2U_1^*(p) + U_2^*(p)}{e^{pT} + 2}; \quad X_3^*(p) = \frac{4,5U_1^*(p)}{e^{pT} + 3}$$

Переходим к оригиналу и получаем описание системы в переменных состояния:

$$\begin{aligned}
x_1[(k+1)T] &= -x_1[kT] + u_1[kT]; & x_2[(k+1)T] &= -2x_2[kT] + 2u_1[kT] + u_2[kT]; \\
x_3[(k+1)T] &= -3x_3[kT] + 4,5u_1[kT]; & & \\
y_1[kT] &= -x_1[kT] + x_2[kT]; & y_2[kT] &= 0,5x_1[kT] - x_3[kT] + u_1[kT] + 4u_2[kT];
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4,5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Многомерная динамическая система порядка n может быть описана с помощью передаточной матрицы $\mathbf{W}(z)$:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{W}(z)\mathbf{u}(k)$$

$$\text{где } \mathbf{W}(z) = [W_{ij}(z)]_{g \times p} = \begin{bmatrix} B_{ij}(z) \\ A_{ij}(z) \end{bmatrix}_{g \times p},$$

$A_{ij}(z)$, $B_{ij}(z)$ полиномы от z :

$$\begin{aligned}
A_{ij}(z) &= a_{0,ij} + a_{1,ij}z + \dots + a_{n_{ij},ij}z^{n_{ij}}, n_{ij} \leq n, \\
B_{ij}(z) &= b_{0,ij} + b_{1,ij}z + \dots + b_{m_{ij},ij}z^{m_{ij}}, m_{ij} \leq n,
\end{aligned}$$

Структурными индексами, характеризующими передаточную матрицу, являются порядки числителя и знаменателя каждого элемента матрицы.

Это представление имеет следующие характеристики:

- простая физическая интерпретация;
- единственность представления;
- конечное число параметров;
- полное описание динамики (при нулевых начальных условиях);
- нелинейность модели по параметрам (в силу дробной рациональности выражений для передаточных функций).

12.2.2. Модель в виде импульсной переходной функции

Одномерная динамическая система может быть представлена в следующем виде:

$$y(k) = \sum_{j=0}^{\infty} w(j)u(k-j) \text{ — во временной области;}$$

$$y(k) = W(z)u(k) \text{ — в операторной форме, где } w(z) = \sum_{j=0}^{\infty} w(j)z^{-j}.$$

Многомерная динамическая система также может быть представлена следующим бесконечным рядом:

$$y(k) = [M_0 + M_1 z^{-1} + \dots]u(k)$$

где M_0, M_1, \dots — $g \times p$ матрицы, элементы которых называются марковскими параметрами системы.

Характеристики модели:

- единственность представления;
- линейность по параметрам;
- теоретически бесконечное число параметров.

12.2.3. Представление системы в пространстве состояний

Дискретная система описывается с помощью уравнений состояния следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{w}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{w}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{H}\mathbf{w}(k) + \mathbf{K}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

где

$\mathbf{w}(k)$ — n -мерный вектор состояния;

\mathbf{F} — $n \times n$ системная матрица;

\mathbf{G} — $n \times r$ распределительная матрица;

\mathbf{H} — $g \times n$ выходная или измерительная матрица;

\mathbf{K} — $g \times r$ матрица прямой связи входа-выхода.

Набор матриц $\{\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{K}\}$ называется реализацией. Это представление неединственно, так, применив неособое преобразование подобия

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{T}\mathbf{w}(k),$$

получим эквивалентную систему уравнений состояния:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{T}\mathbf{F}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(k) + \mathbf{T}\mathbf{G}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{H}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(k) + \mathbf{K}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

Реализация, имеющая наименьшую размерность системной матрицы, называется минимальной. Реализация является минимальной тогда и только тогда, когда система наблюдаема и управляема.

От представления системы в пространстве состояний можно перейти к описанию в виде марковских параметров и передаточной матрицы

$$\mathbf{W}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Представление в пространстве состояний имеет следующие характеристики:

- неединственность представления;
- нелинейность по параметрам;
- полное описание динамики системы;
- удобство цифрового моделирования.

12.2.4. Дробно-матричное представление

Дробно-матричное представление (ДМП) является декомпозицией передаточной матрицы $\mathbf{W}(z)$ на две полиномиальные матрицы $\mathbf{P}(z)$ и $\mathbf{Q}(z)$:

$$\mathbf{W}(z) = \mathbf{P}^{-1}(z)\mathbf{Q}(z),$$

где $\mathbf{P}(z)$ – $g \times q$ невырожденная полиномиальная матрица,

$\mathbf{Q}(z)$ – $g \times r$ полиномиальная матрица.

$\{\mathbf{P}(z), \mathbf{Q}(z)\}$ называется левым дробно-матричным представлением, его степень равна степени определителя матрицы \mathbf{P} .

Используя левое ДМП, можно записать:

$$\mathbf{P}(z)\mathbf{y}(k) = \mathbf{Q}(z)\mathbf{u}(k),$$

откуда видно, что левое ДМП является разностным уравнением относительно входного и выходного векторов, т.е. левое ДМП можно считать обобщением моделей одномерных систем в виде разностного уравнения, или ARMAX-моделей (авторегрессии и скользящего среднего) для многомерного случая.

ДМП имеет следующие характеристики:

- линейность по параметрам;
- конечное число параметров;
- неединственность представления.

Из анализа различных типов моделей многомерных линейных динамических систем видно, что наиболее удобным для идентификации является дробно-матричное представление, недостатком которого является его неединственность. Этот недостаток можно преодолеть, используя канонические формы, благодаря которым можно уменьшить число оцениваемых параметров за счет появления структурных нулей и единиц.

12.4. Список литературы

1. **Иванов В. А., Чемоданов Б. К., Медведев В. С.** Математические основы теории автоматического регулирования. М.: Высшая школа, 1971.
2. **Цыпкин Я. З.** Теория линейных импульсных систем. М.: Физматиз, 1963.
3. **Цыпкин Я. З.** Основы теории автоматического управления. М.: Наука, 1977.
4. **Теория автоматического управления. Ч. 1.** / Под ред. А. В. Нетушил М.: Высшая школа, 1976.
5. **Иванов В. А., Ющенко А. С.** Теория дискретных систем автоматического управления. М.: Физматиз, 1983.
6. **Куо Б.** Теория и проектирование цифровых систем управления. М.: Машиностроение, 1986.
7. **Микропроцессорные системы автоматического управления.** / Под ред. В. А. Бессекерского Л.: Машиностроение, 1976.
8. **Бессекерский В. А.** Цифровые автоматические системы. М.: Наука, 1976.
9. **Астапов Ю. М., Медведев В. С.** Статическая теория систем автоматического управления. М.: Наука, 1982.
10. **Микропроцессорные автоматические системы регулирования.** / Под ред. В. В. Солодовникова М.: Высшая школа, 1991.
11. **Бессекерский В. А., Изранцев В. В.** Системы автоматического управления с микроЭВМ. М.: Наука, 1987.
12. **Ягодкина Т.В., Хризолитова С.А.** Применение Mathcad для решения задач теории автоматического управления, Учебное пособие. М.: Изд-во МЭИ, 2004. – 52 с.
13. **Ягодкина Т.В., Хризолитова С.А., Беседин В.М., О.А.Бондин, Грачев Е.Н.** Лабораторный практикум по курсу “Основы автоматического управления”. Исследование САУ с использованием прикладного пакета Matlab, М.: Изд-во МЭИ, 2007. - 89 с.

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

13.1. Понятие о нелинейных системах управления.

(знать: основные элементы САУ, которые имеют нелинейное математическое описание, области применения методов фазовой плоскости и гармонической линеаризации для расчета и анализа работы нелинейных САУ; уметь находить уравнения фазовых траекторий и гармонической линеаризации и на их основе проводить анализ работоспособности нелинейных систем; владеть приёмами определения устойчивости нелинейных систем различными методами, определять наличие автоколебаний и их параметров, находить условия их отсутствия.)

13.1.1.Классификация нелинейных элементов.

Система автоматического управления (САУ) относится к классу нелинейных, в том случае, если хотя бы один элемент этой системы описывается нелинейным уравнением. Это означает, что указанный элемент имеет нелинейную зависимость между выходной ($x_{\text{вых}}$) и входной ($x_{\text{вх}}$) величинами, которую нельзя линеаризовать путем разложения в ряд Тейлора в окрестностях рабочей точки. Такую нелинейную зависимость принято называть существенной нелинейностью.

К существенным нелинейностям относятся, например: гистерезис с широкой петлёй, насыщение, нелинейность типа «сухое трение», все релейные характеристики.

Все нелинейные элементы можно разделить на два типа:

- 1) естественные нелинейности, которые присущи реальным элементам системы;
- 2) искусственные (или вводимые) нелинейности, которые вводятся в систему с целью:
 - а) компенсации некоторых естественных нелинейностей;
 - б) придание системе некоторых специфических черт (например, нелинейность типа двухпозиционного идеального реле - для обеспечения системы оптимальной по быстродействию).

Примеры некоторых статических характеристик типовых естественных нелинейностей приведены на рис.13.1, где $x_{\text{вх}}$ - входная величина нелинейного элемента, а $x_{\text{вых}}$ - выходная величина нелинейного элемента; на рис. 13.2 приведены примеры искусственных или вводимых нелинейностей.

Каждой естественной нелинейности присущ реальный элемент систем автоматического управления.

Так, например, нелинейность типа «насыщение» - рис.13.1а, присуща усилительным элементам; нелинейность типа «зона нечувствительности с насыщением» - рис.13.1б, присуща электрическим машинам; нелинейность типа «люфт» - рис 13.1в, присуща системам управления электроприводом; нелинейность типа «гистерезис» - рис 13.1г присуща - электромагнитным системам.

13.1.2. Структурные схемы нелинейных систем.

В состав нелинейной САУ, наряду с нелинейными элементами входят и линейные элементы.

Для упрощения расчёта и анализа работы любую нелинейную САУ представляют в виде структурной схемы, которая строится на основе уравнений динамики, связывающих входную и выходную величины каждого элемента. Причём для того, чтобы отличить друг от друга линейный и нелинейный элементы, последний графически на структурной схеме отображается в виде прямоугольника, но с двойной рамкой. (рис 13.3)

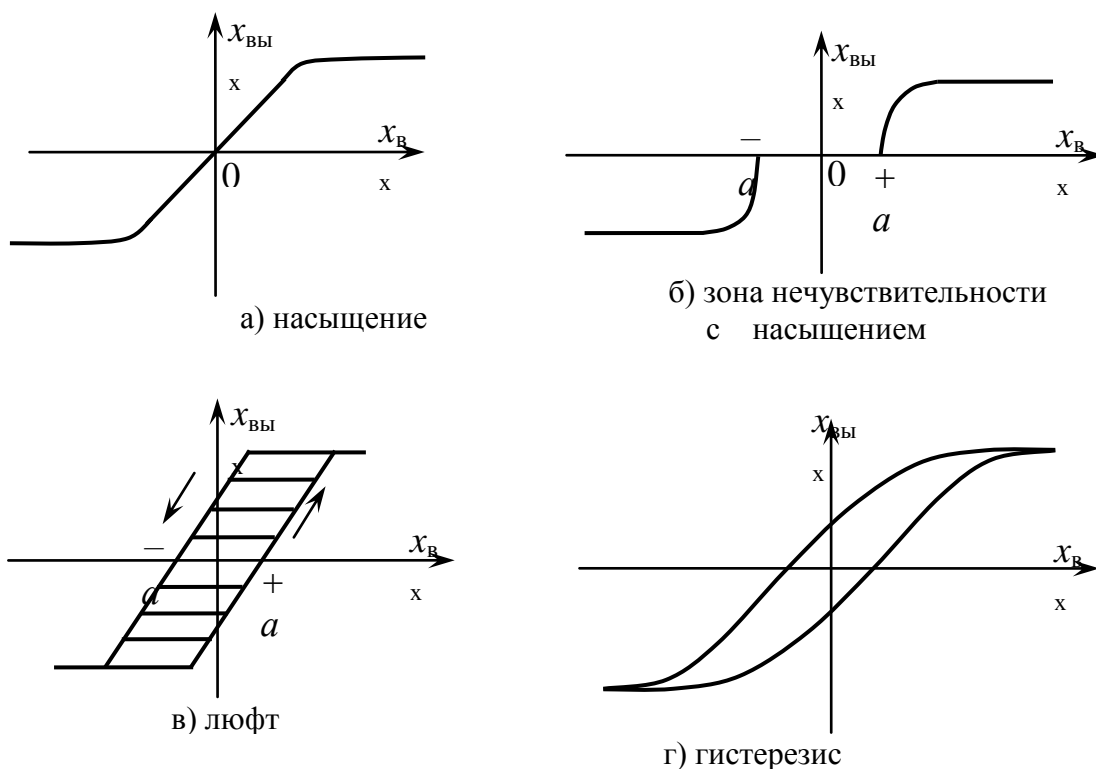


Рис. 13.1. Типовые естественные

При математическом описании САУ часть уравнений являются линейными, которым на структурной схеме будут соответствовать линейные звенья (Рис.13.3а) с передаточной функцией $W(p)$, причем:

$$Y(p) = W(p) \cdot X(p)$$

Часть уравнений оказываются нелинейными, которым на структурной схеме будут соответствовать нелинейные звенья со статической характеристикой $f(x)$, причем $Y(p) = L\{f(x)\}$, где L - оператор непрерывного преобразования Лапласа (рис 13.3 б).

Рассмотрим примеры получения структурных схем.

Пример 1.1: Составим структурную схему для генератора постоянного тока с независимым возбуждением при его работе в режиме холостого хода, математическое

описание которого в установившемся режиме определяется следующими уравнениями в операторной форме:

$$E_B(p) = R_B \cdot I_B(p) + w_B \cdot p \cdot \Phi_B(p) \quad (13.1)$$

$$\Phi_B(p) = L\{f(i_B)\} \quad (13.2)$$

$$E_r(p) = c \cdot \omega_d \cdot \Phi_B(p) \quad (13.3)$$

где $E_B(p)$ – изображение э.д.с., приложенное к цепи обмотки возбуждения; R_B – активное сопротивление цепи обмотки возбуждения; $I_B(p)$ – изображение тока цепи обмотки возбуждения; w_B – число витков обмотки возбуждения; $\Phi_B(p)$ – изображение магнитного потока цепи обмотки возбуждения; ω_d – скорость вращения якоря генератора; c – конструктивная постоянная; $E_r(p)$ – э.д.с., снимаемая с щеток генератора – выходная величина; $p = \frac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования.

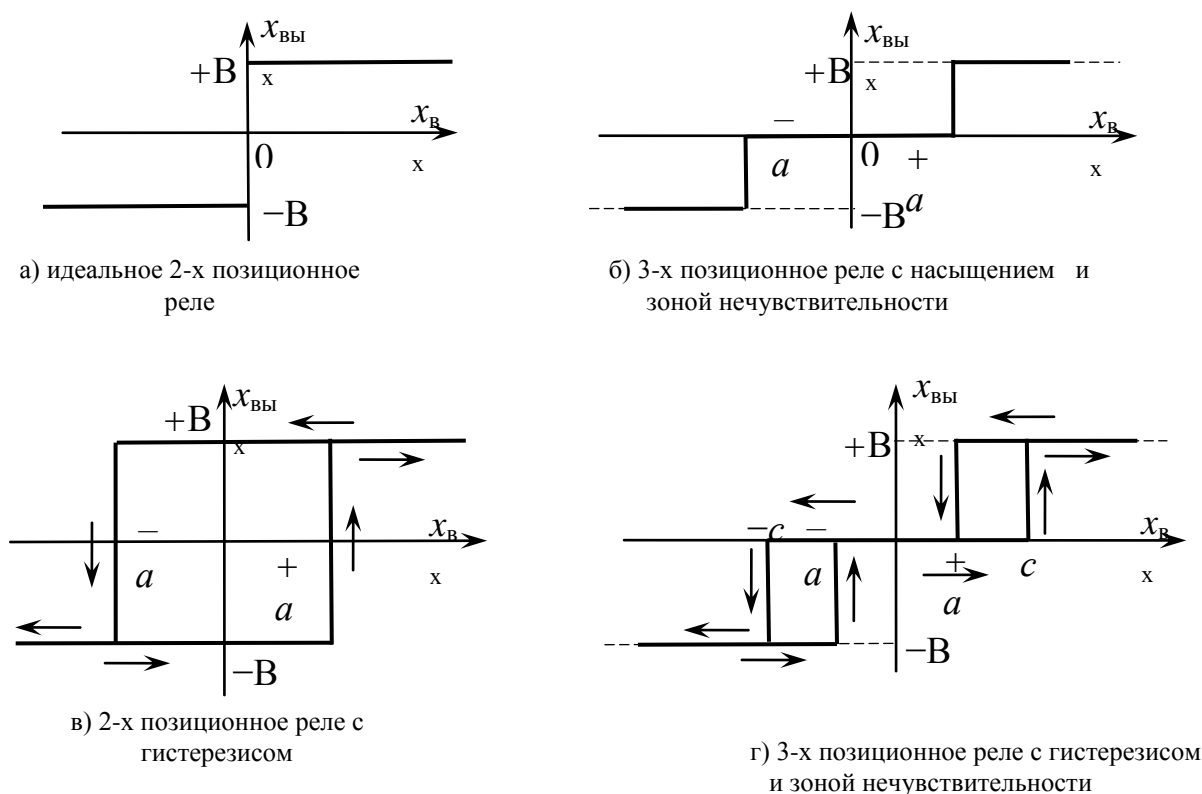


Рис. 13.2. Вводимые нелинейности

Структурная схема генератора постоянного тока, соответствующая заданной системе уравнений 13.1 – 13.3, представлена на рис. 13.4. Здесь учтено, что:

$$I_B(p) = 1/R_B \cdot [E_B(p) - w_B \cdot p \cdot \Phi_B(p)]$$

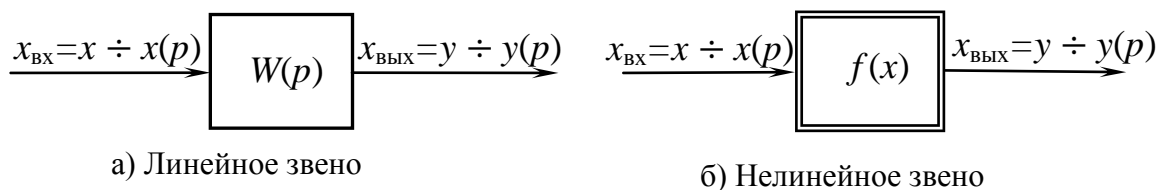


Рис. 13.3

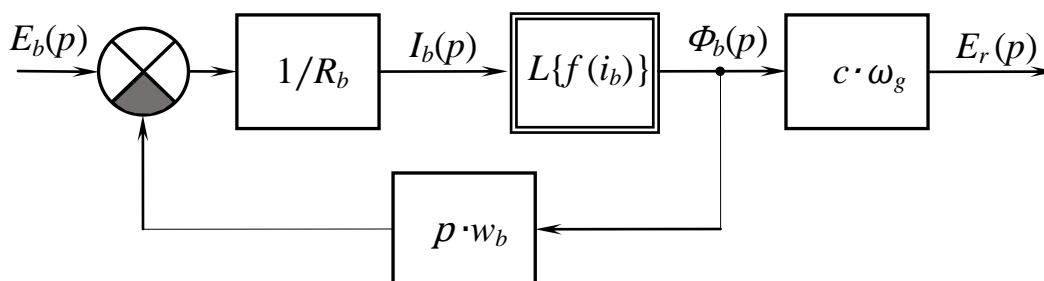


Рис. 13.4. Структурная схема генератора постоянного тока

Пример1.2. Составим структурную схему двигателя постоянного тока с независимым возбуждением (ДПТ) и якорным управлением для случая, когда нельзя пренебречь моментом сухого трения на валу двигателя ($M_{тр}$). Момент сухого трения - это дополнительный момент, который действует на валу ДПТ вместе с моментом сопротивления, причём

$$M_{тр} = -sign(\omega_d) \cdot M_{тр0} ,$$

где $sign$ – знаковая функция.

Статическая характеристика $M_{тр} = f(\omega_d)$ для идеализированного случая представлена на рис 13.5.

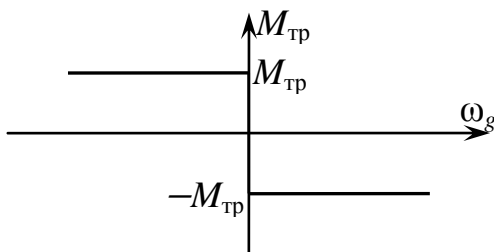


Рис. 13.5. Статическая характеристика «сухого трения»

Математическое описание, которое определяет работу этого элемента САУ включает в себя два уравнения: 1 – ое уравнение записывается относительно э.д.с. в цепи якоря. В операторной форме оно имеет вид:

$$E_a(p) = R_a \cdot I_a(p) + p \cdot L_a \cdot I_a(p) + C_e \cdot \Omega_d(p) \quad (13.4)$$

2-ое слагаемое в этом уравнении представляет собой э.д.с. самоиндукции, а 3-е слагаемое – противо- э.д.с.; L_a – индуктивность обмотки якоря; R_a – активное сопротивление цепи якоря; $\Omega_d(p)$ – изображение скорости вращения вала двигателя; C_e –

коэффициент пропорциональности между напряжением на якорной обмотке и скоростью вращения вала двигателя.

Второе уравнение записывается относительно момента, развиваемого на валу двигателя (его изображение по Лапласу $M_d(p)$). Момент, развиваемый на валу двигателя расходуется: на придание ускорения всем подвижным частям, преодоление момента сопротивления (M_c) и момента сухого трения ($M_{тр}$). Относительно изображений этого уравнение представляется:

$$M_d(p) = C_M \cdot I_a(p) = p \cdot J \cdot \Omega_d(p) + M_c(p) + M_{тр}(p) \quad (13.5)$$

где C_M – коэффициент пропорциональности между скоростью вращения электрического двигателя и моментом сопротивления; J – приведенный момент инерции всех подвижных частей двигателя; $M_{тр} = L\{f(\omega_d)\}$

Подставляя из уравнения (13.5) $I_a(p)$ в 1-ое, получим уравнение, на основе которого составляем искомую структурную схему. Структурная схема представлена на рис. 13.6.

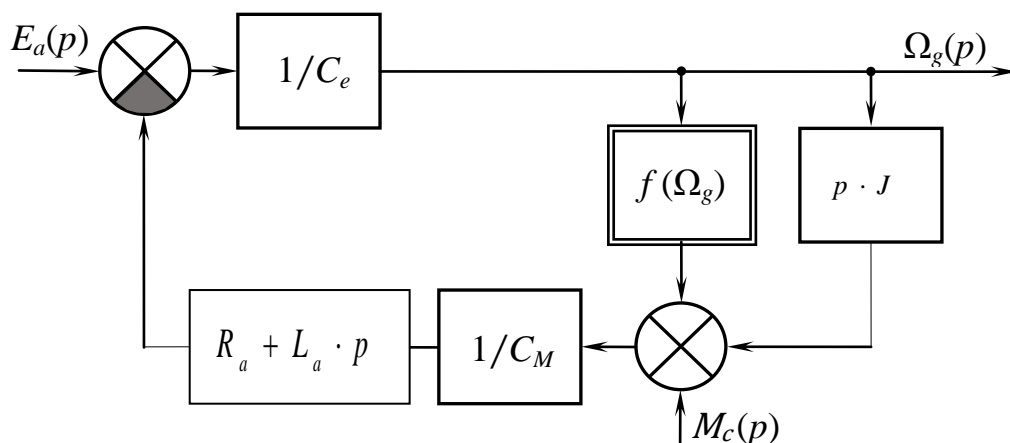


Рис. 13.6. Структурная схема двигателя постоянного тока

Из рисунков 13.4 и 13.6 видно, что нелинейный элемент может находиться как в прямой цепи, так и в цепи обратной связи.

Наличие в составе САУ нелинейного звена ограничивает возможность структурных преобразований. Вследствие того, что в нелинейных системах не выполняется принцип суперпозиции, то это исключает возможность перемещения нелинейного звена через суммирующий элемент. Невыполнение принципа коммутативности не позволяет перемещать (менять местами) линейный элемент через нелинейное звено, т.к. получаемые системы являются неэквивалентными (рис 13.7).

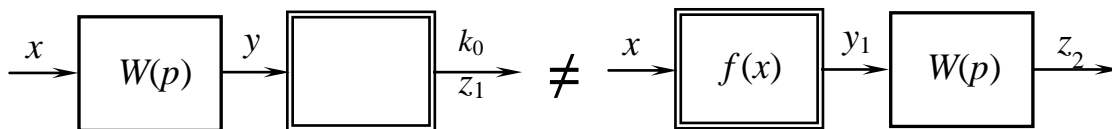


Рис. 13.7. Иллюстрация невыполнения принципа коммутативности

Над структурными схемами нелинейных систем можно сделать любые структурные преобразования, если нелинейный элемент при этом не затрагивается.

Применительно к нелинейным системам правила перемещения звена через узел разветвления могут быть сформулированы следующим образом: при переносе узла против (по) направления передачи сигнала в переносимую ветвь добавляются прямые (обратные) операторы элементов, расположенных между старым и новым расположением узла (рис. 13.8.)

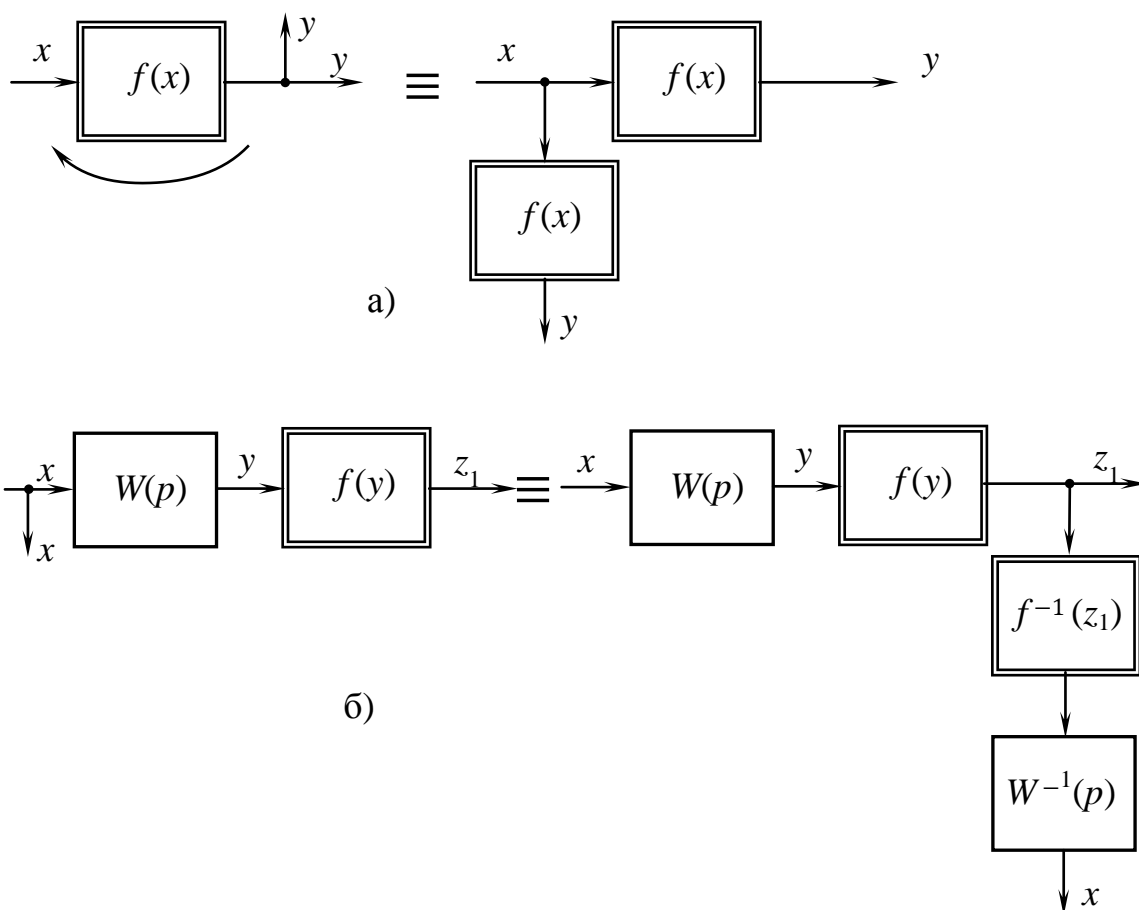


Рис. 13.8. Правила переноса узла: а) против направления передачи сигнала, б) по направлению передачи сигнала.

Кроме того, можно проводить структурные преобразования над нелинейными элементами, которые соединяются последовательно, параллельно и в цепь обратной связи.

При последовательном соединении нелинейных звеньев так же, как и для линейных звеньев, выходная величина одного звена является входной величиной для другого.

В качестве примера рассмотрим два последовательно соединенных нелинейных элемента (рис. 13.9а), статические характеристики которых $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$, представлены на рис. 13.9б. Такое соединение надо заменить одной эквивалентной нелинейной характеристикой $y = f(x)$.

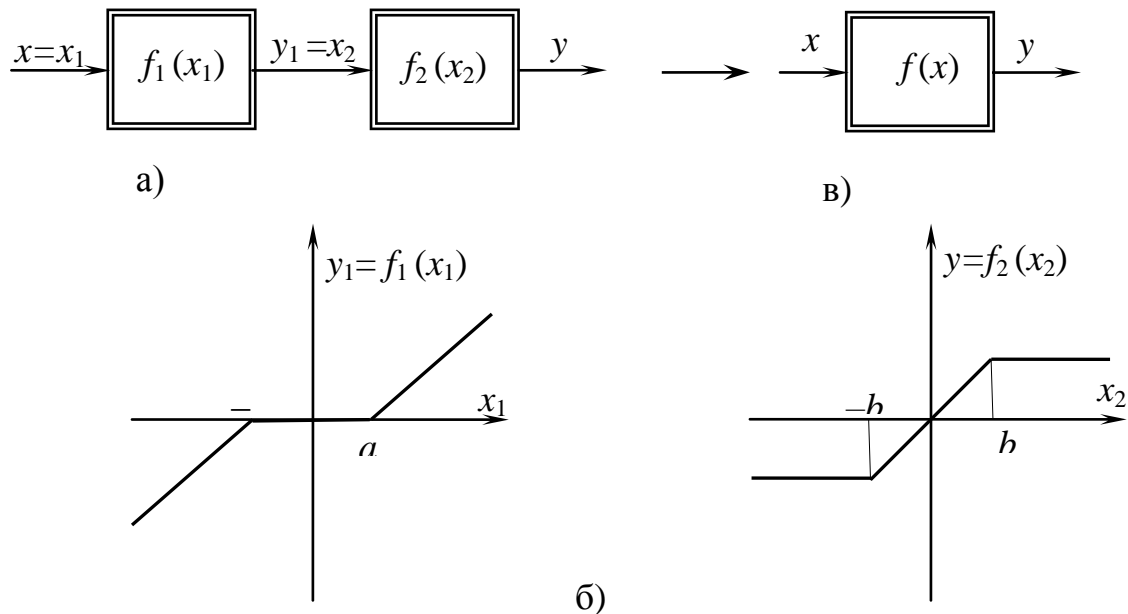


Рис. 13.9. Последовательное соединение нелинейных элементов

Эквивалентную нелинейную характеристику определяем графическим способом. Построение осуществляется в четырёх квадрантах и порядок нахождения эквивалентной характеристики проиллюстрирован на рис 13.10.

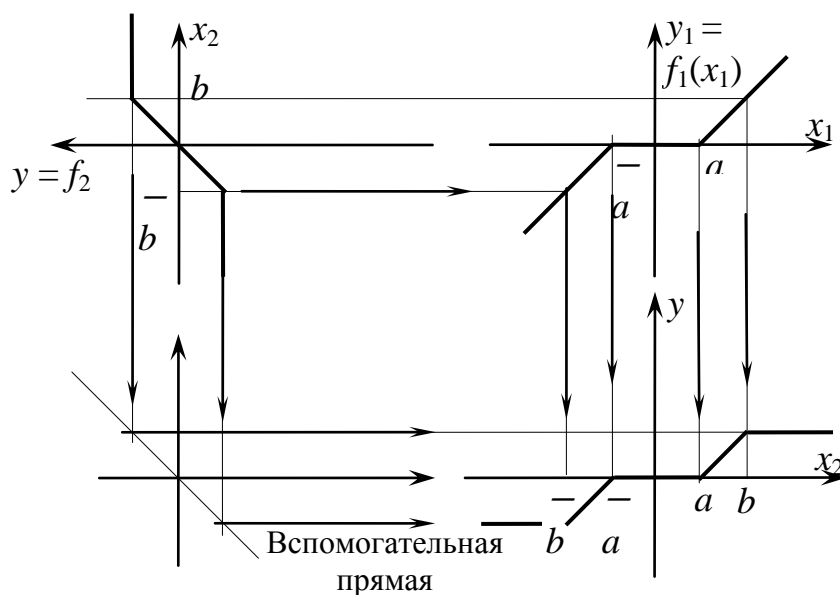


Рис. 13.10. Построение эквивалентной статической характеристики при последовательном соединении нелинейных элементов

При параллельном соединении нелинейных элементов входными величинами для них является один и тот же сигнал, а выходные величины нелинейных элементов суммируются на сумматоре (рис.13.11а)

Порядок нахождения эквивалентной статической характеристики $y = f(x)$ при параллельном соединении проиллюстрирован на рис. 13.11 б.

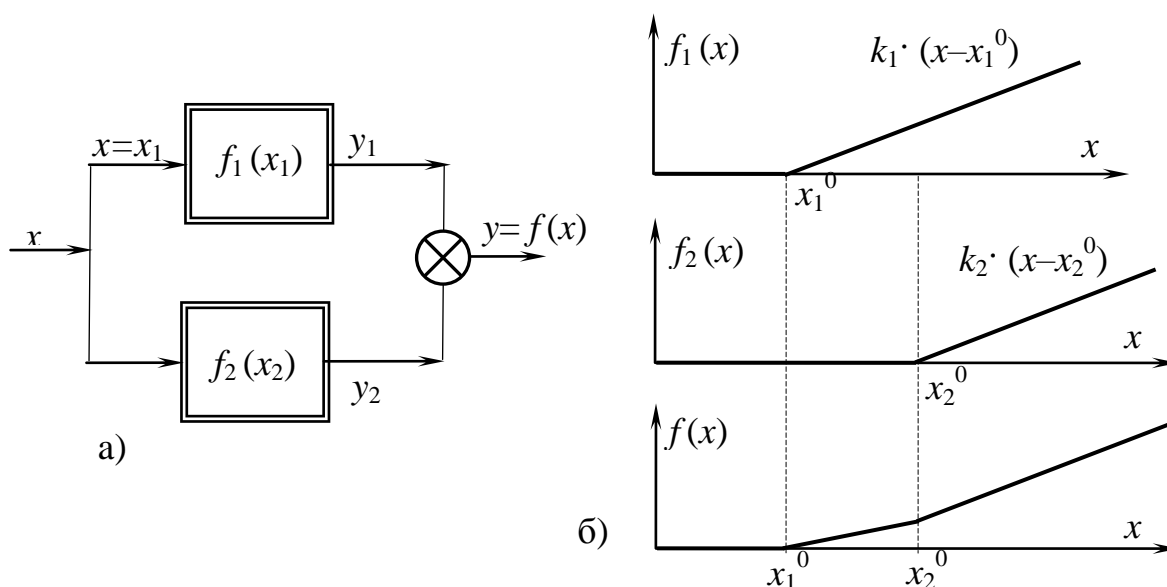


Рис. 13.11. Параллельное соединение нелинейных элементов

13.1.3. Особенности нелинейных систем.

По сравнению с линейными системами нелинейные САУ имеют ряд особенностей, основными из которых являются следующие:

1. в нелинейных системах устойчивость и качество переходного процесса зависят не только от структурной схемы, параметров звеньев (коэффициентов усиления и постоянных времени), но и от величины входного воздействия и начальных условий.

2. динамические свойства нелинейных САУ зависят от вида нелинейностей и места их расположения в структурной схеме.

3. для нелинейных систем меняется и понятие устойчивости. При исследовании нелинейных САУ говорят не просто об устойчивости, а об устойчивости определённого состояния, или движения в системе при отклонении от исходного режима.

Для нелинейных систем в связи с этим вводятся понятия : устойчивости «в малом», «в большом» и « в целом».

Устойчивость «в малом» - это устойчивость нелинейной САУ при очень малых отклонениях от положения равновесия.

Устойчивость «в большом» - это устойчивость нелинейной САУ при ограниченных отклонениях от положения равновесия.

Устойчивость «в целом» - это устойчивость нелинейной САУ при любых отклонениях от положения равновесия.

В зависимости от величины входного воздействия одна и та же система может быть устойчива «в малом» и неустойчива «в большом» одновременно.

4. в нелинейной системе может существовать такой режим её работы, когда на вход системы не подаётся никаких воздействий, а на выходе существуют незатухающие колебания с постоянной амплитудой (A_a) и частотой (ω_a). Этот режим работы называется автоколебательным.

5. так как результат нескольких воздействий на нелинейную систему не равен сумме результатов каждого из них в отдельности, то переходной процесс в нелинейной САУ нельзя представить в виде сумм свободной и вынужденной составляющих. Это значительно затрудняет анализ устойчивости нелинейных систем.

Для исследования нелинейных систем используют аналитические, графоаналитические и численные методы. Первые приводят к получению точных решений, вторые и третьи к приближенным.

Из точных аналитических методов рассмотрим метод кусочно-аналитический аппроксимации с помощью фазовой плоскости.

13.1.4. Вопросы и задачи

1.1. Объясните, почему нелинейным элементом является:

- а) электрический двигатель постоянного тока;
- б) усилитель сигнала;

в) терморезистор.

1.2. Определите вид выходного сигнала для нелинейного элемента типа люфт, если входной сигнал имеет синусоидальную форму. Объясните, почему с увеличением амплитуды входного сигнала уменьшается влияние нелинейного элемента на форму выходного сигнала.

1.3. На вход нелинейного элемента со статической характеристикой, представленной на рис.13.1 поступает сигнал $x_{вх} = A \cdot \sin \omega_0 t$.

Изобразите для каждого элемента, какой вид будет иметь выходной сигнал.

1.4. Электромашинный усилитель включает в себя два последовательно соединенных нелинейных элементов, статические характеристики которых представлены на рис.13.1а, в. Изобразите вид выходного сигнала электромашинного усилителя, если на вход усилителя поступает сигнал вида $x_{вх} = A \cdot \sin \omega_0 t$.

13.2. Исследование нелинейных систем на основе метода фазовой плоскости.

13.2.1. Фазовые траектории.

Состояние системы автоматического управления в любой момент времени может быть охарактеризовано значениями рассматриваемой переменной и $(n-1)$ ее производных, где n – порядок уравнения, которое описывает работу системы. Для рассмотрения системы n -го порядка необходимо использовать n -мерное пространство, содержащее n осей координат.

Если в данный момент времени по указанным осям отложить значения переменной и $(n-1)$ ее производных, будет получена точка, отображающая состояние системы. Указанное пространство называется фазовым, а точка, соответствующая состоянию системы в фазовом пространстве, – изображающей точкой.

При установившемся равновесном состоянии системы изображающая точка находится в покое. Во время переходного процесса переменная и ее производные в каждый момент времени будут иметь различные значения, что соответствует перемещению изображающей точки в пространстве. Каждому определенному переходному процессу в САУ в фазовом пространстве соответствует определенная траектория движения изображающей точки, которая называется фазовой траекторией.

Начальное положение изображающей точки определяется начальными условиями. При равновесии системы, после окончания переходного процесса, все производные рассматриваемой переменной равны нулю. Точки фазового пространства, соответствующие этому состоянию системы, называются особыми. Совокупность фазовых траекторий, полученных для всевозможных начальных условий, вместе с особыми точками называется фазовым портретом системы.

Наиболее наглядно фазовые траектории могут быть представлены для систем 2-го порядка в координатах x (переменная величина) – откладывается по оси абсцисс и $\frac{dx}{dt} = V$ (скорость изменения переменной величины) – откладывается по оси ординат.

Метод фазовой плоскости является принципиально точным методом исследования нелинейных систем. Он дает полную информацию о динамике системы – о возможных состояниях, положениях равновесия, движения и их устойчивости.

При этом предполагается, что система автоматического управления является автономной – все внешние входные воздействия равны нулю. В этом случае состояние автономной системы автоматического управления на фазовой плоскости в каждый момент времени определяется положением изображающей точки.

Метод фазовой плоскости является основным методом исследования нелинейных систем автоматического управления 2-го порядка. В некоторых случаях можно аппроксимировать системы высокого порядка системой 2-го порядка с эквивалентным запаздыванием, что несколько расширяет область применения метода фазовой плоскости.

Фазовый портрет дает полное представление о динамике нелинейной системы 2-го порядка при детерминированных воздействиях, включая точность, устойчивость и качество процессов.

При изображении процессов на фазовой плоскости уравнение 2-го порядка заменяют эквивалентным уравнением 1-го порядка.

Пусть нелинейная автономная система автоматического управления описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, V) \quad (13.6)$$

где $f(x, V)$ – некоторая нелинейная функция.

Чтобы изобразить движение изображающей точки на фазовой плоскости, определим уравнение фазовых траекторий. Для этого обозначим

$$\frac{dx}{dt} = V \quad (13.7)$$

Тогда из (13.6) получим:

$$\frac{dV}{dt} = f(x, V) \quad (13.8)$$

Разделим уравнение (13.8) и (13.7) получим дифференциальное уравнение фазовых траекторий:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{f(x, V)}{V} \quad (13.9)$$

Фазовые траектории (портреты) могут быть построены тремя способами:

- 1) Непосредственным решением исходных дифференциальных уравнений, которые описывают работу САУ- уравнение типа (13.6).
- 2) Путем решения дифференциального уравнения фазовых траекторий – уравнение типа (13.9).
- 3) На основе метода изоклин.

13.2.2. Возможные виды фазовых портретов и типы особых точек.

Фазовые портреты нелинейных систем отличаются большим разнообразием, чем фазовые портреты линейных систем. Однако типы особых точек линейных и нелинейных систем совпадают.

Линейное дифференциальное уравнение является частным случаем нелинейного дифференциального уравнения. Для линейных дифференциальных уравнений также справедливы методы, которые применяются и для нелинейных систем. Располагая фазовыми портретами линейных систем, можно их использовать для анализа нелинейных систем автоматического управления.

Предположим, что работа некоторой САУ описывается линейным дифференциальным уравнением 2-го порядка:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2d\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (13.10)$$

Пусть x и $\frac{dx}{dt} = V$ фазовые координаты. Тогда уравнение (13.10) примет вид:

$$V \frac{dV}{dx} + 2d\omega_0 V + \omega_0^2 x = 0 \quad (13.11)$$

Уравнение (13.11) является дифференциальным уравнением фазовых траекторий для линейной САУ, описываемой уравнением (13.10).

Характеристическое уравнение для (13.11):

$$p^2 + 2d\omega_0 p + \omega_0^2 = 0$$

Корни характеристического уравнения:

$$p_{1,2} = -d\omega_0 \pm \sqrt{((d\omega_0)^2 - \omega_0^2)} = \omega_0(d \pm \sqrt{d^2 - 1})$$

в зависимости от величины коэффициента d возможны следующие случаи:

1-й случай: $d=0$ – соответствует консервативной системе - затухания нет:

$$p_{1,2} = \pm \omega_0$$

Построим фазовые траектории на основе решения исходного дифференциального уравнения.

$$x(t) = A_1 \cdot \cos \omega_0 t + A_2 \cdot \sin \omega_0 t = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (13.12)$$

Амплитуда A зависит от начальных условий.

$$V(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (13.13)$$

Из (13.12) и (13.13) получаем:

$$\frac{x}{A} = \sin(\omega_0 t + \varphi); \quad \frac{V}{A\omega_0} = \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

После возведения в квадрат и сложения последних двух выражений, имеем:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{V^2}{A^2 \cdot \omega_0^2} = 1 \quad (13.14)$$

Соотношение (13.14) определяет на фазовой плоскости семейство эллипсов (рис. 13.12), при этом $x(t)$ представляет незатухающие гармонические колебания с амплитудой A , зависящей от начальных условий. При разных начальных условиях получаем семейство периодических процессов разной амплитуды, но с равными периодами; имеем равновесие типа центр.

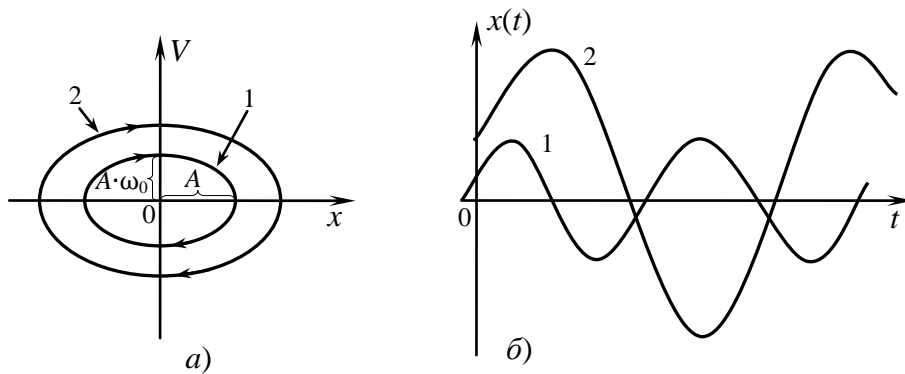


Рис. 13.12. Фазовый портрет (а) и переходной процесс (б) при $d = 0$

Построим фазовые траектории вторым способом на основе уравнения (13.11), которое соответствует им. Из этого уравнения получаем:

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{\omega_0^2}{v} x; \quad \text{или} \quad VdV + \omega_0^2 x dx = 0$$

Решением последнего уравнения является:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{\omega_0^2 \cdot x^2}{2} = \frac{c}{2}; \quad \text{или} \quad V^2 + \omega_0^2 \cdot x^2 = c.$$

где C – постоянная интегрирования, определяемая начальными условиями.

При $v = 0, x = A$

$$\omega_0^2 \cdot x^2 + 0 = c = \omega_0^2 \cdot A^2; \quad V^2 + \omega_0^2 \cdot x^2 = \omega_0^2 \cdot A^2;$$

$$\text{или} \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{V^2}{\omega_0^2 \cdot A^2} = 1, \text{ что соответствует результату (13.14).}$$

Как видим, указанной системе при любых начальных условиях соответствуют периодические движения, вокруг состояния $V=0, x=0$. За исключением того единственного случая, когда начальные условия соответствуют состоянию равновесия.

Построим фазовую траекторию 3-им способом – на основе метода изоклин.

Изоклина - это геометрическое место точек на фазовой плоскости, где касательные к фазовой траектории имеют одинаковый наклон.

Уравнение изоклины в данном случае будет иметь вид:

$$-\frac{2d\omega_0 V + \omega_0^2 x}{V} = a = \text{const}; \quad \text{при } d=0 \text{ получим:}$$

$$V = -\frac{\omega_0^2}{a} x,$$

т.е. в данном случае изоклина представляет собой прямую линию, причем

$$-\frac{\omega_0^2}{a} x = k = \operatorname{tg} \alpha$$

α - угол наклона к оси абсцисс.

В таблице 13.1 приведены изоклины, соответствующие разным значениям k .

Таблица 13.1

№ изоклины	1	2	3
A	0	1	-1
$k = -\frac{\omega_0^2}{a}$	∞	$+\omega_0^2$	$-\omega_0^2$

Фазовые траектории, построенные с помощью метода изоклин, показаны на рис.13.13.

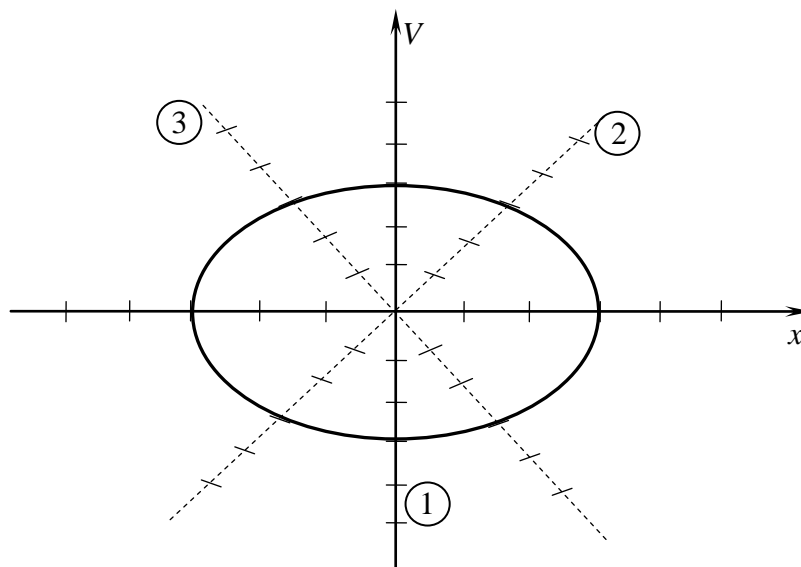


Рис. 13.13. Построение фазовой траектории на основе метода изоклин

Таким образом, для данного случая ($d=0$) начало координат является особой точкой (равновесия) типа «центр», которая является асимптотически неустойчивой. Движение в данной системе периодическое, гармоническое и является асимптотически неустойчивым.

По аналогии со случаем 1, можно рассмотреть кратко и другие случаи, соответствующие различным параметрам и корням характеристического уравнения.

2-й случай: $0 < d < 1$; корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = \alpha \pm j\beta, \text{ причем } \alpha < 0; \beta > 0.$$

Фазовые траектории представляют собой скручивающиеся к началу координат спирали типа спирали Архимеда (рис. 13.14 а). Положение равновесия асимптотически устойчиво. Особая точка называется «устойчивый фокус». Кривые переходного процесса для этого случая при двух начальных условиях изображены на рис. 13.14 б. Любой из процессов является асимптотически устойчивым.

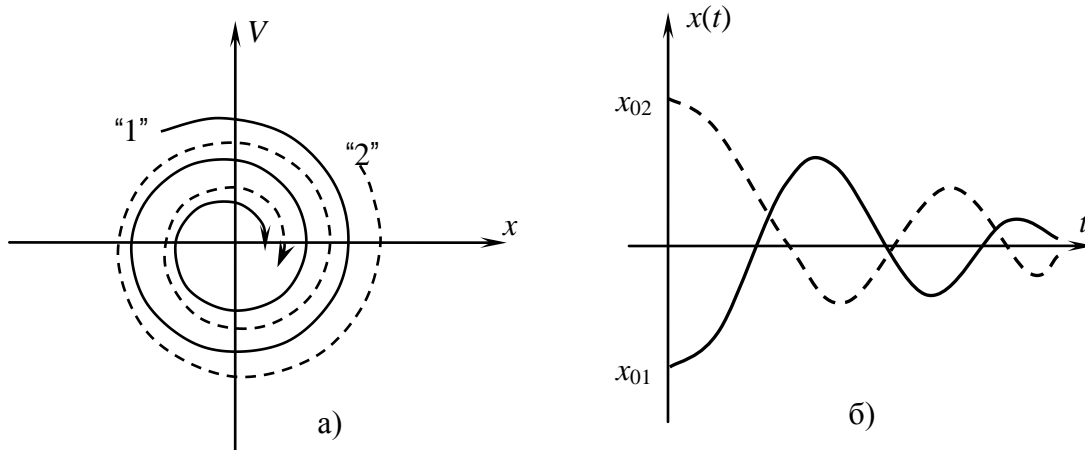


Рис. 13.14. Фазовые траектории (а) и процесс (б) при $0 < d < 1$

в) 3-й случай: $d > 1$; корни $p_1 = \alpha_1$; $p_2 = \alpha_2$ - действительные и отрицательные ($\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 < 0$) изображающая точка двигаясь по фазовой траектории стремится в начало координат при любых начальных условиях x (рис.13.15а).

К фазовым траекториям в этом случае относятся и две прямые, определяемые корнями характеристического уравнения. Любой процесс в такой системе является устойчивым (рис. 2.4б). Особая точка называется «устойчивый узел».

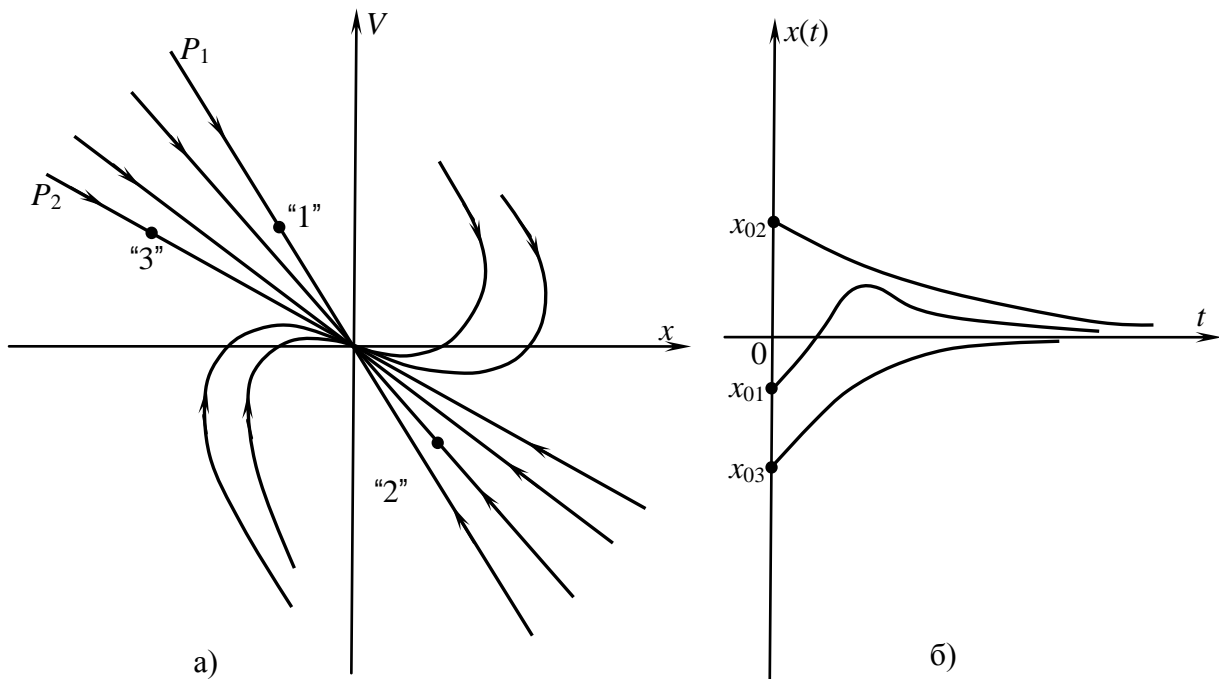


Рис. 13.15. Фазовые характеристики (а) и переходной процесс (б) при $d >$

г) 4-й случай: $-1 < d < 0$;

корни $p_{1,2} = \alpha \pm j\beta$.

Как видно из фазового портрета (рис. 13.16 а), изображающая точка движется, по траектории типа раскручивающейся спирали, что соответствует неустойчивости – процесс в такой системе является неустойчивым (рис.13.16 б) Положение равновесия является неустойчивым. Особая точка называется «неустойчивый фокус».

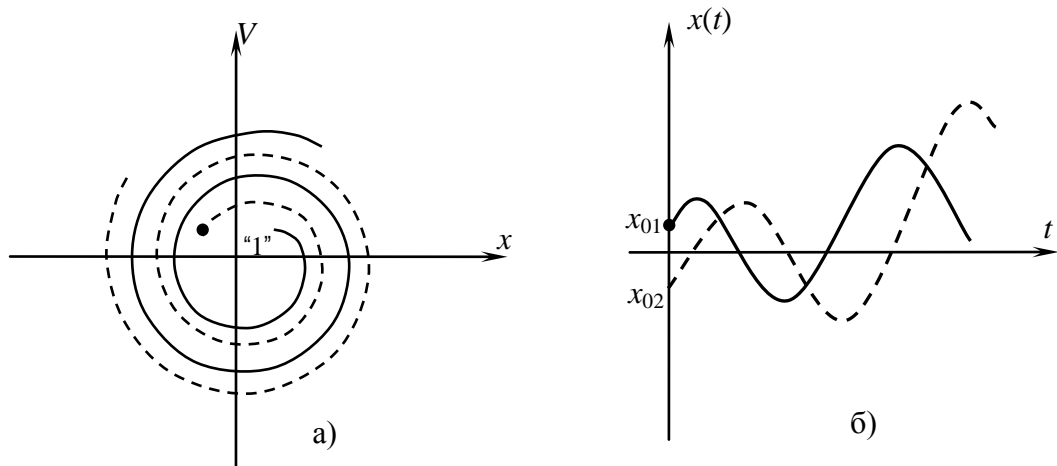


Рис. 13.16. Фазовые траектории (а) и переходной процесс при $-1 < d < 0$

д) 5-й случай: $-\infty < d < -1$; корни $p_1=\alpha_1$; $p_2=\alpha_2$; α_1 и α_2 – действительные и положительные. Изображающая точка движется по расходящимся из начала координат фазовым траекториям (рис 13.17а). Все процессы, соответствующие этому случаю также - неустойчивые (рис. 13.17б). Имеем особую точку типа «неустойчивый узел».

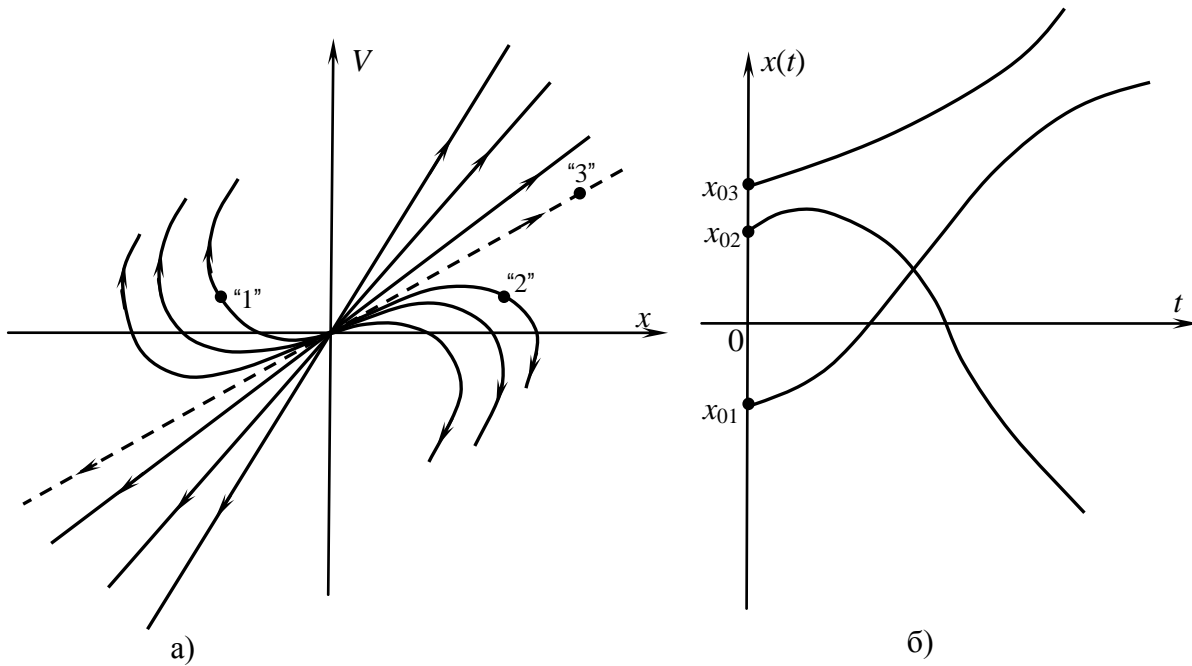


Рис. 13.17. Фазовые траектории (а) и переходной процесс при $-\infty < d > -1$

е) 6-й случай – рассматривается уравнение, когда коэффициент при x является отрицательным, т.е.:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2d\omega_0 \frac{dx}{dt} - \omega_0^2 x = 0 \quad (13.15)$$

Тогда характеристическое уравнение будет равно:

$$p^2 + 2d\omega_0 p - \omega_0^2 x = 0,$$

корни которого определяются выражением:

$$p_{1,2} = \omega_0(-d \pm \sqrt{d^2 + 1}); p_1 = \alpha_1; p_2 = -\alpha_2,$$

т.е. действительные, но разных знаков.

Изображающая точка движется по фазовым траекториям, представленным на рис. 13.18а. Имеем неустойчивое положение равновесия. Тип особой точки «седло». Процессы для этого случая представлены на рис 13.18б.

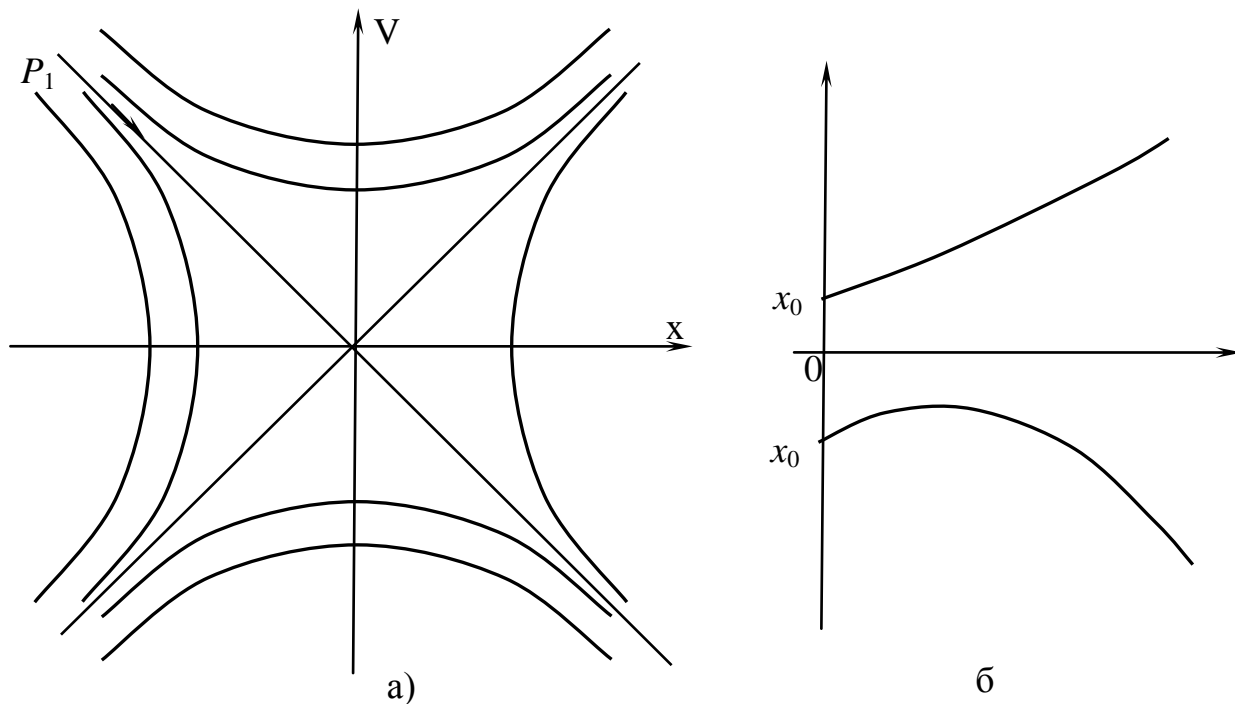


Рис. 13.18. Фазовые траектории (а) и переходной процесс (б) при $\omega_0^2 < 0$

В частном случае при $d = 0$ уравнение (13.15) принимает вид:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \omega_0^2 x = 0$$

Из которого получаем уравнение фазовых траекторий:

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{V^2}{\omega_0^2 \cdot A^2} = 1$$

т.е. фазовые траектории представляют собой семейство гипербол.

При $A=0$ имеем:

$$\omega_0^2 x^2 - V^2 = 0$$

откуда $V = \omega_0 \cdot x$ и $V = -\omega_0 \cdot x$ — две асимптоты.

Фазовые траектории и процессы для этого случая представлены на рис. 13.19.

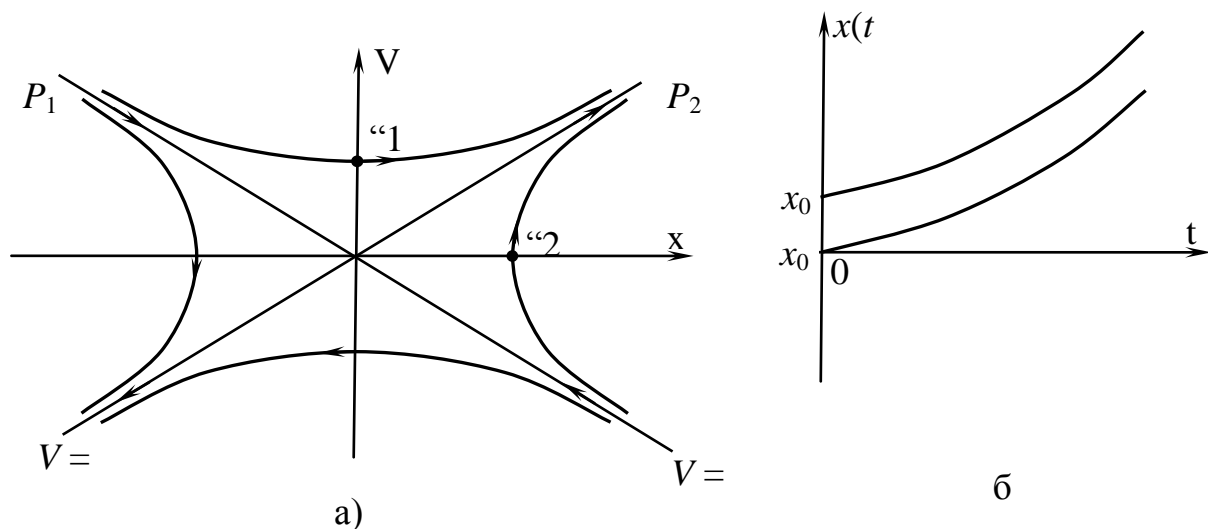


Рис. 13.19. Фазовые траектории (а) и переходной процесс (б) при $\omega_0^2 < 0$ и $d = 0$

13.2.3. Свойства фазовых траекторий. Особые точки и траектории.

Отметим некоторые свойства фазовых траекторий.

- 1) Время на фазовой плоскости откладывается вдоль траектории (рис 13.19а).
- 2) Изображающая точка перемещается по фазовой траектории в верхней полуплоскости, где $V > 0$ в сторону возрастания x : слева-направо. В нижней полуплоскости, где $V < 0$, изображающая точка перемещается в сторону уменьшения x (рис. 13.19б).
- 3) При $V=0$ касательная к фазовой траектории образует прямой угол с осью абсцисс.
- 4) Каждой точке фазовой траектории соответствует свое определенное значение dv/dx . Это означает, что фазовые траектории на плоскости не пересекаются, за исключением особых точек.

Особыми точками являются такие точки, в которых $\frac{dV}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 0$ и $\frac{dx}{dt} = 0$ одновременно, т.е. особые точки на фазовой плоскости являются точками равновесия системы $\frac{dV}{dx} = \frac{0}{0}$. Это означает, что $V=0$, т.е. все особые точки на фазовой плоскости лежат на оси абсцисс.

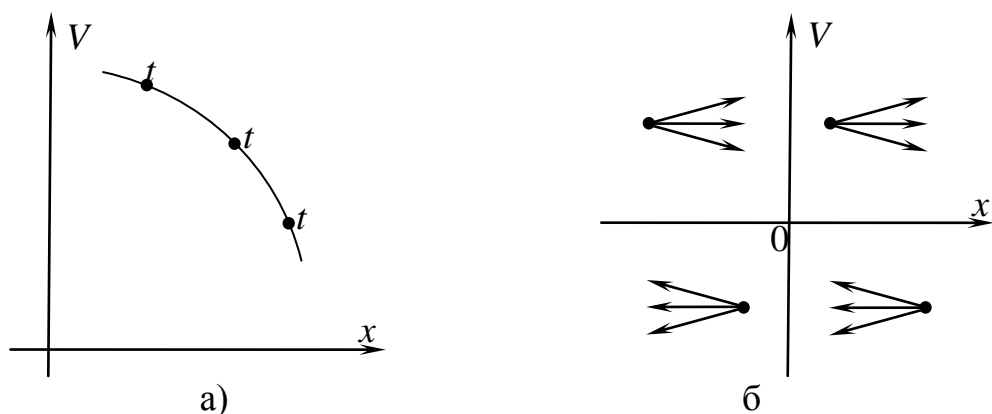


Рис. 13.20. Иллюстрация свойств (1) и (2) фазовых траекторий

Особые точки могут быть устойчивые, т.е. физически реализуемые состояния - в системе существует равновесное состояние, соответствующее этим точкам. Этим точкам соответствует устойчивое состояние равновесия – к нему сходятся все фазовые траектории.

Неустойчивые особые точки, т.е. физически нереализуемые. Есть только математическое представление. Из неустойчивой особой точки все фазовые траектории расходятся.

Кроме особых точек при исследовании САУ с помощью фазовой плоскости, можно выделить и особые фазовые траектории.

Установившемуся движению в нелинейной САУ с постоянной амплитудой и постоянной частотой - режиму автоколебаний (рис 13.21а), на фазовой плоскости соответствует замкнутая фазовая траектория (особая фазовая траектория), которая называется предельным циклом (рис.13.21б). Как видно из рис.13.21 каждой точке кривой $x(t)$ соответствует своя точка на замкнутой фазовой траектории.

Предельный цикл называется устойчивым, если все фазовые траектории стремятся к нему (рис. 13.21а). Устойчивому предельному циклу соответствуют устойчивые (физически реализуемые) автоколебания.

Как видно из рис.13.21а, здесь все фазовые траектории приближаются к устойчивому предельному циклу. Этот фазовый портрет соответствует неустойчивой системе, т.к. в ней неустойчивое равновесное состояние. Но существуют устойчивые автоколебания и в этой системе ее можно назвать устойчивой автоколебательной системой.

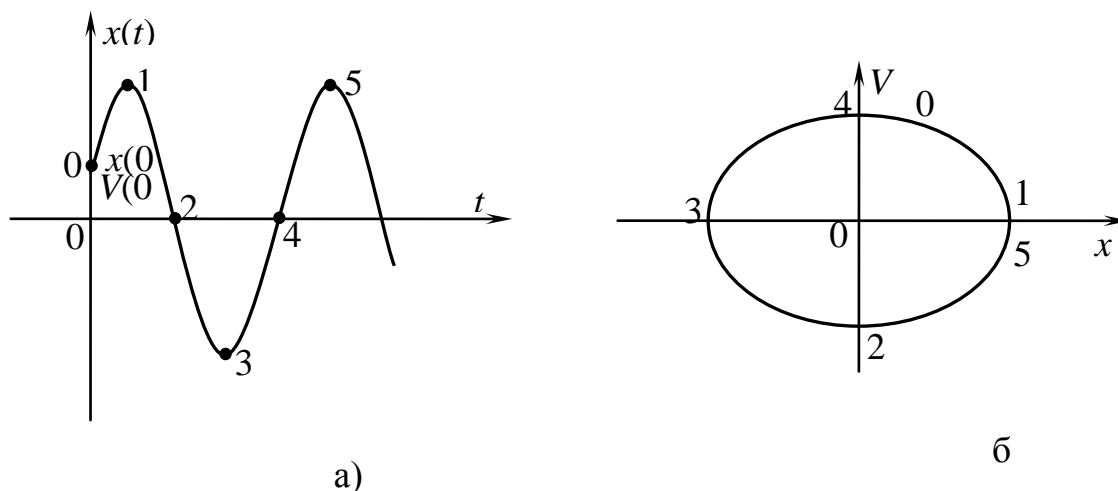


Рис. 13.21. Процесс (а) и фазовая траектория (б) предельного

Предельный цикл называется неустойчивым, если все фазовые траектории расходятся от него (рис. 13.21б). Такому предельному циклу соответствуют неустойчивые, т.е. физически нереализуемые колебания (их наблюдать в системе нельзя). Как видно из рис.13.21б, если все начальные условия находятся внутри предельного цикла, то все фазовые траектории стремятся к началу координат. Фазовая точка 0 в начале координат является устойчивой точкой. Эта система устойчива «в малом» - движение изображающей точки, начавшееся внутри предельного цикла, стремится к точке устойчивого равновесия. С другой стороны, эта система является неустойчивой «в большом». Так как за предельным циклом получается расходящийся процесс.

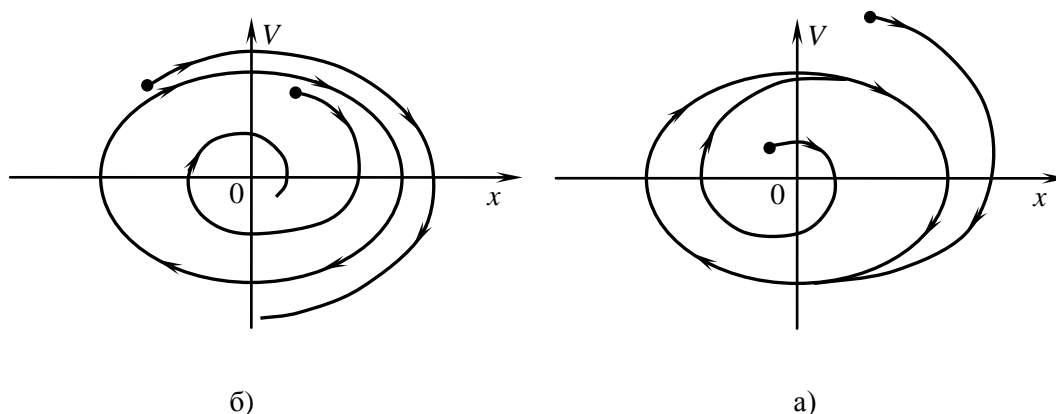


Рис. 13.22. Предельные циклы: устойчивый (а) и неустойчивый (б)

Кроме предельного цикла к особым фазовым траекториям относится еще одна, которая называется сепаратриссой. Это фазовая траектория, которая разделяет фазовую плоскость на области с различными типами движения. Примерами сепаратрисс являются прямые «Р₁» и «Р₂», представленные на рис.13.17а. Они разделяют фазовую плоскость на четыре области

с разным характером движения.

13.2.4. Применение метода фазовой плоскости для расчёта нелинейных систем.

Использование метода фазовой плоскости рассмотрим на примере реальной системы автоматического регулирования (САР) температуры. Структурная схема этой системы имеет вид, представленный на рис.13.23, на котором введены следующие обозначения: x_y - управляющее воздействие; x_p - регулируемая величина; $x_0 = x_y - x_p = x$ - отклонение регулируемой величины от заданного значения; $f(x)$ - статическая характеристика нелинейного элемента. При $x_y = 0$ имеем автономную систему.

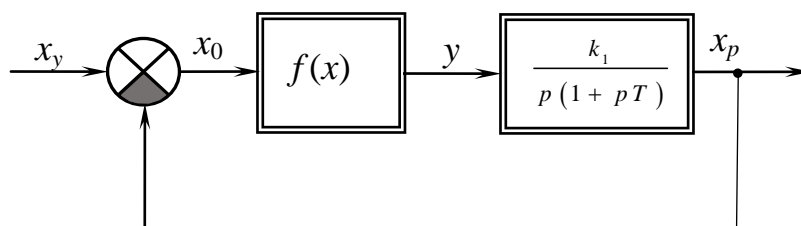


Рис. 13.23. САР температуры

Найдём уравнение фазовых траекторий. Из структурной схемы рис.13.23 имеем:

$$X_p(p) = -X(p) = \frac{K_1}{p \cdot (1 + pT)} \cdot L\{f(x)\};$$

$$T \cdot p^2 \cdot X(p) + p \cdot X(p) = -K_1 \cdot L\{f(x)\};$$

$$T \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + K_1 \cdot f(x) = 0;$$

Таким образом, математическим описанием САР, представленной на рис.13.23, является дифференциальное уравнение 2-ого порядка. Для упрощения введём подстановку $t = T \cdot \tau$, тогда, с учётом безразмерного времени $\tau = t/T$, последнее уравнение приводим к виду:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{dx}{d\tau} + K \cdot f(x) = 0 \quad , \quad \text{где } K = K_1 \cdot T$$

Обозначая $\frac{dx}{d\tau} = V$

получим $\frac{dV}{d\tau} = -V - K \cdot f(x)$ (13.16)

На основе уравнения (13.16) придём к искомому уравнению фазовых траекторий:

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{V + K \cdot f(x)}{V} \quad (13.17)$$

Данное уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением. Как известно, решение нелинейных дифференциальных уравнений затруднено.

Предположим, что статическая характеристика нелинейного элемента имеет вид, представленный на рис.13.24. Такая нелинейная зависимость носит название кусочно-линейной характеристики. Как видно из рисунка, статическая характеристика имеет 3 области (участка), на которых её можно рассматривать как линейную. Поэтому для исследования нелинейной САУ с подобными статическими характеристиками можно использовать метод кусочно-линейной аппроксимации (метод припасовывания). Суть метода кусочно-линейной аппроксимации заключается в том, что на каждом участке кусочно-линейной характеристики нелинейного

элемента решаются линейные дифференциальные уравнения, описывающие работу САУ только на этом участке. Значение координат для фазовой траектории в конце рассматриваемого участка являются начальными условиями для следующего участка фазовой траектории.

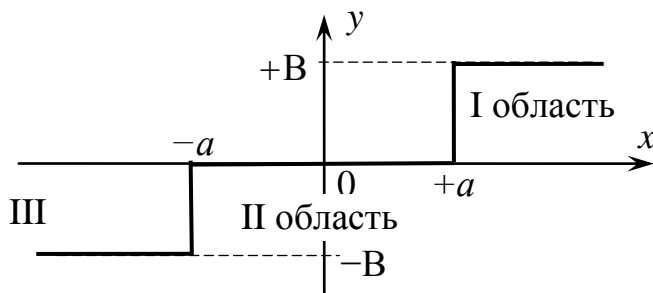


Рис. 13.24. Статическая характеристика нелинейного элемента

Для системы, представленной на рис.13.13, уравнение фазовых траекторий для 1-ого и 3-ого участков статической характеристики, изображенной на рис.13.24, будет равно:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{-V \pm K \cdot f(x)}{V}, \quad (13.18)$$

причём знак “+” относится к 1-ой области: знак “-” относится к 3-ей области.

Для 2-ой области, где статическая характеристика равна нулю, уравнение фазовой траектории будет:

$$\frac{dV}{dx} = -1 \quad (13.19)$$

Для построения фазовой траектории выбираем удобный масштаб по оси ординат и оси абсцисс. По оси абсцисс масштаб выбираем в единицах зоны нечувствительности; размер зоны нечувствительности определяется отрезком равным $2 \cdot a$, (рис.13.25).

По оси ординат - масштаб в относительных единицах $\frac{V}{K \cdot B}$. После определения масштаба, на фазовую плоскость наносятся линии переключения. Линии переключения — это прямые линии на которых происходит переключение движения изображающей точки с одного уравнения на другое. Линии переключения определяются исходя из статической характеристики нелинейного элемента. Для рассматриваемой САР температуры уравнение линий переключения $x = \pm a$, т.е. это две прямые проходящие на фазовой плоскости параллельно оси ординат и отсекающие на оси абсцисс отрезки $\pm a$, (рис.13.25).

Построим фазовые траектории с помощью метода изоклин. Изобразим на фазовой плоскости поле изоклин. Обозначим $\frac{dV}{dx} = C = \operatorname{tg} \alpha$, где α - угол наклона касательной к фазовой траектории относительно оси x.

Получим уравнение изоклин: для 1-ого и 3-его участков, имеем:

$$C = - \frac{V \pm B \cdot K}{V}; \quad \text{откуда} \quad V = \frac{\mp K \cdot B}{1 + C}$$

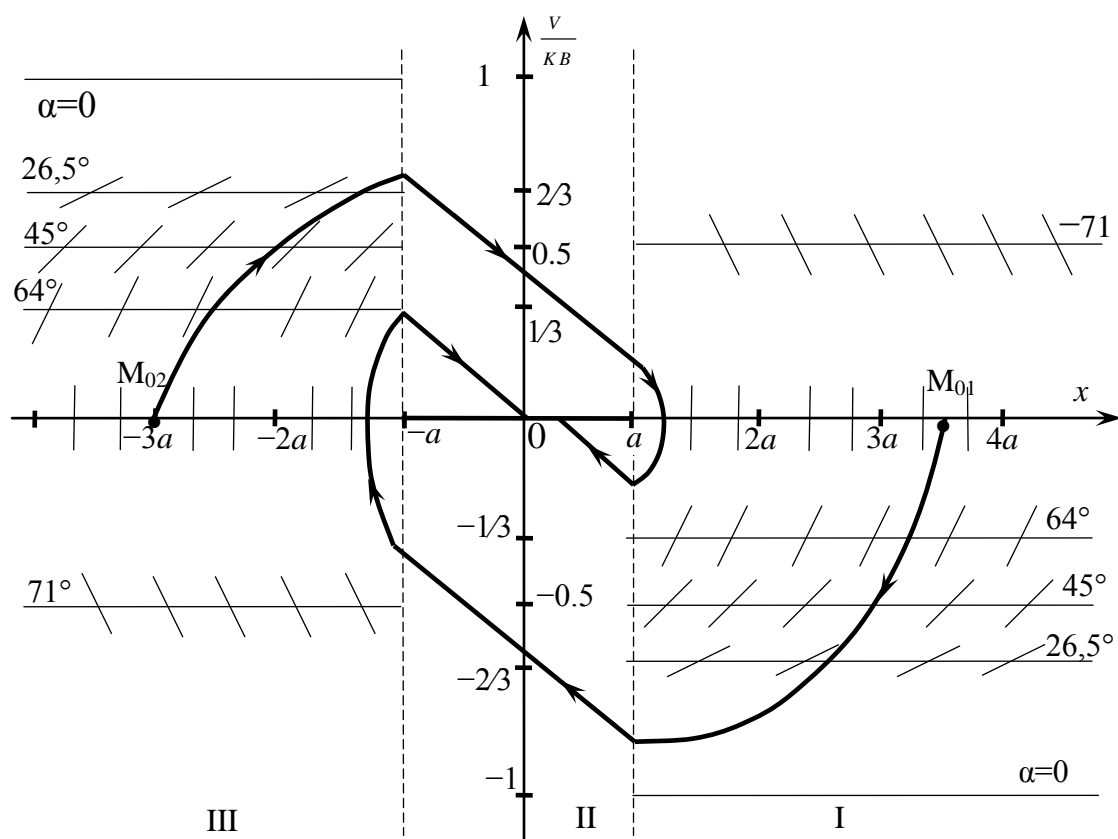


Рис. 13.25. Построение фазовых траекторий по методу изоклин

Последнее соотношение представляет собой уравнение прямых, параллельных оси x , т.е. изоклинами являются прямые параллельные оси x . Каждому значению C соответствует своя прямая, а также α и $\frac{V}{K \cdot B}$. Результаты вычислений представлены в таблице 13.2.

Таблица 13.2

C	0	0,5	1	2		-2	-3
α	0°	$26,5^\circ$	45°	64°	90°	-64°	-71°
$\frac{V}{K \cdot B}$	∓ 1	$\mp 2/3$	$\mp 1/2$	$\mp 1/3$	0	± 1	$\pm 1/2$

Следует напомнить, что в таблице 13.2 верхний знак относится к 1-ой области, нижний знак - к 3-ей области.

Для 2-ого участка согласно (13.19) получается:

$$\frac{dV}{dx} = C = -1; \quad \text{откуда } \alpha = -45^\circ,$$

т.е. во 2-ой области фазовой плоскости изображающая точка движется по прямой линии, которая имеет наклон к оси абсцисс $= -45^\circ$.

После этого наносим поле изоклин: на 1-ом участке проводим линию - 1, на которой наклон касательной к фазовой траектории равен 0° ; затем проводим прямую линию через $-2/3$ и на ней

наносим штрихи, определяющие наклон $26,5^\circ$ и т.д. На 2-ом участке изоклины расположены под наклоном -45° . (рис.13.25)

Берём начальное значение изображающей точки M_{01} с координатами $V(0)=0$ и $x(0) = 3,5 \cdot a$; изображаем движение её на 1-ом участке и т.д. Как только изображающая точка попадает на отрезок $[-a ; +a]$, то дальнейшее её движение прекращается. Этот отрезок называется особым отрезком или отрезком равновесия системы. В зависимости от начальных условий, остановка процесса движения изображающей точки по фазовой траектории может произойти в любой точке на оси абсцисс на отрезке $[-a ; +a]$.

Если возьмём другие начальные условия - точка $M_{02}\{V(0); x(0)= - 3 \cdot a\}$, то траектория движения её изображающей точки представлена на рис.13.25. Изображающая точка, двигаясь по ней, в конечном итоге также приходит на отрезок равновесия.

На основе исследования фазового портрета САР температуры можно утверждать:

1. автоколебание в рассматриваемой системе не возникают;
2. при любых значениях параметров системы и любых начальных условиях САР устойчива в большом. Здесь мы имеем затухающий переходный процесс. Причём, чем больше зона нечувствительности, тем быстрее затухает переходный процесс. Но вместе с этим увеличивается ошибка системы. Нелинейность типа идеального трёхпозиционного реле с зоной нечувствительности вносит погрешность в работу САР и система приходит к равновесному состоянию при значениях ошибки, определяемой зоной нечувствительности.

Построим фазовые траектории для рассматриваемой системы путём решения дифференциальных уравнений для фазовой траектории (13.18) и (3.19).

Для 1-ой и 3-ей области дифференциальное уравнение (13.18) преобразуем следующим образом (знак “ + ” относится к 1-ой области, знак “ - ” к 3-ей области):

$$-\frac{VdV}{V \pm K \cdot B} = dx$$

Несколько преобразуем данное к традиционному виду, удобному для решения. Для этого прибавим и вычтем в числителе одно и тоже слагаемое:

$$\frac{\pm K \cdot B \cdot dV \mp K \cdot B \cdot dV - V \cdot dV}{V \pm K \cdot B} = dx$$

После группирования 2-ого и 3-его членов числителя, получим:

$$\frac{\pm K \cdot B \cdot dV - (V \cdot K \pm B) \cdot dV}{V \pm K \cdot B} = dx$$

$$dx = -dV \pm \frac{K \cdot B}{V \pm K \cdot B} dV \quad \text{или}$$

$$x = -V \pm K \cdot B \cdot \ln|V \pm K \cdot B| + C_1, \quad (13.20)$$

где C_1 - постоянная интегрирования, определяемая начальными условиями.

Для 2-ой области из дифференциального уравнения (13.19) получаем:

$$x = -V + C_2 \quad (13.21)$$

где C_2 - постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий.

Вид фазовых траекторий, построенных на основе выражений (13.20) и (13.21), изображен на рис.13.26, которые идентичны фазовым траекториям, построенных по методу изоклин.

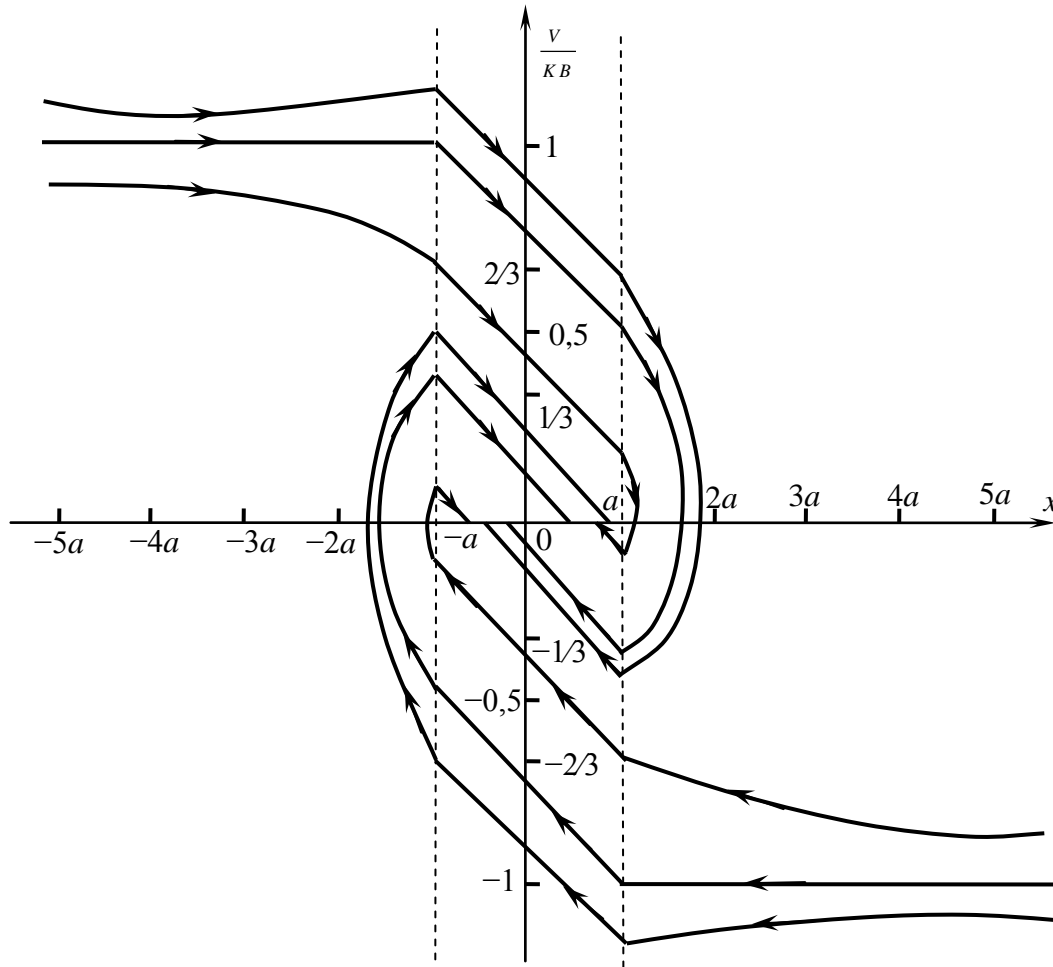


Рис. 13.26. Фазовые траектории на основе решения дифференциальных уравнений

13.3. Исследование динамики релейных систем.

Структурная схема исследуемой нелинейной системы представлена на рис.13.27, причем линейная часть системы состоит из двух последовательных включенных интеграторов; $f(x)$ – статическая характеристика нелинейного элемента; внешнее воздействие отсутствует. Определим уравнение фазовых траекторий.

Согласно структурной схеме, изображенной на рис. 13.27, имеем:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = f(x); \quad z = -x;$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + f(x) = 0 \quad (13.22)$$

Обозначим $\frac{dx}{dt} = V$ (13.23)

Тогда $\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dV}{dt}$, и с учетом этого уравнение (13.22) примет вид:

$$\frac{dV}{dt} = -f(x) \quad (13.24)$$

Разделим (13.24) на (13.23), тогда:

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{f(x)}{V}; \quad \text{или} \quad VdV = -f(x)dx \quad (13.25)$$

Уравнение (13.25) является уравнением фазовых траекторий для САУ, представленной на рис. 13.27.

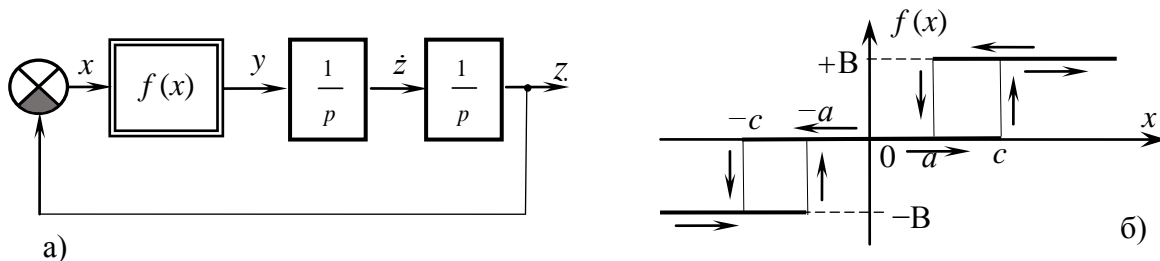


Рис.13.27. Структурная схема релейной САУ (а) с неоднозначной характеристикой нелинейного элемента (б)

В зависимости от вида статической характеристики $f(x)$ получаем различные фазовые траектории. Рассмотрим систему автоматического управления при следующих статических характеристиках нелинейных элементов:

- 1) Идеальное 2-х позиционное реле; статическая характеристика представлена на рис 1.2а. Аналитический вид указанной характеристики определяется соотношением (13.26).

$$y = f(x) = \begin{cases} +B, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -B, & x < 0 \end{cases} \quad (13.26)$$

Согласно статической характеристике, на фазовой плоскости имеет две области: в 1-й области ($x > 0$) имеем $f(x) = +B$ и уравнение фазовой траектории с учетом (13.25):

$$VdV = -Bdx; \quad \text{или} \quad \frac{V^2}{2} = -B \cdot x + C_1;$$

C_1 – постоянная интегрирования, определяемая начальными условиями.

И фазовая траектория при $x > 0$ представляет собой семейство парабол.

Во 2-й области ($x < 0$) и $f(x) = -B$ и согласно уравнению (13.25):

$$VdV = Bdx; \quad \text{или} \quad \frac{V^2}{2} = B \cdot x + C_2; \quad \text{где} \quad C_2 = \text{const.}$$

При $x < 0$ получаем также семейство парабол, причем линией переключения является ось ординат фазовой плоскости. Несмотря на то, что фазовые траектории являются замкнутыми, они не являются предельными циклами.

Семейство фазовых траекторий, соответствующих данной системе, представлено на рис. 13.28а. В системе наблюдаются незатухающие периодические колебания и имеет место особая точка типа центр. Переходной процесс в этой системе представлен на рис.13.28б.

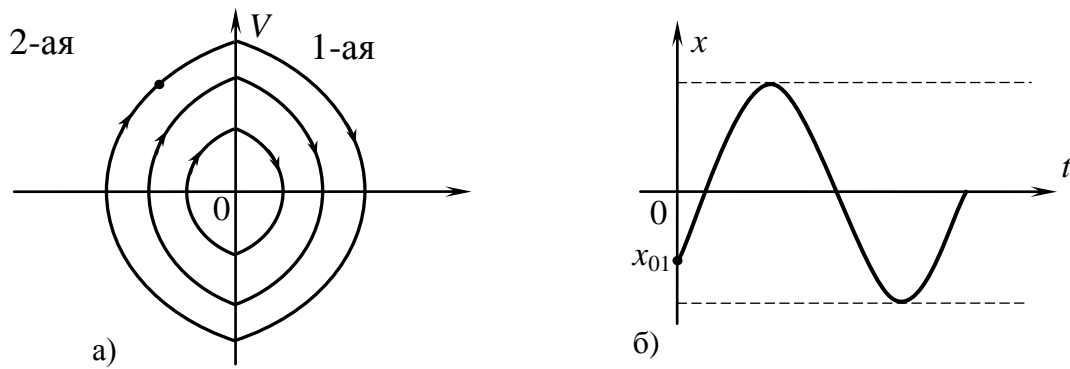


Рис. 13.28. Фазовый портрет системы с 2-позиционным идеальным реле (а) и процесс в этой системе (б)

Если бы начальные условия были $x=0$ и $y=0$, то на фазовой плоскости появилась бы точка $x=0, v=0$ и мы бы сказали, что система является неустойчивой.

- 2) 3-х позиционное реле с зоной нечувствительности; статическая характеристика этого нелинейного элемента представлена на рис. 13.2 б. Аналитический вид указанной характеристики определяется соотношением (13.27):

$$y = f(x) = \begin{cases} +B, & x > a \\ 0, & -a \leq x \leq a \\ -B, & x < -a \end{cases} \quad (13.27)$$

Согласно статической характеристике рис.13.2 б на фазовой плоскости имеем 3 области, которые определяются линиями переключения. Линии переключения на фазовой плоскости представляют собой прямые линии $x = \pm a$, параллельные оси ординат (Рис.13.29). В 1-й и 3-й областях уравнения фазовых траекторий определяются, соотношением (13.28):

$$\frac{v^2}{2} = \mp B \cdot x + C_1; \quad (13.28)$$

при этом знак «-» относится к 1-й области, а знак «+» к 3-й области;

C_1 – постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий. Фазовыми траекториями в этих областях 1 и 3 являются параболы.

Во 2-й области $f(x)=0$ и уравнения фазовых траекторий представляют собой прямые линии, параллельные оси абсцисс. На рис. 13.29 изображен фазовый портрет системы для этого случая. Фазовые траектории имеют замкнутый вид. Динамика системы характеризуется наличием периодических процессов, параметры которых зависят от начальных условий, и, следовательно, эти колебания не являются автоколебаниями. В данной системе существует бесконечное количество особых точек, определяемых их принадлежностью отрезку $[-a; +a]$. Эта совокупность особых точек есть отрезок равновесия. И надо говорить об устойчивости отрезка равновесия.

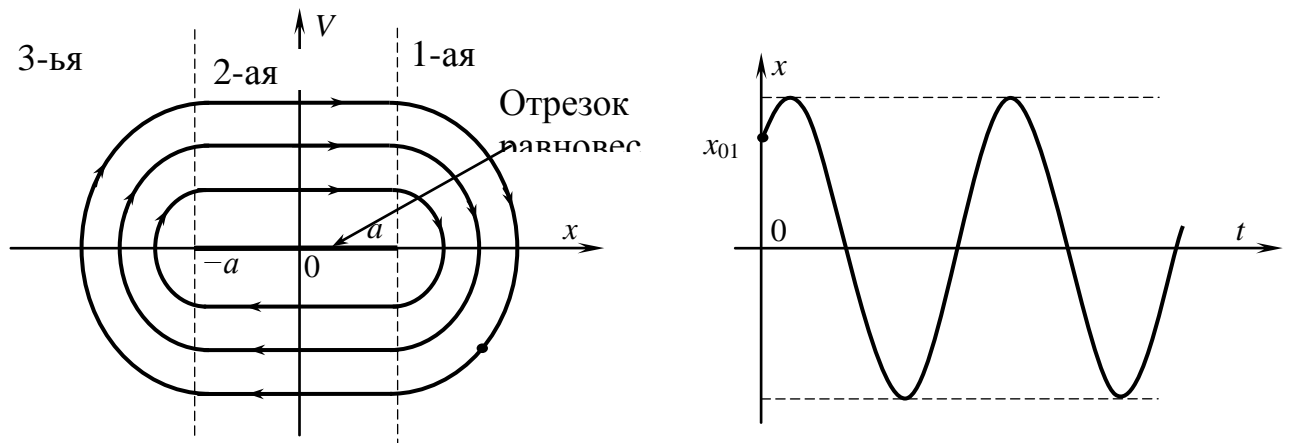


Рис. 13.29. Фазовый портрет системы с реле с зоной нечувствительности (а) и процесс в этой системе (б)

- 3) 2-х позиционное реле с гистерезисом; статическая характеристика этого элемента представлена на рис. 1.2 в. Аналитическая зависимость для этой характеристики определяется соотношением (13.29):

$$y = f(x) = \begin{cases} -B, x < a & , y_0 = -B \\ +B, x \geq a \\ +B, -a < x < a, & y_0 = +B \\ -B, x \leq -a \end{cases} \quad (13.29)$$

где y_0 - значение выходной величины нелинейного элемента до входа в зону неоднозначности.

Согласно статической характеристике (рис. 13.2 в), на фазовой плоскости имеем 2 области, которые определяются линиями переключения. Первая линия переключения имеет уравнение $x = +a$ при $V \geq 0$; вторая линия переключения имеет уравнение $x = -a$ при $V \leq 0$, т.е. линии переключения находятся в 1-м и 3-м квадрантах фазовой плоскости. Уравнения фазовых траекторий представляют собой уравнения парабол аналогичные (13.28). Изображающая точка с течением времени перемещается по траектории типа раскручивающейся спирали (рис.13.30а), состоящей из совокупности парабол (13.28). Процесс $x(t)$ соответствующий этому случаю показан на рис. 13.30 б. Как видно, система является неустойчивой.

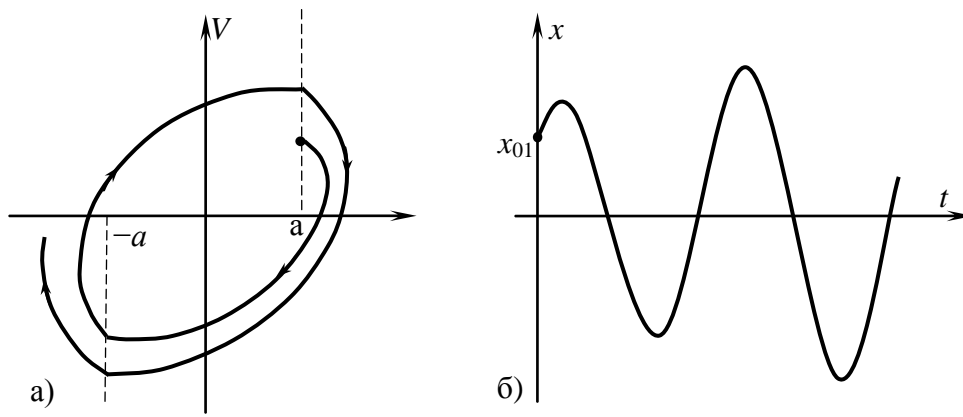


Рис. 13.30. Фазовая траектория нелинейной системы с 2-позиционным реле с гистерезисом (а) и процесс в этой системе (б)

- 4) 3-х позиционное реле с гистерезисом и зоной нечувствительности. Статическая характеристика этого элемента имеет вид, представленный на рис. 13.2 г. Аналитическое выражение, соответствующее этой характеристике, имеет вид (13.30):

$$y = f(x) = \begin{cases} +B, x > c \\ +B, a < x \leq c, y_0 = +B \\ 0, a < x \leq c, y_0 = 0 \\ 0, -a \leq x \leq a \\ 0, -c \leq x < -a, y_0 = 0 \\ -B, -c \leq x < -a, y_0 = -B \\ -B, x < -c \end{cases} \quad (13.30)$$

Согласно статической характеристике на фазовой плоскости будет иметь место три области, которые разделены между собой линиями переключения. При $V \geq 0$ (верхняя полуплоскость фазовой плоскости) линиями переключения являются прямые, параллельные оси ординат: $x = -a$ ($x < 0$) и $x = +c$ ($x > 0$). При $V \leq 0$ – нижняя полуплоскость фазовой плоскости линиями переключения являются: $x = -c$ ($x < 0$) и $x = +a$ ($x > 0$).

В 1-й и 3-й областях фазовыми траекториями системы являются параболы, а во 2-ой области фазовые траектории представляют прямые линии, параллельные оси абсцисс фазовой плоскости. На рис. 13.31 а, б представлены фазовый портрет и показаны процессы, характеризующие работу данной САУ. Из рисунков видно, что рассматриваемая система является неустойчивой при любых начальных условиях, т.е. динамика данной системы характеризуется совокупностью расходящихся процессов. Особенности фазового портрета для данной системы является наличие бесконечного множества особых точек на отрезке $[-c; +c]$. В этой системе отрезок равновесия неустойчив.

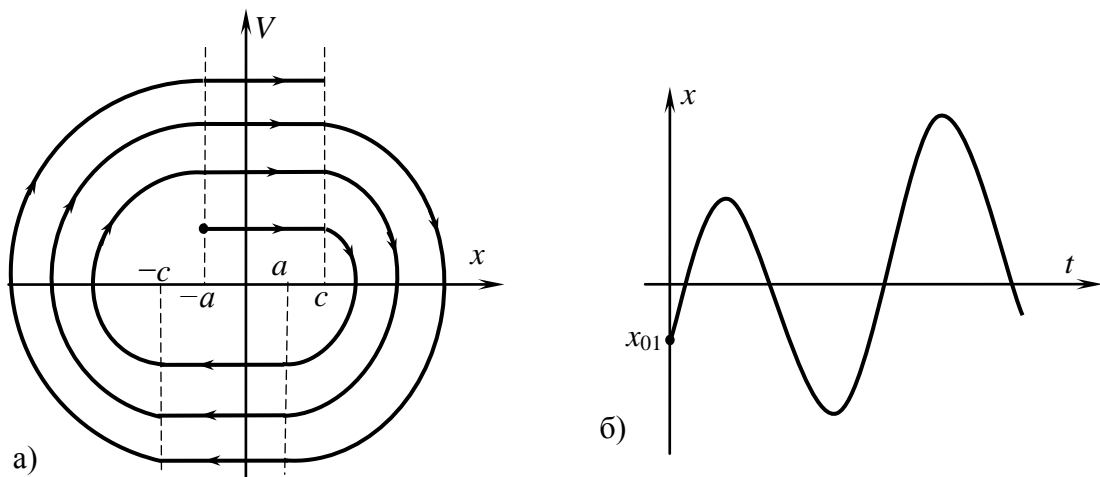


Рис. 13.31. Фазовая траектория нелинейной системы с 3-позиционным реле с гистерезисом (а) и процесс в этой системе (б)

13.4. Методы стабилизации нелинейных систем с релейными элементами.

Все нелинейные системы с релейными элементами, рассмотренные в предыдущем разделе, как показано, являются неустойчивыми. Поэтому возникает вопрос, связанный с обеспечением устойчивости их работы. В основном используется два метода стабилизации нелинейных систем с релейными элементами.

1. Стабилизация нелинейных систем с релейными элементами путем характера изменения фазовых траектории. Этот метод заключается в том, что один из интеграторов на схеме рис. 13.27а охватывается жесткой отрицательной обратной связью с коэффициентом передачи α (рис. 13.32). В результате вместо интегрирующего звена получаем инерционное звено:

$$W_1(p) = \frac{1/p}{1 + 1/p \cdot \alpha} = \frac{\frac{1}{p}}{1 + \frac{\alpha}{p}} = \frac{K_1}{1 + T \cdot p}$$

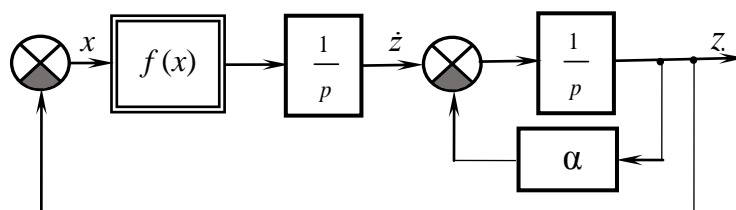


Рис. 13.32. Коррекция нелинейной системы путем изменения характера интегральных кривых

С учетом еще одного интегратора получаем, что передаточная функция линейной части:

$$W_1(p) = \frac{K_1}{(1+Tp) \cdot p} \quad (13.31)$$

т.е. пришли к схеме на рис. 13.23, для которой уравнение фазовых траекторий определяется выражениями (13.20)-(13.21). Причем было показано, когда статическая характеристика нелинейного элемента представляет 3-х позиционный релейный элемент с зоной нечувствительности, то при линейной части, определяемой соотношением (13.31), фазовые траектории имеют вид сходящихся к отрезку равновесия $[-a ; +a]$ при любых начальных условиях.

Рассмотрим нелинейный элемент типа 3-х позиционный нелинейный элемент с гистерезисом и зоной нечувствительности (рис. 13.27б). В литературе показано, что при заданных параметрах системы, характер сходимости фазовых траекторий к отрезку равновесия может быть различным в зависимости от величины гистерезиса. Пусть заданы: K_1, T, B, a .

Обозначим $\frac{c-a}{c} = \lambda$ - относительная ширина гистерезиса, причем λ меняется от 0 до 1. При $\lambda=0$ ($a=c$) статическая характеристика, представленная на рис. 13.27б, принимает вид изображенной на рис. 13.33а. При $\lambda=1$ ($a=0$) статическая характеристика рис. 13.27б принимает вид, представленный на рис. 13.33 б).

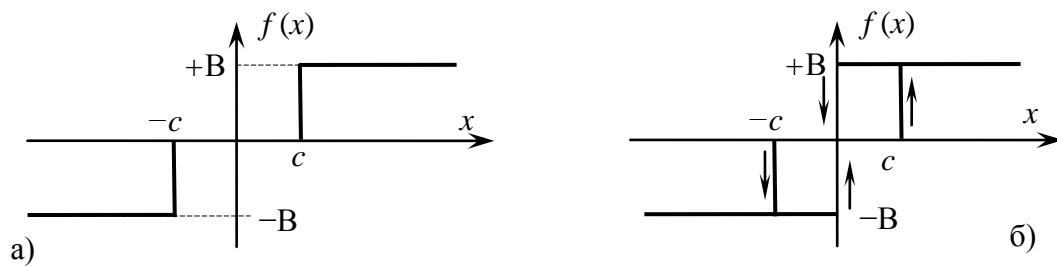


Рис. 13.33. Вид статических характеристик нелинейного элемента при крайних значениях относительной ширины гистерезиса λ ($\lambda=0$ и

В литературе показано, что при определенных значениях параметров нелинейной системы автоматического управления (K, T, B) существует критическое значение относительной ширины гистерезиса $\lambda_{кр}$ при котором:

- 1) Если $\lambda < \lambda_{кр}$, то все процессы сходятся к отрезку $[-c; c]$, но устойчивым будет только отрезок $[-a ; +a]$ – к нему и будут сходить все точки;
- 2) Если $\lambda > \lambda_{кр}$, то в системе устанавливаются автоколебания; при различных начальных условиях фазовые траектории будут приближаться к предельному циклу, которому соответствуют эти автоколебания, причем параметры автоколебаний не будут зависеть от начальных условий.

2. Стабилизация релейных систем путем изменения характера прямых переключения.

Рассмотрим нелинейную систему, состоящую из двух интеграторов, причем один из интеграторов вместе с нелинейным элементом охватывается жесткой отрицательной обратной связью по скорости (рис. 13.34).

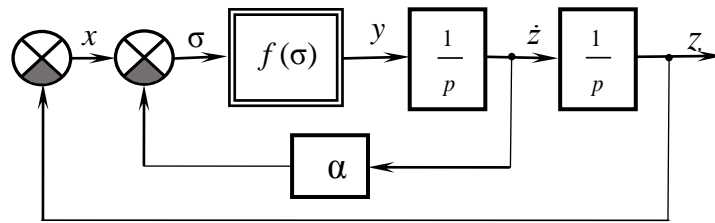


Рис. 13.34. Коррекция нелинейной системы путем изменения характера линий переключения

Согласно структурной схеме, математическое описание системы можно представить в виде следующих соотношений:

$$\begin{cases} x = -z \\ y = \frac{d^2 z}{dt^2} \\ y = f(\sigma) \\ \sigma = x + \alpha \frac{dx}{dt} \end{cases} \quad (13.32)$$

Откуда получим, что уравнение фазовых траекторий будет иметь вид:

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{\varphi(\sigma)}{V} \quad (13.33)$$

а) Если статическая характеристика нелинейного элемента представляет собой двухпозиционное идеальное реле (рис. 13.2 а), то переключение его будет происходить при:

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} +B, & \sigma \geq 0 \\ -B, & \sigma < 0 \end{cases}$$

В этом случае линия переключения не будет совпадать с осью ординат на фазовой плоскости. Уравнение переключения будет представлять собой прямую:

$$\sigma = x + \alpha \cdot V = 0,$$

которая наклонена к оси абсцисс фазовой плоскости под углом $\arctg(-\frac{1}{\alpha})$. Линия переключения делит фазовую плоскость на две области: 1-ая область выше линии переключения, а 2-ая область – ниже. Фазовыми траекториями будут параболы

$$\frac{V^2}{2} = \mp B \cdot x + C,$$

знак «-» относится для 1-ой области; знак «+» – для 2-ой области.

Фазовый портрет для этого случая изображен на рис. 13.35, и он состоит из отрезков парабол. Как видно из рисунка, если изображающая точка не находится на линии переключения (прямая MN), то она до достижения этой прямой будет двигаться по одной из парабол. Как только изображающая точка пересечет линию переключения, то она вновь попадает на одну из фазовых траекторий, соответствующей параболе, которая направлена в сторону линии переключения, пока не пересечет ее. После пересечения она опять окажется на фазовой траектории, направленной в сторону линии переключения. Изображающая точка не сможет уйти с линии переключения, но она не сможет и остаться на одном месте, т.к. dx/dt во всех точках существует. Движение

изображающей точки будут представлять колебания относительно линии переключения с бесконечно малой амплитудой и бесконечно малой частотой. В действительности, так как релейный элемент переключается из одного положения ($-B$) в другое положение ($+B$) не мгновенно, а с конечной скоростью переключения, то частота не будет бесконечно большой, а амплитуда бесконечно малой. При достижении изображающей точкой линии переключения она будет скользить по ней, двигаясь к положению равновесия. Такой режим работы называется скользящим режимом.

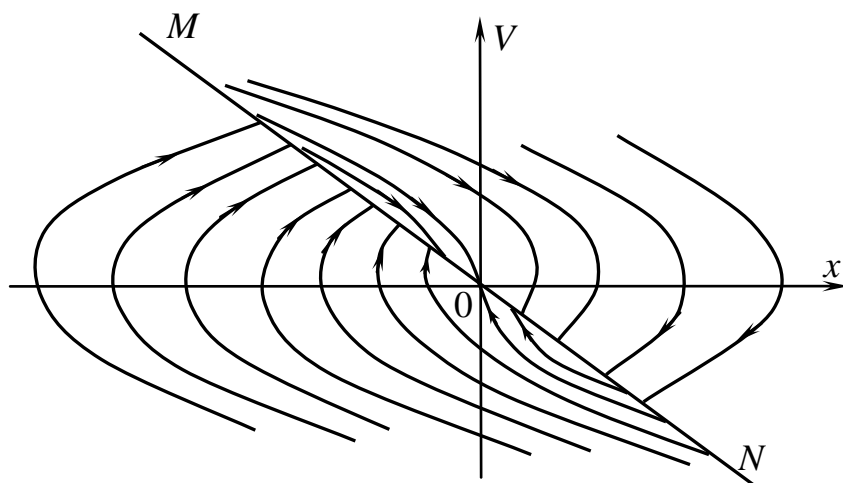


Рис. 13.35. Скользящий режим

б) Статической характеристикой нелинейного элемента является 3-х позиционное реле с зоной нечувствительности (рис. 13.2б). Уравнение фазовых траекторий будет иметь вид аналогичный (13.33). Изображающая точка, двигаясь по фазовой траектории, будет проходить по трём областям. Причем в 1-ой и 3-ей областях фазовой плоскости фазовыми траекториями будут являться параболы, а во второй области изображающая точка будет перемещаться по прямым параллельным оси абсцисс. Так как статическая характеристика $\varphi(\sigma)$ определяется соотношением (13.34)

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} +B, \sigma > a \\ 0, -a \leq \sigma \leq a \\ -B, \sigma < -a, \end{cases} \quad (13.34)$$

то линиями переключения будут прямые:

$$x + \alpha \cdot V = |a|,$$

угол наклона которых к оси абсцисс определяется знаком коэффициента жесткой обратной связи.

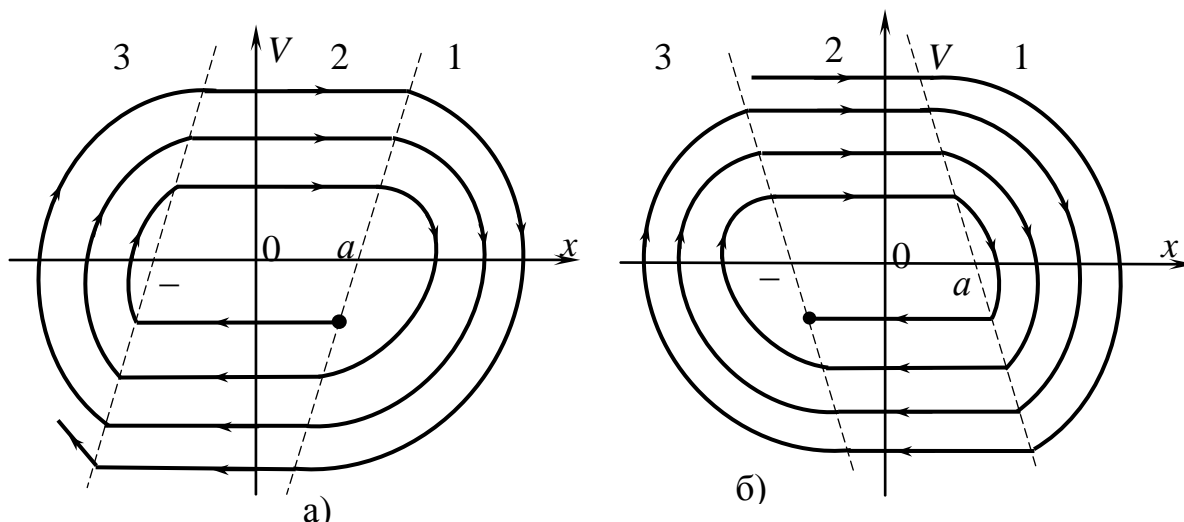


Рис. 13.36. Движение изображающей точки при а) $\alpha > 0$, б) $\alpha < 0$

При $\alpha < 0$ движение изображающей точки на фазовой плоскости будет осуществляться согласно фазовой траектории, представленной на рис. 13.31а и имеющий вид раскручивающейся спирали, т.е. процесс будет расходящимся.

При $\alpha > 0$ линии переключения и фазовая траектория движения изображающей точки изображена на рис. 13.31б. Фазовая траектория имеет спиралевидный закручивающийся характер. Движение изображающей точки стремится к отрезку равновесия $[-a, a]$.

13.4. Вопросы и задачи

- 2.1. По фазовым траекториям, представленным на рис.13.36а, б качественно постройте временную характеристику.
- 2.2. Какие типы особых точек и соответствующие им фазовые траектории возможны при исследовании линейных систем второго порядка методом фазовой плоскости? Укажите условия возникновения различных видов движения.
- 2.3. Что такое линии переключения? Как получить уравнения линий переключения в фазовой плоскости? Напишите уравнения линий переключения для САУ, структурная схема которой представлена на рис.13.27а, а статическая характеристика нелинейного элемента имеет вид, изображенный на рис.13.33б.
- 2.4. Для САУ, структурная схема которой представлена на рис.13.27а, а статическая характеристика нелинейного элемента имеет вид, изображенный на рис.13.27б, качественно постройте фазовые траектории для случаев: а) $\lambda < \lambda_{кр}$; б) $\lambda > \lambda_{кр}$.
- 2.5. Для фазовых траекторий задачи 2.4 качественно постройте временные характеристики.
- 2.6. Для фазовых траекторий, представленных на рис.13.22 и 13.25 качественно постройте соответствующие им временные характеристики.

2.7. Для нелинейной САУ, представленной на рис.13.27а со статической характеристикой НЭ $y = f_2(x_2)$ на рис.13.9б определите: а) уравнение линий переключения; б) уравнение фазовых траекторий. Постройте качественно фазовую траекторию.

2.8. Укажите условия возникновения скользящего режима в нелинейной САУ. Какой вид фазовых траекторий и переходных процессов соответствует этому режиму?

и переходных процессов соответствует этому режиму?

13.5. Исследование нелинейных систем методом гармонического баланса

13.5.1. Предпосылки метода

Метод гармонического баланса (гармонической линеаризации) используется для исследования нелинейных САУ, которые описываются, как правило, дифференциальным уравнением выше 2-го порядка. Этот метод исследования является приближенным графоаналитическим методом. Причем, чем выше порядок дифференциального уравнения, которое описывает линейную часть САУ, тем точнее метод.

Метод гармонической линеаризации при исследовании нелинейной системы позволяет дать ответ на следующие вопросы:

- 1) существуют ли в исследуемой САУ автоколебания или нет;
- 2) если автоколебания существуют, то устойчивые они или нет.

Позволяет определить параметры автоколебаний и условие отсутствия автоколебаний в тех случаях, когда они нежелательны.

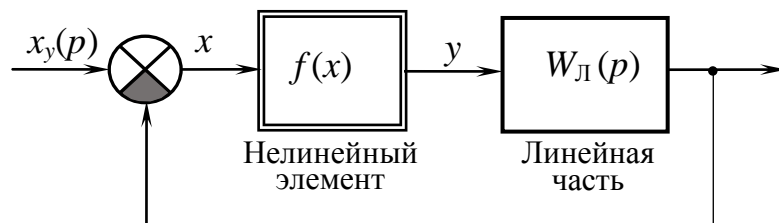


Рис. 13.37. Модель нелинейной САУ при исследовании методом гармонического баланса

Структурная схема исследуемой системы приводится к виду, представленному на рис.13.37, где $X_y(p)$ – изображение по Лапласу входного управляющего сигнала; $X_p(p)$ – выходной регулируемый сигнал; $f(x)$ – статическая характеристика нелинейного элемента; $W_L(p)$ – передаточная функция линейной части САУ. Предполагается, что в данной системе при отсутствии внешнего воздействия $x_y(t) = 0$ на вход нелинейного элемента поступает гармонический сигнал вида

$$x(t) = A \cdot \sin \omega t, \quad (13.35)$$

т.е. в рассматриваемой системе существует периодический режим – режим автоколебаний с амплитудой A и частотой ω .

Сигнал $x(t)$, проходя через нелинейный элемент, искажается так, что на выходе нелинейного элемента сигнал $y(t)$ будет несинусоидальный, но периодический. Степень искажения входного сигнала нелинейного элемента показана на рис. 13.38.

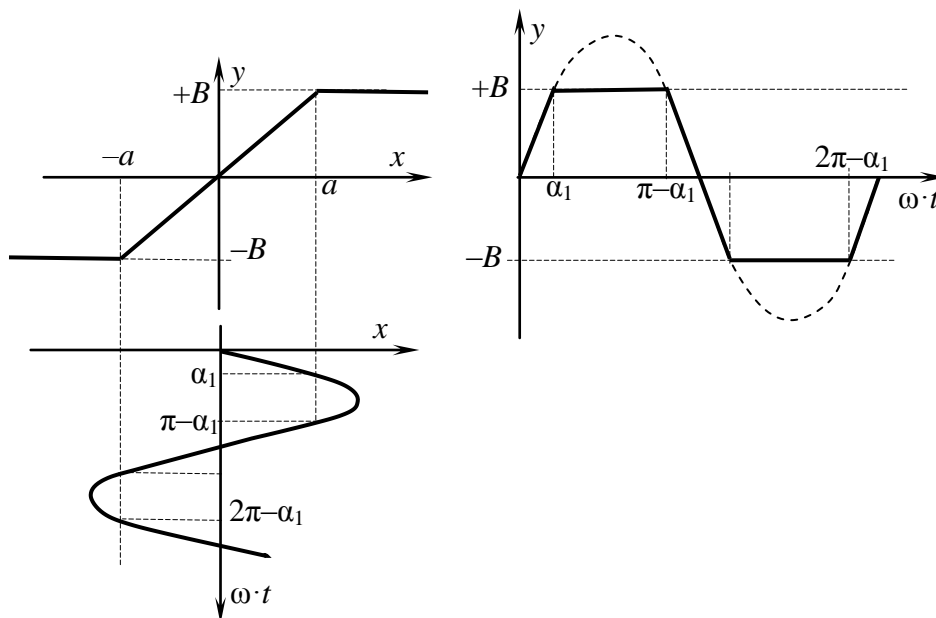


Рис. 13.38. Прохождение гармонического сигнала через нелинейный элемент

Сигнал $y(t)$ в общем случае содержит в своем составе весь спектр гармонических составляющих. Предполагается, что этот сигнал, проходя через линейную часть системы с частотной характеристикой $W_{\text{л}}(j\omega)$ и являющейся фильтром низких частот, фильтруется до такой степени, что сигнал на выходе линейной части можно вновь считать синусоидальным.

Так как сигнал на выходе нелинейного элемента является периодическим, то его можно представить в виде ряда Фурье:

$$y(x) = y\{A \sin \omega t\} = Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Y_{ck} \cdot \sin(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} Y_{kk} \cdot \cos(k\omega t),$$

где Y_{ck} и Y_{kk} – коэффициенты разложения в ряд Фурье, Y_0 – постоянная составляющая, которая для симметричных статических характеристик нелинейных элементов равна нулю.

Коэффициенты ряда Фурье определяются по формулам:

$$Y_{ck} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(A \sin \omega t) \cdot \sin(k\omega t) d(\omega t) \quad (13.36)$$

$$Y_{kk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(A \sin \omega t) \cdot \cos(k\omega t) d(\omega t)$$

Гармоническая линеаризация заключается в том, что нелинейная функция $y = f(x)$ – сигнал на выходе нелинейного элемента, заменяется функцией, в которой рассматривается только 1-ая гармоника и пренебрегают всеми высшими гармониками, при условии, что выполняется гипотеза фильтра – линейная часть обладает фильтрующими свойствами.

Выполнение этой гипотезы является необходимым условием гармонической линеаризации. При выполнении этой гипотезы связь между сигналами нелинейной системы (рис. 3.1) определяется соотношениями:

$$x_p(t) = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi); \quad x(t) + x_p(t) = 0.$$

Последнее выражение с учетом (3.1) распадается на два:

$$A = A_1; \quad \varphi = \pi.$$

Эти уравнения носят названия уравнений гармонического баланса (гармбаланса). Причем 1-ое уравнение выражает баланс амплитуд, а 2-ое – баланс фаз гармонических колебаний.

13.5.2. Эквивалентный комплексный коэффициент усиления нелинейного элемента

В результате гармонической линеаризации сигнал на входе нелинейного элемента $y(t)$ представляется в виде гармонического сигнала, имеющего только 1-ую гармонику:

$$y_1(t) = Y_{c1} \cdot \sin \omega t + Y_{k1} \cdot \cos \omega t,$$

где Y_{c1} и Y_{k1} с учетом (3.2) определяются выражениями:

$$Y_{c1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(A \sin \omega t) \cdot \sin \omega t d(\omega t);$$

$$Y_{k1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(A \sin \omega t) \cdot \cos \omega t d(\omega t).$$

Выражение для $y_1(t)$ можно переписать следующим образом:

$$y_1(t) = \frac{Y_{c1}(A)}{A} \cdot A \cdot \sin \omega t + \frac{Y_{k1}(A)}{A \cdot \omega} \cdot A \cdot \omega \cdot \cos \omega t.$$

Учитывая, что производная по времени от сигнала $x(t)$ равна $x^{(')} (t) = A \cdot \omega \cdot \cos \omega t$, из последнего соотношения получим:

$$y_1(t) = g(A) \cdot x(t) + \frac{b(A)}{\omega} \cdot x^{(')} (t).$$

Это уравнение является дифференциальным уравнением нелинейного элемента.

Так как $\dot{x}(t) = A \cdot e^{j\omega t}$, то $\dot{x}^{(')} (t) = j\omega A \cdot e^{j\omega t}$,

тогда $\dot{y}_1(t) = g(A) \cdot \dot{x}(t) + +jb(A) \cdot \dot{x}(t)$.

Откуда $\dot{y}_1(t) = [g(A) + jb(A)] \cdot \dot{x}(t)$, или

$$W_{\text{нз}}(A) = \frac{\dot{y}_1(t)}{\dot{x}(t)} = g(A) + jb(A) = \frac{Y_{c1}}{A} + j \frac{Y_{k1}}{A} \quad (3.37)$$

Характеристика $W_{\text{нз}}(A)$ называется эквивалентным комплексным коэффициентом усиления (ЭККУ) нелинейного элемента – это есть записанное в комплексной форме отношение первой гармоники выходного сигнала к входному гармоническому сигналу. Величины $g(A)$ и $b(A)$ называются коэффициентами гармонической линеаризации.

С учетом выражений для коэффициентов ряда Фурье коэффициенты гармонической линеаризации определяются соотношениями:

$$g(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \cdot \sin \omega t) \sin \omega t d(\omega t) \quad (3.38)$$

$$b(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \cdot \sin \omega t) \cos \omega t d(\omega t)$$

Модуль эквивалентного комплексного коэффициента $W_{\text{нз}}(A)$ и аргумент определяются, соответственно, из следующих выражений:

$$|W_{\text{нз}}(A)| = \sqrt{g^2(A) + b^2(A)} = \frac{\sqrt{Y_{c1}^2 + Y_{k1}^2}}{A}$$

$$\varphi_H = \arctg \frac{Y_{k1}}{Y_{c1}}.$$

С учетом этого имеем:

$$W_{\text{нз}}(A) = |W_{\text{нз}}(A)| \cdot e^{j \cdot \varphi_H}.$$

Как видно из выражения (3.37), ЭККУ нелинейного элемента, в общем, является комплексной величиной.

13.5.3. Методика определения эквивалентного комплексного коэффициента усиления нелинейного элемента

Методику определения ЭККУ рассмотрим на конкретных примерах.

Пример 3.1. Необходимо определить ЭККУ для нелинейного элемента, представляющего собой трехпозиционное реле с зоной нечувствительности, статическая характеристика которого изображена на рис. 3.3.

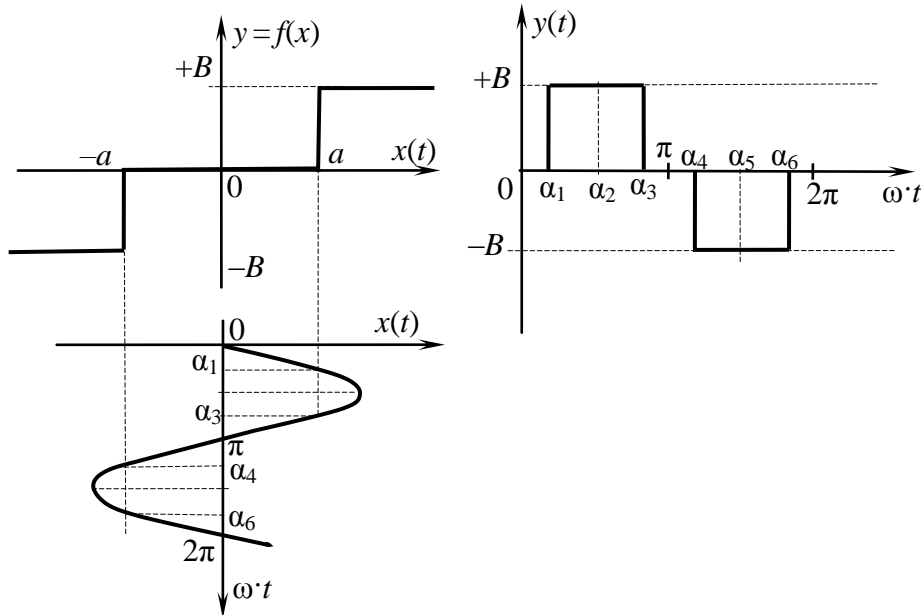


Рис. 13.39. Определение ЭКУ нелинейного элемента с однозначной статической характеристики

На этом же рисунке строится входной и выходной сигналы нелинейного элемента.

Аналитические соотношения для статической характеристики имеют вид:

$$y = f(x) = \begin{cases} +B, & x \geq a \\ 0, & x < |a| \\ -B, & x \leq -a. \end{cases}$$

На вход нелинейного элемента поступает сигнал $x(t) = A \sin \omega t$, $A \geq a$.

Учитывая выражение (13.38) и иллюстрацию, представленную на рис.13.40, определим действительную составляющую для ЭКУ $g(A)$:

$$g(A) = \frac{4}{\pi A} \int_{\alpha_1}^{\pi/2} f(A \sin \omega t) \sin \omega t dt = \frac{4}{\pi A} \int_{\alpha_1}^{\pi/2} B \sin \omega t d(\omega t) = \frac{4B}{\pi A} (-\cos \omega t) \Big|_{\alpha_1}^{\pi/2} = \frac{4 \cdot B}{\pi \cdot A} \cdot \cos \alpha_1.$$

Из рис. 13.40 видно, что:

$$A \cdot \sin \alpha_1 = a; \quad \text{откуда} \quad \sin \alpha_1 = \frac{a}{A}.$$

С учетом этого получим:

$$g(A) = \frac{4 \cdot B}{\pi \cdot A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}.$$

Мнимая составляющая ЭКУ $b(A)$ будет равна:

$$b(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} B \cdot \cos \omega t d(\omega t) = \frac{B}{\pi A} \cdot [\sin \omega t]_{\alpha_1}^{\pi/2} + \sin \omega t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \alpha_1} - \sin \omega t \Big|_{\pi + \alpha_1}^{\frac{3\pi}{2}} - \sin \omega t \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi - \alpha_1} = \frac{B}{\pi A} [\sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \alpha_1 + + \sin(\pi - \alpha_1) - \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{3\pi}{2} + \sin(\pi + \alpha_1) - \sin(2\pi - \alpha_1) + + \sin \frac{3\pi}{2} \pi = 0$$

Окончательно имеем:

$$W_{H3}(A) = g(A) + j \cdot b(A) = \begin{cases} 0, & A \leq a \\ \frac{4B}{\pi \cdot A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}, & A > a \end{cases} \quad (3.39)$$

На рис. 13.40 приведен график зависимости ЭККУ рассмотренного нелинейного элемента от относительной амплитуды входного гармонического сигнала. Его еще называют нормированным ЭККУ, где обозначено $\bar{A} = \frac{A}{a}$, $\frac{B}{a} = \bar{B}$.

Тогда из (13.39) получим:

$$W_{\text{H3}}(\bar{A}) = \frac{4 \cdot B \cdot a}{\pi \cdot A \cdot a} \cdot \frac{\sqrt{A^2 - a^2}}{A} = \frac{4 \cdot \bar{B}}{\pi \bar{A}^2} \sqrt{\bar{A}^2 - 1} \quad (13.40)$$

Определим значение относительной амплитуды \bar{A} , при которой ЭККУ достигает своего экстремального значения. Для этого найдем производную от выражения (3.6) относительно \bar{A} и приравняем ее к нулю.

$$\frac{dW_{H\bar{\Theta}}(\bar{A})}{d\bar{A}} = \frac{4 \cdot \bar{B}}{\pi} \left[\frac{\bar{A}^2 \cdot \frac{1}{2}(\bar{A}^2-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot \bar{A} - (\bar{A}^2-1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2\bar{A}}{\bar{A}^3} \right] = \frac{4 \cdot \bar{B}}{\pi} \cdot \frac{(-\bar{A}^2 + 2)}{\bar{A}^3(\bar{A}^2 - 1)^{1/2}} = 0$$

откуда $\bar{A}_0 = \sqrt{2}$; а $W_{\text{НЭ}}(\bar{A}) = \frac{4 \cdot \bar{B}}{\pi}$.

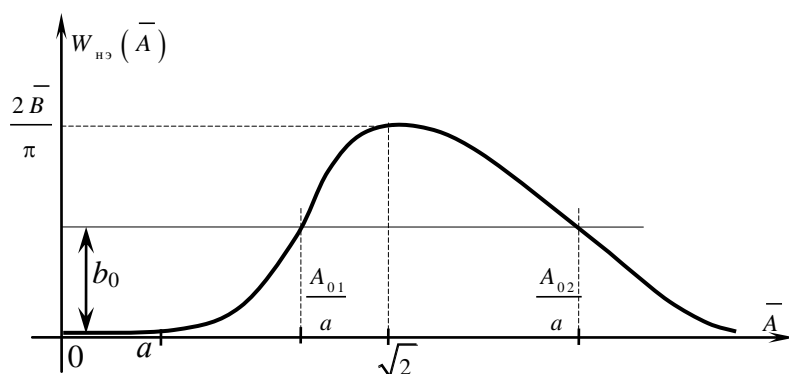


Рис. 13.40. Нормированный ЭККУ для 3-позиционного реле с зоной нечувствительности

Пример 3.2. Необходимо определить ЭККУ для нелинейного элемента, представляющего собой двухпозиционное реле с гистерезисом. Статическая характеристика нелинейного элемента представлена на рис. 13.41.

Согласно выражениям (3.38) и рис. 13.41 получим действительную составляющую ЭККУ:

$$\begin{aligned}
 g(A) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} y(A \cdot \sin \omega t) \cdot \sin \omega t \, d(\omega t) = \frac{1}{\pi A} \left[\int_0^{\varphi_1} -B \cdot \sin \omega t \cdot d(\omega t) + \int_{\varphi_1}^{\pi+\varphi_1} B \cdot \right. \\
 &\sin \omega t \, d(\omega t) + \int_{\pi+\varphi_1}^{2\pi} -B \cdot \sin \omega t \, d(\omega t) = \frac{B}{\pi A} \left[\cos \omega t \Big|_0^{\varphi_1} - \cos \omega t \Big|_1^{\pi+\varphi_1} + \cos \omega t \Big|_{\pi+\varphi_1}^{2\pi} \right] = \\
 &\frac{B}{\pi \cdot A} [\cos \varphi_1 - \cos 0 - \cos(\pi + \varphi_1) + \cos \varphi_1 + \cos 2\pi - \cos(\pi + \varphi_1)] = \frac{B}{\pi A} [\cos \varphi_1 - 1 + \cos \varphi_1 + \\
 &\cos \varphi_1 + 1 + \cos \varphi_1] \Big] = \frac{4 \cdot B}{\pi A} \cdot \cos \varphi_1
 \end{aligned}$$

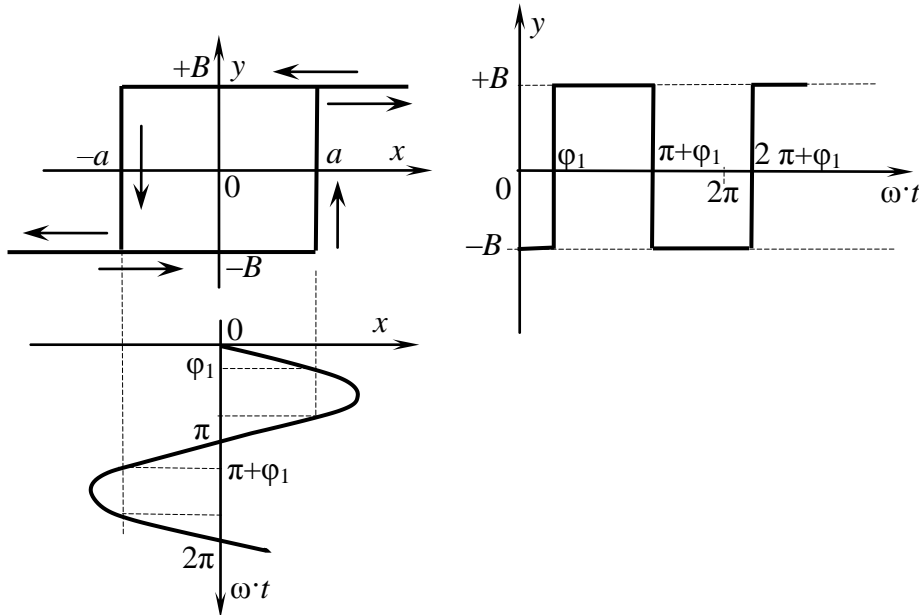


Рис.13.41. Определение ЭКУ нелинейного элемента с неоднозначной статической характеристики

На основе рис. 3.41 имеем:

$$a = A \cdot \sin \varphi_1; \text{ откуда } \sin \varphi_1 = \frac{a}{A}; \cos \varphi_1 = \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}}, \text{ т.е. } g(A) = \frac{4 \cdot B}{\pi \cdot A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}}.$$

По аналогии с этим, мнимая составляющая ЭКУ будет равна:

$$b(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} y(A \cdot \sin \omega t) \cdot \cos \omega t d(\omega t) \quad .$$

Или с учетом рис.3.41 будем иметь:

$$b(A) = \frac{1}{\pi A} [-B \cdot \sin \omega t|_0^{\varphi_1} + B \cdot \sin \omega t|_{\varphi_1}^{\pi+\varphi_1} - B \sin \omega t|_{\pi+\varphi_1}^{2\pi+\varphi_1}] = \frac{B}{\pi A} \cdot [-\sin \varphi_1 + \\ + \sin 0 - \sin \varphi_1 - -\sin \varphi_1 - \sin \varphi_1 - \sin 0] = -\frac{4 \cdot B}{\pi A} \sin \varphi_1 = -\frac{4 \cdot B \cdot a}{\pi A^2}.$$

На основе приведенных примеров по определению ЭКУ нелинейных элементов можно указать на некоторые его свойства.

1. Если статическая характеристика нелинейного элемента является однозначной, то в выражении для ЭКУ отсутствует мнимая составляющая.
2. Если ЭКУ является комплексной функцией, то соответствующий ему нелинейный элемент имеет неоднозначную статическую характеристику.

В подавляющем большинстве реальных нелинейных элементов справедливо и обратное утверждение.

3. Если нелинейный элемент является безынерционным звеном, то ЭКУ является функцией только амплитуды входного сигнала.

В литературе показано, что если нелинейный элемент не является безынерционным звеном, то соответствующий ему ЭККУ является функцией не только амплитуды входного сигнала, но и функцией его частоты.

13.6. Определение свободных периодических колебаний методом гармонического баланса.

Структурную схему нелинейной САУ, после гармонической линеаризации, можно представить в виде на изображенном рис. 13.42.

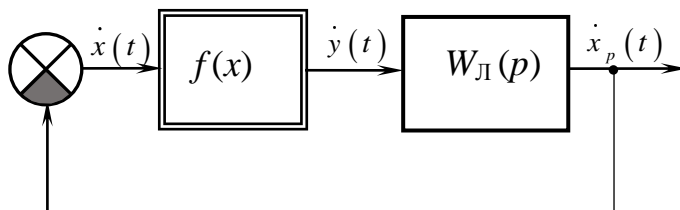


Рис. 13.42. Структурная схема линейной САУ после гармонической линеаризации

На основе данной структурной схемы математическое описание САУ можно записать следующей системой уравнений:

$$\dot{x}_p(t) = \dot{y}_1(t) \cdot W_L(j\omega)$$

$$\dot{x}(t) = -\dot{x}_p(t)$$

$$\dot{y}_1(t) = \dot{x}(t) \cdot W_{HЭ}(A).$$

Подставляя последовательно $\dot{y}_1(t)$ из третьего уравнения в первое и $\dot{x}_p(t)$ из второго уравнения в полученное первое, будем иметь:

$$W_L(j\omega) \cdot W_{HЭ}(A) + 1 = 0 \quad (13.41)$$

В данной системе уравнений $\dot{x}(t) = A \cdot \sin \omega t$, где A и ω – амплитуда и частота автоколебаний, которые, как предполагается, имеют место в САУ.

Уравнение (13.41) представляет собой другую форму записи уравнения гармонического баланса. Это уравнение автоколебаний.

Решением данного уравнения является амплитуда и частота автоколебаний на входе нелинейного элемента.

Часто решение уравнения (13.41) находят графоаналитическим способом, предложенного Гольдфарбом Л. С. Для этого из уравнения (13.41) получаем:

$$W_L(j\omega) = -\frac{1}{W_{HЭ}(A)}.$$

Обозначим правую часть этого выражения через $-Z(A)$. Часто характеристика $-\frac{1}{W_{HЭ}(A)} = -Z(A)$ называется инверсным комплексным коэффициентом усиления нелинейного элемента, взятого со знаком « \leftarrow ».

Для решения вопроса о наличии в рассматриваемой системе автоколебаний, на комплексной плоскости строится АФЧХ (годограф) линейной части $W_L(j\omega)$. На этой же комплексной плоскости строится характеристика для нелинейного элемента $-Z(A)$. Иллюстрация этого показана на рис. 13.43. Как видно из указанного рисунка, характеристики линейной части и нелинейного элемента пересекаются в двух точках 1 и 2. Пересечение характеристик в двух точках указывает на то, что в системе существуют автоколебания с параметрами (амплитудой и частотой): в точке 1 – $A_{k1}; \omega_{k1}$, в точке 2 – $A_{k2}; \omega_{k2}$. Не каждое из найденных решений соответствуют устойчивым автоколебаниям, т.е. таким, которые в случае вариации параметров САУ, вызванных кратковременным возмущением, восстанавливаются.

В настоящее время отсутствует какой-либо точный метод определения устойчивости автоколебаний. Предложенный Л.С. Гольдфарбом критерий определения устойчивости автоколебаний является необходимым условием. Но как показали многочисленные исследования реальных САУ, критерий в большинстве случаев является и достаточным.

Формулировка критерия: если перемещаться по характеристике нелинейного элемента в направлении увеличения амплитуды A , то для устойчивости периодического решения требуется, чтобы АФЧХ линейной части системы $W_L(j\omega)$ не охватывала годограф $-\frac{1}{W_{HЭ}(A)} = Z(A)$, соответствующего бóльшим значениям амплитуды A . Это соответствует тому, что характеристика нелинейного элемента выходит из области, охватываемой годографом линейной части.

И наоборот – точка пересечения характеристик, где $-Z(A)$ при увеличении амплитуды A входит в область, охватываемую годографом $W_L(j\omega)$, соответствует неустойчивым автоколебаниям.

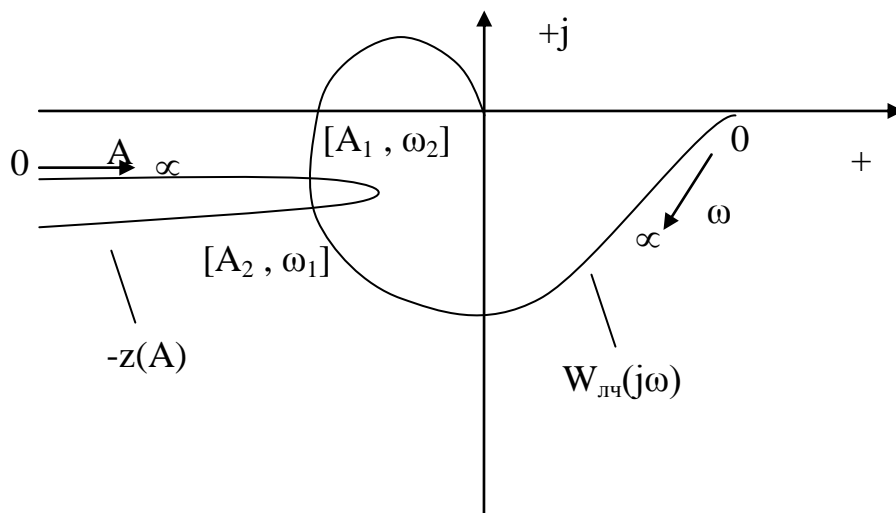


Рис.13.43а. АФХ системы в случае возникновения автоколебаний.

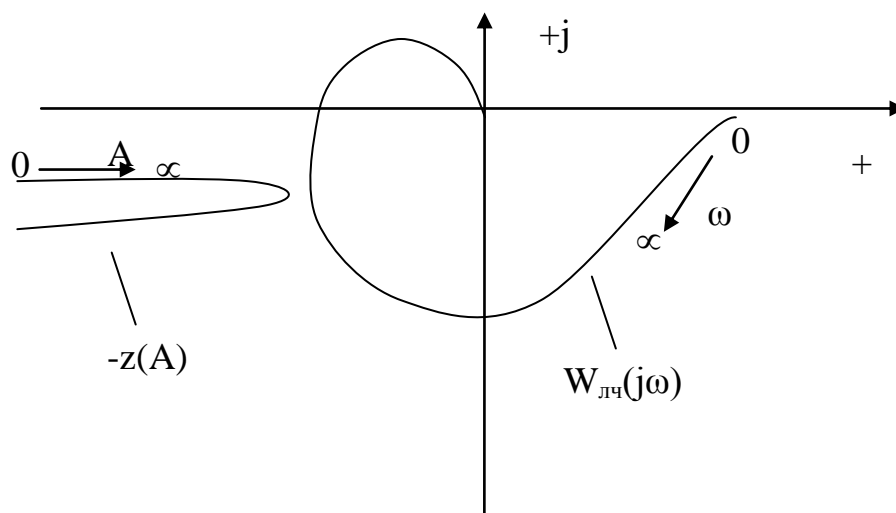


Рис.13.43б. АФХ системы в случае отсутствия автоколебаний.

Для рис.13.43а точка 1 соответствует неустойчивым автоколебаниям $(A_{k1}; \omega_{k1})$ – физически нереализуемым, а точка 2 – устойчивым автоколебаниям с параметрами $(A_{k2}; \omega_{k2})$, т.е. физически реализуемым и наблюдаемым.

Если характеристики линейной части и нелинейного элемента не пересекаются, то в рассматриваемой нелинейной системе автоколебания отсутствуют (рис. 13.43б). И система с устойчивой линейной частью будет устойчивой.

Рассмотрим примеры – определение автоколебаний и их параметров с помощью метода гармонического баланса.

Пример 3.3. Исследовать устойчивость состояния равновесия нелинейной САУ методом гармонического баланса, структурная схема которой представлена на рис. 13.37. Статическая характеристика нелинейного элемента – 3-х позиционное реле с зоной нечувствительности (рис. 13.39), а линейная часть имеет передаточную функцию

$$W_n(p) = \frac{K}{p(1 + pT)^2};$$

Исходные данные: $K = 0,82 \text{ с}^{-1}$; $T = 0,05 \text{ с}$; $a = 0,25$; $B = 110$.

Данную задачу можно решить двумя способами.

Решение 1-ым способом: воспользуемся уравнением гармонического баланса

$$W_{HЭ}(A) \cdot W_n(j\omega) = -1.$$

Построим АФЧХ линейной части системы $W_n(j\omega)$. Согласно структурной схеме, выражение для АФЧХ может быть представлено в виде:

$$W_n(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + j\omega T)^2};$$

Соответственно, модуль $A(\omega)$ и аргумент $\varphi(\omega)$ комплексного коэффициента усиления $W_n(j\omega)$ равны:

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega \cdot \sqrt{[1 + (\omega T)^2]^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2 \cdot \arctg(T \cdot \omega).$$

Или, после подстановки значений для параметров K и T имеем:

$$A(\omega) = \frac{0,82}{\omega \cdot (1 + 0,0025 \cdot \omega^2)}; \quad \varphi(\omega) = -90^\circ - 2\arctg(0,05 \cdot \omega).$$

Задаваясь значением ω от 0 до ∞ по выражениям для $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ строим АФЧХ линейной части исследуемой САУ. Ее вид представлен на рис. 13.7.

Выражение для ЭККУ нелинейного элемента, как показано ранее, равно:

$$W_{HЭ}(A) = \frac{4 \cdot B}{\pi \cdot A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \quad \text{или} \\ -\frac{1}{W_{HЭ}(A)} = -\frac{\pi A^2}{4 \cdot B} \cdot \frac{1}{\sqrt{A^2 - a^2}}$$

После подстановки численных значений для a и B , получим:

$$-\frac{1}{W_{HЭ}(A)} = -\frac{\pi A^2}{440} \cdot \frac{1}{\sqrt{A^2 - 0,0625}}$$

Задаваясь значениями амплитуды A от $A = a = 0,25$ до ∞ , строим характеристику нелинейного элемента на той же комплексной плоскости, что и $W_n(j\omega)$. Так как выражение для $-\frac{1}{W_{HЭ}(A)}$ не содержит мнимой составляющей, то она будет совпадать с отрицательной вещественной полуосью комплексной плоскости и при изменении амплитуды A в указанных пределах содержит две ветви. На рис. 13.44 эта характеристика показана пунктиром.

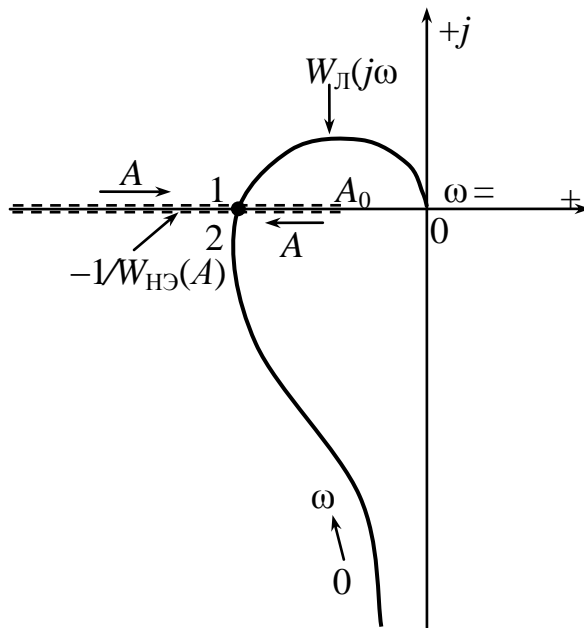


Рис.13.44. Определение параметров автоколебаний.

Из рис.13.44 видно, что характеристики $W_L(j\omega)$ и $-\frac{1}{W_{HЭ}(A)}$ имеют две точки пересечения.

Это означает, что уравнение гармонического баланса имеет два периодических решения:

$$x_{01} = A_{01} \cdot \sin \omega_0 \cdot t \quad \text{и} \quad x_{02} = A_{02} \cdot \sin \omega_0 \cdot t,$$

A_{01}, A_{02} – амплитуда автоколебаний; ω_0 – их частота. Частота $\omega_0 = 20 \text{ с}^{-1}$ определяется из условия: равенство нулю мнимой составляющей $W_L(j\omega)$, либо из выражения $\varphi(\omega) = -90^\circ - 2\arctg(\omega \cdot 0,05) = -\pi$. Подставляя значение ω_0 в выражение для модуля $W_L(j\omega)$, определяем его значение в точке пересечения характеристик. Из условия равенства в указанной точке модуля характеристики линейной части модулю характеристики нелинейного элемента, получаем два значения амплитуды автоколебаний: $A_{01} = 0,257$ и $A_{02} = 2,86$.

Для определения устойчивости периодического решения используем критерий Гольдфарба, согласно которому получаем, что колебания в точке 1 являются неустойчивыми. Следовательно, в рассматриваемой системе устанавливаются автоколебания с амплитудой $A = 2,86$ и частотой $\omega_0 = 20 \text{ с}^{-1}$: $x_{02} = 2,86 \cdot \sin 20 \cdot t$.

Решение рассмотренной задачи 2-ым способом, в основе которого лежит тоже уравнение гармонического баланса. Но в отличие от 1-ого способа, здесь воспользуемся нормированным ЭККУ:

$$W_{HЭ}(A) = N \cdot W_{HЭ0}\left(\frac{A}{a}\right); \quad N = \frac{B}{a}.$$

Для определения параметров автоколебаний решается уравнение:

$$-W_{HЭ0}\left(\frac{A}{a}\right) = \frac{1}{N \cdot W_L(j\omega)}.$$

С учетом исходных данных задачи, получим:

$$\frac{1}{N \cdot W_n(j\omega)} = -\frac{2 \cdot T}{K_1} \cdot \omega^2 + j \cdot \left(\frac{\omega}{K_1} - \frac{T^2}{K_1} \omega^3 \right), \quad K_1 = N \cdot K.$$

Эта характеристика называется инверсным годографом линейной части.

Изменяя частоту ω в пределах $0 \leq \omega \leq \infty$, строим инверсную АФЧХ линейной части – у нее вещественная часть при любых указанных значениях ω не больше нуля. Вид ее изображен на рис. 13.45.

На этой же комплексной плоскости строится нормированный годограф нелинейного элемента, взятый со знаком минус: $-W_{HЭО} \left(\frac{A}{a} \right)$.

Из рисунка видно, что характеристики пересекаются. Значит, в САУ существуют автоколебания.

Определим амплитуду и частоту автоколебаний. Для определения частоты автоколебаний приравняем к нулю мнимую составляющую инверсной характеристики линейной части:

$$Im \left(\frac{1}{N \cdot W_n(j\omega)} \right) = 0; \quad \text{или} \quad \frac{\omega}{K_1} - \frac{T^2}{K_1} \omega^3 = 0;$$

откуда получим $\omega_0 = \frac{1}{T} = 20 \text{ c}^{-1}$.

Из выражения для ω видно: 1) частота автоколебаний определяется параметрами линейной части (постоянной времени T) и не зависит от характеристики нелинейного элемента; 2) чем больше постоянная времени T , тем меньше частота автоколебаний ω_0 .

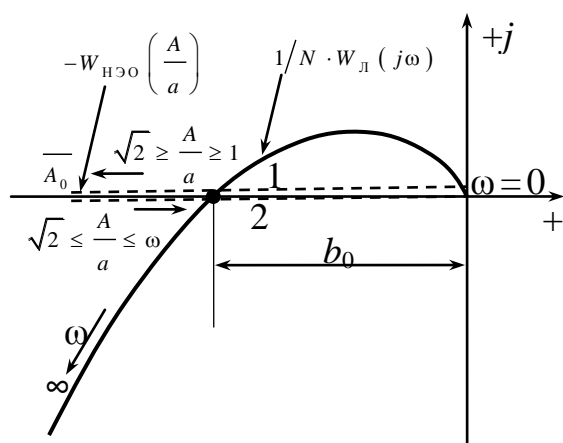


Рис. 13.45. Определение параметров автоколебаний по инверсной $W_{\text{л}}(j\omega)$ и нормированному ЭККУ НЭ

Определим амплитуду автоколебаний A_k . Ее можно определить двумя способами: 1) по найденной частоте ω_0 определяется модуль инверсной характеристики линейной части; полученное значение приравниваем к модулю нормированной характеристики нелинейного элемента, взятой со знаком минус; из полученного уравнения определяем амплитуду

автоколебаний. Согласно 2-ому способу определяется величина отрезка на вещественной оси от точки пересечения характеристик линейной части и нелинейного элемента до оси абсцисс (рис. 13.45), и это значение переносится на инверсную нормированную характеристику нелинейного элемента $W_{HЭ0}(A/a)$, изображенной на рис. 13.40; проводим прямую линию параллельную оси абсцисс – имеем две точки пересечения, в которых определяем A_{01}/a и A_{02}/a . Откуда имеем A_{01} и A_{02} . Устойчивость автоколебаний определяется наоборот по сравнению с тем, когда используем $W_{HЭ}(A)$: устойчивые автоколебания соответствуют той точке пересечения характеристик линейного и нелинейного элементов, для которой при увеличении амплитуды A , двигаясь по характеристике нелинейного элемента, осуществляется вход в область, охватываемой характеристикой линейной части. Из рис. 13.44 видно, что точке устойчивых автоколебаний соответствует точка 2.

Пример 3.4. Исследовать устойчивость состояния равновесия нелинейной САУ методом гармонического баланса, структурная схема которой представлена на рис. 13.37. Статическая характеристика нелинейного элемента 2-х позиционное реле с гистерезисом (рис. 13.41), а линейная часть $W(p)$ равна $W(p) = \frac{K}{p(1+T \cdot p)}$. Исходные данные: $K = 0,15 \text{ град/рад}$; $T = 25 \text{ с}$; $a = 16$; $B = 24$.

Решение: уравнение гармонического баланса.

$$W_{HЭ}(A) \cdot W_{л}(j\omega) = -1 \quad \text{или} \quad W_{л}(j\omega) = -\frac{1}{W_{HЭ}(A)}.$$

$$W_{HЭ}(A) = g(A) + j \cdot b(A);$$

$$g(A) = \frac{4 \cdot B}{\pi \cdot A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}; \quad b(A) = -\frac{4Ba}{\pi A^2};$$

После преобразований, получаем:

$$\frac{1}{W_{HЭ}(A)} = \frac{\pi A}{4 \cdot B} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} + j \frac{\pi \cdot a}{4 \cdot B}.$$

Используем нормированный ЭККУ нелинейного элемента $W_{HЭ0}(A) = N \cdot W_{HЭ}(A)$, где $N = \frac{B}{a}$.

$$\text{Тогда} \quad -\frac{1}{W_{HЭ0}(A)} = -N \cdot W_{л}(j\omega) = -\frac{\pi A}{4 \cdot a} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} - j \frac{\pi}{4}.$$

$$W_{л}(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + j\omega T)} = -\frac{j \cdot K \cdot (1 - j\omega T)}{\omega(1 + \omega^2 T^2)} = -\frac{K \cdot T}{1 + \omega^2 T^2} -$$

$$-j \frac{K}{\omega(1 + \omega^2 T^2)} = \text{Re}W_{л}(j\omega) + j\text{Im}W_{л}(j\omega)$$

$$\text{Re}W_{л}(j\omega) = -\frac{3,75}{1 + 0,25 \cdot \omega^2};$$

$$ImW_{\text{л}}(j\omega) = -\frac{0,225}{\omega \cdot (1 + 625\omega^2)}.$$

Так как $ImNW_{\text{л}}(j\omega) = -\frac{\pi}{4}$, то по графику (рис. 13.46) можно легко найти $ReNW_{\text{л}}(j\omega) = -1,37$. Тогда,

$$-1,37 = -\frac{\pi A^2}{4 \cdot a} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}; \quad \text{откуда } A = 32,17;$$

$$-\frac{\pi}{4} = -\frac{0,225}{\omega \cdot (1 + 625\omega^2)}; \quad \text{и} \quad \omega \approx 0,07 \text{ с}^{-1}.$$

Согласно критерию Гольдфарба автоколебания являются устойчивыми, т.е. в рассматриваемой системе будет иметь место устойчивый периодический процесс: $x(t) = 32,17 \cdot \sin 0,07 \cdot t$.

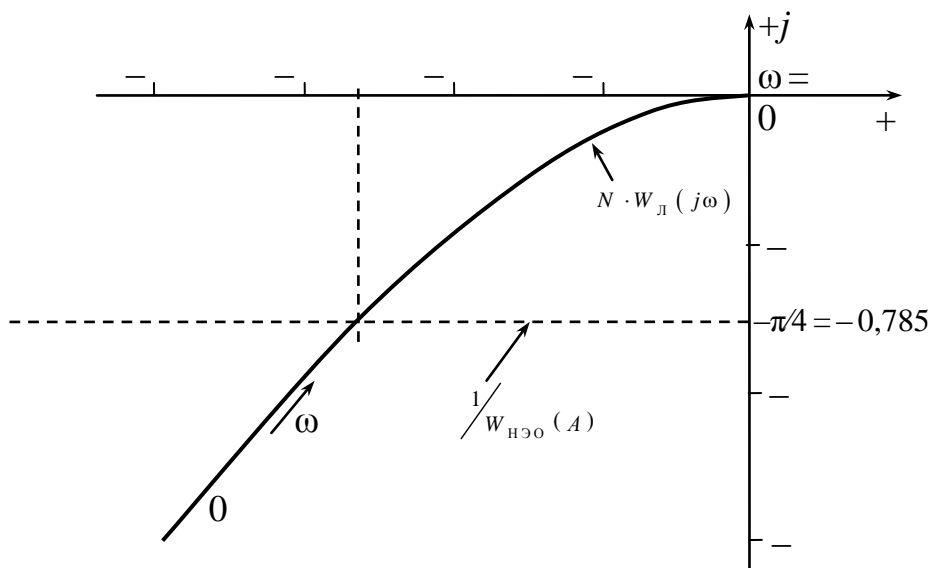


Рис.13.46. Определение параметров автоколебаний в САУ с 2-х позиционным реле с гистерезисом.

13.7. Вопросы и задачи

3.1. Изобразите сигнал на выходе НЭ для САУ, представленной на рис.13.37, а статическая характеристика НЭ на рис.13.27б. Рассмотрите случаи: 1) $a=0$; $c=5$; $B=10$; 2) $a=5$; $c=10$; $B=4$.

3.2. Определите ЭККУ для НЭ, статическая характеристика которого представлена на рис.13.33б.

3.3. Определите ЭККУ для НЭ, статическая характеристика которого представлена на рис.13.27б.

3.4. Методом гармонического баланса для САУ, представленной на рис.13.37 определить максимальное значение коэффициента усиления линейной части, при котором в нелинейной системе будут отсутствовать автоколебания для случаев:

а)

$$W_L(p) = \frac{K}{p(1+3p+p^2)}; \text{ статическая характеристика НЭ на рис.13.39, при этом } a=2; B=4.$$

б)

$$W_L(p) = \frac{K}{(1+8p)^3}; \text{ статическая характеристика НЭ на рис.13.39, при этом } a=2; B=10.$$

3.5. Методом гармонического баланса для САУ, представленной на рис.13.37 определите амплитуду и частоту автоколебаний для случаев:

а)

$$W_L(p) = \frac{K}{p(1+3p+p^2)}; \text{ статическая характеристика НЭ на рис.13.39, при этом } a=2; B=4.$$

б)

$$W_L(p) = \frac{K}{(1+8p)^3}; \text{ статическая характеристика НЭ на рис.13.39, при этом } a=2; B=10.$$

3.6. Для САУ, представленной на рис.13.37, определите степень подавления линейной частью 2-ой и 3-ей гармоник (т.е. выясните выполняется ли гипотеза фильтра) для случаев:

а)

$$W_L(p) = \frac{K}{p(1+3p+p^2)}; \text{ статическая характеристика НЭ на рис.13.39, при этом } a=2; B=4.$$

б)

$$W_L(p) = \frac{K}{(1+8p)^3}; \text{ статическая характеристика НЭ на рис.13.39, при этом } a=2; B=10.$$

13.8. Исследование устойчивости нелинейных САУ

13.8.1. Определение понятия устойчивости по Ляпунову

На САУ в процессе ее работы оказывают влияние различные возмущения, которые отклоняют систему от заданного закона движения. Если система, после прекращения действия возмущений возвращается к исходному состоянию, то движение в системе является устойчивым. Если же после прекращения действия возмущений удаление системы от первоначального состояния с течением времени возрастает и отклонение ее выходит за пределы допустимой области, то движение в системе является неустойчивым.

Фундаментальный вклад в развитие теории устойчивости внес Ляпунов А.М. Общее определение понятия устойчивости любой динамической системы по Ляпунову выглядит следующим образом.

Уравнения динамики работы нелинейной САУ n -го порядка в нормальной форме Коши представляются в виде:

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n} \quad (13.42)$$

Устойчивость САУ определяется свободным движением системы после начального отклонения ее, вызванного каким-либо воздействием. Система уравнений (13.42) описывает работу автономной САУ, т.к. функции φ_i в правой части не зависят от времени.

Решением системы уравнений (13.42) является совокупность функций

$$\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\},$$

таких, что при подстановке их в систему (13.42), они превращают ее в тождество. При этом выполняются начальные условия:

$$x_1(t_0) = x_{10}; x_2(t_0) = x_{20}; \dots x_n(t_0) = x_{n0}, \quad (13.43)$$

где $t = t_0$ – произвольный момент времени, принимаемый за начальный.

При исследовании устойчивости САУ вводятся понятия возмущенного и невозмущенного движений.

Невозмущенное движение – это любое движение (решение системы уравнений (13.42) при начальных условиях (13.43), назначенное исследователем для изучения его свойств. Обозначим его как:

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0).$$

Например, этим невозмущенным движением может быть установившийся процесс в работе САУ. Любое другое движение (решение) по отношению к невозмущенному называется возмущенным.

Существуют понятия: возмущения движения и вариации (отклонения) возмущения. Возмущения – это то, что порождает отклонение возмущенного движения от невозмущенного. Например, отклонение от заданной совокупности начальных условий (13.43):

$$\Delta x_{i0} = x_{i0} - x_{i0}^0,$$

где Δx_{i0} – возмущение.

Оценивание факта возмущения (вариация процесса движения)

$$\delta x_i = x_i - x_{i0}, \quad i = \overline{1, n}$$

играют существенную роль в определении устойчивости.

Невозмущенное движение называется устойчивым по Ляпунову, если для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$, как бы мало оно не было, можно указать другое число $\lambda > 0$ такое, при всех возмущениях $|\Delta x_{i0}| < \lambda, i = \overline{1, n}$, начиная с некоторого конечного времени $t \geq t_0$ будет

выполняться условие, состоящее в том, что величина вариации движения будет меньше величины ε :

$$|\delta x_i| \leq \varepsilon, \quad i = \overline{1, n}.$$

Или другими словами: всегда можно подобрать замкнутую область λ , ограничивающую начальные условия так, чтобы движение не вышло за пределы заданной замкнутой области ε .

Невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым, если:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta x_i(t) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Невозмущенное движение устойчиво «в малом», если величина λ мала.

Невозмущенное движение устойчиво «в большом», если величина λ ограничена:

$$0 < \lambda < d < \infty.$$

Если величина λ может быть любой, то невозмущенное движение называется устойчивым в целом.

13.8.2. Первый метод Ляпунова

Первый метод Ляпунова позволяет исследовать устойчивость нелинейных систем «в малом». Суть метода заключается в том, что рассматривается модель автономной САУ, заданной системой уравнений (13.42). Нелинейная функция в правой части раскладывается в ряд Тейлора в точке x^0 , которая является особой точкой, определяющей положение равновесия: $\frac{d(x_i^0 + \Delta x_i)}{dt} =$

$$\varphi_i(x_1^0, \dots, x_n^0) + \frac{1}{1!} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \Big| x^0 \cdot \Delta x_1 + \frac{1}{1!} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \Big| x^0 \cdot \Delta x_2 + \dots + \frac{1}{1!} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} \Big| x^0 \cdot \Delta x_n + B_i$$

где B_i – остаточный член, содержащий отклонения в степени выше первой; $x^0 = \{x_1^0, \dots, x_n^0\}$; $i = \overline{1, n}$.

Если пренебречь остаточным членом, то получим:

$$\frac{d(\Delta x_i)}{dt} = a_{i1} \cdot \Delta x_1 + a_{i2} \cdot \Delta x_2 + \dots + a_{in} \cdot \Delta x_n \quad (13.44)$$

Уравнения (13.44) называются уравнениями первого приближения – в разложении ряда Тейлора оставлены только линейные члены. Система уравнений (13.44) еще носит название линеаризованной модели исходной нелинейной системы (13.42).

Если x^0 – точка равновесия, то суть результата, полученного Ляпуновым, заключается в следующем: если нелинейная система может быть приближенно представлена линеаризованным уравнением относительно отклонений, то в не особых случаях об устойчивости исходной нелинейной системы «в малом» можно судить по свойствам линеаризованной системы.

Для устойчивости «в малом» положения равновесия линейной системы в не особых случаях необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения

линеаризованной модели были левыми – положение равновесия линеаризованной модели было асимптотически устойчивым.

Не особый случай соответствует тому, что характеристическое уравнение не имеет корней на мнимой оси комплексной плоскости; особый случай – хотя бы один корень на мнимой оси.

Если линеаризованная система устойчива «в малом», то устойчива «в малом» и исходная нелинейная система.

В особых случаях судить об устойчивости движения системы по уравнениям первого приближения нельзя. Для оценки устойчивости необходимо учитывать отброшенные при линеаризации члены более высокого порядка.

Рассмотренный метод линеаризации или первый метод Ляпунова применим для систем, в которых нелинейная функция может быть разложена в ряд Тейлора, т.е. если нелинейность является несущественной. Если нелинейная характеристика является существенной, то ее нельзя разложить в ряд Тейлора. Для исследования устойчивости подобных систем можно использовать второй (прямой) метод Ляпунова.

13.8.3. Второй (прямой) метод Ляпунова

Второй (прямой) метод Ляпунова является общим методом исследования устойчивости любых нелинейных систем. Он дает достаточное условие устойчивости равновесия «в большом», т.е. если условия метода не выполняются, это не значит, что САУ является неустойчивой требуются дополнительные исследования. В основе метода лежат две теоремы, построенные с помощью специальных функций Ляпунова. Эти функции должны удовлетворять определенным требованиям.

Пусть есть функция $g(x_1, \dots, x_n)$; для нее выполняется условие $g(0, \dots, 0) = 0$ и вводятся понятия: знакоопределенная функция и знакопостоянная функция.

Функция $g(x_1, \dots, x_n)$ называется знакоопределенной положительно, если $g(x) > 0$ при $x \neq 0$, и знакоопределенной отрицательно, если $g(x) < 0$ при $x \neq 0$. При этом $g(0) = 0$.

Функция $g(x)$ называется знакопостоянной, определенной положительно, если $g(x) \geq 0$ при $x \neq 0$, и знакопостоянной, определенной отрицательно, если $g(x) \leq 0$ при $x \neq 0$.

Пусть модель исследуемой нелинейной САУ представлена в нормальной форме Коши. Тогда формулировка теорем Ляпунова следующая.

Теорема 1 (об устойчивости положения равновесия): если можно указать знакоопределенную функцию $V(x_1, \dots, x_n)$ координат системы такую, что ее производная по времени $R = \frac{dV}{dt}$ в дифференциальных уравнениях движения представляет собой знакопостоянную функцию противоположного с функцией V знака, то положение равновесия устойчиво.

Теорема 2 (об асимптотической устойчивости): если, кроме того, функция R является знакоопределенной, то положение равновесия является асимптотически устойчивым.

Функции V , удовлетворяющие условиям 1-ой или 2-ой теоремы, называются функциями Ляпунова.

Основной проблемой применения 2-ого метода Ляпунова является поиск функции Ляпунова, т.е. решение вопроса, какую функцию V выбрать при исследовании конкретной модели нелинейной системы.

13.8.4. Критерий абсолютной устойчивости Попова В.М. для САУ с устойчивой линейной частью

Структурная схема исследуемой нелинейной САУ представлена на рис. 13.47. При этом предполагается, что $x_y \equiv 0$. Абсолютной устойчивостью называется устойчивость нелинейной системы в целом, когда нелинейная характеристика принадлежит к определенному классу.

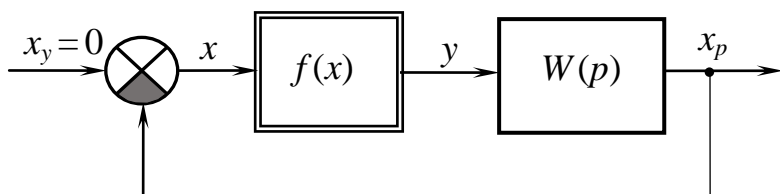


Рис. 13.47. Структурная схема исследуемой САУ

Под классом нелинейных характеристик понимаются характеристики, расположенные между двумя прямыми, которые проходят через начало координат в первом и третьем квадрантах координатной плоскости, имеющих угловые коэффициенты K_{min} и K_{max} , а линеаризованная таким образом нелинейная САУ будет устойчивой (рис. 13.48). Угол, образованный двумя указанными прямыми называется Гурвицев угол.

В 1946 г. М.А. Айзерман выдвинул гипотезу, которая заключается в том, что если нелинейная характеристика лежит внутри Гурвицева угла, то положение равновесия нелинейной системы является устойчивым.

В результате последующих исследований справедливость указанной гипотезы не была подтверждена.

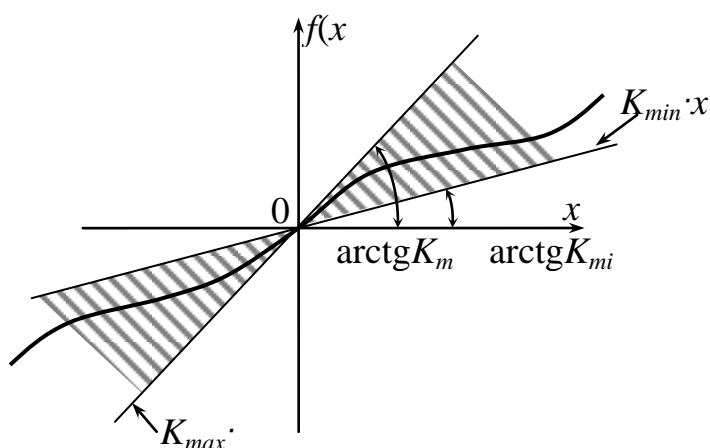


Рис. 13.48. Определение Гурвицева угла.

Для исследования абсолютной устойчивости нелинейных систем используется частотный критерий устойчивости, который был предложен болгарским ученым В.М. Поповым в 1959 г. Он дает достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных САУ.

Передачная функция линейной части САУ (рис. 13.48) является устойчивой.

$$W(p) = \frac{B(p)}{D(p)}; \quad W(j\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega) + j \operatorname{Im} W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (13.45)$$

Характеристическое уравнение $D(p) = 0$ имеет корни p_i , у которых отрицательную действительную часть; характеристика нелинейного элемента является однозначной и она расположена в секторе между осью абсцисс и касательной к статической характеристике нелинейного элемента:

$$0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq K, \quad \text{т.е.} \quad \frac{f(x)}{x} \in [0, K].$$

Формулировка теоремы Попова В.М.: для того, чтобы состояние равновесия нелинейной системы было абсолютно устойчивым при устойчивой линейной части системы достаточно, чтобы при всех $\omega \geq 0$ выполнялось следующее соотношение:

$$\operatorname{Re}[(1 + j\omega q) \cdot W(j\omega)] + \frac{1}{K} > 0 \quad (13.46)$$

где q - произвольное действительное число, удовлетворяющая следующим ограничениям:

- 1) если статическая характеристика НЭ $f(x)$ стационарная и однозначная, то q - произвольное действительное число: $-\infty \leq q \leq \infty$;
- 2) если характеристика НЭ $f(x)$ стационарная и неоднозначная с положительным (пассивным) гистерезисом, то $-\infty < q < 0$;
- 3) если характеристика НЭ $f(x)$ стационарная и неоднозначная с отрицательным (активным) гистерезисом, то $0 \leq q < +\infty$;
- 4) если характеристика НЭ $f(x)$ нестационарная, однозначная или неоднозначная (кроме случаев 2 и 3), то $q = 0$.

На рис. 13.49 приведены примеры неоднозначных статических характеристик нелинейных элементов с пассивным (а) и активным (б) гистерезисом.

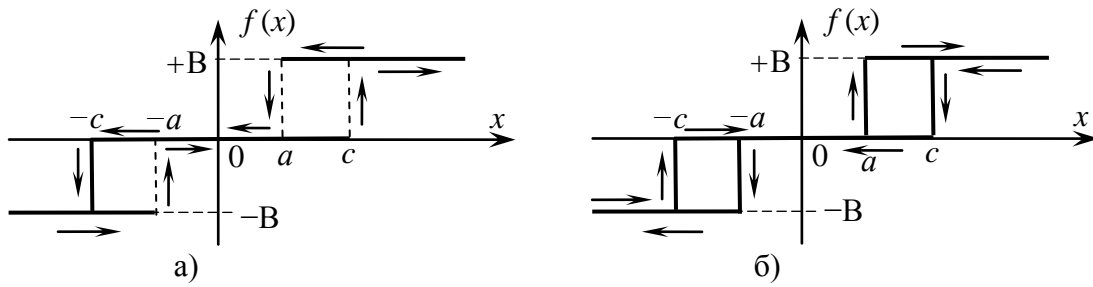


Рис. 13.49. 3-х позиционное реле с пассивным (а) и с активным (б)

Рассмотрим геометрическую интерпретацию критерия Попова. Учитывая соотношение (13.45), выражение (13.46) будет иметь вид:

$$\operatorname{Re} \left\{ (1 + j\omega q) \cdot [P(\omega) + jQ(\omega)] + \frac{1}{K} \right\} = P(\omega) - q \cdot \omega \cdot Q(\omega) + \frac{1}{K} > 0 \quad (13.47)$$

В рассмотрение вводится модифицированная характеристика линейной части $W^*(j\omega)$:

$$W^*(j\omega) = P^*(\omega) + j \cdot Q^*(\omega), \quad \text{причем}$$

$$P^*(\omega) = P(\omega); \quad Q^*(\omega) = \omega \cdot Q(\omega)$$

Конец вектора $W^*(j\omega)$ при изменении $0 \leq \omega \leq \infty$ описывает кривую, которая называется модифицированным годографом линейной части.

С учетом этого, соотношение (13.47) в критическом случае принимает вид:

$$P^*(\omega) - q \cdot Q^*(\omega) + \frac{1}{K} = 0 \quad (13.48)$$

Это уравнение прямой в координатах P^* , Q^* , которая касается характеристики $W^*(j\omega)$. Прямая (13.48) проходит через точку $(-\frac{1}{K}; j \cdot 0)$ на вещественной оси и под углом наклона, определяемым величиной $\frac{1}{q}$. Эта прямая называется прямой Попова.

Когда выполняется условие (13.47), модифицированный годограф линейной части $W^*(j\omega)$ лежит справа от этой прямой.

Отсюда следует следующая геометрическая трактовка критерия абсолютной устойчивости В.М. Попова: для того, чтобы положения равновесия САУ с устойчивой линейной частью было абсолютно устойчивым, достаточно через точку $(-\frac{1}{K}; j \cdot 0)$ можно было провести прямую Попова так, чтобы модифицированный годограф линейной части располагался справа от этой прямой.

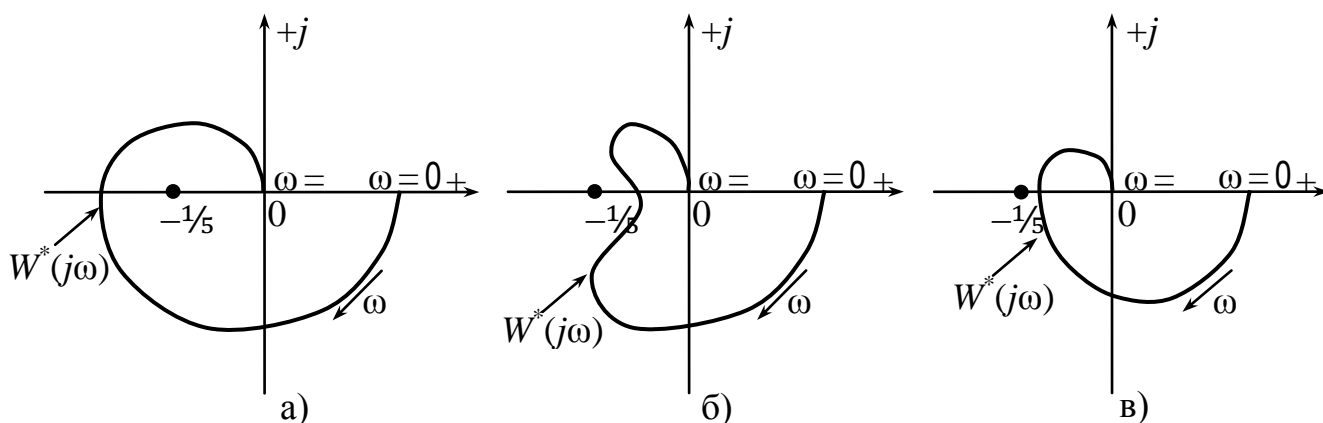


Рис. 13.50. Определение устойчивости по критерию Попова

на рис.13.50,б показаны случаи, когда критерий абсолютной устойчивости не выполняется, а на рис.13.50в – когда выполняется. При этом на угловой коэффициент q наклона прямой Попова накладываются следующие ограничения:

- 1) если статическая характеристика НЭ $f(x)$ стационарная и однозначная, то угловой коэффициент q – произвольное действительное число;
- 2) если характеристика НЭ $f(x)$ стационарная и неоднозначная с положительным (пассивным) гистерезисом, то прямая Попова должна иметь отрицательный наклон;
- 3) если характеристика НЭ $f(x)$ стационарная и неоднозначная с отрицательным (активным) гистерезисом, то прямая Попова должна иметь положительный наклон;

$$0 \leq q < +\infty$$

- 4) если характеристика НЭ $f(x)$ нестационарная, однозначная или неоднозначная (кроме случаев 2 и 3), то прямая Попова проводится вертикально.

Нелинейная характеристика является нестационарной, если она является также и функцией времени t , т.е. $f(x, t)$.

Пример 4.1: статическая характеристика НЭ нелинейной САУ (рис. 13.48) представляет собой 3-х позиционное реле с зоной нечувствительности рис. 13.2 б, причем $B=10$, $a=2$. Модифицированная характеристика линейной части САУ $W^*(j\omega)$ изображена на рис. 13.51а. Определить устойчивость САУ по критерию абсолютной устойчивости Попова.

Решение: $K=10/2=5$; точка, через которую должна быть проведена прямая Попова определяется координатами $(-\frac{1}{5}; j \cdot 0)$ – условия критерия устойчивости Попова не выполняются. Об устойчивости САУ ничего сказать нельзя – требуются дополнительные условия.

Пример 4.2: статическая характеристика НЭ такая же, как в примере 4.1. Модифицированный годограф линейной части САУ $W^*(j\omega)$ изображен на рис. 4.4б. Определить устойчивость САУ по критерию абсолютной устойчивости Попова.

Решение: прямую Попова через точку с координатами $(-\frac{1}{5}; j0)$ провести нельзя. Условия критерия не выполняются. Для суждения об устойчивости САУ требуются дополнительные исследования.

Пример 4.3: статическая характеристика НЭ такая же, как в примере 4.1. Модифицированный годограф линейной части САУ $W^*(j\omega)$ изображен на рис. 4.4в. Определить устойчивость САУ по критерию абсолютной устойчивости Попова.

Решение: как видно из рис. 13.50в, прямую Попова можно провести таким образом, чтобы модифицированный годограф $W^*(j\omega)$ линейной части находился справа от прямой. Система является устойчивой.

13.8.5. Критерий абсолютной устойчивости Попова для САУ с неустойчивой и нейтрально-устойчивой линейной частью.

Структурная схема исследуемой нелинейной САУ имеет вид, представленный на рис. 13.51. При этом предполагается, что линейная часть является неустойчивой, т.е. характеристическое уравнение имеет правые корни.

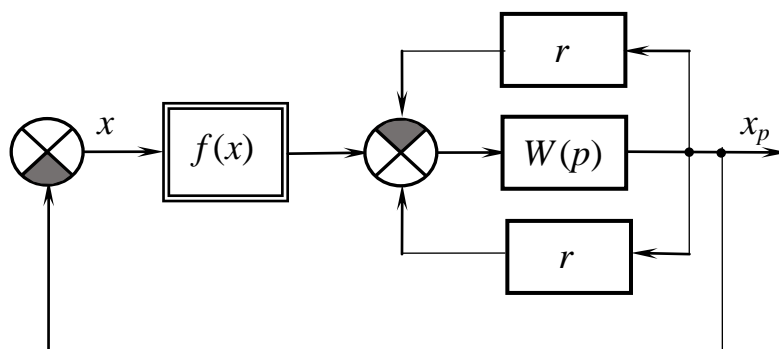


Рис. 13.51. Линейная часть, охваченная жёсткой обратной связью

Охватим линейную часть жесткой обратной связью с коэффициентом передачи r . Получим эквивалентную схему, представленную на рис. 13.51. Схемы, изображенные на рис. 13.48 и рис. 13.51 являются эквивалентными с точки зрения входных и выходных сигналов. Минимальное значение коэффициента усиления пропорционального звена r выбирается из условия устойчивости линейной части. Точку съема сигнала 1 можно перенести и поставить перед НЭ, в результате чего получим преобразованную схему, изображенную на рис. 13.52. Эта схема является эквивалентной схеме рис.13.47.

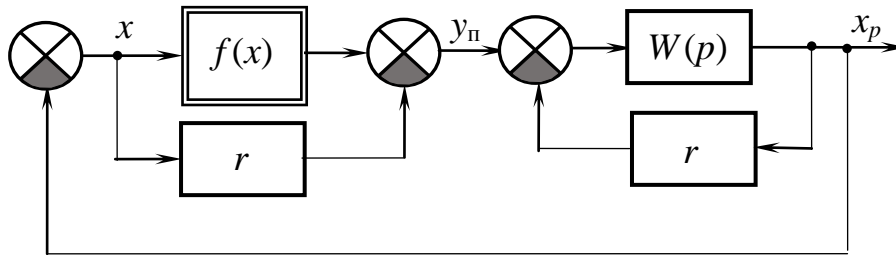


Рис. 13.52. Преобразованная схема нелинейной САУ

Как видно, на итоговой схеме рис. 13.52 имеем, что преобразованная линейная часть $W_n(p)$:

$$W_n(p) = \frac{W(p)}{1 + r \cdot W(p)}$$

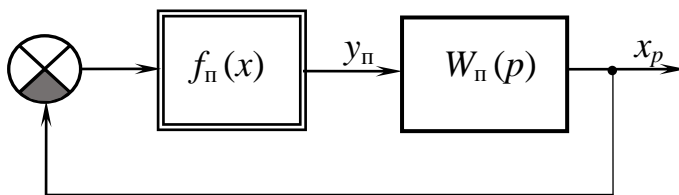


Рис. 13.53. Итоговая схема нелинейной САУ

Преобразованная характеристика НЭ определяется соотношением:

$$y_n(x) = f(x) - r \cdot x \quad \text{или} \quad \frac{y_n(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} - r.$$

В последнем выражении $\frac{f(x)}{x} = K$ определяет угол наклона касательной к исходной статической характеристике НЭ.

С учетом этого неравенство

$$r \leq \frac{f(x)}{x} \leq K$$

равносильно неравенству:

$$0 \leq \frac{y_n(x)}{x} \leq K - r$$

Так как преобразованная линейная часть устойчива, то по теореме Попова положение равновесия преобразованной системы абсолютно устойчиво в угле $[0, K-r]$, если выполняется неравенство:

$$\operatorname{Re}[(1 + j \cdot q \cdot \omega)W_n(j\omega)] + \frac{1}{K-r} > 0 \quad (13.49)$$

На основании выражения (13.49) можно сформулировать критерий абсолютной устойчивости, когда линейная часть является неустойчивой.

Критерий Попова: для того, чтобы положение равновесия нелинейной системы с неустойчивой линейной частью было абсолютно устойчиво в секторе $[r, K]$, достаточно, чтобы все полюса преобразованной линейной характеристики $W_n(p)$ имели отрицательные вещественные

части и при всех $\omega \geq 0$ выполнялось соотношение (13.49). При этом q удовлетворяет условиям теоремы Попова.

Для геометрической интерпретации критерия Попова комплексный коэффициент усиления преобразованной линейной части представим как:

$$W_{\Pi}(j\omega) = P_{\Pi}(\omega) + j \cdot Q_{\Pi}(\omega),$$

а модифицированный комплексный коэффициент усиления преобразованной линейной части:

$$W_{\Pi}^*(j\omega) = P_{\Pi}^*(\omega) + j \cdot Q_{\Pi}^*(\omega),$$

причем

$$P_{\Pi}^*(\omega) = P_{\Pi}(\omega); \quad Q_{\Pi}^*(\omega) = \omega \cdot Q_{\Pi}(\omega)$$

Учитывая соотношение для $W_{\Pi}^*(j\omega)$, из выражения (13.49) получим:

$$P_{\Pi}^*(\omega) - q \cdot Q_{\Pi}^*(\omega) > -\frac{1}{K-r}$$

На основе этого выражения можно дать следующую геометрическую интерпретацию критерия Попова: для того, чтобы положение равновесия нелинейной системы с неустойчивой линейной частью было абсолютно устойчивым, достаточно, чтобы через точку $(-\frac{1}{K-r}; j \cdot 0)$ можно было провести прямую Попова так, чтобы модифицированная амплитудно-фазовая частотная характеристика преобразованной линейной части $W_{\Pi}^*(j\omega)$ полностью располагалась справа от этой прямой, а характеристика НЭ лежала в секторе $[r, K]$.

На коэффициент q , определяющий угол наклона этой прямой к оси абсцисс, накладываются рассмотренные выше ограничения для случая устойчивой линейной части.

Пример 4.4. Каким условиям должна удовлетворять характеристика НЭ в нелинейной системе (рис. 13.47), чтобы она была абсолютно устойчивой при линейной части.

$$W(p) = \frac{10}{(T_1 p + 1)(T_2 p - 1)}$$

Решение: преобразованная передаточная функция линейной части согласно рис. 13.52 будет иметь вид:

$$W_{\Pi}(p) = \frac{10}{(T_1 T_2 p^2 + (T_2 - T_1)p - 1 + 10r)}$$

Чтобы преобразованная линейная часть была устойчивой по критерию Гурвица необходимо и достаточно выполнение условий:

$$T_1 \cdot T_2 > 0; \quad T_2 - T_1 > 0; \quad -1 + 10r > 0;$$

Из последнего условия получаем: $r > 0,1$. Откуда следует: для выполнения абсолютной устойчивости нелинейная характеристика должна находиться в угле $[0,1;10]$.

Если характеристика линейной части нелинейной системы является нейтральной, то:

$$W(p) = \frac{B(p)}{p \cdot D_1(p)}$$

Уравнение $D_1(p) = 0$ имеет все корни, расположенные на комплексной плоскости p слева от мнимой оси.

В этом случае, чтобы сдвинуть нулевой корень влево, r может быть любой степени малости (кроме $r = 0$). Условие выполнения критерия абсолютной устойчивости: характеристика НЭ должна удовлетворять условию:

$$\frac{f(x)}{x} \in (0; K].$$

Формулировка критерия абсолютной устойчивости для случая нейтральной линейной части: для абсолютной устойчивости положения равновесия достаточно, чтобы модифицированная амплитудно-фазовая характеристика линейной части $W(j\omega)$ лежала справа от прямой Попова, проведенной через точку $(-\frac{1}{K}; j0)$, а характеристика НЭ лежала бы в секторе $(0, K]$, где нижняя граница не может совпадать с осью абсцисс (x).

На угол наклона прямой Попова накладываются ограничения, рассмотренные для устойчивой линейной части.

13.8.6. Некоторые обобщения критерия абсолютной устойчивости Попова

13.8.6.1. Параболический критерий Попова.

Параболический критерий Попова объединяет все три рассмотренных случая устойчивости линейной части. При этом в этом критерии используется одна характеристика – модифицированный годограф линейной части $W^*(j\omega)$. В то же время вместо прямой Попова возникает необходимость построения более сложной кривой – параболы, характеризуемой параметрами (q, r, K) . Характеристика нелинейного элемента удовлетворяет условию:

$$r < \frac{f(x)}{x} < K$$

Формулировка критерия: для того, чтобы положение равновесия было абсолютно устойчиво достаточно, чтобы на комплексной плоскости через точки $(-\frac{1}{r}; j \cdot 0)$ и $(-\frac{1}{K}; j \cdot 0)$ можно было провести параболу так, чтобы модифицированная амплитудно-фазовая характеристика линейной части $W^*(j\omega)$ находилась справа от правой касательной к этой параболе, проведенной через точку $(-\frac{1}{K}; j \cdot 0)$.

Графическая иллюстрация параболического критерия приведена на рис. 13.53. Касательные к параболе в точках $-\frac{1}{r}$ и $-\frac{1}{K}$ имеют, соответственно, наклоны $-\frac{1}{q}$ и $+\frac{1}{q}$ и пересекаются в точке a . Величина r определяется из условия устойчивости линейной части.

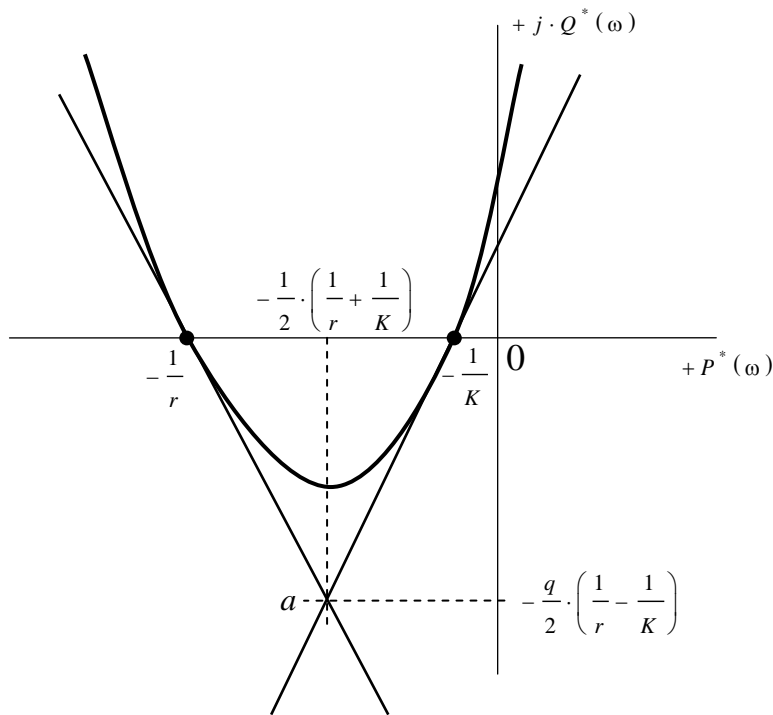


Рис. 13.53. Иллюстрация параболического критерия.

13.8.6.2. Критерий Чо-Нарендры.

Критерий Чо-Нарендры использует тоже построение, что и критерий В.М. Попова, но относительно обычной амплитудно-фазовой частотной характеристики $W(j\omega)$, а не модифицированной. Это, с одной стороны, упрощает требования, предъявляемые к линейной части системы, но с другой стороны, характеристика НЭ должна быть монотонно-возрастающей функцией и, кроме этого, в некотором секторе должна находиться не только характеристика НЭ, но и ее производная. Последние условия означают предъявление более жестких требований к характеристике НЭ.

Формулировка критерия Чо-Нарендры: для того, чтобы положение равновесия было абсолютно устойчивым, достаточно, чтобы через точку с координатами $(-\frac{1}{K}; j \cdot 0)$. можно провести прямую Попова при произвольном угле наклона так, что амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части $W(j\omega)$ лежала справа от этой прямой. При этом линейная часть системы должна быть устойчивой; характеристика НЭ $f(x)$ – стационарная, однозначная монотонная и выполняется соотношение:

$$0 \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq K$$

для любых значений $x, x_2 > x_1$.

Характеристика НЭ является секторной, расположенной между осью абсцисс и прямой, являющейся касательной к характеристике НЭ: $0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq K$.

13.8.6.3. Критерий Гелига.

Этот критерий позволяет исследовать устойчивость не одного конкретного положения равновесия, а отрезка равновесия, определяемого зоной нечувствительности. В критерии рассматриваются сектора, в которых находятся ветви нелинейной характеристики. Прямые, ограничивающие сектор, проведены не через начало координат, а через крайние точки зоны нечувствительности (рис. 13.54). Критерий дает суждение об устойчивости положения равновесия при ограниченных начальных условиях, т.е. он определяет устойчивость «в большом». При этом прямая Попова должна иметь неотрицательный наклон. К рассматриваемой характеристике НЭ предъявляются требования однозначности и стационарности.

Формулировка критерия Гелига А.Х.: пусть все корни знаменателя линейной части лежат слева, за исключением одного, равного нулю, т.е. $W(p) = \frac{B(p)}{p \cdot D_1(p)}$, причем $\lim_{p \rightarrow 0} pW(p) > 0$; характеристика НЭ удовлетворяет условиям однозначности и наличия зоны нечувствительности $f(x) = 0$ при $a_1 \leq x \leq a_2$; а вне этого отрезка лежит внутри секторов, заштрихованных рис. 13.55, т.е.

$$\begin{aligned} 0 < f(x) &\leq K \cdot (x - x_2), & x > x_2 \\ K \cdot (x - x_1) &\leq f(x) < 0, & x < x_1 \end{aligned}$$

Причем характеристика НЭ удовлетворяет условию неплотного прилегания $f(x)$ к ограничивающих сектор полупрямым, т.е.

$$\int_0^\infty [Kx - f(x)]dx = \infty \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^0 [f(x) - Kx]dx = \infty.$$

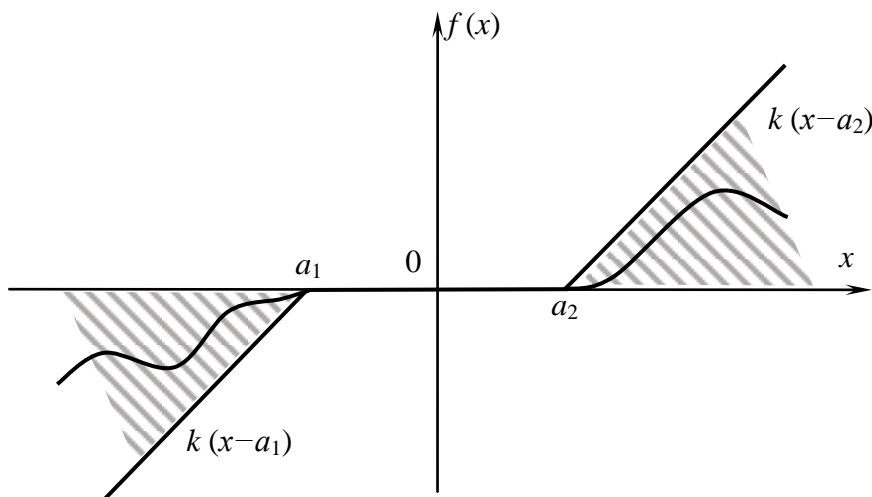


Рис. 13.54. Иллюстрация условий для НЭ в критерии Гелига

Тогда, если через точку $(-\frac{1}{K}; j \cdot 0)$ можно провести прямую с неотрицательным наклоном так, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика модифицированной линейной части $W^*(j\omega)$ находилась справа от этой прямой, то при любых ограниченных начальных условиях

процессы в системы будут заканчиваться в пределах отрезка, соответствующего зоне нечувствительности.

13.8.6.4. Критерий Цыпкина

Критерий Цыпкина – устойчивость «в целом» отрезка равновесия для систем с релейными (разрывными) характеристиками.

Критерий Цыпкина Я.З. решает задачу устойчивости нелинейных систем, когда нелинейная характеристика является либо однозначной, либо неоднозначной, но обязательно релейная с зоной нечувствительности. При этом линейная часть является нейтрально-устойчивой:

$$W(p) = \frac{B(p)}{p \cdot D_1(p)}$$

Формулировка критерия Цыпкина: если при указанных условиях на линейную часть и характеристику НЭ можно провести на комплексной плоскости через точку $(-\frac{1}{K}; j \cdot 0)$ прямую Попова так, чтобы модифицированная амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части $W^*(j\omega)$ находилась справа от этой прямой, то точки, соответствующие отрезку равновесия, будут устойчивы при любых начальных условиях. При этом на угловой коэффициент прямой накладываются те же ограничения, что и в критерии Попова для случая устойчивой линейной части.

13.8.7. Вопросы и задачи

4.1. Определите устойчивость нелинейной САУ, представленной на рис.13.48 по критерию абсолютной устойчивости. Статическая характеристика НЭ изображена на рис.13.40 ($a=2$; $B=1$), линейная передаточная функция имеет вид:

а) $W(p) = \frac{B(p)}{D(p)} = \frac{10}{(1+p) \cdot (1+0,5 \cdot p)}$;

б) $W(p) = \frac{B(p)}{D(p)} = \frac{50}{(1+4 \cdot p) \cdot (1+2 \cdot p) \cdot (1+0,1 \cdot p)}$;

в) $W(p) = \frac{B(p)}{D(p)} = \frac{4}{(5^2 \cdot p^2 + 5 \cdot p + 1) \cdot (1,25^2 \cdot p^2 + 0,0125 \cdot p + 1)}$.

4.2. Определите критическое (предельное) значение коэффициента усиления, при котором нелинейные САУ задачи 4.1 являются абсолютно устойчивыми.

4.3. Определите, в каком угле должна лежать статическая характеристика нелинейного элемента САУ, представленной на рис.13.48, чтобы она была абсолютно устойчивой.

Передаточная функция линейной части $W(p) = \frac{B(p)}{D(p)} = \frac{b_0}{a_0 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_2}$ ($b_0, a_0, a_1, a_2 > 0$).

4.4. В нелинейной САУ (рис.13.48) $W(p) = \frac{B(p)}{D(p)} = \frac{20}{p-1}$. Определите является ли рассматриваемая система абсолютно устойчивой, если статическая характеристика нелинейного элемента лежит в угле $[0,5; 300]$.

13.9. Список литературы

1. Алексеев А.А., Имаев Д.Х., Кузьмин Н.Н., Яковлев В.Б. Теория управления.- С-П.: ЛЭТИ, 1999, - 435 с.
2. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория автоматического управления. – М.: Наука, 1966. – 992 с.
3. Под ред. Бесекерского В.А., изд. 5. Сборник по теории автоматического регулирования и управления. – М.: Наука, 1978, - 512 с.
4. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Ч. 2. – М.: Энергия, 1966. – 366 с.
5. Вавилов А.А. Частотные методы расчета нелинейных систем. – Л.: Энергия, 1970. – 324 с.
6. Гельднер К., Кубик С. Нелинейные системы управления. – М.: Мир, 1987. – 368 с.
7. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т1, изд.2 – М.: Физматлит, 2007. – 312 с.
8. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т2 – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.
9. Ким Д.П. Сборник задач по теории автоматического управления. – М.: Физматлит, 2008. – 328 с.
10. Наумов Б.Н. Теория нелинейных автоматических систем. Частотные методы. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
11. Под ред. Нетушила А.В. Теория автоматического управления. Ч. 2. – М.: Высшая школа, 1983. – 432 с.
12. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. – М.: Наука, 1986. – 616 с.
13. Попов Е.П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. – М.: Наука, 1979. – 256 с.
14. Солодовников В.В., Плотников В.Н., Яковлев А.В. Теория автоматического управления техническими системами. – М.: Изд. МГТУ, 1993. – 492 с.
15. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем. – М.: Наука, 1977. – 560 с.