Т. В. Крупкина

ЗАДАЧИ ПО ТВиМС

для студентов

института экономики

2010

1. Классическое определение вероятности

1.1. Формулы комбинаторики

Рассмотрим некоторый опыт с конечным числом n *взаимоисключающих* друг друга исходов, которые *равновозможны*. Пусть $\mathcal{A}$ — некоторое событие, связанное с этими исходами. Вероятность $\mathrm{P}(\mathcal{A})$ можно определить как долю тех исходов, в результате которых это событие осуществляется:

$$\mathrm{P}(\mathcal{A}) = \frac{n\,(\mathcal{A})}{n}, \tag{1}$$

где n — число всех исходов, а $n\,(\mathcal{A})$ — число исходов благоприятных исходов, т. е. исходов, в результате которых осуществляется событие $\mathcal{A}$.

Вспомним некоторые формулы комбинаторики (более подробно см. [**?**]).

Перестановки. Число перестановок n элементов равно

$$P_n = n! \tag{2}$$

Составные наборы. Если имеется r групп элементов, причем i-я группа содержит n_i элементов; $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$, то число способов, которыми можно выбрать r элементов по одному из каждой группы, равно

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r. \tag{3}$$

Важное значение имеет частный случай (3) при $n_1 = \ldots = n_r = n$:

$$N = n^r. \tag{4}$$

Число сочетаний — выбор без возвращения и без учета порядка. Число способов, которыми можно выбрать m из n различных элементов, равно

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \tag{5}$$

Число размещений — выбор без возвращения и с учетом порядка. Число способов, которыми можно выбрать и разместить по различным местам m из n различных элементов, равно

$$A_n^m = C_n^m \cdot m! = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{6}$$

Число разбиений на группы. Число способов, которыми можно разбить n различных элементов на k групп, содержащих соответственно $n_1,\, n_2,\, \ldots,\, n_k$ элементов, равно

$$N = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}. \tag{7}$$

Задачи

В задачах **1—3** испытание состоит в случайном выборе одной буквы из букв слова «ЭКОНОМИКА»; необходимо найти вероятность события $\mathcal{A}$.

1. $\mathcal{A} = \{$*Вынута буква «М»*$\}$.

2. $\mathcal{A} = \{$*Вынута согласная буква, но не «М»*$\}$.

3. $\mathcal{A} = \{$*Вынута гласная буква*$\}$.

В задачах **4—7** испытание состоит в случайном выборе числа из последовательности 10, 11, ..., 99; требуется найти вероятность события $\mathcal{A}$.

4. $\mathcal{A} = \{$*Сумма цифр числа равна* $4\}$.

5. $\mathcal{A} = \{$*Число делится на* 2 *и на* $3\}$.

6. $\mathcal{A} = \{$*Число состоит из четных цифр*$\}$.

7. $\mathcal{A} = \{$*Число не кратно* $12\}$.

В задачах **8—11** испытание состоит в бросании двух костей. Найти вероятности событий:

8. $\mathcal{A} = \{$*Сумма выпавших очков меньше* $5\}$.

9. $\mathcal{A} = \{$*Произведение выпавших очков делится на* $3\}$.

10. $\mathcal{A} = \{$*На обеих костях выпадет* «6»$\}$.

11. $\mathcal{A} = \{$*Ни на одной из костей не выпадет «1»*$\}$.

12. *В розыгрыше лотереи участвуют 100 билетов, среди которых 25 выигрышных. Какова вероятность остаться без выигрыша, приобретя 3 билета лотереи?*

13. *На склад дилера известной марки MP3-плееров поступила партия из 20 устройств, 6 из которых ввезены в страну нелегально. Инспекторы службы технического контроля проверяют только два плеера из партии. С какой вероятностью специалисты компании выявят хотя бы один «контрафактный» аппарат?*

14. *В коробке лежат 6 молочных шоколадных конфет и 8 конфет черного шоколада. Наудачу вынимаются 5 конфет. Найти вероятность того, что среди них не меньше 4 конфет молочного шоколада.*

15. *Из 5 студентов-математиков и 6 студентов экономического факультета выбирают сначала одного, потом еще двоих. Какова вероятность, что все трое учатся на одном факультете?*

16. *В конференции принимали участие 2 первокурсника, 5 второкурсников, 6 третьекурсников и 5 студентов четвертого курса, причем список выступающих был составлен по алфавиту. Какова вероятность, что 5 первых докладов делали второкурсники?*

17. *В 25 экзаменационных билетах содержится по два не повторяющихся вопроса. Студент знает ответы только на 40 вопросов. Какова вероятность того, что ему достанется билет, в котором он оба вопроса знает?*

18. *В 25 экзаменационных билетах содержится по два не повторяющихся вопроса. Сколько вопросов надо выучить студенту при подготовке к экзамену, чтобы вероятность того, что ему достанется билет, в котором он оба вопроса знает, была бы не меньше 0,9?*

19. *Из девяти мобильных телефонов три — китайской сборки, два — венгерской. Какова вероятность, что среди выбранных случайно четырех телефонов поровну аппаратов китайской и венгерской сборки?*

20. *Среди двадцати купюр есть две фальшивые. Если взять случайно две купюры из двадцати, какова вероятность того, что среди них хотя бы одна фальшивая?*

21. *Из коробки, в которой лежат 10 испанских апельсинов и 6 — марокканских, наудачу вынимают 3 фрукта. Найти вероятность того, что образовалась пара, т. е. вынут один апельсин, выращенный в Испании, и один — из Марокко.*

В задачах **22—25** испытание состоит в том, что из цифр 2, 3, ..., 8 выбирают **без возвращения** и записывают в порядке выбора 3 цифры, образующие трехзначное число. Найти вероятности событий:

22. $\{$*Записано число* $545\}$.

23. $\{$*Записано число* 546 *или* $547\}$.

24. $\{$*Все цифры четные*$\}$.

25. $\{$*В записи числа присутствуют цифры* 4 *и* $8\}$.

В задачах **26—29** испытание состоит в том, что из цифр 2, 3, ..., 8 выбирают **с возвращением** и записывают в порядке выбора 3 цифры, образующие трехзначное число. Найти вероятности событий:

26. {*Записано число* 545}.

27. {*Записано число* 546 *или* 547}.

28. {*Все цифры четные*}.

29. {*В записи числа присутствуют цифры* 4 *и* 8}.

30. *При проведении корпоративного обучения для специалистов компаний холдинга, группа, состоящая из 12 руководителей и 6 специалистов, делится случайным образом на три равные подгруппы. Найти вероятность того, что в каждой части число руководителей и специалистов одинаково.*

31. *Четыре книги Акунина*[1]*, пять книг Лукьяненко*[2] *и три книги Роулинг*[3] *случайно раскладывают на 3 бандероли по 4 книги. Какова вероятность, что книги Роулинг окажутся в одной бандероли?*

32. *Тридцать студентов наудачу расходятся по трем аудиториям. Найти вероятность того, что в первой будет 12 человек, а во второй 5.*

33. *В автобус зашли 5 человек. Автобус делает 7 остановок. Найти вероятность того, что все пятеро выйдут на разных остановках.*

34. *В телефонном номере 6 цифр. Какова вероятность того, что все цифры различны?*

35. *В лотерее разыгрывается 1000 билетов. Среди них два выигрыша по 5000 руб., пять выигрышей по 2000 руб., десять выигрышей по 1000 руб. и 25 по 500 руб. Некто покупает один билет.*

Найти вероятность: *а)* *выигрыша не менее 2000 руб.,*
б) *какого-либо выигрыша.*

36. *Семеро сотрудников становятся в очередь для получения заработной платы. Определить вероятность того, что два определенных человека стоят рядом.*

37. *На семинаре «Проблемы невозврата потребительских кредитов» 7 человек, среди которых были два представителя Торгово-промышленной палаты, случайным образом разместились за круглым столом. Определить вероятность того, что представители Торгово-промышленной палаты сидят рядом.*

38. *На полке произвольным образом расставили 6 разных книг Астафьева*[4]*. Какова вероятность, что две фиксированные книги окажутся стоящими рядом?*

39. *На полке стоят 30 книг, среди них шеститомник Каспарова*[5]*. Какова вероятность, что тома Каспарова расположены в порядке возрастания номеров, но не обязательно рядом?*

40. *В группе из 15 студентов 7 родились в Красноярске, 4 — в Томске, 3 — в Новосибирске и 1 — в Норильске. Из группы выбирают 4 студентов. Какова вероятность, что среди них есть уроженцы всех 4 городов?*

41. *Карточки, на которых написаны буквы*

$$\boxed{\text{А}},\boxed{\text{Ш}},\boxed{\text{Ф}},\boxed{\text{К}},\boxed{\text{Л}},\boxed{\text{Е}},$$

раскладывают в ряд. Какова вероятность, что получится слово «ФЛЕШКА»?

42. *Карточки, на которых написаны буквы*

$$\boxed{\text{Г}},\boxed{\text{А}},\boxed{\text{С}},\boxed{\text{Т}},\boxed{\text{Р}},\boxed{\text{О}},\boxed{\text{Н}},\boxed{\text{О}},\boxed{\text{М}},$$

[1]Борис Акунин (псевдоним, настоящее имя — Григорий Чхартишвили; р. 1956) — российский писатель.

[2]Сергей Лукьяненко (р. 1968) — российский писатель-фантаст.

[3]Джоáн Рóулинг (англ. *Joanne Rowling*; р. 1965) — английская писательница.

[4]Виктор Астафьев (1924—2001) — российский писатель.

[5]*Каспаров, Г. М.* **Мои великие предшественники. Новейшая история развития шахматной игры**: В 6 т. / Гарри Каспаров. М.: Рипол классик, 2005.

раскладывают в ряд. Какова вероятность, что они лягут в порядке «НОРМА-ГОСТ»?

43. *На клавиатуре пишущей машинки 26 букв латинского алфавита. Ребенок 4 раза нажимает клавиши. Какова вероятность, что он напечатает слово "WORD"?*

2. Основания теории вероятностей

2.1. Основные понятия

Пространство элементарных событий

Пространством элементарных событий Ω называется множество, содержащее все возможные результаты данного случайного эксперимента, из которых в эксперименте происходит ровно один. Элементы этого множества называют *элементарными исходами* и обозначают буквой ω. Событиями мы будем называть некоторые наборы элементарных исходов, то есть подмножества множества Ω. Говорят, что в результате эксперимента произошло событие $\mathcal{A}$, если в эксперименте произошел один из элементарных исходов, входящих в данное множество.

1. *Достоверное* событие, наступающее при любом исходе, обозначается Ω.

2. *Невозможное* событие обозначается $\varnothing$.

3. $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$, если $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}_1$.

4. $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ называются *несовместными*, если множества элементарных исходов $\{\omega_{\mathcal{A}_1}\}$ и $\{\omega_{\mathcal{A}_2}\}$ не пересекаются.

Комбинации событий

Суммой или *объединением* событий $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ называется событие $\mathcal{A}$, состоящее в осуществлении хотя бы одного из $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2.$$

Аналогично определяется $\mathcal{A} = \bigcup\limits_k \mathcal{A}_k$.

Произведением или *пересечением* событий $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ называется событие $\mathcal{A}$, состоящее в осуществлении и $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2.$$

Аналогично определяется $\mathcal{A} = \bigcap\limits_k \mathcal{A}_k$.

N. B. Часто знак умножения «$\cdot$» опускается. Поэтому, в пособии записи $\mathcal{A}\mathcal{B}$ и $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ означают одно и то же — произведение событий $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Разностью событий $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ называется событие $\mathcal{A}$, которое означает, что происходит $\mathcal{A}_1$, но не происходит $\mathcal{A}_2$:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{A}_2.$$

Противоположным или *дополнительным* к событию $\mathcal{A}$ называется событие $\overline{\mathcal{A}}$, состоящее в том, что событие $\mathcal{A}$ не происходит:

$$\overline{\mathcal{A}} = \Omega \setminus \mathcal{A}.$$

Симметрической разностью событий A и B называется событие

$$\mathcal{A}_1 \triangle \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1\overline{\mathcal{A}_2} + \mathcal{A}_2\overline{\mathcal{A}_1}.$$

Свойства операций

	Сложение ($+$, $\cup$)	Умножение ($\cdot$, $\cap$)	
1.	$\mathcal{A}+\mathcal{B}=\mathcal{B}+\mathcal{A}$	$\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}=\mathcal{B}\cdot\mathcal{A}$	*(коммутативность)*
2.	$(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C}=\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})$	$(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})\cdot\mathcal{C}=\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}\cdot\mathcal{C})$	*(ассоциативность)*
3.	$\mathcal{A}+\mathcal{A}=\mathcal{A}$	$\mathcal{A}\cdot\mathcal{A}=\mathcal{A}$	
4.	$\mathcal{A}+\varnothing=\mathcal{A}$	$\mathcal{A}\cdot\varnothing=\varnothing$	
5.	$\mathcal{A}+\Omega=\Omega$	$\mathcal{A}\cdot\Omega=\mathcal{A}$	
6.	$\mathcal{A}+\overline{\mathcal{A}}=\Omega$	$\mathcal{A}\cdot\overline{\mathcal{A}}=\varnothing$	
7.	$\overline{\mathcal{A}+\mathcal{B}}=\overline{\mathcal{A}}\cdot\overline{\mathcal{B}}$	$\overline{\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}}=\overline{\mathcal{A}}+\overline{\mathcal{B}}$	*(законы двойственности)*
8.	$(\mathcal{A}+\mathcal{B})\cdot\mathcal{C}=\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}+\mathcal{B}\cdot\mathcal{C}$		*(дистрибутивность умножения относительно сложения)*
9.	$\overline{\Omega}=\varnothing$		
10.	$\overline{\varnothing}=\Omega$		

Задачи

В задачах **44—48** ввести элементарные события и выразить событие $\mathcal{A}$ через них.

44. *Было совершено 3 сделки. а) $\mathcal{A}=\{$2 оказались прибыльными$\}$; б) $\mathcal{A}=\{$Все оказались прибыльными$\}$; в) $\mathcal{A}=\{$Только вторая оказалась прибыльной$\}$.*

45. *Фирма обращается в банки для получения кредита пооочередно, то есть дожидается решения, и в случае отказа в кредитовании обращается в следующий банк. а) $\mathcal{A}=\{$только 4-й банк примет положительное решение о кредитовании$\}$; б) $\mathcal{A}=\{$Пришлось обратиться в 3 банка $\}$; в) $\mathcal{A}=\{$Число банков, в которые пришлось обратиться, не больше 3$\}$.*

46. *На каждом из двух постов находятся от 1 до 3 охранников. а) $\mathcal{A}=\{$На втором посту охранников больше, чем на первом$\}$; б) $\mathcal{A}=\{$На постах поровну охранников$\}$; в) $\mathcal{A}=\{$На втором посту охранников на одного больше, чем на первом$\}$.*

47. *Четыре человека задумывают по цифре для шифра, $\mathcal{A}=\{$задуманы одинаковые цифры$\}$.*

48. *Резюме размещают на двух сайтах, $\mathcal{A}=\{$хотя бы на одном сайте есть отклик$\}$.*

В задачах **49—53** выразить событие $\mathcal{C}$ через $\mathcal{A}=\{$первый банкомат работает$\}$, $\mathcal{B}=\{$второй банкомат работает$\}$.

49. *$\mathcal{C}=\{$оба банкомата работают $\}$.*

50. *$\mathcal{C}=\{$ни один банкомат не работает$\}$.*

51. *$\mathcal{C}=\{$из двух банкоматов работает только первый$\}$.*

52. *$\mathcal{C}=\{$из двух банкоматов работает только один$\}$.*

53. *$\mathcal{C}=\{$из двух банкоматов работает хотя бы один$\}$.*

В задачах **54—59** требуется описать, в чем состоят события.

54. *Событие $\mathcal{A}=\{$будет дождь$\}$, событие $\mathcal{B}=\{$будет ветер$\}$. Описать события $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, $\mathcal{A}\mathcal{B}$, $\mathcal{A}+\overline{\mathcal{B}}$, $\overline{\mathcal{A}+\mathcal{B}}$, $\overline{\mathcal{B}}\,\mathcal{A}$.*

55. *Бракованные изделия могут иметь различные дефекты. Событие $\mathcal{A}$ состоит в том, что бракованное изделие имеет вмятину, событие $\mathcal{B}$ в том, что* *имеется царапина, событие* $\mathcal{C}$ *в том, что имеется скол. Пояснить, в чем состоят события* $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, $\mathcal{A}\mathcal{B}$, $\mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{C}$, $\overline{\mathcal{A}}+\overline{\mathcal{C}}, \overline{\mathcal{A}+\mathcal{B}}$.

56. *Оформлено десять накладных. Событие* $\mathcal{A}_k = \{$ *k-я накладная оформлена неправильно*$\}, k = 1, \ldots, 10$. *Описать события*

$$\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2+\mathcal{A}_3,\ \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3,\ \mathcal{A}_4\overline{\mathcal{A}_6},\ \bigcup_{i=1}^{10}\mathcal{A}_i,\ \bigcap_{i=1}^{10}\overline{\mathcal{A}_i},\ \bigcap_{i=1}^{8}\mathcal{A}_i,\ \bigcup_{i=1}^{5}\overline{\mathcal{A}_i}.$$

57. *Устройство состоит из* 5 *элементов. Событие* $\mathcal{A}_i = \{$*неисправен i-й элемент, i=1, ..., 5*$\}$. *Описать события*

$$\bigcup_{i=1}^{5}\mathcal{A}_i,\ \bigcap_{i=1}^{4}\mathcal{A}_i,\ \bigcup_{i=1}^{3}\overline{\mathcal{A}_i},\ \bigcap_{i=1}^{5}\overline{\mathcal{A}_i}.$$

58. *Три стрелка стреляют по цели. Событие* $\mathcal{A}_i = \{$ *i-й стрелок попадает в цель, i=1, 2, 3*$\}$. *Описать события*

$$\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3,\ \mathcal{A}_1+\mathcal{A}_3,\ \mathcal{A}_1\,\overline{\mathcal{A}_3}\,\overline{\mathcal{A}_3},\ \mathcal{A}_2+\overline{\mathcal{A}_1},\ \bigcap_{i=1}^{3}\mathcal{A}_i.$$

59. *В магазине «Лампы от Евлампии» суточная выручка сильно колеблется. Событие $\mathcal{A}$ состоит в том, суточная выручка магазина составляет не больше 40 тысяч рублей, событие $\mathcal{B}$ состоит в том, что суточная выручка составляет от 20 до 70 тысяч рублей. Описать события*

$$\mathcal{A}+\mathcal{B},\ \mathcal{A}\mathcal{B},\ \overline{\mathcal{A}}+\overline{\mathcal{B}},\ \overline{\mathcal{A}+\mathcal{B}}.$$

В задачах **60—62** упростить выражения для событий.

60. $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{A}+\overline{\mathcal{A}}\mathcal{B}}+\mathcal{B}$.

61. $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{A}+\overline{\mathcal{B}\mathcal{A}}}+\mathcal{B}+\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A}+\overline{\mathcal{A}}+\overline{\mathcal{B}}$.

62. $\mathcal{C} = (\overline{\mathcal{B}}\mathcal{A}+\mathcal{A}\mathcal{B}+\mathcal{B}\overline{\mathcal{A}})\overline{\mathcal{B}}$.

В задачах **63—64** доказать тождества.

63. $\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B}+\mathcal{A}\mathcal{C}$.

64. $\overline{\mathcal{A}+\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}}\,\overline{\mathcal{B}}$.

В задачах **65—66** проверить, верны ли следующие равенства.

65. $(\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}) = \mathcal{A}\bigtriangleup(\mathcal{A}\mathcal{B})$.

66. $\overline{\overline{\mathcal{A}}\setminus\overline{\mathcal{B}}} = \mathcal{A}\setminus\mathcal{B}$.

В задачах **67—70** выяснить, обязаны ли совпадать события $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, если:

67. $\overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{B}}$.

68. $\mathcal{A}+\mathcal{C} = \mathcal{B}+\mathcal{C}$, *где* $\mathcal{C}$ *— некоторое событие.*

69. $\mathcal{A}\mathcal{C} = \mathcal{B}\mathcal{C}$, *где* $\mathcal{C}$ *— некоторое событие.*

70. $\mathcal{A}\setminus\mathcal{B} = \varnothing$.

2.2. Геометрическое определение вероятности

Рассмотрим некоторую ограниченную область Ω в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ (на прямой, на плоскости, в пространстве при $m = 1, 2, 3$ соответственно). Предположим, что «мера» Ω (длина, площадь и объем при $m = 1, 2, 3$) конечна. Пусть случайный эксперимент состоит в том, что мы наудачу бросаем в эту область точку, и событие $\mathcal{A}$ заключается в том, что точка попадает в область $\Lambda \subseteq \Omega$. Если эксперимент удовлетворяет условиям «геометрического определения вероятности», т. е. его исходы можно изобразить точками некоторой области Ω в $\mathbb{R}^m$ так, что вероятность попадания точки в любую область $\Lambda \subseteq \Omega$ не зависит от формы или расположения Λ внутри Ω, а зависит лишь от меры области Λ, то:

$$\mathrm{P}(\mathcal{A}) = \frac{\mu(\Lambda)}{\mu(\Omega)}, \tag{8}$$

где $\mu(\Lambda)$ — мера области Λ.

В настоящем задачнике в основном используются геометрические определения вероятности на прямой и на плоскости, где мерой множеств являются соответственно длина L и площадь S. В этих случаях (8) запишется как

$$\mathrm{P}(\mathcal{A}) = \frac{L(\Lambda)}{L(\Omega)}. \tag{9}$$

$$\mathrm{P}(\mathcal{A}) = \frac{S(\Lambda)}{S(\Omega)}. \tag{10}$$

Задачи

71. *Расчетное время выполнения проекта 92 $\pm$ 7 дней. Найти вероятность того, что проект будет закончен не более, чем за 90 дней.*

72. *Если среднедушевой доход населения районов Красноярского края представлен с точностью до 100 рублей, то какова вероятность того, что ошибка округления не превышает 30 рублей?*

73. *Вдоль улицы через каждые 250 метров расположены рекламные щиты. Каждый щит доступен для обозрения с расстояния 5—50 метров. Какова вероятность, что человеку, стоящему на улице, доступен для обозрения щит?*

74. *В А́банском[6] лесхозе 134 тыс. гектаров занято хвойными породами и 85 тыс. гектаров занято мягколиственными породами. На территории, покрытой лесной растительностью, случайно выбирается участок площадью 1 м^2. Какова вероятность при этом попасть на территорию, занятую хвойными деревьями?*

75. *В протоколе об административном правонарушении плохо пропечаталось 7 % текста. Какова вероятность, что пострадала первая буква фамилии?*

76. *Первоначальная масса моющего средства во флаконе равнялась 140 граммам. Средство тратилось равномерно и было истрачено за месяц. Найти вероятность того, что в случайный момент во флаконе было от 20 до 35 граммов.*

77. *Ураган повредил линию электропередачи на участке между 50-м и 55-м километрами. Найти вероятность того, что обрыв ЛЭП произошел между 51-м и 52-м километрами.*

78. *Стержень длиной 50 см ломается на две части. Найти вероятность того, что одна часть короче 10 см, если излом равновозможен в любом месте.*

79. *Через центр окружности случайным образом проводят два луча. Какова вероятность, что угол между ними меньше* 40°*?*

80. *В круге радиуса R случайно выбирается точка. Какова вероятность, что она ближе к центру круга, чем к его границе?*

81. *На границе прямоугольника со сторонами 6 и 10 выбрана случайная*

[6] А́бан — поселок городского типа, административный центр Абанского района Красноярского края.

точка. Найти вероятность того, что расстояние ее от какой-либо вершины прямоугольника меньше 1.

82. *Охранник движется по границе прямоугольного участка со сторонами 130 м и 50 м. Найти вероятность того, что в случайный момент времени он будет находиться от любого угла на расстоянии, превышающем 10 м.*

83. *Чтобы добраться до места учебы, студент может воспользоваться автобусами маршрутов №№ 88 или 68. Интервалы движения автобусов 7,5 и 9 минут соответственно. Найти вероятность того, что ждать автобуса придется меньше 5 минут.*

84. *Испытание состоит в случайном выборе двух чисел x_1 и x_2 из отрезка* $[0,\ 10]$. *Найти вероятность события* $\{|x_1 - x_2| > 2\}$.

85. *Из отрезка* $[-1,\ 2]$ *выбирают два числа x_1 и x_2. Найти вероятность события* $\{x_1 + x_2 > 1,\ \ x_1 x_2 < 0\}$.

86. *Испытание состоит в выборе на отрезке AB длины 1 двух случайных точек: C и D. Найти вероятность события* {Точка C ближе к точке A, чем к точке D}.

87. *Если случайно выбрать на отрезке AB произвольной длины две случайные точки C и D, то какова вероятность, что* $\{|AD| < |CB|\}$.

88. *На 12-километровом участке водопровода между Академгородком и Ветлужанкой*[7] *в двух местах происходит утечка воды. Найти вероятность того, что расстояние между местами повреждений больше 3 км.*

89. *Студент заходит в электронный курс «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов экономического факультета в любое время между 19:00 и 19:30 и через 5 минут отправляет преподавателю вопрос по решению задачи. После этого студент еще 35 минут присутствует на сайте этого электронного курса. Преподаватель заходит в этот же курс в случайное время между 19.40 и 20.30, немедленно получает сообщение и отвечает через 10 минут. Какова вероятность, что студент получит сообщение до своего выхода с курса?*

90. *Инвестор встречается с двумя клиентами, которые приходят независимо друг от друга в интервале от 14 до 16 часов. Продолжительность каждой встречи — 30 минут. Найти вероятность того, что одному из клиентов придется ждать.*

91. *В диспетчерскую службу городских электрических сетей за 20 минут поступили 2 заявки на устранение аварии из разных районов города. Найти вероятность того, что промежуток времени между заявками меньше 3 минут.*

92. *Игорь Кузнецов и Олег Сергеев — ведущие специалисты конкурирующих авиационных фирм, — собираются посетить Международный аэрокосмический салон в один и тот же день, с 10 до 12 часов дня. Каждый из них проведет 20 минут на презентации новейшего многоцелевого истребителя. Какова вероятность, что они там встретятся?*

93. *Если условия предыдущей задачи распространяются на троих бывших однокурсников: Кузнецова, Сергеева, а также Илью Пономарева — сотрудника третьей конкурирующей фирмы, — то какова вероятность встречи всех троих на презентации?*

94. *Проект состоит из двух этапов, второй этап можно выполнять только по завершении первого. Расчетное время выполнения первого этапа 180 $\pm$ 10 дней, второго этапа 60 $\pm$ 5 дней. Найти вероятность того, что проект будет закончен не более, чем за 235 дней.*

---

[7] Академгородок и Ветлужанка — микрорайоны г. Красноярска.

3. Теоремы исчисления вероятностей

3.1. Теоремы сложения и умножения

События $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются *независимыми*, если

$$\mathrm{P}(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \mathrm{P}(\mathcal{A})\,\mathrm{P}(\mathcal{B}). \tag{11}$$

События $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ называются *независимыми (в совокупности)*, если для всех $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n$, $m \leqslant n$,

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{m} \mathcal{A}_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{m} \mathrm{P}(\mathcal{A}_{i_k}). \tag{12}$$

Условной вероятностью события $\mathcal{A}$ при условии, что произошло событие $\mathcal{B}$, называется отношение

$$\mathrm{P}(\mathcal{A}/\mathcal{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathcal{A}\mathcal{B})}{\mathrm{P}(\mathcal{B})}, \qquad (\mathrm{P}(\mathcal{B}) > 0).$$

Теорема сложения для двух событий. Для любых событий $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$

$$\mathrm{P}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \mathrm{P}(\mathcal{A}) + \mathrm{P}(\mathcal{B}) - \mathrm{P}(\mathcal{A}\mathcal{B}). \tag{13}$$

Теорема сложения для n событий. Для любых событий $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathcal{A}_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{P}(\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j) + \\ + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} \mathrm{P}(\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j\mathcal{A}_k) - \ldots + (-1)^{n-1}\mathrm{P}(\mathcal{A}_1 \ldots \mathcal{A}_n).$$

N. B. По определению вероятности, если события $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ попарно несовместны, то

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathcal{A}_i). \tag{14}$$

Теорема умножения. Пусть $\mathrm{P}(\mathcal{B}) \neq 0$. Тогда

$$\mathrm{P}(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \mathrm{P}(\mathcal{A}/\mathcal{B})\,\mathrm{P}(\mathcal{B}). \tag{15}$$

Теорема умножения для n событий. Пусть $\mathrm{P}(\mathcal{A}_1) \neq 0, \ldots, \mathrm{P}(\mathcal{A}_{n-1}) \neq 0$. Тогда

$$\mathrm{P}(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 \ldots \mathcal{A}_n) = \mathrm{P}(\mathcal{A}_1)\,\mathrm{P}(\mathcal{A}_2/\mathcal{A}_1) \ldots \mathrm{P}(\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 \ldots \mathcal{A}_{n-1}). \tag{16}$$

Задачи

95. *Из 180 студентов 30 не сдали экзамен, 20 не сдали курсовую работу, 15 не сдали и то и другое. Пусть событие $\mathcal{A} = \{$студент сдал экзамен$\}$, $\mathcal{B} = \{$студент сдал курсовую работу$\}$. Являются ли эти события независимыми?*

96. *В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что студент не сдал экзамен, если известно, что он не сдал курсовую работу.*

97. *Человек имеет текущий счет с вероятностью 0,56, депозитный счет с вероятностью 0,42, и тот и другой с вероятностью 0,30. Являются ли события,* *состоящие в наличии счетов, независимыми? Какова вероятность, что имеется хотя бы один счёт?*

98. *В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что человек имеет текущий счет при наличии депозитного счета.*

99. *Два аудитора проверили 10 одних и тех же фирм. Первый аудитор обнаружил нарушения у 6 фирм, второй у 7 фирм, при этом у 5 фирм нашли нарушения оба аудитора. Являются ли независимыми события, состоящие в обнаружении нарушений первым и вторым аудиторами?*

100. *Вероятность дозвониться в диспетчерскую горэлектросети равна 0,7. Какова вероятность, что удастся за два звонка соединиться с диспетчерской?*

101. *Событие* $\mathcal{A}_i = \{$*определенный товар присутствует в* i*-м магазине*$\}$, *события независимы,* $\mathrm{P}(\mathcal{A}_i) = 0,8,\ i = 1,\ 2,\ 3.$ *Найти вероятности событий*

$$\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3,\ \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_3,\ \mathcal{A}_1\,\overline{\mathcal{A}_3}\,\overline{\mathcal{A}_3},\ \mathcal{A}_2 + \overline{\mathcal{A}_1},\ \bigcap_{i=1}^{3}\mathcal{A}_i.$$

102. *Время обслуживания составляет от 10 до 20 минут. Событие* $\mathcal{A} = \{$*время обслуживания меньше 15 минут*$\}$, *событие* $\mathcal{B} = \{$*время обслуживания от 13 до 17 минут*$\}$. *Найти вероятности событий*

$$\mathcal{A}+\mathcal{B},\ \mathcal{A}\mathcal{B},\ \overline{\mathcal{A}}+\overline{\mathcal{B}},\ \overline{\mathcal{A}+\mathcal{B}}.$$

103. *Устройство состоит из* 5 *элементов. Событие* $\mathcal{A}_i = \{$*неисправен* i*-й элемент,* $i = 1,\ \ldots,\ 5\}$. *Найти вероятности событий, если события независимы, и* $\mathrm{P}(\mathcal{A}_i) = 0,5\ \forall i.$

$$\bigcup_{i=1}^{5}\mathcal{A}_i,\ \bigcap_{i=1}^{4}\mathcal{A}_i,\ \bigcup_{i=1}^{3}\overline{\mathcal{A}_i},\ \bigcap_{i=1}^{5}\overline{\mathcal{A}_i}.$$

В задачах **104—110** известно, что 60 % зрителей первой телепрограммы и 70% зрителей второй телепрограммы смотрят рекламные блоки. События $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ состоят в том, что зритель соответственно первой и второй программ увидит рекламный блок. Найти вероятность события $\mathcal{C}$.

104. $\mathcal{C} = \{$Произойдут оба события $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}\}$.

105. $\mathcal{C} = \{$Не произойдет ни одного события из $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}\}$.

106. $\mathcal{C} = \{$Из двух событий $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ осуществится только $\mathcal{A}\}$.

107. $\mathcal{C} = \{$Из двух событий $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ осуществится ровно одно событие$\}$.

108. $\mathcal{C} = \{$Из двух событий $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ осуществится хотя бы одно событие$\}$.

109. $\mathcal{C} = \{$Зритель увидит рекламный блок только по второй программе$\}$.

110. $\mathcal{C} = \{$Зритель не увидит рекламный блок хотя бы по одной программе$\}$.

В задачах **111—118** события $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ обозначают, что сотрудники Пискунов, Прохоров и Ушаков выполняют дневной план работы. Вероятность каждого из этих событий равна 0,7. Требуется найти вероятности события $\mathcal{D}$.

111. $\mathcal{D} = \{$Только один из троих сотрудников выполнит план$\}$.

112. $\mathcal{D} = \{$Ровно два сотрудника выполнят план$\}$.

113. $\mathcal{D} = \{$Хотя бы один сотрудник выполнит план$\}$.

114. $\mathcal{D} = \{$Хотя бы один из сотрудников не выполнит план$\}$.

115. $\mathcal{D} = \{$Из трех событий $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ произойдет не меньше двух событий$\}$.

116. $\mathcal{D} = \{$Не более одного сотрудника выполнит план$\}$.

117. $\mathcal{D} = \{$Из трех событий $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ не произойдет не больше одного события$\}$.

118. $\mathcal{D} = \{$Только Пискунов и Прохоров выполнят план$\}$.

В задачах **119—124** события $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ обозначают, что состоялись выборы глав администрации соответственно в Ачинском, Балахтинском, Сухобузимском и Дзержинском районах Красноярского края. Известно, что $\mathrm{P}(\mathcal{A}) = \mathrm{P}(\mathcal{B}) = 0,9$; $\mathrm{P}(\mathcal{C}) = \mathrm{P}(\mathcal{D}) = 0,8$. Найти вероятность события $\mathcal{G}$.

119. $\mathcal{G}$ ={Выборы состоятся во всех районах}.

120. $\mathcal{G}$ ={Выборы не состоятся только в Дзержинском районе}.

121. $\mathcal{G}$ ={Из четырех событий $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ осуществится ровно одно событие}.

122. $\mathcal{G}$ ={Выборы состоятся хотя бы в одном районе}.

123. $\mathcal{G}$ ={Из четырех событий $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ произойдёт больше одного события}.

124. $\mathcal{G}$ ={Выборы не состоятся хотя бы в одном районе}.

125. *С вероятностью 0,25 здание нуждается в ремонте, с вероятностью 0,38 ремонт планируется. Найти вероятность того, что здание нуждается в ремонте и планируется ремонт.*

126. *Система контроля состоит из двух независимых проверок. В результате i-й проверки ($i = 1, 2$) бракованное изделие принимают с вероятностью α_i. Изделие принимают, если оно прошло обе проверки. Найти вероятность того, что бракованное изделие будет отбраковано.*

127. *Система контроля состоит из двух независимых проверок. В результате i-й проверки ($i = 1, 2$) изделие, удовлетворяющее стандарту, отбраковывают с вероятностью β_i. Изделие принимают, если оно прошло обе проверки. Найти вероятность того, что стандартное изделие будет принято.*

128. *В течение дня акция может подорожать с вероятностью 0,6 и подешеветь с вероятностью 0,4. Какова вероятность того, что акция будет дорожать три дня подряд, если считать ежедневные изменения цены независимыми?*

129. *Студент выучил 25 вопросов из 30. Для получения зачета достаточно ответить на оба вопроса билета или на один вопрос билета и один дополнительный. Какова вероятность получения зачета?*

130. *Вероятность того, что накладная оформлена неправильно, равна 0,2. Какова вероятность, что из трех проверяемых накладных хотя бы одна оформлена неправильно?*

131. *Вероятность того, что накладная оформлена неправильно, равна 0,2. Сколько накладных потребуется взять для проверки, чтобы вероятность обнаружения неправильно оформленной накладной была не менее 0,8?*

132. *При приемке партии изделий подвергается проверке их десятая часть. Условие приемки допускает не более 3 % бракованных изделий. Определить вероятность того, что партия из 100 изделий, содержащая 5 % брака, будет принята.*

133. *В телевизионной рекламе из названия фирмы «КОКОС» последовательно выбираются 3 буквы, составляющие название товара (СОК). Какова вероятность, что это слово образуется при случайном выборе букв?*

134. *Партия товара состоит из 8 изделий первого сорта и 12 изделий высшего сорта. Первые 5 изделий оказались все высшего сорта. Какова вероятность, что следующее взятое изделие тоже высшего сорта?*

135. *В круге радиуса R случайно выбирают 3 точки. Какова вероятность, что все они ближе к центру круга, чем к его границе?*

3.2. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Формула полной вероятности. Пусть $\mathcal{A}$ — случайное событие; $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_n$ — попарно несовместные случайные события, $\mathrm{P}(\mathcal{H}_i) > 0$ и $\mathcal{A} \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i$. Тогда справедлива формула

$$\mathrm{P}(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathcal{H}_i)\,\mathrm{P}(\mathcal{A}/\mathcal{H}_i). \tag{17}$$

Формула Байеса[8]. Пусть $\mathcal{A}$ — случайное событие, $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_n$ попарно несовместны, $\mathrm{P}(\mathcal{H}_i) > 0, \mathrm{P}(\mathcal{A}) > 0$ и $\mathcal{A} \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i$. В этих условиях справедлива формула

$$\mathrm{P}(\mathcal{H}_i/\mathcal{A}) = \frac{\mathrm{P}(\mathcal{H}_i)\,\mathrm{P}(\mathcal{A}/\mathcal{H}_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{P}(\mathcal{H}_k)\,\mathrm{P}(\mathcal{A}/\mathcal{H}_k)}. \tag{18}$$

Задачи

136. *Если размер детали отклоняется от установленного размера не более чем на 1 %, она признается стандартной. Если отклонение составляет не более 3 %, то вероятность того, что деталь будет признана стандартной, уменьшается до 0,5. А если отклонение составляет от 3 % до 5 %, вероятность равна 0,25. Если размер детали отклоняется от установленного размера более чем на 5 %, деталь считается нестандартной. Рассчитать вероятность того, что деталь будет признана стандартной, если размер может с равной вероятностью отклониться от установленного стандарта до 10 % в обе стороны.*

137. *В двух урнах находится соответственно 5 и 3 белых, 4 и 6 черных шаров. Из каждой урны вынимают наудачу по одному шару, а из них наудачу выбирают один. Какова вероятность того, что он белый?*

138. *В условиях предыдущей задачи вынутый шар оказался белым. Какова вероятность того, что его вынули из первой урны?*

139. *Соотношение числа кредитов, предоставляемых банком физическим и юридическим лицам, 3:2. Вероятности того, что взятый кредит не будет возвращён, составляют 0,05 для физических лиц и 0,02 для юридических лиц. Найти вероятность невозвращения кредита.*

140. *В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что невозвращенный кредит был предоставлен юридическому лицу.*

141. *Вероятность, что потребитель приобретет товар после того, как увидит его рекламу по телевизору, равна 0,01; а вероятность покупки товара потребителем, который не видел рекламы, 0,001. Если 40 % населения увидит рекламу, какая часть населения приобретет товар?*

142. *В условиях предыдущей задачи покупатель приобрел товар. Какова вероятность, что он видел рекламу?*

143. *Если общая вероятность, что потребитель приобретет товар, равна 0,03; вероятность покупки товара потребителем, который не видел рекламы, 0,001; и 20 % населения видели рекламу, то какова вероятность покупки товара потребителем, видевшим рекламу?*

144. *Среди проектов, отправляемых на экспертизу, 60 % пригодных. Экспертиза проектов иногда допускает ошибки. Неподходящие проекты экспертиза отвергает с вероятностью 0,8; а вероятность того, что подходящий проект будет назван непригодным, равна 0,1. Найти вероятность того, что проект будет отвергнут.*

145. *В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что проект пригоден, при условии, что эксперизa его отвергла.*

146. *Три сотрудника фирмы (Артем, Зоя, и Илья) независимо сдают экзамен на получение сертификата. Вероятности добиться успеха для них соответственно равны 0,7; 0,8; 0,9. Сертификат получил только один сотрудник. Найти вероятность того, что это Артем.*

147. *Пусть $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ — несовместные события, составляющие полную группу:* $\mathrm{P}(\mathcal{B}_1) = 0,2;\ \mathrm{P}(\mathcal{B}_2) = 0,15;\ \mathrm{P}(\mathcal{B}_3) = 0,65.$ *Рассмотрим событие* $\mathcal{A}:\ \mathrm{P}(\mathcal{A}) =$

[8] Tóмас Бáйес (Бейес, англ. *Reverend Thomas Bayes*; 1702—1761) — английский математик и священник.

$0,4$. *Если $\mathcal{A}$ не зависит от $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$, используя формулу Байеса, определить, верно ли равенство* $\mathrm{P}(\mathcal{B}_1/\mathcal{A}) = \mathrm{P}(\mathcal{B}_1) = 0,2$*?*

148. *С вероятностью 0,8 преподаватель находится в данный момент в университете. Эта вероятность распределена следующим образом: с вероятностью 0,6 преподаватель на кафедре, а с вероятностью 0,2 в деканате. Студент, ищущий преподавателя, обнаружил, что на кафедре его нет. Как изменится с учетом этой информации вероятность того, что преподаватель в деканате?*

149. *Два независимых эксперта оценивают эффективность операции. Оценка эффективности является качественной и принимает 3 значения: «низкая», «средняя», «высокая». В среднем 30 % операций имеют «низкую» эффективность, 50 % — «среднюю», 20 % — «высокую». Первый эксперт ошибается в трех случаях из десяти, а второй — в одном случае из пяти. Первый оценил эффективность конкретной операции как «низкую», а второй, как «среднюю». Какова вероятность того, что оба они не правы?*

150. *В ящике лежало 10 шаров, которые могли быть черными или белыми. Все гипотезы о числе белых шаров равновероятны. В ящик добавили 1 белый шар. Какова вероятность после этого вынуть белый шар?*

151. *В условиях предыдущей задачи вынутый шар оказался белым. Какова вероятность того, что все шары в ящике белые?*

152. *На конвейер поступают однотипные детали, изготовляемые двумя рабочими. При этом первый поставляет 60 %, второй — 40 % общего числа изделий. Вероятность того, что изделие, изготовленное первым рабочим, окажется нестандартным, равна 0,002; для второго рабочего эта вероятность равна 0,05. Взятое наудачу с конвейера изделие оказалось нестандартным. Определить вероятность того, что оно изготовлено вторым рабочим.*

4. Схемы испытаний

4.1. Схема Бернулли. Полиномиальная схема

Схема Бернулли. Схема n независимых испытаний называется *схемой Бернулли*, если:

1) испытания одинаковы;

2) каждое испытание имеет два исхода: $\mathcal{A}$ (успех) и $\overline{\mathcal{A}}$ (неудача);

3) вероятность успеха в каждом испытании постоянна,

$$\mathrm{P}(\mathcal{A}_i) = p, \quad \mathrm{P}(\overline{\mathcal{A}}_i) = 1 - p = q, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Формула Бернулли. Вероятность осуществления ровно m успехов в n испытаниях равна

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{19}$$

Наивероятнейшее число успехов. $m_0 : P_n(m_0) = \max\limits_m P_n(m)$.

$$m_0 = \begin{cases} \{np+p,\ np+p-1\}, & \text{если } np+p \in \mathbb{Z}; \\ [np+p], & \text{если } np+p \notin \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{20}$$

Полиномиальная схема. Схема n независимых испытаний называется *полиномиальной схемой*, если:

1) испытания одинаковы;

2) каждое испытание имеет k исходов $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k$, $\quad \bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathcal{A}_i = \Omega$;

3) вероятность любого исхода в каждом испытании постоянна:

$$\mathrm{P}(\mathcal{A}_i^l) = p_i, \quad l = 1, \ldots, n, \quad i = 1, \ldots, k, \quad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$$

Полиномиальная формула.

$$P_n(m_1, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_k!} p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k}. \tag{21}$$

$$P_n(m_1, \ldots, m_k) = \mathrm{P}\{\mathcal{A}_1 \text{ произошло } m_1 \text{ раз}, \ldots, \mathcal{A}_k \text{ произошло } m_k \text{ раз}\}.$$

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = n.$$

Задачи

153. *Студент выполняет тест из 5 вопросов, требующих ответов «да» или «нет». Предположим, студент еще не изучал данную тему, и отвечает на вопросы случайным образом (вероятность правильного ответа на каждый вопрос равна 0,5). Найти вероятность того, что студент правильно ответит на:*

а) все вопросы;
б) не меньше 4 вопросов;
в) меньше 4 вопросов;
г) не более 2;
д) не менее 2 и не более 4.

154. *Решите предыдущую задачу в изменённых условиях: студент уже знаком с данной темой, и вероятность правильного ответа на каждый вопрос равна 0,8.*

155. *Вероятность того, что у студента группы Э-11 есть учебное пособие по теории вероятностей, равна 0,6. Какова вероятность, что из троих студентов этой группы пособие имеют двое?*

156. *В течение дня акция может подорожать с вероятностью 0,6 и подешеветь с вероятностью 0,4. Какова вероятность того, что акция будет дорожать пять дней из семи, если считать ежедневные изменения цены независимыми?*

157. *Вероятность того, что сделка окажется прибыльной, равна 0,8. Какова вероятность, что из 5 совершённых сделок прибыльными будут не меньше 4?*

158. *В условиях предыдущей задачи найдите наивероятнейшее число прибыльных сделок из 5 совершённых.*

159. *80 % прибывших в аэропорт пассажиров сдают свой багаж, который проверяется, а остальные 20 % ожидают проверки в очереди. Если прибыло 4000 пассажиров, каково наивероятнейшее число пассажиров, которые будут ожидать проверки своего багажа?*

160. *Если четверть предприятий допускает нарушения налогового законодательства, то какова вероятность, что из 3 предприятий, проверяемых налоговой инспекцией, найдется хотя бы один нарушитель законодательства?*

161. *Каждый пятый компьютер некоторого известного производителя имеет дефекты. Закуплено семь компьютеров этой фирмы. Найдите вероятность того, что более одного из семи компьютеров будут иметь дефекты.*

162. *Вероятность того, что накладная оформлена неправильно, равна 0,2.*

Какова вероятность, что из пяти проверяемых накладных хотя бы одна оформлена неправильно?

163. *В условиях предыдущей задачи найдите наивероятнейшее число неправильно оформленных накладных.*

164. *Фасовщица развешивает печенье в пакеты по 1 кг в пакет. Из каждых 5 пакетов один фасовщица недовешивает. Пакеты она складывает по 15 штук в коробку. Контролер берет из 3 произвольных коробок по одному пакету на проверку. Какова вероятность того, что проверка обнаружит недовешенный пакет?*

165. *Если при каждом спуске с горы на лыжах вероятность упасть 0,2; то каково наивероятнейшее число падений за 7 спусков?*

166. *Если из 10 дней ясных бывает в среднем 6, то какова вероятность того, что из 3 дней, выбранных для проведения ярмарки, по крайней мере 2 — ясные?*

167. *Вероятность получить уступку при сделке равна 0,5. Что вероятнее, получить уступки в 3 сделках из 4 или в 5 из 8?*

168. *Инновационные проекты подвергаются двухэтапной экспертизе. Вероятность пройти первый этап равна 0,2; для прошедших первый этап вероятность пройти второй этап равна 0,4. В экспертную комиссию было подано 270 проектов. Найти наивероятнейшее число проектов, прошедших экспертизу.*

169. *Известно, что 8 % населения смотрит определенную телепрограмму, и что 30 % зрителей этой программы смотрят и рекламные блоки. Найти наивероятнейшее число лиц, смотрящих рекламные блоки в рамках этой телепрограммы на 1000 жителей.*

170. *При устной передаче сообщения в одном случае из пяти появляются ошибки. Какова вероятность того, что из четырех сообщений ровно два переданы точно?*

171. *Компьютерная фирма продает настольные компьютеры и ноутбуки, причем 80 % продаж составляют настольные компьютеры, и 20 % — ноутбуки. Найти вероятность того, что три из четырех проданных компьютеров — ноутбуки.*

172. *Пять договоров раскладывают случайным образом в четыре папки. Какова вероятность, что в первую и третью папки попадут по два договора, а вторая папка останется пустой?*

173. *В магазин поступили женские туфли одной известной марки размеров 37, 38, 40 (по две пары каждого размера). Если покупательницы спрашивают размер 37 с вероятностью 0,1; размер 38 — с вероятностью 0,2; размер 40 — с вероятностью 0,2; а с вероятностью 0,5 спрашивают прочие размеры, то какова вероятность, что две покупательницы подряд найдут в этом магазине туфли нужного им размера?*

174. *В интернет-магазине можно заказать доставку книг либо наземной почтой, либо авиапочтой, либо при помощи курьерской службы. Предположим, вероятности этих способов заказов равны соответственно* $0,3$; $0,6$; $0,1$. *Найти вероятность того, что из десяти клиентов двое закажут книги авиапочтой, трое предпочтут доставку наземным транспортом, пятеро будут ждать звонка курьера.*

175. *Проект состоит из пяти одновременно выполняемых этапов, расчетное время выполнения каждого этапа от 65 до 75 дней, в этих пределах любое время окончания этапа равновероятно. Найдите вероятность того, что два этапа будут закончены за 65—67 дней, один — за 68 дней, и последние два этапа закончатся в срок от 69 до 75 дней.*

176. *30 % студентов набирают по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» не меньше 85 баллов из 100, что соответствует оценке «отлично», 35 % — от 70 до 85 баллов (оценка «хорошо»), 20 % — от 55 до 70 баллов (оценка «удовлетворительно»), 15% студентов набирают менее 55 баллов из 100 (оценка «неудовлетворительно»). Какова вероятность того, что из пяти случайно выбранных студентов двое сдадут экзамен на «отлично», а трое — на «хорошо»?*

4.2. Асимптотические формулы для схемы Бернулли

При больших n и малых p можно использовать приближение Пуассона.

Приближенная формула Пуассона.

$$P_n(m) \approx \ p_\lambda(m) = \ \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \tag{22}$$

где $\lambda = np$. Приближенную формулу Пуассона применяют при

$$n \geqslant 30; \quad p \leqslant 0,1; \quad 0,1 \leqslant \lambda = np \leqslant 10.$$

При больших n и не малых $p,\ q$ можно использовать приближение Муавра — Лапласа.

Локальная приближенная формула Муавра — Лапласа.

$$\begin{gathered} P_n(m) \approx \frac{\varphi\left(x_m\right)}{\sqrt{npq}}, \\ x_m = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}, \end{gathered} \tag{23}$$

$$\text{где} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Интегральная приближенная формула Муавра — Лапласа.

$$\mathrm{P}\left(x_1 \leqslant \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \leqslant x_2\right) \approx \Phi\left(x_2\right) - \Phi\left(x_1\right), \tag{24}$$

$$\text{где} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt.$$

Следствия интегральной приближенной формулы.

$$\mathrm{P}(a \leqslant m \leqslant b) \approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right). \tag{25}$$

$$\mathrm{P}\left(\alpha_1 \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \alpha_2\right) \approx \Phi\left((\alpha_2 - p)\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - \Phi\left((\alpha_1 - p)\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{26}$$

$$\mathrm{P}\left(\beta_1 \leqslant \frac{m}{n} - p \leqslant \beta_2\right) \approx \Phi\left(\beta_2\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - \Phi\left(\beta_1\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{27}$$

Формулы Муавра — Лапласа применяют при

$$n \geqslant 30; \quad 0,1 \leqslant p \leqslant 0,9; \quad npq \geqslant 9.$$

Задачи

177. *Вероятность нарушения герметичности упаковки при перевозке равна 0,001. Найти вероятность того, что среди 1 000 перевезенных упаковок 3 окажутся негерметичными.*

178. *Если в фирме по организации праздников заказывают в среднем два конных свадебных экипажа в день, то какова вероятность, что за день поступит больше двух заказов?*

179. *На факультете 730 студентов. Найти вероятность того, что у 2 студентов день рождения придется на 1 января, считая, что вероятность рождения в фиксированный день равна 1/365.*

180. *В партии из 40 000 купюр 8 фальшивых. Из партии берут 1 000 купюр. Какова вероятность, что среди них хотя бы одна фальшивая?*

181. *На конвейер поступают однотипные детали, производимые автоматом. Вероятность того, что деталь, изготовленная автоматом, окажется нестандартной, равна 0,002. Какова вероятность, что из тысячи деталей более двух нестандартны?*

182. *В течение минуты оператору поступает в среднем 60 вызовов. Найти вероятность того, что за 3 секунды не поступит ни одного вызова.*

183. *Корректура в 400 страниц содержит 1 200 опечаток. Найти вероятность того, что число опечаток на странице отклонится от 3 не более чем на 1.*

184. *В среднем бракованные изделия составляют 0,5 %. Найти вероятность того, что из 100 изделий не будет ни одного бракованного.*

185. *Компания разрабатывает новую диетическую еду и проводит в сетевом магазине опрос 100 произвольно выбранных потребителей, в котором выявляются 2 наиболее ходовых товара. Обозначим x количество тех человек из 100, которые выбрали другой товар, кроме двух наиболее ходовых. Пусть при одном из опросов $x = 40$. Какова вероятность, что при таком же опросе, проводимом параллельно в другом магазине этой сети, величина x примет значение больше 50?*

186. *Из группы в 1 000 человек были опрошены 100 человек, и оказалось, что 70 из них имеют депозитные счета. Какова вероятность, что в группе из 1 000 человек депозитные счета имеют от 680 до 720 человек?*

187. *Пусть известно, что среди выпускаемых заводом автомобилей 20 % некомплектны. Осмотрено 625 выпущенных автомобилей. Найти вероятность того, что наблюдаемая частота комплектных автомобилей отклонится по абсолютной величине от вероятности не более чем на 0,04.*

188. *Банк предоставил кредиты 400 клиентам. Для каждого клиента вероятность того, что взятый кредит будет возвращён в срок, равна 0,8. Найти вероятность того, что частота возвращения кредита будет находиться в пределах 0,8± 0,05.*

189. *Банк предоставил кредиты 400 клиентам. Для каждого клиента вероятность того, что взятый кредит будет возвращён в срок, равна 0,8. Найти такое положительное ε, что с вероятностью 0,995 абсолютная величина отклонения частоты возвращения кредита от вероятности 0,8 не превысит ε.*

190. *Новый клиент интернет-магазина с вероятностью 0,5 делает заказ. В некоторый день зарегистрировалось 100 человек. Найти вероятность того, что от них поступит от 45 до 55 заказов.*

191. *Новый клиент интернет-магазина делает заказ с вероятностью 0,5. Сколько новых клиентов должно зарегистрироваться, чтобы с вероятностью 0,92 можно было ожидать отклонение частоты заказов новых клиентов от теоретической вероятности 0,5 на абсолютную величину, меньшую чем 0,01?*

5. Одномерные дискретные случайные величины

Определение случайной величины и функции распределения

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ — вероятностное пространство.
Случайной величиной ξ называется измеримая функция $\xi = \xi(\omega)$, отображающая Ω в $\mathbb{R}$.
Определение означает, что прообраз любого борелевского множества $\mathcal{B}$

$$\{\omega \colon \xi(\omega) \in \mathcal{B}\} = \xi^{-1}(\mathcal{B})$$

является множеством из σ-алгебры $\mathcal{F}$.

Простейшим примером случайной величины является *индикатор события* $\mathcal{A}$:

$$I_{\mathcal{A}}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \mathcal{A}; \\ 0, & \omega \notin \mathcal{A}. \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра на $\mathbb{R}$. Говорят, что задано *распределение вероятностей случайной величины* ξ, если $\forall \mathcal{B} \in \mathfrak{B}$ определены вероятности $P_\xi(\mathcal{B}) = P(\xi \in \mathcal{B})$. Распределение вероятностей порождает вероятностное пространство $(R, \mathfrak{B}, P_\xi)$.

Функцией распределения случайной величины ξ называется функция

$$F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x), \quad \forall x \in \mathbb{R}\,. \tag{28}$$

Свойства функции распределения.

1) Если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \leqslant F(x_2)$.
2) $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1, \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0.$
3) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1.$
4) $\mathrm{P}(x \leqslant \xi < y) = F_\xi(y) - F_\xi(x).$

Дискретные случайные величины

Случайная величина ξ имеет *дискретное распределение*, если ξ принимает конечное или счетное число различных значений с соответствующими вероятностями

$$\mathrm{P}(\xi = x_i) = p_i, \quad \sum_i p_i = 1.$$

Дискретные случайные величины часто задаются рядом распределения

ξ	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Для дискретных случайных величин

$$F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x) = \sum_{i \colon x_i < x} p_i. \tag{29}$$

Задачи

192. *Найдите функцию распределения величины $\xi \equiv c$ (вырожденное распределение).*

193. *Найдите функцию распределения индикатора события $\mathcal{A}$, вероятность которого равна 0,3.*

194. *Найдите функцию распределения индикатора события $\mathcal{A}$, состоящего в том, что точка, поставленная наудачу в круге радиуса 1, окажется вне квадрата, вписанного в круг.*

195. *Испытание состоит в бросании двух костей. Запишите ряд распределения индикатора события $\mathcal{A}$ =*{Произведение выпавших очков делится на 3}*, и найдите его функцию распределения.*

196. *Пусть случайная величина ξ обозначает число прочитанных книг за последний месяц, и её функция распределения имеет вид:*

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \leqslant 0, \\ 1/9 & \textit{при} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 1/3 & \textit{при} \quad 1 < x \leqslant 2, \\ 2/3 & \textit{при} \quad 2 < x \leqslant 3, \\ 7/9 & \textit{при} \quad 3 < x \leqslant 5, \\ 8/9 & \textit{при} \quad 5 < x \leqslant 9, \\ 1 & \textit{при} \quad x > 9. \end{cases}$$

Найдите ряд распределения и вероятность того, что случайным студентом прочитано 2 книги.

197. *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ — вероятностное пространство, $\xi(\omega)$ — вещественная функция, определенная на Ω. Обязательно ли ξ является случайной величиной, если случайной величиной является:*

$$\textit{а)}\ \xi^2; \quad \textit{б)}\ \xi^3; \quad \textit{в)}\ \sin\xi; \quad \textit{г)}\ e^\xi; \quad \textit{д)}\ |\xi|?$$

198. *Определить, могут ли следующие функции быть функциями распределения каких-либо случайных величин:*

$$\textit{а)}\ F_\xi(x) = \begin{cases} 0,2 & \textit{при} \quad x \leqslant 2, \\ 1 & \textit{при} \quad x > 2; \end{cases} \qquad \textit{б)}\ F_\xi(x) \equiv 1.$$

$$\textit{в)}\ F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \leqslant 0, \\ 0,2 & \textit{при} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 0,7 & \textit{при} \quad 1 < x \leqslant 2, \\ 1 & \textit{при} \quad x > 2; \end{cases} \qquad \textit{г)}\ F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \leqslant 3, \\ 1 & \textit{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

199. *Определить, могут ли следующие таблицы задавать ряды распределения некоторой случайной величины. В случае положительного ответа найти подходящие значения константы c и функции распределения полученной случайной величины:*

а)

ξ	-10	0	5
p	$2c^2$	$c(1-c)$	$(1-c)^2$

;

б)

ξ	0	$\sqrt{\pi}$	2	1000
p	c	$1-c$	c^2	$3c$

.

200. *Найдите функцию распределения случайной величины $\xi(\omega)$, определенной на классическом вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, если $\Omega = \{-3, 1, 3\}$ и $\xi = \omega$.*

201. *Решите предыдущую задачу, если:*

$$
\begin{array}{ll}
а) & \xi = \omega^2; \\
б) & \xi = \omega^{-1}; \\
в) & \xi = 2^{\omega}; \\
г) & \xi = \begin{cases} 0 & при \quad \omega = -3, \\ 1 & при \quad \omega = 1, \\ 0 & при \quad \omega = 3; \end{cases} \\
д) & \xi = \begin{cases} \omega^2 & при \quad \omega = \pm 3, \\ \omega & при \quad \omega = 1. \end{cases}
\end{array}
$$

202. *Найдите функцию распределения случайной величины $\xi(\omega) = 2\,\omega$, определенной на дискретном вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathcal{P})$ с $\Omega = \{1, 2, 3\}$, если*

$$\mathrm{P}(1) = 0,2; \quad \mathrm{P}(2) = 0,3; \quad \mathrm{P}(3) = 0,5.$$

203. *Случайная величина ξ принимает значение 1, если экзамен сдан, и 0, если не сдан. Предположим, вероятность сдать экзамен равна 0,8. Какое распределение имеет случайная величина ξ? Записать ряд распределения ξ, найти $F_\xi(x)$.*

204. *Какое распределение имеет случайная величина η, если η равняется числу тузов среди двух карт, вынутых без возвращения из колоды в 36 карт? Запишите ряд распределения.*

205. *Решите предыдущую задачу в условиях выбора с возвращением.*

206. *Игра состоит в набрасывании колец на колышек. Вероятность попадания при одном броске 0,6. Случайная величина ξ равна числу колец, израсходованных до первого попадания. Найдите закон распределения ξ.*

207. *Студент в поисках нужной информации заходит поочерёдно на три сайта. Найдя информацию, он прекращает поиски. Вероятность найти информацию на любом из этих сайтов равна 0,5. Случайная величина равна числу посещённых сайтов. Построить ряд распределения случайной величины ξ, найти $F_\xi(x)$.*

208. *В условиях предыдущей задачи число сайтов не ограничено. Каково распределение случайной величины, равной числу посещённых сайтов?*

209. *Один раз бросают две игральные кости. Случайная величина ξ — вычет суммы выпавших очков по модулю три. Построить ряд распределения случайной величины ξ, найти вероятность, что $\xi = 2$.*

210. *Число вызовов ξ, поступающих оператору в течение минуты, имеет пуассоновское распределение с параметром $\lambda = 3$. Найдите* $\mathrm{P}(\xi \geqslant 2)$.

211. *Если при наборе существует вероятность $p = 0,00001$ того, что любая буква будет набрана неправильно, и случайная величина ξ равна числу опечаток в книге, имеющей 100 000 печатных знаков, то каково точное и приближённое распределение ξ?*

212. *Вероятность нарушения герметичности упаковки при перевозке равна 0,01; случайная величина ξ равна числу негерметичных упаковок среди 200 перевезённых. Как приближённо распределена случайная величина ξ?*

213. *Если при перевозке случится авария, вероятность нарушения герметичности упаковки равна 0,2. Случайная величина ξ равна числу негерметичных упаковок среди 10 перевезённых. Как распределена случайная величина ξ?*

214. *В условиях предыдущей задачи большое количество упаковок проверяют по очереди. Случайная величина ξ равна числу проверенных упаковок до первой встретившейся негерметичной. Каково распределение ξ?*

215. *Если в предыдущих условиях случайная величина ξ равна числу проверенных упаковок до третьей встретившейся негерметичной, как распределена случайная величина ξ?*

216. *В компьютерной игре для прохождения на следующий уровень необходимо сбить n мишеней. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна* *p. Случайная величина ξ — число произведенных выстрелов. Найдите закон распределения ξ.*

217. *В урне находится 5 белых и 10 красных шаров. Двое поочередно вынимают (с возвращением) шары до появления белого шара. Случайная величина ξ — число вынутых шаров. Найдите закон распределения ξ.*

218. *Из четырех ключей только один подходит к замку. Случайная величина ξ — число попыток при открывании замка. Найдите закон распределения ξ.*

6. Абсолютно непрерывные распределения

6.1. Одномерные абсолютно непрерывные распределения

Случайная величина имеет ξ *абсолютно непрерывное распределение*, если ее функция распределения допускает представление в виде

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt. \tag{30}$$

Подынтегральная функция $f_\xi(x)$ называется *плотностью распределения* случайной величины ξ.

Свойства плотности распределения.

1) Почти всюду $f_\xi(x) = F'_\xi(x)$.

2) Почти всюду $f_\xi(x) \geqslant 0$.

3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(t)\,dt = 1$[9].[2.2ex]

4) $\int\limits_{a}^{b} f_\xi(t)\,dt = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \mathrm{P}(a \leqslant \xi < b)$.[1.7ex]

5) Если случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение, то ее функция распределения всюду непрерывна.

Задачи

219. *Автобусы приходят на остановку каждые 30 минут. Они могут опаздывать, но никогда не приходят раньше. Время задержки автобуса распределено равномерно и не превышает 20 минут. Найти вероятность того, что последний за день автобус опоздает более, чем на 19 минут.*

220. *Случайная величина ξ задана функцией распределения*

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x^3, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$$

Найти: *а)* *плотность* $f_\xi(x)$,
б) $\mathrm{P}(0,5 \leqslant \xi < 1)$.

[9]Это свойство часто называют свойством (условием) нормировки.

221. *Случайная величина ξ задана плотностью*

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -C, \\ 0,5\cos x, & -C < x \leqslant C, \\ 0, & C < x. \end{cases}$$

Найти: *а)* *постоянную* C;
б) $F_\xi(x)$;
в) $\mathrm{P}(-0,5C \leqslant \xi < 0,5C)$.

222. *Случайная величина ξ имеет плотность распределения*

$$f_\xi(x) = A\,x\exp(\,-h^2x^2), \quad x \geqslant 0 \text{ (закон Рэлея).}$$

Найти: *а)* *постоянную* A,
б) $F_\xi(x)$,
в) $\mathrm{P}(0 \leqslant \xi < 1)$.

223. *Случайная величина ξ задана плотностью распределения*

$$f_\xi(x) = A\exp(-x/x_0), \quad x \geqslant 0, \quad x_0\text{— параметр.}$$

Найти: *а)* *постоянную* A,
б) $F_\xi(x)$.

224. *Случайная величина ξ имеет плотность распределения*

$$f_\xi(x) = \frac{c}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Найти: *а)* *постоянную* c,
б) $F_\xi(x)$,
в) $\mathrm{P}(0 \leqslant \xi < 1)$.

225. *Случайная величина ξ задана плотностью распределения*

$$f_\xi\,(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \leqslant -1, \\ c\,(x+1) & \text{при} \quad -1 < x \leqslant 0, \\ c & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 0 & \text{при} \quad 1 < x. \end{cases}$$

Найти: *а)* *постоянную* c,
б) $F_\xi(x)$,
в) $\mathrm{P}(-0,2 \leqslant \xi \leqslant 0,2)$.

226. *Определить, могут ли следующие функции быть функциями распределения каких-либо случайных величин:*

$$а)\ F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \leqslant 0, \\ x & при \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 0 & при \quad x \geqslant 1; \end{cases}$$

$$б)\ F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \leqslant -1, \\ -cx & при \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ cx & при \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 1 & при \quad x > 1; \end{cases}$$

$$в)\ F_\xi(x) = 1 - e^{-5x}, \quad x \geqslant 0;$$

$$г)\ F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \leqslant 3, \\ 1 & при \quad x > 3; \end{cases}$$

$$д)\ F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \leqslant 3; \\ (x-4)/4 & при \quad 3 < x \leqslant 7; \\ 1 & при \quad x > 7. \end{cases}$$

227. *Случайная величина ξ задана функцией распределения*

$$F_\xi(x) = c + b \cdot \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Найдите постоянные b, c и плотность.

228. *В задании функции распределения*

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \leqslant -\alpha, \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi} \arcsin \dfrac{x}{\alpha} & при \quad -\alpha < x \leqslant \alpha, \\ 1 & при \quad \alpha < x. \end{cases}$$

α является параметром или постоянной величиной? Найдите плотность этого распределения и $\mathrm{P}(-\alpha/2 \leqslant \xi \leqslant \alpha/2)$.

229. *Пачки печенья упаковывают автоматически. Масса пачки распределена по нормальному закону и имеет среднее значение 200 г, среднеквадратичное отклонение 5 г. Найти вероятность того, что вес случайно взятой пачки меньше 195 г.*

230. *Количество задач в параграфе имеет нормальное распределение $N(25, 5)$ (со средним значением 25). Какова вероятность, что в параграфе будет не больше 30 задач?*

231. *Число посетителей сайта представляет собой случайную величину, распределённую по нормальному закону с параметрами $a = 50$, $\sigma = 5$. Найти вероятность того, что сайт посетит от 40 до 60 пользователей.*

232. *Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 0, и дисперсией σ^2. Каковы вероятности ее попадания в интервалы:*

а) $(-\sigma, \sigma)$;
б) $(-2\sigma, 2\sigma)$;
в) $(-3\sigma, 3\sigma)$?

233. *Случайная величина ξ имеет распределение $N(1, 2)$. Что больше, $\mathrm{P}(0 \leqslant \xi < 1)$ или $\mathrm{P}(2 \leqslant \xi < 4)$?*

234. *Нормальное распределение с параметрами $(0; \sigma)$ усечено значением 0, то есть*

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \leqslant 0, \\ \dfrac{A}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) & при \quad x > 0. \end{cases}$$

Найти коэффициент A.

235. *Рост человека имеет распределение $N(a, \sigma)$. Если известно, что рост больше, чем $a+\sigma$, какова вероятность, что рост меньше, чем $a+2\sigma$?*

236. *Продолжительность междугороднего разговора имеет приближенно показательное распределение с параметром 1/3 (мин$^{-1}$). Найдите вероятность того, что очередной разговор будет продолжаться более 2 минут.*

237. *Время безотказной работы принтера является случайной величиной, распределенной по показательному закону с параметром 1/700 (1/час). Найдите вероятность того, что принтер проработает больше 700 часов.*

238. *Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром 1. Что больше, $\mathrm{P}(1 \leqslant \xi < 2)$ или $\mathrm{P}(2 \leqslant \xi < 4)$?*

239. *Длительность работы электрической лампочки подчиняется показательному закону с параметром $\lambda = 0,01$ (1/день). Найти вероятность того, что лампочка проработает 100 дней.*

240. *В условиях предыдущей задачи, если лампочка проработала 100 дней, какова вероятность, что она перегорит за следующие 100 дней?*

241. *Будем считать, что длительность консультации распределена по показательному закону с параметром 1 (1/ч). Обычная длительность консультации — академический час (45 мин). Если консультация не закончилась за это время, какова вероятность того, что она закончится в ближайшие 15 мин?*

242. *Месячный доход налогоплательщика имеет распределение Парето с параметром $p = 3$. Найти вероятность того, что доход случайного налогоплательщика более, чем в два раза выше нижнего предела.*

6.2. Многомерные случайные величины

Многомерной (n-мерной) случайной величиной называется вектор $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$, отображающий Ω в $\mathbb{R}^n$.

Дискретные двумерные случайные величины часто задают *таблицей распределения*:

$\eta \setminus \xi$	x_1	$\ldots$	x_n
y_1	p_{11}	$\ldots$	p_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	p_{m1}	$\ldots$	p_{mn}

Совместной функцией распределения n-мерной случайной величины ξ называется функция

$$F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{P}(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n,), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{31}$$

n-мерная случайная величина ξ непрерывно распределена, если ее функция распределения допускает представление в виде

$$F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \ldots \int\limits_{-\infty}^{x_n} f_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n. \tag{32}$$

Подынтегральная функция $f_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n)$ называется *плотностью распределения* n-мерной случайной величины $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называются *независимыми*, если

$$\mathrm{P}(\xi_1 \in B_1, \ldots, \xi_n \in B_n) = \mathrm{P}(\xi_1 \in B_1) \ldots \mathrm{P}(\xi_n \in B_n), \tag{33}$$

где $B_1, \ldots, B_n$ — борелевские множества из $\mathbb{R}$.

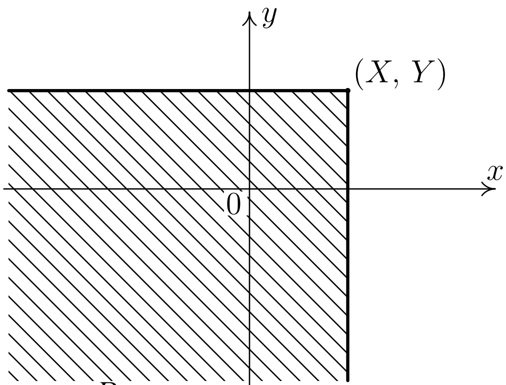
Свойства независимых случайных величин.
1) $F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1)\ldots F_{\xi_n}(x_n)$.
2) Для дискретных случайных величин

$$p_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{P}(\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n) = \\ = \mathrm{P}(\xi_1 = x_1)\ldots\mathrm{P}(\xi_n = x_n).$$

3) Для непрерывных случайных величин

$$f_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = f_{\xi_1}(x_1)\ldots f_{\xi_n}(x_n).$$

Вышеперечисленные свойства являются необходимыми и достаточными условиями независимости случайных величин.



Система двух случайных величин.

Пусть (ξ, η) — двумерная непрерывно распределенная случайная величина, а $F_{\xi,\eta}(X, Y)$ — ее функция распределения.

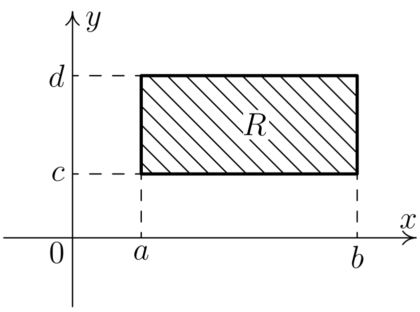
Геометрически $F_{\xi,\eta}(X, Y)$ интепретируется как как вероятность попадания случайной точки (ξ, η) в квадрант с вершиной (X, Y), заштрихованный на рисунке слева.

Плотность распределения выражается формулой

$$f_{\xi,\eta}(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y}.$$

Вероятность попадания случайной точки (ξ, η) в произвольную область D может быть найдена по формуле

$$\mathrm{P}((\xi, \eta) \in D) = \iint\limits_D f_{\xi,\eta}(x, y)\, dx\, dy.$$



Вероятность попадания случайной точки (ξ, η) в прямоугольник R со сторонами, параллельными осям координат, включающий свою нижнюю и левую границы, но не включающий верхнюю и правую, можно найти по формуле

$$\mathrm{P}((\xi, \eta) \in R) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c),$$

где a, b, c, d — координаты вершин прямоугольника R (см. рисунок).

Функция распределения двумерной случайной величины может быть выражена через ее плотность по формуле

$$F_{\xi,\eta}(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi,\eta}(u, v)\, du\, dv$$

(интегрируют сначала по v, затем — по u).

Плотности распределения одномерных величин ξ и η, составляющих двумерную величину (ξ, η), находятся по формулам:

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x, y)\, dy, \tag{34}$$

$$f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x,\, y)\, dx. \tag{35}$$

Задачи

243. *Дискретная двумерная случайная величина* $(\xi,\, \eta)$ *задана таблицей распределения*

$\eta \setminus \xi$	-1	0	1
0	$0,1$	x	0
1	0	$3x$	0
2	0	$0,1$	$0,4$

Найти x*, одномерный закон распределения* ξ, $\mathrm{P}(\eta > 0,5)$.

244. *Являются ли одномерные случайные величины* ξ, η *из предыдущей задачи независимыми?*

245. *По заданному совместному закону распределения двумерной случайной величины* $(\xi,\, \eta)$ *найдите совместную функцию распределения* $F_{\xi,\eta}(x,\, y)$ *и выясните, являются ли одномерные случайные величины* $\xi,\, \eta$ *независимыми.*

$\eta \setminus \xi$	3	4
1	$0,3$	$0,4$
2	$0,1$	$0,2$

246. *Дискретная двумерная случайная величина* $\xi,\, \eta$ *задана таблицей распределения*

$\eta \setminus \xi$	0	1	2
-1	$0,3$	0	0
0	0	$0,3$	0
1	0	0	$0,4$

Докажите по определению, что $\xi,\, \eta$ *зависимы. Докажите тот же факт, используя функции распределения.*

247. *Дискретная двумерная случайная величина* $\xi,\, \eta$ *задана таблицей распределения*

$\eta \setminus \xi$	3	4
1	$1/6$	$1/3$
2	$1/6$	$1/3$

Докажите по определению, что $\xi,\, \eta$ *независимы. Докажите тот же факт, используя функции распределения.*

248. *Один раз бросают игральную кость. Случайная величина* ξ *— число выпавших единиц, а случайная величина* η *— число выпавших шестёрок. Построить таблицу распределения случайной величины* $(\xi,\, \eta)$*. Что можно сказать про зависимость* $\xi,\, \eta$*?*

249. *Один раз бросают две игральные кости. Случайная величина* ξ *— число выпавших единиц, а случайная величина* η *— число выпавших шестерок. Найти вероятность* $\mathrm{P}(\xi = 0,\, \eta = 0)$*. Построить таблицу распределения случайной величины* $(\xi,\, \eta)$.

250. *Два раза бросают игральную кость. Случайная величина* ξ *— сумма, а случайная величина* η *— модуль разности выпавших очков. Построить таблицу* *распределения случайной величины* (ξ, η)*, найти вероятность* $\mathrm{P}(\xi = 7,\ \eta \leqslant 4)$.

251. *Двумерная случайная величина задана с помощью совместной плотности* $f_{\xi,\eta}(x,\ y)$*. Выразить через неё одномерные плотности компонент* ξ, η.

252. *Двумерная случайная величина задана с помощью совместной плотности:*

$$f_{\xi,\eta}(x,\ y) = \begin{cases} Cxy^2 & \textit{при}\ 0 < y < 1,\ 0 < x < 1; \\ 0 & \textit{— иначе.} \end{cases}$$

Найти постоянную C *и одномерную плотность* $f_\xi(x)$.

253. *В условиях предыдущей задачи найдите* $\mathrm{P}(\xi + \eta \geqslant 1)$ *и* $\mathrm{P}(1/2 < \xi < 3/4)$.

254. *Определить плотность вероятности двумерной случайной величины* $(\xi,\ \eta)$ *по заданной функции распределения:*

$$F_{\xi,\eta}(x,\ y) = \begin{cases} (1 - e^{-2x})(1 - e^{-3y}) & \textit{при}\ x > 0,\ y > 0; \\ 0 & \textit{— иначе.} \end{cases}$$

В задачах **255—259** с помощью совместной плотности заданы двумерные случайные величины $(\xi,\ \eta)$. Требуется выяснить зависимы ли ξ, η, и найти

а) неизвестную постоянную C;

б) совместную функцию распределения $F_{\xi,\eta}(x,\ y)$;

в) одномерные плотности $f_\xi(x)$, $f_\eta(y)$.

255. $f_{\xi,\eta}(x,\ y) = C|x||y| \exp\{-(x^2 + y^2)\}$.

256. $f_{\xi,\eta}(x,\ y) = \begin{cases} Cxy \exp\{-(4x^2 + y^2)\} & \textit{при}\ 0 < y < 1,\ 0 < x < 1; \\ 0 & \textit{— иначе.} \end{cases}$

257. $f_{\xi,\eta}(x,\ y) = \begin{cases} Cxy & \textit{при}\ 0 < y < 1,\ 0 < x < 2; \\ 0 & \textit{— иначе.} \end{cases}$

258. $f_{\xi,\eta}(x,\ y) = C\dfrac{1}{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2}$.

259. $f_{\xi,\eta}(x,\ y) = C \cos x \cdot \cos y$ *при* $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ *(плотность равна нулю при остальных* x, y*).*

260. *В круге радиуса* R *случайно выбирают точку* $(\xi,\ \eta)$*. Запишите плотность случайной величины* $(\xi,\ \eta)$.

261. *В квадрате* $[0,\ 1] \times [0,\ 1]$ *случайно выбирают точку* $(\xi,\ \eta)$*. Запишите функцию распределения случайной величины* $(\xi,\ \eta)$ *и найдите* $\mathrm{P}(2\xi > \eta)$.

262. *Двумерная случайная величина* $(\xi,\ \eta)$ *равномерно распределена в треугольнике* $\mathcal{D} = \{(x,\ y)\colon x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 2.\}$ *Найдите* $\mathrm{P}(\xi < \eta)$.

263. *В условиях предыдущей задачи выясните, зависимы ли* ξ, η.

264. *Двумерная случайная величина* $(\xi,\ \eta)$ *имеет плотность вероятности*

$$f_{\xi,\eta}(x,\ y) = \frac{A}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(3 + x^2)(1 + y^2)}.$$

Найти величину A *и* $\mathrm{P}(0 < \xi < 1,\ 0 < \eta < 1)$.

7. Числовые характеристики одномерной случайной величины

7.1. Математическое ожидание

Математическим ожиданием случайной величины ξ называется число

$$M\xi = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega)\, dP(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, dF_\xi(x) \tag{36}$$

при условии, что интеграл сходится абсолютно.

Смысл математического ожидания — среднее значение случайной величины. Из определения (36) вытекают формулы (37) для дискретной случайной величины и (38) для непрерывной случайной величины.

Формулы для вычисления математического ожидания.

Математическое ожидание одномерной дискретной случайной величины ξ:

$$M\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot \mathrm{P}(\xi = x_i). \tag{37}$$

Математическое ожидание непрерывной одномерной случайной величины ξ:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\, dx. \tag{38}$$

Свойства математического ожидания.

1) $Mc = c,\ c = const.$
2) $Mc\xi = cM\xi.$
3) $M(\xi_1 + \xi_2) = M\xi_1 + M\xi_2.$
4) $M(\eta_1 \cdot \eta_2) = M(\eta_1) \cdot M(\eta_2)$, если η_1 и η_2 — независимые случайные величины.
5) $|M\xi| \leqslant M|\xi|.$

Задачи

В задачах **265—272** требуется найти математические ожидания указанных случайных величин.

265. *Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7. Случайная величина ξ равна числу попаданий в цель при двух выстрелах.*

266. *Проводят один опыт, в результате которого событие может произойти с вероятностью 0,4. Случайная величина ξ принимает значение 1, если событие произошло и 0, если оно не произошло.*

267. *Игра состоит в набрасывании колец на колышек. Игрок получает 3 кольца и бросает их до первого попадания. Вероятность попадания при одном броске 0,5. Случайная величина равна числу израсходованных колец.*

268. *В лотерее имеется n_i выигрышей стоимостью m_i, где $i = 1, \ldots, k$. Всего билетов N. Случайная величина ξ — стоимость выигрыша на один билет.*

269. *Из четырех ключей только один подходит к замку. Случайная величина ξ — число попыток при открывании замка.*

270. *Партия из 8 деталей содержит 2 нестандартные. Наудачу отобраны 3 детали. Случайная величина ξ — число стандартных среди трех отобранных.*

271. *Найти математическое ожидание биномиального распределения $B\,(N,\, p)$.*

272. *Найти математическое ожидание распределения Пуассона P_λ.*

В задачах **273—287** требуется найти неизвестные постоянные коэффициенты и математическое ожидание случайных величин, заданных с помощью плотности $f_\xi(x)$ или функции распределения $F_\xi(x)$ (или указать, что математическое ожидание не существует).

273. $f_\xi(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{\textit{при}} \quad x \in [1;\, 4], \\ 0 & \text{\textit{при}} \quad x \notin [1;\, 4]. \end{cases}$

274. $f_\xi(x) = \begin{cases} cx^3 & \text{\textit{при}} \quad x \in [0;\, 1] \\ 0 & \text{\textit{при}} \quad x \notin [0;\, 1]. \end{cases}$

275. $F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{\textit{при}} \quad x \leqslant 0, \\ x^2 & \text{\textit{при}} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{\textit{при}} \quad 1 < x. \end{cases}$

276. $f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{\textit{при}} \quad x \leqslant 0, \\ \sin x & \text{\textit{при}} \quad 0 < x \leqslant C, \\ 0 & \text{\textit{при}} \quad C < x. \end{cases}$

277. $f_\xi(x) = A \exp\left\{-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right\}$, *где* $x \geqslant 0, \ \ \sigma = const.$

278. $f_\xi(x) = \dfrac{a}{2} \exp\{-a|x-b|\}$, *где* $a > 0.$

279. $F_\xi(x) = c + b \cdot \operatorname{arctg} x$, *где* $x \in \mathbb{R}.$

280. $F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{\textit{при}} \quad x \leqslant -a \\ 1/2 + (1/\pi) \arcsin(x/a) & \text{\textit{при}} \quad -a < x \leqslant a \\ 1 & \text{\textit{при}} \quad a < x. \end{cases}$

281. $f_\xi(x) = A \exp\left\{-\dfrac{x^m}{x_0}\right\}$, *где* $x \geqslant 0, \ x_0 = const.$

282. $f_\xi(x) = \dfrac{3x^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\dfrac{(x^3-a)^2}{2\sigma^2}\right\}.$

283. $f_\xi(x) = \dfrac{A}{e^x + e^{-x}}$, *где* $x \in \mathbb{R}.$

284. *Найти среднюю скорость молекул газа, если скорость подчиняется закону Максвелла:*

$$f(v) = \begin{cases} \dfrac{4h^3}{\sqrt{\pi}} v^2 e^{-v^2h^2} & \text{\textit{при}} \quad v > 0, \\ 0 & \text{\textit{при}} \quad v \leqslant 0. \end{cases}$$

285. *Найти математическое ожидание распределения Рэлея:*

$$f(x) = Ax \exp\left\{-h^2x^2\right\}, \ \text{\textit{где}} \ x \geqslant 0.$$

286. *Найти математическое ожидание распределения Лапласа.*

287. *Найти математическое ожидание распределения Парето.*

7.2. Другие числовые характеристики случайной величины

Дисперсией ξ называется число

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2. \tag{39}$$

Начальным моментом порядка k случайной величины ξ называется число

$$\alpha_k = M(\xi)^k. \tag{40}$$

Центральным моментом порядка k случайной величины ξ называется число

$$\mu_k = M(\xi - M\xi)^k. \tag{41}$$

Среднеквадратическим отклонением ξ называется число

$$\sigma = \sqrt{D\xi}. \tag{42}$$

Коэффициентом асимметрии называется число

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{M(\xi - M\xi)^3}{\sqrt{(D\xi)^3}}. \tag{43}$$

Коэффициентом эксцесса называется число

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{M(\xi - M\xi)^4}{(D\xi)^2} - 3. \tag{44}$$

Модой непрерывной случайной величины ξ называется значение m_o, при котором плотность $f_\xi(x)$ достигает максимума:

$$f_\xi(m_0) = \max_x f_\xi(x). \tag{45}$$

Модой дискретной случайной величины ξ называется значение m_o, при котором

$$\mathrm{P}(\xi = m_o) = \max_i p_i. \tag{46}$$

Медианой непрерывной случайной величины ξ называется значение m_e, при котором

$$\int\limits_{-\infty}^{m_e} f_\xi(x)\,dx = 1/2, \tag{47}$$

то есть $F\,(m_e) = 1/2$.

Медианой дискретной случайной величины ξ называется значение m_e, при котором

$$F\,(m_e) \leqslant 1/2, \quad F\,(m_e + 0) \geqslant 1/2. \tag{48}$$

Квантилью порядка q $(0 < q < 1)$ *непрерывной случайной величины* ξ называется значение x_q, при котором

$$\int\limits_{-\infty}^{x_q} f_\xi(x)\,dx = q, \tag{49}$$

то есть $F\,(x_q) = q$.

Квантилью порядка q $(0 < q < 1)$ *дискретной случайной величины* ξ называется значение x_q, при котором

$$F\,(x_q) \leqslant q, \quad F\,(x_q + 0) \geqslant q. \tag{50}$$

Задачи

288. *Докажите, что*

$$\mu_k = M(\xi - M\xi)^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \cdot C_k^i \alpha_i \alpha_1^{k-i}.$$

289. *Найти дисперсию случайной величины, распределенной по закону Пуассона.*

290. *Найти* $\alpha_3 = M\xi^3$ *для случайной величины, имеющей биномиальное распределение с параметром* p.

291. *Найти моду и медиану распределения Коши.*

В задачах **292—303** требуется найти моду, медиану и дисперсию случайных величин, заданных с помощью плотности $f_\xi(x)$ или функции распределения $F_\xi(x)$ (или указать, что они не существуют).

292. $f_\xi(x) = \begin{cases} 1/3 & \textit{при} \quad x \in [1;\, 4], \\ 0 & \textit{при} \quad x \notin [1;\, 4]. \end{cases}$

293. $f_\xi(x) = \begin{cases} cx^3 & \textit{при} \quad x \in [0;\, 1], \\ 0 & \textit{при} \quad x \notin [0;\, 1]. \end{cases}$

294. $F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \leqslant 0, \\ x^2 & \textit{при} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \textit{при} \quad 1 < x. \end{cases}$

295. $f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \leqslant 0, \\ e^{-x} & \textit{при} \quad x > 0. \end{cases}$

296. $f_\xi(x) = A\exp\left\{-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right\}$, *где* $x \geqslant 0,\ \sigma = const.$

297. $f_\xi(x) = \dfrac{a}{2}\exp\left\{-a|x-b|\right\}$, *где* $a > 0$.

298. $F_\xi(x) = c + b\cdot\operatorname{arctg} x$, *где* $x \in \mathbb{R}$.

299. $F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \leqslant -a \\ 1/2 + (1/\pi)\arcsin(x/a) & \textit{при} \quad -a < x \leqslant a \\ 1 & \textit{при} \quad a < x. \end{cases}$

300. $f_\xi(x) = A\exp\left\{-\dfrac{x^m}{x_0}\right\}$, *где* $x \geqslant 0,\ x_0 = const.$

301.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4h^3}{\sqrt{\pi}}x^2e^{-x^2h^2} & \textit{при} \quad x > 0, \\ 0 & \textit{при} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

302. $f_\xi(x) = \dfrac{3x^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\dfrac{(x^3-a)^2}{2\sigma^2}\right\}.$

303. $f_\xi(x) = \dfrac{A}{e^x + e^{-x}}$, *где* $x \in \mathbb{R}$.

304. *Найти коэффициенты асимметрии и эксцесса равномерного распределения* $R[a;\, b]$.

305. *Докажите рекуррентную формулу для моментов показательного распределения* E_λ:

$$\mu_{k+1} = (-1)^{k+1}(M\xi)^{k+1} + \frac{k+1}{\lambda}\mu_k.$$

306. *Найдите коэффициенты асимметрии и эксцесса показательного распределения* E_λ.

307. *Найти коэффициент асимметрии случайной величины, распределенной по закону Пуассона.*

308. *Найдите квантиль порядка 0,75 распределения Коши с параметром* a.

309. *Найдите отношение квантилей порядков 0,8 и 0,2 случайной величины, имеющей равномерное распределение* $R[0; b]$.

310. *Случайная величина* ξ *распределена нормально с* $M\xi = 100$. *Известно, что* $x_{0,05} = 90$. *Найти* σ.

7.3. Математические ожидания и дисперсии некоторых важных распределений

При решении задач этого подпараграфа удобно пользоваться таблицей 7 Приложения.

Задачи

311. *Производят 5 выстрелов по мишени. Вероятность попадания при одном выстреле* $p = 0,4$. *Найти математическое ожидание и дисперсию числа промахов.*

312. *Число вызовов* ξ, *поступающих оператору в течение минуты, имеет пуассоновское распределение с параметром* $\lambda = 3$. *Найдите* $M\xi$, $D\xi$.

313. *Если при наборе существует вероятность* $p = 0,00001$ *того, что любая буква будет набрана неправильно, и случайная величина* ξ *равна числу опечаток в книге, имеющей 400000 печатных знаков, то каково* $M\xi$?

314. *Вероятность нарушения герметичности упаковки при перевозке равна 0,001, и случайная величина* ξ *равна числу негерметичных упаковок среди 1000 перевезенных. Найдите* $M\xi$, $D\xi$.

315. *В условиях предыдущей задачи упаковки проверяют по очереди. Случайная величина* ξ *равна числу проверенных упаковок до первой встретившейся негерметичной. Найдите* $M\xi$, $D\xi$.

316. *Если в предыдущих условиях случайная величина* ξ *равна числу проверенных упаковок до третьей встретившейся негерметичной, найдите среднее значение* ξ *и дисперсию* ξ.

317. *В компьютерной игре для прохождения на следующий уровень необходимо сбить* n *мишеней. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна* p. *Случайная величина* ξ *— число произведенных выстрелов. Найдите* $M\xi$, $D\xi$.

318. *В урне находится 5 белых и 10 красных шаров. Двое поочередно вынимают (с возвращением) шары до появления белого шара. Случайная величина* ξ *— число вынутых шаров. Найдите* $M\xi$, $D\xi$.

319. *В условиях предыдущей задачи шары вынимают без возвращения. Найдите* $M\xi$, $D\xi$.

320. *Число посетителей сайта представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону с параметрами* $a = 50, \sigma = 5$ *Каково среднее число посетителей?*

321. *Средняя продолжительность междугородного разговора равна 3 минутам. Если считать, что продолжительность междугородного разговора имеет приближенно показательное распределение, какова вероятность того, что очередной разговор будет продолжаться более 2 минут?*

8. Линейная зависимость между случайными величинами

8.1. Линейная зависимость двух величин

Ковариацией двумерной случайной величины (ξ, η) называется центральный смешанный момент второго порядка

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = M\left[(\xi - M\xi) \cdot (\eta - M\eta)\right] = M(\xi \cdot \eta) - M\xi \cdot M\eta. \qquad (51)$$

Коэффициентом корреляции между случайными величинами ξ, η называется число

$$\rho_{\xi,\eta} = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \frac{M[(\xi - M\xi) \cdot (\eta - M\eta)]}{\sqrt{D(\xi)D(\eta)}}. \qquad (52)$$

Свойства коэффициента корреляции.
1. $|\rho| \leqslant 1$.
2. Если ξ, η независимы, то $\rho_{\xi,\eta} = 0$.
3. $\rho_{\xi,\eta} = \pm 1 \Longleftrightarrow \xi$, η линейно зависимы[10].

Из свойств 1—3 следует, что коэффициент корреляции есть мера линейной зависимости между ξ, η.

Уравнением линейной регрессии η на ξ называется линейное уравнение $\hat{\eta} = a\xi + b$, параметры которого минимизируют остаточную дисперсию $M(\eta - \hat{\eta})^2$:

$$\hat{\eta} - M\eta = \rho_{\xi,\eta}\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(\xi - M\xi). \tag{53}$$

Остаточная дисперсия равна $S^2_{\text{ост}} = \sigma^2_\eta(1 - \rho^2_{\xi,\eta})$.

Задачи

В задачах **322—324** заданы совместные законы распределения двумерных случайных величин (ξ, η).

Требуется найти:

а) коэффициент корреляции $\rho_{\xi,\eta}$;

б) уравнение линейной регрессии η на ξ и остаточную дисперсию;

в) уравнение линейной регрессии ξ на η и остаточную дисперсию.

322.

$\xi \diagdown \eta$	1	2	3
-2	0	0,2	0
0	0,1	0,2	0,1
2	0	0,1	0,1
4	0	0,1	0,1

323.

$\xi \diagdown \eta$	0	1	2
-1	0,2	0,1	0
0	0	0,1	0,1
2	0	0,3	0,2

324.

$\xi \diagdown \eta$	0	1	2
-1	0,3	0	0
0	0	0,3	0
1	0	0,4	0

325. *Найти коэффициент корреляции между числом выпадений «единиц» и числом выпадений «шестерок» при одном бросании игральной кости.*

326. *Найти коэффициент корреляции между числом выпадений «единиц» и числом выпадений «шестерок» при n независимых бросаниях игральной кости.*

327. *Найти коэффициент корреляции между случайными величинами ξ и $7 - 4\xi$; $5 - 2\xi$ и $5 + 3\xi$.*

328. *Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы, одинаково распределены и*

[10] Случайные величины ξ, η линейно зависимы, если существуют такие $a \neq 0$ и b, что $\xi = a\eta + b$ с вероятностью 1.

имеют конечную дисперсию. Найти коэффициент корреляции между случайными величинами $\xi_1 + \xi_2$ *и* $\xi_2 + \xi_3$.

329. *Случайные величины* $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ *независимы, одинаково распределены и имеют конечную дисперсию. Найти коэффициент корреляции между случайными величинами* $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4$ *и* $\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5$.

330. *Случайные величины* ξ *и* η *независимы и одинаково распределены с математическим ожиданием* a *и дисперсией* σ^2. *Найти коэффициент корреляции случайных величин* $2\xi + 3\eta$, $2\xi - 3\eta$.

331. *Может ли двумерная случайная величина* (ξ, η) *иметь следующие характеристики:* $D\xi = 4$, $D\eta = 6$, $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 5$?

332. *Двумерная случайная величина* (ξ, η) *имеет характеристики:*

$$M\xi = 0, \quad M\eta = 2, \quad D\xi = 2, \quad D\eta = 1, \quad \rho = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $2\xi - 3\eta$.

333. *Пусть* ξ *— случайная величина с симметричным относительно нуля распределением и конечной дисперсией. Найти коэффициент корреляции случайных величин* ξ *и* $|\xi|$.

8.2. Числовые характеристики многомерной случайной величины

Уравнение множественной линейной регрессии.

Ковариационной матрицей случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называется матрица K размерности $n \times n$ с конечными элементами $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)$:

$$K = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) & \ldots & \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_n) \\ \operatorname{cov}(\xi_2, \xi_1) & \sigma_2^2 & \ldots & \operatorname{cov}(\xi_2, \xi_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \operatorname{cov}(\xi_n, \xi_1) & \operatorname{cov}(\xi_n, \xi_2) & \ldots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}. \tag{54}$$

Наряду с ковариационной матрицей рассматривают и *корреляционную матрицу* R, составленную из коэффициентов корреляции $\rho_{ij} = \rho_{\xi_i, \xi_j}$:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \ldots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{22} & \ldots & \rho_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \rho_{n3} & \ldots & 1 \end{pmatrix}. \tag{55}$$

Корреляционная матрица R симметрична, (то есть $\rho_{ij} = \rho_{ji}$).

Рассмотрим случайные величины $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ с математическими ожиданиями

$$M\xi_0 = a_0,\ M\xi_i = a_i,\ a_i < \infty, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

дисперсиями

$$D\xi_0 = \sigma_0^2,\ D\xi_i = \sigma_i^2, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

и корреляционной матрицей R.

Уравнением линейной регрессии ξ_0 *на* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называется уравнение

$$\widehat{\xi_0} = b_0 + b_1\xi_1 + \cdots + b_n\xi_n,$$

где b_o, b_1, ..., b_n — параметры, минимизирующие остаточную дисперсию

$$M(\xi_0 - \widehat{\xi_0})^2.$$

Центрированная форма множественной линейной регрессии задается уравнением

$$\widehat{\xi_0} = a_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i(\xi_i - a_i), \tag{56}$$

где

$$b_i = -\frac{R_{0i}}{R_{00}} \cdot \frac{\sigma_0}{\sigma_i} = (-1)^{i+1}\frac{|R_{0i}|}{|R_{00}|} \cdot \frac{\sigma_0}{\sigma_i}. \tag{57}$$

Здесь и далее через R_{ij} обозначено алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы R, $|R_{ij}|$ — определитель R_{ij}.

Остаточная дисперсия $S^2_{\text{ост}} = M(\xi_0 - \widehat{\xi_0})^2$ равна

$$S^2_{\text{ост}} = \sigma_0^2 \cdot \frac{|R|}{R_{00}}. \tag{58}$$

Виды коэффициентов корреляции.

Частный коэффициент корреляции используется как мера линейной зависимости между двумя какими-либо случайными величинами из ξ_1, ..., ξ_n после вычитания эффекта, обусловленного взаимодействием этих двух величин с некоторым непустым подмножеством из оставшихся $n-2$ случайных величин.

Пусть l и h — две какие-либо величины из набора ξ_1, ..., ξ_n и c — некоторое непустое подмножество из оставшихся $n-2$ величин. Определим величины $\tau_1 = l - \mu_{l.c}$ и $\tau_2 = h - \mu_{h.c}$. Здесь $\mu_{l.c} = \overline{l(c)}$, $\mu_{h.c} = \overline{h(c)}$ — соответственно условные ожидаемые значения l и h при данном c. Частный коэффициент корреляции между τ_1 и τ_2 при фиксированных значениях переменных из c есть

$$\rho_{lh.c} = \rho_{\tau_1\tau_2}, \tag{59}$$

где $\rho_{\tau_1\tau_2}$ — парный коэффициент корреляции между τ_1 и τ_2. Если в c содержится k переменных, то соответствующий частный коэффициент корреляции называется коэффициентом k-го порядка.

Частные коэффициенты корреляции могут быть вычислены на основе рекуррентных соотношений следующим образом:

$$\rho_{lh.d} = \frac{\rho_{lh} - \rho_{ld} \cdot \rho_{hd}}{\sqrt{(1-\rho^2_{ld})(1-\rho^2_{hd})}}, \tag{60}$$

где все величины в правой части — парные коэффициенты корреляции. Далее, последовательно применяя рекуррентную формулу

$$\rho_{lh.cd} = \frac{\rho_{lh.c} - \rho_{ld.c} \cdot \rho_{hd.c}}{\sqrt{(1-\rho^2_{ld.c})(1-\rho^2_{hd.c})}}, \tag{61}$$

где c — любое подмножество оставшихся переменных, можно получить частные коэффициенты корреляции любого порядка.

При рассмотрении линейной регрессии ξ_0 на ξ_1, ..., ξ_n особое значение имеет *частный коэффициент корреляции между ξ_0 и ξ_i за вычетом влияния остальных $n-1$ величин из набора ξ_1, ..., ξ_n, исключая ξ_i*. Он равен

$$\rho_{0i.1,\dots,n} = \frac{-R_{0i}}{\sqrt{R_{00}R_{ii}}} = \frac{(-1)^{i+1}|R_{0i}|}{\sqrt{|R_{00}||R_{ii}|}}. \tag{62}$$

Множественным коэффициентом корреляции $\rho_{\xi_0(\xi_1,\ldots,\xi_n)}$ называется парный коэффициент корреляции между ξ_0 и линейной регрессией ξ_0 на $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Этот коэффициент является мерой линейной зависимости между ξ_0 и набором переменных $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, причем $0 \leqslant \rho_{\xi_0(\xi_1,\ldots,\xi_n)} \leqslant 1$. Нулевое значение множественного коэффициента корреляции указывает на отсутствие линейной зависимости, а значение 1 — на то, что переменная ξ_0 точно равна линейной комбинации переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Множественный коэффициент корреляции, как и парный, инвариантен относительно невырожденных линейных преобразований исходных переменных. Множественный коэффициент корреляции вычисляется с помощью корреляционной матрицы следующим образом:

$$\rho_{0(1,\ldots,n)} = \sqrt{1 - \frac{|R|}{|R_{00}|}}. \qquad (63)$$

Задачи

334. *Может ли матрица K быть ковариационной матрицей?*

$$K = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

335. *По заданной ковариационной матрице K найти корреляционную матрицу R.*

$$K = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 10 \\ 8 & 16 & 18 \\ 10 & 18 & 25 \end{pmatrix}.$$

336. *По заданной корреляционной матрице R и известным дисперсиям случайных величин $D\xi_1 = 4,\ D\xi_2 = 9,\ D\xi_3 = 16$ найти ковариационную матрицу K.*

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -0,4 & 0,9 \\ -0,4 & 1 & -0,5 \\ 0,9 & -0,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

В задачах **337—338** для случайных величин $\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2$ известна корреляционная матрица R, а также $M\xi_0, M\xi_1,\ M\xi_2,\ D\xi_0,\ D\xi_1,\ D\xi_2$.

Найти: а) уравнение линейной регрессии ξ_0 на ξ_1, ξ_2;
б) остаточную дисперсию.

337.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0,2 & 0,6 \\ 0,2 & 1 & 0,4 \\ 0,6 & 0,4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M\xi_i = i, \quad D\xi_i = i + 1, \quad i = 0,\ 1,\ 2.$$

338.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -0,1 & 0,5 \\ -0,1 & 1 & 0,7 \\ 0,5 & 0,7 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M\xi_i = 0, \quad D\xi_i = 1, \quad i = 0,\ 1,\ 2.$$

В задачах **339—340** для случайных величин $\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2$ известна корреляционная матрица R, а также $M\xi_0,\ M\xi_1,\ M\xi_2,\ D\xi_0,\ D\xi_1,\ D\xi_2$.

Найти: а) уравнение линейной регрессии ξ_2 на $\xi_0,\ \xi_1$;

б) остаточную дисперсию.

339.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -0,4 & 0,9 \\ -0,4 & 1 & -0,5 \\ 0,9 & -0,5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M\xi_0 = 1,\ M\xi_1 = M\xi_2 = 2, \quad D\xi_0 = 4,\ D\xi_1 = D\xi_2 = 1.$$

340.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,8 \\ 0,5 & 1 & 0,7 \\ 0,8 & 0,7 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M\xi_0 = 0,\ M\xi_1 = 1,\ M\xi_2 = 3, \quad D\xi_0 = 1,\ D\xi_1 = 4,\ D\xi_2 = 9.$$

341. *По заданной ковариационной матрице K найти уравнение линейной регрессии ξ_0 на $\xi_1,\ \xi_2$ и остаточную дисперсию, если*

$$K = \begin{pmatrix} 4 & -2,4 & 7,2 \\ -2,4 & 9 & -6 \\ 7,2 & -6 & 16 \end{pmatrix};$$

$$M\xi_0 = 1,\ M\xi_1 = 2,\ M\xi_2 = 2.$$

342. *По заданной ковариационной матрице K найти все частные коэффициенты корреляции.*

$$K = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 10 \\ 8 & 16 & 18 \\ 10 & 18 & 25 \end{pmatrix}.$$

В задачах **343—344** для случайных величин $\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2$ известна корреляционная матрица R.

Найти: а) частный коэффициент корреляции $\rho_{01.2}$;

б) множественнный коэффициент корреляции $\rho_{0(1,\,2)}$.

343.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0,2 & 0,6 \\ 0,2 & 1 & 0,4 \\ 0,6 & 0,4 & 1 \end{pmatrix}.$$

344.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -0,1 & 0,5 \\ -0,1 & 1 & 0,7 \\ 0,5 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}.$$

В задачах **345—346** известна корреляционная матрица R случайных величин $\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2$.

Найти: а) частный коэффициент корреляции $\rho_{21.0}$;

б) множественнные коэффициенты корреляции $\rho_{0(1,\,2)}$ и $\rho_{2(1,\,0)}$.

345.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -0,4 & 0,9 \\ -0,4 & 1 & -0,5 \\ 0,9 & -0,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

346.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,8 \\ 0,5 & 1 & 0,7 \\ 0,8 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Условные распределения

9.1. Условные законы распределения

Условная функция распределения определяется как

$$F_{\eta/\xi=x}(y) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dy}{f_\xi(x)}, \tag{64}$$

где $f_\xi(x)$ — частная плотность распределения, причем

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dy$$

Условная плотность распределения

$$f_{\eta/\xi=x}(y) = \frac{\partial F_{\eta/\xi=x}(y)}{\partial y} = \frac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_\xi(x)}.$$

Условное математическое ожидание

$$M(\eta/x) = M(\eta/\xi=x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y\,dF(y/x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y f_{\eta/\xi=x}(y)\,dy. \tag{65}$$

Для дискретной случайной величины условное математическое ожидание равно

$$M(\eta/x) = \sum_i y_i\,\mathrm{P}(\eta = y_i/\xi = x). \tag{66}$$

Задачи

В задачах **347—350** дана совместная плотность распределения $f_{\xi,\eta}(x,\,y)$ двумерной случайной величины $(\xi,\,\eta)$. Найти обе условные плотности $f_{\eta/\xi=x}(y)$ и $f_{\xi/\eta=y}(x)$.

347. $f_{\xi,\eta}(x,\, y) = \dfrac{1}{\pi^2} \cdot \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2}.$

348. $f_{\xi,\eta}(x,\, y) = 4xye^{-(x^2+y^2)},\ x > 0,\ y > 0.$

349. $f_{\xi,\eta}(x,\, y) = \begin{cases} 1/3 & \textit{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 1; \\ 0 & — \quad \textit{иначе}. \end{cases}$

350. $f_{\xi,\eta}(x,\, y) = \begin{cases} \cos x \cdot \cos y & \textit{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2; \\ 0 & — \quad \textit{иначе}. \end{cases}$

В задачах **351—354** найти условные плотности $f_{\eta/\xi=x}(y)$ и $f_{\xi/\eta=y}(x)$.

351. *Двумерная случайная величина* $(\xi,\, \eta)$ *представляет из себя координаты точки, случайно выбранной в квадрате* $[0,\, 1] \times [0,\, 1]$.

352. *Точку* $(\xi,\, \eta)$ *случайно выбирают в круге радиуса* R.

353. *Двумерная случайная величина* $(\xi,\, \eta)$ *равномерно распределена в эллипсе* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

354. *Двумерная случайная величина* $(\xi,\, \eta)$ *равномерно распределена в треугольнике* $\mathcal{D} = \{(x,\, y)\colon x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 2.\}$

355. *Случайные величины* ξ *и* η *независимы и одинаково распределены:* $\mathrm{P}(\xi = m) = \mathrm{P}(\eta = m) = (1-p)^{m-1}p,\ m = 1,\, 2,\, \ldots$

Найти: *а)* $\mathrm{P}(\xi = \eta)$; *б)* $\mathrm{P}(\xi > \eta)$;
в) $\mathrm{P}(\xi < \eta)$; *г)* $\mathrm{P}(\xi = k/\xi > \eta)$;
д) $\mathrm{P}(\xi = k/\xi < \eta)$; *е)* $\mathrm{P}(\xi = k/\xi = \eta)$.

356. *Случайная величина* ξ *имеет геометрическое распределение. Найти* $\mathrm{P}(\xi = n + k/\xi \geqslant k),\ k,\, n = 0,\, 1,\, \ldots$

357. *Случайные величины* ξ *и* η *независимы и имеют одно и тоже геометрическое распределение.*

Найти $\mathrm{P}(\xi = k/\xi + \eta = n),\ k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n.$

358. *Случайные величины* ξ *и* η *независимы и имеют распределения Пуассона с параметрами* λ_1, λ_2.

Найти $\mathrm{P}(\xi = k/\xi + \eta = n),\ k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n.$

9.2. Регрессия

Регрессией η *на* ξ называется случайная величина $r\,(\xi)$, равная условному математическому ожиданию случайной величины η относительно ξ

$$r\,(\xi) = M(\eta/\xi). \tag{67}$$

Линия регрессии — кривая $y = r\,(x)$, где $r\,(x) = M(\eta/\xi = x)$.

Основное свойство регрессии.
Регрессия $r\,(\xi)$ минимизирует среднеквадратичное отклонение:

$$\min_g M(\eta - g(\xi))^2 = M(\eta - r(\xi))^2. \tag{68}$$

Корреляционным отношением $\theta^2_{\eta,\,\xi}$ называется выражение

$$\theta^2_{\eta,\,\xi} = \frac{M(r\,(\xi) - M\eta)^2}{\sigma^2_\eta}. \tag{69}$$

Свойства корреляционного отношения.
1. $0 \leqslant \theta^2_{\eta,\xi} \leqslant 1$.
2. $\theta^2_{\eta,\xi} \geqslant \rho^2$.
3. $\theta^2_{\eta,\xi} = \rho^2 \Longleftrightarrow r(\xi) = \hat{a}\xi + \hat{b}$.
4. $\theta^2_{\eta,\xi} = 0 \Longleftrightarrow r(\xi) = b = const$.

Задачи

В задачах **359—361** заданы совместные законы распределения двумерных случайных величин $(\xi,\, \eta)$.

Требуется найти: а) регрессии η на ξ и ξ на η;
б) корреляционные отношения η на ξ и ξ на η.

359.

$\xi \setminus \eta$	1	2	3
-2	0	0,2	0
0	0,1	0,2	0,1
2	0	0,1	0,1
4	0	0,1	0,1

360.

$\xi \setminus \eta$	0	1	2
-1	0,2	0,1	0
0	0	0,1	0,1
2	0	0,3	0,2

361.

$\xi \setminus \eta$	0	1	2
-1	0,3	0	0
0	0	0,3	0
1	0	0,4	0

362. *Может ли двумерная случайная величина* $(\xi,\, \eta)$ *иметь следующие характеристики:*

$$D\xi = 4, \quad D\eta = 16, \quad \operatorname{cov}(\xi,\, \eta) = 4, \quad \theta^2_{\xi,\eta} = 0,2?$$

10. Закон больших чисел, центральная предельная теорема

10.1. Неравенства и закон больших чисел

Неравенство Маркова. Для любой случайной величины ξ и для любых $k \geqslant 0, \varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}(|\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{M|\xi|^k}{\varepsilon^k}.$$

Неравенство Чебышева. Для любой случайной величины ξ и для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}(|\xi - M\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Последовательность $\{\xi_n\}$ сходится *по вероятности* к ξ $\quad(\xi_n \xrightarrow{p} \xi)$, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

Пусть $\varphi(x)$ — непрерывная функция. Тогда, если последовательность $\{\xi_n\}$ сходится по вероятности к ξ, то и последовательность $\{\varphi(\xi_n)\}$ сходится по вероятности к $\varphi(\xi)$:

$$\xi_n \xrightarrow{p} \xi \Rightarrow \varphi(\xi_n) \xrightarrow{p} \varphi(\xi).$$

Закон больших чисел. Говорят, что для последовательности случайных величин $\{\xi_n\}$ с математическими ожиданиями $M\xi_i = a_i,\ a_i < \infty$ и дисперсиями $D\xi_i = \sigma_i^2, \quad i = 1, 2, \ldots$ выполняется закон больших чисел, если

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i}{n} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n} \xrightarrow{p} 0.$$

Согласно определению сходимости по вероятности, это означает, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Закон больших чисел в форме Чебышева. Если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, дисперсии которых ограничены в совокупности

$$\sigma_i^2 \leqslant C = const, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

то для нее выполняется закон больших чисел:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i}{n} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n} \xrightarrow{p} 0.$$

Закон больших чисел в форме Бернулли. Пусть осуществляется серия из n независимых опытов, проводимых по схеме Бернулли с параметром p. Пусть m — число успехов, $\frac{m}{n}$ — частота успехов в данной серии испытаний. Тогда

$$\frac{m}{n} \xrightarrow{p} p.$$

Закон больших чисел в форме Пуассона. Пусть осуществляется серия из n независимых опытов, причем вероятность успеха в k-м опыте равна p_k. Пусть m — число успехов, $\frac{m}{n}$ — частота успехов в данной серии испытаний. Тогда

$$\frac{m}{n} - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k}{n} \xrightarrow{p} 0.$$

Закон больших чисел в форме Хинчина. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $M\xi_n = a$. Тогда

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k}{n} \xrightarrow{p} a.$$

Закон больших чисел в форме Маркова. Пусть последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ такова, что

$$\frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Тогда

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k}{n} - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}M\xi_k}{n} \xrightarrow{p} 0.$$

Задачи

363. *Пусть ξ такова, что $p(0 < \xi < 1) = 1$. Доказать, что*

$$D\xi < M\xi.$$

364. *Пусть ξ, η независимы и имеют конечные дисперсии. Доказать, что*

$$D\xi\eta \geqslant D\xi \cdot D\eta.$$

365. *Пусть ξ, η имеют конечные дисперсии. Доказать, что*

$$(\sqrt{D\xi} - \sqrt{D\eta})^2 \leqslant D(\xi + \eta) \leqslant (\sqrt{D\xi} + \sqrt{D\eta})^2.$$

366. *Среднее потребление воды за неделю равно 100 кубометров. Оценить с помощью неравенства Маркова вероятность того, что среднее потребление воды за неделю превзойдет 300 кубометров.*

367. *Оценить эту же вероятность с помощью неравенства Маркова, если известно, что среднее квадратичное отклонение равно 50 кубометрам.*

368. *В уловиях предыдущей задачи оценить эту же вероятность с помощью неравенства Чебышева.*

369. *Оценить вероятность того, что частота появления герба при ста бросаниях монеты отклонится от вероятности не более, чем на 0,1; сравнить с вероятностью, полученной с помощью применения интегральной теоремы Муавра-Лапласа.*

В задачах **370–375** исследовать последовательность независимых случайных величин $\{\xi_n\}$, заданных законами распределения на сходимость по вероятности.

370.

ξ_n	1	0
p	$1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$

371.

ξ_n	0	1
p	$\frac{1}{n^\alpha}$	$1 - \frac{1}{n^\alpha}$

372.

ξ_n	$-2\sqrt{n}$	0	$3\sqrt{n}$
p	$\frac{3}{n}$	$1 - \frac{5}{n}$	$\frac{2}{n}$

373.

ξ_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
p	$\frac{1}{2n^2}$	$1 - \frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

374.

ξ_n	$-\sqrt{ln\, n}$	$\sqrt{ln\, n}$
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

375.

ξ_n	e^n	0
p	$\frac{1}{n}$	$1 - \frac{1}{n}$

376. *Пусть* $\xi_n \xrightarrow{p} a$, $\eta_n \xrightarrow{p} b$. *Доказать, что*

$$\xi_n + \eta_n \xrightarrow{p} a + b.$$

В задачах **377–384** исследовать, подчиняется ли закону больших чисел последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, заданных законами распределения.

377.

ξ_n	0	1
p	$1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

378.

ξ_n	0	1
p	$\frac{1}{n^3}$	$1 - \frac{1}{n^3}$

379.

ξ_n	$-\sqrt{n}$	0	$\sqrt{n}$
p	$\frac{1}{n}$	$1 - \frac{2}{n}$	$\frac{1}{n}$

380.

ξ_n	$-3n$	0	$2n$
p	$\frac{1}{2n^2}$	$1 - \frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

381.

ξ_n	$-\sqrt{ln\, n}$	$\sqrt{ln\, n}$
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

382.

ξ_n	0	2^n
p	$1 - \frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

383.

ξ_n	0	2^{100}
p	$\frac{1}{n}$	$1 - \frac{1}{n}$

384.

ξ_n	100	1000
p	$1/2$	$1/2$

10.2. Центральная предельная теорема

Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин. Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы, одинаково распределены и имеют конечные математические ожидания и дисперсии $M\xi_i = a$, $D\xi_i = \sigma^2$, то при $n \to \infty$

$$P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \to \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ – функция стандартного нормального распределения.

Задачи

385. *Дисперсия каждой из 4500 независимых, одинаково распределенных случайных величин равна 5. Найти вероятность того, что среднее арифметическое этих случайных величин отклонится от своего математического ожидания не более чем на 0,04.*

386. *Случайная величина* η *является средней арифметической 3200 независимых и одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием, равным 3, и дисперсией, равной 2. Найти вероятность того, что* η *примет значение в промежутке (2,95; 3,075).*

387. *В результате медицинского осмотра 900 абитуриентов установлено, что средний вес абитуриентов на 1,2 кг больше веса абитуриентов за один из предшествующих периодов. Можно ли это отклонение объяснить случайностью, если среднее квадратическое отклонение веса абитуриентов равно 8 кг?*

388. *Случайная величина* η *является средней арифметической независимых и одинаково распределенных случайных величин, дисперсия каждой из которых равна 5. Сколько нужно взять таких величин, чтобы случайная величина* η *с вероятностью, не меньшей 0,9973, имела отклонение от своего математического ожидания, не превосходящее 0,01?*

389. *Случайная величина* η *является средней арифметической независимых и одинаково распределенных случайных величин, среднее квадратическое отклонение каждой из которых равно 2. Какое максимальное отклонение величины* η *от ее математического ожидания можно ожидать с вероятностью, не меньшей 0,9544?*

390. *Найти приближенное значение для вероятности того, что число успехов при* $n = 100$ *испытаниях Бернулли с вероятностью успеха* $= 0,4$ *лежит в пределах а) 35 и 45; б) 38 и 53.*

391. *При каких значениях* n *вероятность того, что частота успеха находится в пределах* $[0,35, 0,45]$, *будет больше 0,998?*

392. *В условиях предыдущей задачи каково должно быть число испытаний* n, *чтобы с вероятностью* $1-\alpha$ *частота успеха отличалась от вероятности успеха не более, чем на* $\varepsilon > 0$*? Решить задачу при* $\alpha = 0,05, \varepsilon = 0,01$.

393. *Цех завода производит шарики для подшипников. За смену производится* $n = 20000$ *шариков. Вероятность того, что один шарик окажется дефектным, равна 0,01. Причины дефектов для отдельных шариков независимы. Продукция проходит контроль сразу после изготовления, причем дефектные шарики бракуются и ссыпаются в бункер, а небракованные отправляются в цех сборки. Определить, на какое количество шариков должен быть рассчитан бункер, чтобы с вероятностью 0,99 после смены он не оказался переполненным.*

394. *Условия предыдущей задачи изменены в том отношении, что причины брака являются в значительной степени общими для различных шариков, так что вероятность одному шарику, изготовленному в течение данной смены, быть дефектным, при условии, что другой шарик (любой) уже был дефектным, равна 0,08. Считаем, что известно, что закон распределения суммарного числа дефектных шариков является приближенно нормальным.*

11. Случайная выборка

11.1. Основные понятия

Генеральная совокупность рассматривается как случайная величина ξ, а *выборка*$X = (X_1, \dots, X_n)$ — как n-мерная случайная величина $(\xi_1, \dots, \xi_n)$, компоненты которой независимы и одинаково распределены (так же, как ξ).

Статистическая модель $\langle \mathcal{F} \rangle$ — это класс допустимых функций распределения исходной случайной величины. Если функции распределения из класса $\langle \mathcal{F} \rangle$ заданы с точностью до значений параметра θ с множеством возможных значений Θ, то такая модель обозначается $\langle \mathcal{F}_\theta \rangle$ и называется *параметрической*.

Если модель $\langle \mathcal{F}_\theta \rangle$ такова, что можно дифференцировать по θ интегралы на выборочном пространстве $\mathcal{X}$, меняя порядок дифференцирования и интегрирования, то она называется *регулярной*. Одно из наиболее существенных условий регулярности — то, что выборочное пространство $\mathcal{X}$ не должно зависеть от параметра θ.

Вариационный ряд конкретной реализации выборки $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — последовательность упорядоченных по возрастанию значений $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ $(x_1^* \leqslant x_2^* \leqslant \ldots \leqslant x_n^*)$. Если через X_k^* обозначить случайную величину, которая для каждой реализации x выборки X принимает значение $x_k^*, k = 1, \ldots, n$, то X_k^* называется *k-ой порядковой статистикой* выборки, а X_1^* и X_n^* – *экстремальными значениями* выборки. Порядковые статистики удовлетворяют неравенствам $X_1^* \leqslant X_2^* \leqslant \ldots \leqslant X_n^*$. Последовательность $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*$ называют *вариационным рядом выборки*.

Эмпирической функцией распределения $F_n(x)$, соответствующей выборке X, называется случайная функция от x, вычисляемая по формуле

$$F_n(x) = \frac{\nu_n}{n},$$

где ν_n — число элементов выборки $X = (X_1, \ldots, X_n)$, значения которых меньше x.

Задачи

395. *Какая статистическая модель применима для выборки, полученной следующим образом: 10 раз измерялось число попаданий в цель при трех независимых выстрелах, произведенных одним и тем же стрелком?*

396. *Какая статистическая модель применима для выборки, полученной следующим образом: 8 раз измерялось число черных шаров, вынутых за три вынимания с возвращением из урны, которая содержит два белых и несколько черных шаров?*

397. *Какая статистическая модель применима для выборки, полученной следующим образом: у 100 студенток первого курса измерен рост?*

398. *Какая статистическая модель применима для выборки, полученной измерением на 10 опытных делянках урожайности культуры, если известно, что урожайность культуры составляет 35 центнеров с гектара?*

399. *Какая статистическая модель применима для выборки, полученной измерением 100 раз времени ожидания автобуса?*

В задачах **400–403** по данной выборке $X = (X_1, \ldots, X_n)$ построить вариационный ряд, найти эмпирическую функцию распределения.

400. $X = (1, 1, 2, 1, 2, 4)$.

401. $X = (-1, 1, 2, 1, 2, 3, 4, 1)$.

402. $X = (1, 0, 0, 2, 2, 1)$.

403. $X = (5, 6, 1, 4, 5, 7, 3, 5, 5, 6)$.

404. *Дан статистический ряд величины X:*

X	0	2	4	6
n_i	3	8	10	2

Построить вариационный ряд.

405. *Можно ли восстановить по эмпирической функции распределения, приведенной на рис. 1, если $n = 60$ а) вариационный ряд, б) выборку?*

406. *Существует ли выборка $(X_1, \ldots, X_n)$ объёма 10 с графиком эмпирической функции распределения, изображённым на рис. 1? Какому условию должен удовлетворять объём выборки?*

407. *Пусть на рис. 1 представлен график эмпирической функции распределения выборки $(X_1, \ldots, X_n)$. Нарисуйте график эмпирической функции распределения выборки а) $(X_1 + 2, \ldots, X_n + 2)$; б) $(2X_1, \ldots, 2X_n)$.*

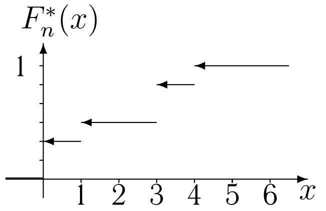


Рис. 1. Эмпирическая функция распределения

11.2. Группировка выборки. Графические характеристики

Метод группировки выборки объема n. Число интервалов k рекомендуется брать из условия $2^{k-1} \sim n$. Длина интервала $h = \frac{x_{max}-x_{min}}{k}$. Границы интервалов группировки: $x_0 = x_{min}$, $x_i = x_0 + hi$, $i = 1, ..., k$, далее подсчитываается, сколько элементов выборки попало в каждый интервал, и в группировочной таблице заполняется столбец "Численность n_i". Остальные столбцы рассчитываются по столбцу численностей. Они пригодятся при построении графических характеристик.

№		n_i	$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_i}{nh}$	$\sum_1^i \frac{n_j}{n}$
1	$[x_0 - x_1)$				
2	$[x_1 - x_2)$				
...	...				

Таблица 1. Таблица группировки

Гистограмма — это фигура, состоящая из прямоугольников, построенных на интервалах группировки как на основаниях, и имеющих площади $\frac{n_i}{n}$, для чего берут высоту прямоугольника равную $\frac{n_i}{nh}$. *Полигон* — это ломаная линия, проходящая через середины верхних границ прямоугольников гистограммы (соединяющая точки $(x_i^*; \frac{n_i}{nh}$, где x_i^* — середина i—го интервала). Полигон и гистограмма являются статистическими аналогами теоретической плотности. Для удобства при построении можно брать единицу масштаба, равную $\frac{1}{nh}$. *Кумулята* — это ломаная линия, соединяющая точки $(x_i; \sum\limits_1^{i-1} \frac{n_j}{n})$. Кумулята дает представление о графике функции распределения.

Задачи

408. *Произвести группировку выборки:*

$$20,2; 19,2; 16,9; 19,3; 17,1; 17,8; 16,6; 16,3; 15,2; 18,0; 16,8; 20,0; 17,7; 16,6;$$
$$19,0; 17,5; 17,8; 20,6; 17,2; 18,0; 17,1; 18,4; 17,4; 15,8; 19,4; 17,8; 19,8; 19,6;$$
$$16,3; 20,0; 17,4; 19,3; 19,3; 16,5; 18,8; 17,2; 18,7; 18,6; 19,2; 16,2; 18,2; 17,4.$$

409. *По выборке, данной в виде статистического ряда, постройте гистограмму, полигон и кумуляту.*

X	$0-6$	$6-12$	$12-18$	$18-24$
n_i	1	8	10	6

.

В задачах **410**, **411** постройте по выборке гистограмму и полигон, и по их виду подберите статистическую модель.

410.

№		n_i	$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_i}{nh}$	$\sum \frac{n_i}{n}$
1	$0,01-0,98$	260	$0,260$	$0,252$	$0,260$
2	$0,98-1,94$	340	$0,340$	$0,329$	$0,600$
3	$1,94-2,91$	192	$0,192$	$0,186$	$0,792$
4	$2,91-3,88$	101	$0,101$	$0,098$	$0,893$
5	$3,88-4,85$	63	$0,063$	$0,061$	$0,956$
6	$4,85-5,81$	20	$0,020$	$0,019$	$0,976$
7	$5,81-6,78$	16	$0,016$	$0,015$	$0,992$
8	$6,78-7,75$	3	$0,003$	$0,003$	$0,995$
9	$7,75-8,72$	4	$0,004$	$0,004$	$0,999$
10	$8,72-9,68$	0	$0,000$	$0,000$	$0,999$
11	$9,68-10,65$	1	$0,001$	$0,001$	$1,000$

411.

№		n_i	$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_i}{nh}$	$\sum \frac{n_i}{n}$
1	$0,00-0,09$	80	$0,080$	$0,007$	$0,080$
2	$0,09-0,18$	81	$0,081$	$0,007$	$0,161$
3	$0,18-0,27$	93	$0,093$	$0,008$	$0,254$
4	$0,27-0,36$	85	$0,085$	$0,008$	$0,339$
5	$0,36-0,45$	87	$0,087$	$0,008$	$0,426$
6	$0,45-0,54$	87	$0,087$	$0,008$	$0,513$
7	$0,54-0,63$	87	$0,087$	$0,008$	$0,600$
8	$0,63-0,72$	106	$0,106$	$0,010$	$0,706$
9	$0,72-0,81$	99	$0,099$	$0,009$	$0,805$
10	$0,81-0,90$	89	$0,089$	$0,008$	$0,894$
11	$0,90-0,99$	106	$0,106$	$0,010$	$1,000$

412. *По двумерной выборке найти выборочные распределения компонент, построить для каждой из них гистограмму и полигон, подобрать статистическую модель.*

$X \diagdown Y$	$[-0.9; 0)$	$[0; 0.9)$	$[0.9; 1.8)$	$[1.8; 2.7)$	$[2.7; 3.6)$	$[3.6; 4.5)$	$[4.5; 5.4]$
$[-1.53; -0.75)$	0	0	4	0	0	0	0
$[-0.75; 0.03)$	0	5	1	3	3	2	0
$[0.03; 0.81)$	0	2	6	7	6	0	1
$[0.81; 1.59)$	2	3	9	10	6	1	1
$[1.59; 2.37)$	0	0	4	5	4	4	1
$[2.37; 3.15)$	1	0	5	1	0	1	0
$[3.15; 3.93)$	0	0	0	0	1	1	0

413. *Могут ли графики (1) и (2) (рис. 2) являться гистограммами одной и той же выборки?*

414. *Приведите (если это возможно) примеры выборок, для которых а) приведенный на рис. 2 график (1) является гистограммой, а график (2) не является; б) график (1) не является гистограммой, а график (2) является гистограммой.*

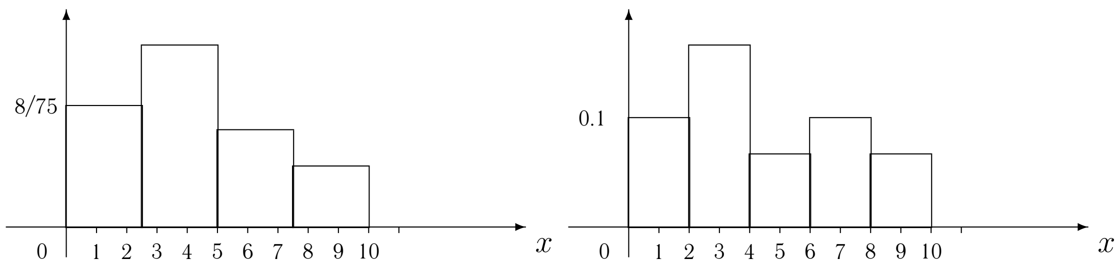


Рис. 2. Гистограммы (1) и (2)

12. Числовые характеристики выборки

12.1. Выборочные характеристики

Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ – выборка объема n из распределения F и $x = (x_1, \dots, x_n)$ — наблюдавшееся значение X. Выборочным начальным моментом порядка k называют случайную величину $a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$. Величину a_1 называют выборочным средним и обозначают символом $\overline{X}$: $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Выборочным центральным моментом порядка k называют случайную величину $m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k$, (см. табл. 2).

При $k = 2$ величину m_2 называют выборочной дисперсией и обозначают S^2.

Выборочную дисперсию часто рассчитывают по формуле

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum \left(X_i - \bar{X}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum X_i^2 - \bar{X}^2,$$

а исправленная выборочная дисперсия равна $\overline{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum \left(X_i - \bar{X}\right)^2$. Выборочное среднеквадратичное отклонение $S = \sqrt{S^2}$.

Теоретические характеристики	Выборочные характеристики
$a = M\xi$ математическое ожидание	$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ выборочное среднее
$\sigma^2 = D\xi$ дисперсия	$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ выборочная дисперсия
$\alpha_k = M\xi^k$ начальный k-й момент	$a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ начальный выборочный k-й момент
$\mu_k = M(\xi - M\xi)^k$ центральный k-й момент	$m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k$ центральный выборочный k-й момент
$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ коэффициент асимметрии	$\widehat{A} = \frac{m_3}{S^3}$ выборочный коэффициент асимметрии
$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ коэффициент эксцесса	$\widehat{E} = \frac{m_4}{S^4} - 3$ выборочный коэффициент эксцесса

Таблица 2. Соответствие выборочных и теоретических характеристик

Свойства выборочного среднего и выборочной дисперсии.

$$M\overline{X} = M\xi = \alpha_1;$$

$$D\overline{X} = \frac{1}{n}D\xi = \frac{\mu_2}{n} = \frac{\sigma^2}{n};$$

$$MS^2 = \frac{(n-1)\mu_2}{n} == \frac{(n-1)\sigma^2}{n};$$

$$DS^2 = \frac{(n-1)^2}{n^3}\left(\mu_4 - \frac{(n-3)}{n-1}\mu_2^2\right).$$

Выборочной модой называется значение m_o, чаще всего наблюдающееся:

$$n_i(m_0) = \max_i n_i.$$

Выборочной медианой называется значение m_e, равное среднему члену вариационного ряда:

$$m_e = x^*_{[\frac{n}{2}]+1}.$$

Выборочной квантилью порядка $q,\ 0 < q < 1$, называется значение x_q, равное члену вариационного ряда с номером $[nq]+1$.

Нахождение выборочных медианы, моды и квантилей по группированной выборке.

Медианным называется интервал, в котором накопленная сумма частот впервые достигает $\frac{1}{2}$.

*Выборочной группированной медианой*называется значение m_e^*:

$$m_e^* = x_e + \frac{n/2 - (n_1 + \ldots + n_{m_e-1})}{n_{m_e}} \cdot h,$$

где n — объем выборки, h — длина интервала группировки, x_e — левая граница медианного интервала, n_i — численность i-го интервала, n_{m_e} — численность медианного интервала.

Модальным называется интервал, имеющий наибольшую численность.

*Выборочной группированной модой*называется значение m_0^*:

$$m_0^* = x_0 + h \cdot \frac{n_{m_0} - n_{m_0-1}}{2n_{m_0} - n_{m_0-1} - n_{m_0+1}},$$

где x_0 — левая граница модального интервала, n_{m_0} — численность модального интервала, $n_{m_0-1},$, n_{m_0+1} — численности интервалов слева и справа от модального.

Квантильным порядка q интервалом называется интервал, в котором сумма накопленных частот впервые достигает значения q.

Выборочной группированной квантилью называется значение x_q^*:

$$x_q^* = x_{(q)} + h \cdot \frac{nq - (n_1 + \cdots + n_{(q)-1}}{n_{(q)}},$$

где $x_{(q)}$ — левая граница квантильного интервала, $n_{(q)}$ — численность квантильного интервала, $n_1, \cdots, n_{(q)-1}$ — численности интервалов, предшествующих квантильному.

Задачи

415. *Выборочная дисперсия, рассчитанная по выборке объема* 25, *равна* 9. *Найдите исправленную выборочную дисперсию.*

416. *По выборке* $\{1,1,2,1,2,4\}$ *найти выборочную дисперсию.*

417. *По выборке* $\{1,1,2,1,2,4\}$ *найти исправленную выборочную дисперсию.*

418. *По выборке* $\{-1,1,2,1,2,3,4,1\}$ *найти моду, выборочное среднеквадратичное отклонение.*

419. *По выборке* $\{-1,1,2,1,2,3,4,1\}$ *найти моду, выборочную дисперсию.*

420. *По выборке* $\{1,0,0,2,2,1\}$ *найти выборочные центральные моменты* 2-*го и* 3-*го порядков.*

421. *Дан статистический ряд величины* X:

X	0	2	4	6
n_i	3	8	10	2

.

Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

422. *Дан статистический ряд величины* X:

X	-1	0	1	2
n_i	5	7	4	1

найти выборочные начальные моменты 2-го и 3-го порядков.

423. *Дан группированный статистический ряд величины* X:

X	$0-6$	$6-12$	$12-18$	$18-24$
n_i	2	7	5	6

Найти приближенно моду и медиану.

424. *Найти* a_3 *по выборке* $(5, 6, 5, 6, 5, 5, 5, 6)$.

425. *По эмпирической функции распределения найдите выборочное среднее.*

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \leqslant 1, \\ 1/3 & \textit{при} \quad 1 < x \leqslant 2, \\ 1/2 & \textit{при} \quad 2 < x \leqslant 3, \\ 1 & \textit{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

12.2. Статистики

Статистикой можно назвать любую функцию элементов выборки $T(X) = T(X_1, \ldots, X_n)$, которая не зависит от параметров распределения.

Распределением хи-квадрат χ^2_n с n степенями свободы называется гамма-распределение с параметрами $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{n}{2}$.

Сумма квадратов n независимых случайных величин, распределенных по нормальному закону $N(0,1)$, имеет распределение χ^2_n.

Распределением Стьюдента T_n с n степенями свободы называется распределение случайной величины

$$t_n = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{\chi^2_n}{n}}} = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}{n}}},$$

где $\xi, \xi_i \in N(0,1)$ и независимы.

Распределением Фишера (Фишера–Снедекора, F-распределением) с n, m степенями свободы называется распределение случайной величины

$$f_{n,m} = \frac{\frac{\chi^2_n}{n}}{\frac{\chi^2_m}{m}}.$$

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения $N(a, \sigma)$. Тогда 1) величина $\frac{(\overline{X}-a)\sqrt{n}}{\sigma}$ имеет нормальное распределение $N(0,1)$; 2) величина $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ имеет распределение χ^2_{n-1}; 3) $\overline{X}, S^2$ независимы (теорема Фишера); $t = \sqrt{n-1}\frac{\overline{X}-a}{S}$ имеет распределение T_{n-1}.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$ – независимые выборки из распределения $N(a, \sigma)$, а $\overline{X}, \bar{Y}, S^2(X), S^2(Y)$ – выборочные средние и дисперсии, тогда величина $t = \sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}} \frac{\overline{X}-\bar{Y}}{\sqrt{nS^2(X)+mS^2(Y)}}$ имеет распределение Стьюдента с $m+n-2$ степенями свободы.

Если же имеются две выборки $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$ из различных нормальных распределений $N(a_1, \sigma_1), N(a_2, \sigma_2)$, то случайная величина $F = \frac{n(m-1)\sigma_2^2 S^2(X)}{m(n-1)\sigma_1^2 S^2(Y)}$ распределена по закону Фишера-Снедекора $F_{n-1,m-1}$. В частном случае, когда дисперсии совпадают, величина F не зависит от неизвестного параметра σ и имеет распределение $F_{n-1,m-1}$.

Задачи

426. *Нарисовать на одном чертеже графики плотности распределения $N(0,1)$ и плотности распределения Стьюдента.*

427. *Нарисовать на одном чертеже графики плотности распределений Стьюдента T_{n_1}, T_{n_2} при $n_1 < n_2$.*

428. *Доказать, что $t_n^2 = f_{1,n}$; $\chi_1^2 = u^2$, где $u \in N(0,1)$.*

429. *Найти распределение статистик: $Z_1 = X_1,\ Z_2 = X_1^*,\ X \in N(a,\sigma)$.*

430. *Найти распределение статистики $Z = X_i - \overline{X},\ X \in N(a,\sigma)$.*

431. *Найти распределение статистики Z:*

$$Z = \frac{X_1 + X_2}{2},\ X \in N(a,\sigma).$$

432. *Найти распределение статистики $Z = aX_1 + bX_n,\ X \in N(a,\sigma)$.*

433. *Найти распределение статистик: $Z_1 = X_n^*$; $Z_2 = X_1^*, X \in R[a,b]$.*

434. *Найти распределение статистики: $Z_1 = X_1^*$, если выборка взята из совокупности с плотностью $f(x) = e^{\alpha - x}, x \geqslant \alpha$.*

435. *Найти распределение статистики Z:*

$$Z = \overline{X} - \overline{Y} - (a_X - a_Y),$$

$X \in N(a_X,\sigma),\ Y \in N(a_Y,\sigma)$, X и Y независимы.

436. *Найти распределение статистики Z:*

$$Z = \frac{(n_1 - 1)\overline{S}_X^2 + (n_2 - 1)\overline{S}_Y^2}{n_1 + n_2 - 2},$$

$X \in N(a_1,\sigma),\ Y \in N(a_2,\sigma)$, X и Y независимы.

437. *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения $N(a,\sigma)$ и функция от выборочных среднего и дисперсии Z определена равенством $Z = \sqrt{n}\frac{\overline{X}-a}{\overline{S}}$. Докажите, что величина Z имеет распределение T_{n-1}.*

438. *$\langle F \rangle$ — непрерывная модель. Найти распределение статистики*

$$G = -\sum_{i=1}^{n} \ln F(x_i).$$

439. *Доказать, что если $s^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, то $Ms^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2$.*

440. *Найдите плотность распределения Стьюдента.*

441. *Найдите плотность распределения Фишера.*

442. *Найдите k-й начальный момент распределения Фишера.*

13. Статистические оценки

13.1. Критерии качества оценок

Выборочная числовая характеристика (статистика) $\hat{\theta} = g(X_1, \ldots, X_n)$, применяемая для оценивания неизвестного параметра θ генеральной совокупности, называется его *точечной оценкой*.

Статистика $\hat{\theta} = g(X_1, \ldots, X_n)$ называется *несмещенной* оценкой для параметра θ, если $\forall\theta \in \Theta$

$$M\hat{\theta} = \theta.$$

Статистика $\hat{\theta} = g(X_1, \ldots, X_n)$ называется *состоятельной* оценкой θ, если $\forall\theta \in \Theta$

$$\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta.$$

Если $\hat{\alpha}$ − состоятельная оценка α, а f − непрерывная функция, то $f(\hat{\alpha})$ − состоятельная оценка $f(\alpha)$.

Несмещенная оценка $\widehat{\theta}$ параметра θ называется *оптимальной* оценкой, если $D\widehat{\theta} \leqslant D\widetilde{\theta}$, $\forall\theta \in \Theta$, где $\widetilde{\theta}$ — произвольная несмещенная оценка θ.

Информационным количеством Фишера называется величина I, равная

$$I = M\left(\frac{\partial \ln f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta)}{\partial\theta}\right)^2.$$

В регулярной модели для дисперсий несмещенных оценок параметра θ справедливо неравенство Рао-Крамера:

$$D\hat{\theta} \geqslant \frac{1}{I}.$$

Несмещенная оценка $\hat{\theta}$ параметра θ называется *эффективной* оценкой θ, если $\forall\theta \in \Theta$ $D\hat{\theta} = \frac{1}{I}$.

Эффективная оценка является оптимальной. Обратное, вообще говоря, не верно.

Для проверки эффективности оценок удобно использовать следующие формулы информационного количества Фишера I:

$$I = nM\left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2;$$

$$I = -nM\left(\frac{\partial^2 \ln f(x,\theta)}{\partial\theta^2}\right),$$

где $f(x,\theta)$ — одномерная плотность. Для дискретной случайной величины вместо $f(x)$ используется $\mathrm{P}(\xi = x)$.

Задачи

443. *Исследовать на несмещенность оценки параметров a, σ нормального распределения $N(a,\sigma)$: а) $\hat{a} = \bar{X}$, б) $\widehat{\sigma^2} = s^2$.*

444. *Исследовать на несмещенность оценку параметра λ распределения Пуассона P_λ : $\hat{\lambda} = \overline{X}$.*

445. *Исследовать на несмещенность оценку параметра p биномиального распределения с параметрами N, p :*

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{nN} = \frac{\overline{X}}{N}.$$

446. *Исследовать на несмещенность оценку параметра a нормального распределения $N(a,\sigma)$: $\hat{a} = 1/5(X_1 + 2X_2 + 3X_3)$.*

447. *Исследовать на несмещенность оценку параметра λ распределения Пуассона P_λ : $\hat{\lambda} = \overline{X} + 1/7(X_1 + 2X_5 + 4X_6)$.*

448. *Исследовать на несмещенность оценку параметра a нормального распределения $N(a,\sigma)$: $\hat{a} = aX_1 + bX_2$, $a + b = 1$.*

449. *Исследовать на несмещенность оценки параметров a, b равномерного* *распределения* $R[a,b]$: $\hat{b} = X_n^*$; $\hat{a} = X_1^*$.

450. *В статистической модели* $\langle\ R[a,b]\ \rangle$ *исследовать на несмещенность оценки функций параметров: а)* $\widehat{b-a} = X_n^* - X_1^*$; *б)* $\widehat{\frac{a+b}{2}} = \frac{X_1^*+X_n^*}{2}$.

451. *Найти* k, *при котором оценка* $\hat{\sigma} = k\sum_{i=1}^{n}|X_i - a|$ *параметра* σ *является несмещенной в* $N(a,\sigma)$.

452. *Найти* k, *при котором оценка* $\hat{\sigma} = k|X_1 - a|$ *параметра* σ *является несмещенной в* $N(a,\sigma)$.

453. *Найти* k, *при котором оценка* $\hat{\sigma} = k\sum_{i=1}^{n}|X_i - \overline{X}|$ *параметра* σ *является несмещенной в* $N(a,\sigma)$.

454. *Найти* k, *при котором оценка* $\widehat{\sigma^2} = \left(k\sum_{i=1}^{n}|X_i - a|\right)^2$ *является несмещенной в* $N(a,\sigma)$.

455. *Найти* k, *при котором оценка* $\widehat{\sigma} = k|X_1 - X_2|$ *параметра* σ *является несмещенной в* $N(a,\sigma)$, *если* $n = 2$.

456. *Предложить три несмещенные оценки параметра* a *в распределении* $N(a,\sigma)$.

457. *Исследовать на несмещенность оценку* $\hat{\alpha} = X_1^*$, *если* $f(x) = e^{\alpha - x}, x \geqslant \alpha$.

458. *Предложить три различные несмещенные оценки параметра* p *биномиального распределения с параметрами* N, p.

459. *Предложить четыре различные несмещенные оценки параметра* λ *распределения Пуассона.*

460. *Доказать, что если* $M\hat{\alpha} = \alpha$ *и* $D\hat{\alpha} \to 0$ *при* $n \to \infty$, *то* $\hat{\alpha}$ *– состоятельная оценка* α.

461. *Доказать, что если* $M\hat{\alpha} \to \alpha$ *при* $n \to \infty$ *и* $D\hat{\alpha} \to 0$ *при* $n \to \infty$, *то* $\hat{\alpha}$ *– состоятельная оценка* α.

462. *Исследовать на состоятельность оценку* $\hat{a} = \overline{X}$ *в* $N\ (a,\sigma)$.

463. *Исследовать на состоятельность оценку* $\widehat{\sigma^2} = s^2$ *в* $N\ (a,\sigma)$.

464. *Исследовать на состоятельность оценку* $\hat{\lambda} = \overline{X}$ *в распределении Пуассона* P_λ.

465. *Исследовать на состоятельность оценку* $\hat{p} = \frac{\bar{X}}{N}$ *в биномиальном распределении* $B(N,p)$.

466. *Исследовать на состоятельность оценку* $\hat{b} = X_n^*$ *в* $R\ [a,b]$.

467. *Исследовать на эффективность оценку* $\hat{a} = \overline{X}$ *в* $N\ (a,\sigma)$.

468. *Исследовать на эффективность оценку* $\widehat{\sigma^2} = s^2$ *в* $N\ (a,\sigma)$.

469. *Исследовать на эффективность оценку* $\hat{\lambda} = 1/2(X_1 + X_2)$ *в распределении Пуассона* P_λ.

470. *Исследовать на эффективность оценку* $\hat{p} = \frac{\overline{X}}{N}$ *в биномиальном распределении* $B(N,p)$.

471. *Исследовать на эффективность оценку* $\hat{b} = X_n^*$ *в* $R\ [a,b]$.

472. *Исследовать на оптимальность оценку* $\hat{a} = \overline{X}$ *в* $N\ (a,\sigma)$.

473. *Исследовать на оптимальность оценку* $\hat{\lambda} = \overline{X}$ *в распределении Пуассона* P_λ.

474. $\hat{\lambda} = X_1$ *в распределении Пуассона* P_λ. *Доказать, что оценка является несмещенной, но не является эффективной и состоятельной.*

13.2. Методы нахождения оценок

Метод максимального правдоподобия.
Для непрерывной случайной величины функция

$$L(x_1,\ldots,x_n,\theta) = f(x_1,\theta)\cdot\ldots\cdot f(x_n,\theta)$$

рассматриваемая при фиксированных $(x_1,\ldots,x_n)$ как функция параметра θ, называется *функцией правдоподобия*.

Функция правдоподобия для дискретной случайной величины определяется в виде

$$L(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \mathrm{P}(\xi = x_1) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}(\xi = x_n).$$

Оценка θ^*, обеспечивающая по параметру θ максимум функции правдоподобия, называется *оценкой максимального правдоподобия* параметра θ (о.м.п.)

Вместо отыскания максимума функции L часто удобнее находить максимум функции $\ln L$ и решать *уравнение правдоподобия*

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0.$$

В результате решения уравнения правдоподобия мы найдем критическую точку, необходимо еще убедиться, что это точка максимума.

Свойства оценок максимального правдоподобия

1. Свойство инвариантности. Если оценивается некоторая взаимно однозначная параметрическая функция $\tau(\theta)$, то ее оценка максимального правдоподобия $\widehat{\tau(\theta)} = \tau(\widehat{\theta})$.

2. Оценки максимального правдоподобия асимптотически несмещены, состоятельны и обычно асимптотически нормальны.

3. Если оценки максимального правдоподобия асимптотически нормальны, то они и асимптотически эффективны, то есть $D\hat{\theta} \to \frac{1}{I}$.

Метод моментов.

Приравнивая выборочные и теоретические моменты, получаем уравнения относительно θ. Решая эти уравнения, получаем оценку параметра $\hat{\theta}$. Эта оценка называется *оценкой метода моментов* и обозначается *о.м.м.* Оценки метода моментов состоятельны.

Задачи

475. *Найти оценки максимального правдоподобия параметров a, σ в $N(a, \sigma)$.*

476. *Найти оценку максимального правдоподобия функции $a^2 + a$ в $N(a, \sigma)$.*

477. *Найти оценку максимального правдоподобия параметра p в $B(N, p)$.*

478. *Найти оценку максимального правдоподобия функции $\sum_{i=0}^{3} p^i$ в $B(N, p)$.*

479. *Найти оценку максимального правдоподобия функции $2\lambda + 3$ в P_λ.*

480. *Найти оценку максимального правдоподобия параметра a в $R[a, b]$.*

481. *Найти оценку максимального правдоподобия параметра b в $R[a, b]$.*

482. *Найти оценку максимального правдоподобия параметра α, если $f(x) = e^{\alpha - x}, x \geqslant \alpha$.*

483. *Найти оценку максимального правдоподобия параметра α, если $f(x) = \frac{e^{-|x|}}{2(1-e^{-\alpha})}, |x| \leqslant \alpha$.*

484. *Найти оценку максимального правдоподобия параметра α в $\Gamma(\alpha, \beta)$.*

485. *Найти оценку максимального правдоподобия параметра a в $N(a, \sqrt{2a})$. Исследовать полученную оценку на состоятельность.*

486. *Найти методом моментов оценки параметров a, σ в $N(a, \sigma)$.*

487. *Найти методом моментов оценку параметра λ в P_λ.*

488. *Найти методом моментов оценку параметра a в $R[0, a]$.*

489. *Найти методом моментов оценку параметра p в $B(N, p)$ при известном N.*

490. *Найти методом моментов оценки параметров N, p в $B(N, p)$.*

491. *Найти методом моментов оценку параметра n в χ^2_n. ($\chi^2_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \xi_i \in N(0, 1), \ \xi_i$ независимы.)*

14. Доверительные интервалы.

Две статистики $I_1(X),\ I_2(X)\ \ (I_1(X) < I_2(X))$ называют *доверительным интервалом* значимости α для параметра $\theta \quad (0 < \alpha < 1)$, если выполняется условие

$$\mathrm{P}(I_{1(X)} < \theta < I_{2(X)}) = 1 - \alpha. \tag{70}$$

Число $1-\alpha$ называется *доверительной вероятностью*, а $I_1(X), I_2(X)$ — нижней и верхней доверительными границами.

Для построения доверительного интервала параметра θ надо взять статистику $G(X,\theta)$, такую, что она сама монотонно зависит от параметра θ, а ее распределение от θ не зависит, записать уравнение $\mathrm{P}(g_1 < G(X,\theta) < g_2) = 1-\alpha$, и разрешить неравенство под знаком вероятности относительно параметра θ.

Доверительные интервалы для параметров нормального распределения:

$$I_a = \left(\overline{X} - \frac{\overline{S}}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1,\,1-\frac{\alpha}{2}},\ \ \overline{X} + \frac{\overline{S}}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1,\,1-\frac{\alpha}{2}}\right);$$

$$I_{\sigma^2} = \left(\frac{nS^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{nS^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right).$$

Доверительный интервал для параметра a нормального распределения $N(a,\sigma)$ при известном σ:

$$I_a = \left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}},\ \ \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Параметр произвольного распределения можно оценить так же, как параметр нормального распределения, если известно распределение некоторой статистики, зависящей от параметра и его оценки. Другой способ связан с использованием асимптотического метода. Если $\hat{\theta}$ асимптотически нормальна и несмещена, (например, является о.м.п.), то

$$\frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{D\hat{\theta}}} \xrightarrow{d} u \in N(0,1).$$

$$1 - \alpha = \mathrm{P}\left(u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{D\hat{\theta}}} < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Разрешая относительно θ, получим доверительный интервал значимости α.

Задачи

492. *Найти доверительный интервал для a в $N(a,\sigma)$ при известном σ.*

493. *Найти доверительный интервал для a в $N(a,\sigma)$ при неизвестном σ.*

494. *Пусть по 16 измерениям величины ξ, имеющей нормальное распределение, найдено среднее значение $\overline{X} = 4,1$. Оценить неизвестное математическое ожидание случайной величины ξ по выборочной средней при помощи доверительного интервала с доверительной вероятностью 0,95, если среднее квадратическое отклонение величины ξ известно и равно единице.*

495. *В условиях предыдущей задачи найти доверительный интервал для неизвестного математического ожидания случайной величины ξ с доверительной вероятностью 0,95, если среднее квадратическое отклонение неизвестно, а выборочное среднее квадратическое отклонение величины $S = -1$.*

496. *Найти в нормальной модели доверительные интервалы для a и σ по данным: $\bar{x} = 103, S^2 = 16, n = 26, \alpha = 0,1$.*

497. *Найти доверительный интервал для σ в модели $N(2,\sigma)$ по выборке:* $2,3,3,1,1,2,4,2,1,3$ *при $\alpha = 0,1$.*

498. *При проведении рекламной акции за первые четыре дня распространители раздали соответственно 2470, 2490, 2580 и 2520 рекламных проспектов. Счи-*

тая применимой нормальную модель, найти доверительные интервалы для дисперсии и для среднего квадратического отклонения числа раздаваемых в день рекламных проспектов.

499. *Найти 95%-ый доверительный интервал для числа пассажиров пригородного поезда, если среднее число пассажиров, рассчитанное за 25 рабочих дней, равно 500, а* $\sigma = 20$.

500. *По результатам 25 наблюдений цены товара в различных магазинах был определен доверительный интервал для математического ожидания цены при* $\alpha = 0,3:\ I_a = [23,84;\ 24,37]$ *(*σ *не известно). Найдите доверительный интервал при доверительной вероятности 0,95.*

501. *Средняя длительность оборота (в днях) оборотных средств, рассчитанная по 36 торговым фирмам, составляет 47 дней, причем* $\sigma = 2,1$. *Найти 95%-ый и 99%-ый доверительные интервалы для средней длительности оборота.*

502. *Найти доверительный интервал для* p *в* $B(N, P)$ *при известном* N.

503. *Найти доверительный интервал для* λ *в* P_λ.

504. *Показать, что интервал* $(X_n^*, \frac{X_n^*}{\sqrt[n]{\alpha}})$ *является доверительным интервалом для* b *значимости* α *в модели* $R[0, b]$.

505. *В равномерном распределении* $R[a, 0]$ *найти доверительный интервал для* a.

506. *Найти доверительный интервал для* θ *в* $N(\theta, \theta)$.

15. Статистические гипотезы.

Статистической гипотезой (или просто гипотезой) называется любое утверждение о виде или свойствах распределения наблюдаемых в эксперименте случайных величин.

Статистическая гипотеза называется *простой*, если однозначно фиксирует распределение наблюдений. Иначе это *сложная* гипотеза. Проверяемая гипотеза называется *нулевой* (H_0). Любая гипотеза о распределении наблюдаемой случайной величины, которая может оказаться истинной, но отличается от основной гипотезы, называется *альтернативной* гипотезой. Правило, согласно которому проверяют гипотезу H_0 (принимают или отвергают), называется *статистическим критерием* проверки гипотезы H_0.

Статистическая гипотеза называется *параметрической*, если она представляет из себя предположение о том, что неизвестный параметр распределения (дисперсия, математическое ожидание и т.п.) имеет наперед заданное значение или множество значений.

В процессе проверки H_0 можно принять правильное решение или совершить ошибку.

Вероятностью *ошибки первого рода* называется вероятность отклонить H_0, когда H_0 верна.

Эта вероятность совпадает с уровнем значимости критерия α. Очевидно,

$$\alpha = \mathrm{P}(H_d = H_1/H_0) = \mathrm{P}(T(x) \in V/H_0),$$

(α равняется вероятности того, что значение статистики T принадлежит критической области V при условии, что верна H_0).

Вероятностью *ошибки второго рода* называется вероятность принять H_0, когда H_0 не верна.

Вероятность ошибки второго рода обозначается β. Очевидно,

$$\beta = \mathrm{P}(H_d = H_0/H_1) = \mathrm{P}(T(x) \in \overline{V}/H_1),$$

(β равняется вероятности того, что значение статистики T не принадлежит критической области V при условии, что верна H_1).

Величину $1 - \beta$ будем называть *мощностью критерия* K и обозначать $M(K)$.

Понятие мощности критерия введено для случая простых H_0, H_1; существенно, что множество Θ_1 состоит из единственной точки θ_1.

Наилучшие критические области (НКО).

Теорема Неймана - Пирсона. Пусть $H_0: \theta = \theta_0$, $H_1: \ \theta = \theta_1$. Тогда НКО заданного уровня значимости α состоит из точек выборочного пространства, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{L(x,\theta_1)}{L(x,\theta_0)} \geqslant c_\alpha,$$

где c_α — константа, зависящая от α, L — функция правдоподобия.

Теорема Неймана—Пирсона применима и к простым гипотезам о виде распределения.

Задачи

В задачах **507—509** даны оценки за контрольную работу первой и второй групп $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_m)$, которые можно рассматривать как выборки из генеральных совокупностей оценок. Сформулировать нулевую и альтернативную гипотезы для получения ответа на вопрос:

507. *«Учится ли первая группа по этому предмету лучше второй?»*

508. *«Одинаково ли успешно учатся по этому предмету первая и вторая группа?»*

509. *«Можно ли считать, что первая и вторая группа учатся по этому предмету одинаково ровно?»*

В задачах **510—512** даны числа ежедневных покупок, совершенных в магазине в течение одного месяца до раздачи рекламных листовок и в течение месяца после раздачи рекламных листовок. Сформулировать нулевую и альтернативную гипотезы для получения ответа на вопрос:

510. *«Изменяет ли раздача листовок число покупок?»*

511. *«Увеличивает ли раздача листовок число покупок?»*

512. *«Уменьшился ли разброс числа покупок?»*

В задачах **513—515** даны результаты измерений артериального давления у одних и тех же людей до и после приема лекарства. Сформулировать нулевую и альтернативную гипотезы для получения ответа на вопрос:

513. *«Повышает ли это лекарство давление?»*

514. *«Понижает ли это лекарство давление?»*

515. *«Это лекарство увеличивает разброс давления у пациентов?»*

516. *Имеются данные о солнечной активности и о заболеваемости дифтеритом за ряд лет. Сформулировать нулевую и альтернативную гипотезы для проверки содержательной гипотезы: «Увеличение солнечной активности понижает заболеваемость дифтеритом[11]».*

517. *Для каждой из двух книг имеются данные о частотах, с которыми встречаются в тексте различные служебные слова и знаки препинания. Сформулировать нулевую и альтернативную гипотезы для проверки содержательной гипотезы: «Эти две книги написаны одним автором».*

518. *Найти наилучшую критическую область в модели $N(a, \sigma)$ для проверки гипотезы $H_0: \ a = a_0$ против гипотезы $H_1: \ a = a_1$ по выборке объема $n = 25$, если $\sigma = 5, a_0 = 1, a_1 = 3$, уровень значимости $\alpha = 0,05$. Найти мощность критерия.*

519. *В статистической модели $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geqslant 0$ найти наилучшую критическую область для проверки гипотезы $H_0: \ \lambda = 1$ против гипотезы $H_1: \ \lambda = 4$ по выборке объема $n = 1$ при уровне значимости $\alpha = 0,1$. Найти мощность критерия.*

520. *В статистической модели $N(a, \sigma)$ найти наилучшую критическую область для проверки гипотезы $H_0: \ \sigma^2 = 4$ против гипотезы $H_1: \ \sigma^2 = 9$, если объем выборки $n = 25$, а уровень значимости $\alpha = 0,05$.*

521. *Найти наилучшую критическую область для проверки гипотезы H_0 : $f(x) = \frac{1}{2}$ при $|x| \leqslant 1$ против гипотезы $H_1: \ \xi \in N(0,1)$ по одному наблюдению*

[11] Гипотеза Чижевского.

$(n = 1)$, $\alpha = 0,05$. *Найти мощность критерия.*

522. *Найти наилучшую критическую область для проверки гипотезы* H_0 : $\xi \in N(0,1)$ *против гипотезы* H_1 : $f(x) = \frac{1}{2}$ *при* $|x| \leqslant 1$ *по одному наблюдению* $(n = 1)$*, если* $\alpha = 0,05$. *Найти мощность критерия.*

523. *Найти наилучшую критическую область для проверки гипотезы* H_0 : $R[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ *против гипотезы* H_1 : $N(0, 0, 16)$ *по одному наблюдению* $n = 1$ *при уровне значимости* $\alpha = 0,1$. *Найти мощность критерия.*

524. *В статистической модели* $B(N, p)$ *найти наилучшую критическую область для проверки гипотезы* H_0 : $p = \frac{1}{4}$ *против гипотезы* H_1 : $p = \frac{1}{2}, N = 10$*, если объем выборки* $n = 25$*, уровень значимости* $\alpha = 0,1$.

525. *В статистической модели* $\Gamma(\alpha, 1)$ *найти наилучшую критическую область для проверки гипотезы* H_0 : $\alpha = 1$ *против гипотезы* H_1 : $\alpha = 3$ *при* $n = 16, \alpha = 0,05$.

526. *Найти наилучшую критическую область для проверки гипотезы* H_0 : $\lambda = 1$ *против гипотезы* H_1 : $\lambda = 2$ *в статистической модели* P_λ, $n = 9, \alpha = 0,05$.

527. *Сколько наблюдений необходимо, чтобы мощность критерия для проверки гипотезы* H_0 : $a = 0$ *против гипотезы* H_1 : $a = 2$ *в статистической модели была не меньше* $0,9$*, если уровень значимости* $\alpha = 0,05$?

16. Проверка статистических гипотез

16.1. Параметрические гипотезы

Алгоритм проверки параметрической гипотезы.

1. Сформулировать статистическую параметрическую модель, нулевую и альтернативную гипотезы, задать уровень значимости α.

2. Выбрать статистику $Z(x)$, такую, что она сама зависит от параметра θ, а ее распределение при верной H_0 от θ не зависит, и различается при H_0 и при H_1.

3. Найти критическую область V.

4. Рассчитать по выборке значение статистики $Z_{\text{В}}$.

5. Если $Z_{\text{В}}$ попадает в критическую область V, то нулевая гипотеза отвергается (в пользу альтернативной). Если $Z_{\text{В}}$ не попадает в критическую область V, то нулевая гипотеза не отвергается.

6. Сформулировать ответ в терминах вопроса.

Замечание. Гипотеза H_0 отвергается или не отвергается с уровнем значимости α.

Критерии для гипотез о параметрах нормального распределения.

Гипотеза о дисперсии. $H_0 : \ \sigma = \sigma^0$.

Статистическая модель	Статистика Z	$Z_{/H_0}$
$\langle N(a_0, \sigma) \rangle$	$\frac{\sum (x_i - a_0)^2}{(\sigma^0)^2}$	χ^2_n
$\langle N(a, \sigma) \rangle$	$\frac{nS^2}{(\sigma^0)^2}$	χ^2_{n-1}

Гипотеза о среднем. $H_0 : \ a = a^0$

Статистическая модель	Статистика Z	$Z_{/H_0}$
$\langle N(a, \sigma_0) \rangle$	$\frac{(\bar{x} - a^0)\sqrt{n}}{\sigma_0}$	$N(0, 1)$
$\langle N(a, \sigma) \rangle$	$\frac{(\bar{x} - a^0)\sqrt{n}}{\bar{s}}$	T_{n-1}

Критерии для гипотез о параметрах двух независимых нормальных распределений.

Гипотеза о дисперсии. $H_0 : \ \sigma_1 = \sigma_2$.

Статистическая модель	Статистика Z	$Z_{/H_0}$
$\langle N(a_0,\sigma)\rangle, \langle N(a,\sigma)\rangle$	$\frac{(\bar{s}_1)^2}{(\bar{s}_2)^2},\quad s_1 > s_2.$	F_{n_1-1,n_2-1}

Замечание. Критерий, использующий данную статистику для проверки данной гипотезы, называется **критерием Фишера**.

Гипотеза о средних. $H_0:\quad a_1 = a_2$

Статистическая модель	Статистика Z	$Z_{/H_0}$
$\langle N(a,\sigma_0)\rangle$ (известны σ_1,σ_2)	$\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$N(0,1)$
$\langle N(a,\sigma)\rangle$($\sigma_1,\sigma_2$ неизвестны, но гипотеза $H_0\ :\ \sigma_1 = \sigma_2$ не отвергается)	$\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{\bar{s}_1^2(n_1-1)+\bar{s}_2^2(n_2-1)}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}\quad\surd$	$T_{n_1+n_2-2}$
$\langle N(a,\sigma)\rangle$($\sigma_1,\sigma_2$ неизвестны, и гипотеза $H_0:\ \sigma_1=\sigma_2$ отвергается)	$\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{\bar{s}_1^2}{n_1}+\frac{\bar{s}_2^2}{n_2}}}$	T_ν, где $\nu \approx \frac{\left(\frac{\bar{s}_1^2}{n_1}+\frac{\bar{s}_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{\bar{s}_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1+1}+\frac{\left(\frac{\bar{s}_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2+1}}-2$

Замечание. Критерий, использующий статистику, отмеченную галочкой ($\surd$), называется **критерием Стьюдента**.

Гипотеза о средних для парных совокупностей.

Гипотеза $H_0:\quad a_1 = a_2.\ \sim H_0:\quad a_d = 0.$

Статистическая модель	Статистика Z	$Z_{/H_0}$
$\langle N(a,\sigma)\rangle$	$\frac{\bar{d}\sqrt{n}}{\bar{s}_d} = \frac{\sum d_i\sqrt{n-1}}{n\sum d_i^2-(\sum d_i)^2}$	T_{n-1}

Замечание. Этот критерий называется **критерием Стьюдента для парных выборок**.

16.2. Гипотеза о виде распределения

$H_0:\ F(x) = F_0(x)$.

Критерии, проверяющие гипотезу о виде распределения, называются *критериями согласия*.

Критерий согласия Колмогорова

Пусть $x = (x_1,\ldots,x_n)$ — выборка из генеральной совокупности с неизвестной функцией распределения $F(x)$. Выдвинута простая гипотеза $H_0 : F(x) = F_0(x)$, где $F_0(x)$ задана. Критерий согласия Колмогорова применяют для непрерывных функций распределения $F(x)$.

В качестве статистики критерия выбирают величину

$$D_n = D_n(x) = \sup_x |(F_n(x) - (F(x)|, \tag{71}$$

а в качестве критической области — область вида

$$V = (t^*,\infty), \tag{72}$$

где t^* табулировано. Так, $t^* = t^*_\alpha = 1,3581$ при $\alpha = 0,05$; $t^*_\alpha = 1,6276$ при $\alpha = 0,01$. Таким образом, при заданном уровне значимости α правило проверки гипотезы H_0 при $n > 20$ сводится к следующему:

если значение статистики $\hat{t} = D_n(x) = \max_x |F_n^*(x) - F_0(x)|$ удовлетворяет неравенству

$$\sqrt{n} \cdot \hat{t} \geqslant t^*,$$

то H_0 отвергают, в противном случае делают вывод, что статистические данные не противоречат гипотезе.

Критерий согласия χ^2 Пирсона

Критерий согласия χ^2 Пирсона также проверяет гипотезу $H_0 : F(x) = F_0(x)$, но его можно применять для любых распределений. Чтобы воспользоваться этим критерием, выборочные данные предварительно группируют. Пусть n_i – число значений, попавших в i-й интервал, $i = 1, \ldots, k$, n – объем выборки, p_i — теоретическая вероятность попадания одного элемента выборки в i-й интервал. Однако в теоретическом распределении могут быть неизвестные параметры $(\theta_1, \ldots, \theta_r)$, что обычно и встречается на практике. Тогда по выборке $(x_1, \ldots, x_n)$ первоначально находят оценки $(\theta_1^*, \ldots, \theta_r^*)$ и затем по $F(x, \theta_1^*, \ldots, \theta_r^*)$ вычисляют теоретические вероятности p_i.

Статистика критерия:

$$Z = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \sim \chi^2_\nu, \qquad (73)$$

где $\nu = k - r - 1$ – число степеней свободы. Ограничения: $n > 50$ и $np_i \geqslant 4$. Критическую область задаем в виде $V = (t^*, \infty)$, значение t^* – квантиль распределения χ^2_ν порядка $(1 - \alpha)$.

Таким образом, вид критерия согласия χ^2:

если значение статистики $Z_{\text{В}}$ удовлетворяет неравенству

$$Z_{\text{В}} \geqslant t^*,$$

гипотезу H_0 отвергают, в противном случае гипотеза H_0 не противоречит условиям испытаний.

528. *Средние по отрасли издержки на производство единицы некоторого товара составляют $a_0 = 13$, а по 26 предприятиям корпорации выборочное среднее издержек равно $\bar{x} = 11$, $S = 2$. Можно ли считать, что издержки в данной корпорации ниже, или отклонение следует считать случайным? $(\alpha = 0,05)$.*

529. *В условиях примера **??** проверить гипотезу о том, что математическое ожидание курса английского фунта стерлингов за упомянутый период равно $a = 50$.*

530. *Урожайность культуры составляет 35 центнеров с гектара; на 10 опытных делянках $\bar{x} = 38$ центнеров с гектара, $s^2 = 49$. Случайно ли превышение урожайности?*

531. *При измерении производительности двух агрегатов получены следующие результаты:*

$$A: \ 14,1 \ \ 10,1 \ \ 14,7 \ \ 13,7 \ \ 14,0; \quad B: \ 14,0 \ \ 14,5 \ \ 13,7 \ \ 12,7 \ \ 14,1.$$

Различен ли разброс производительности?

532. *Одинаково ли потребление сырья для производства продукта при двух технологиях, если $n_1 = 16, \bar{S}_1^2 = 8, \bar{x} = 6; \quad n_2 = 36, \bar{S}_2^2 = 15, \bar{y} = 7$?*

533. *Указаны выборочные дисперсии размеров прибыли при производстве товаров двух групп: $n_1 = 21, \bar{S}_1^2 = 25$; $n_2 = 31, \bar{S}_2^2 = 16$. Можно ли считать, что прибыль при производстве товаров первой группы колеблется сильнее, или различия следует считать случайными? $(\alpha = 0,1)$.*

534. *Производительность труда в дневную смену описана данными*

$$n_1 = 16, \bar{x} = 14,5, \bar{S}_1^2 = 4;$$

в ночную смену

$$n_2 = 16, \bar{y} = 13, \bar{S}_2^2 = 3.$$

Можно ли считать, что ночная работа менее эффективна?

535. *Пусть X — производительность при работе с перерывом, Y — производительность при работе без перерыва, измеренная у одних и тех же 8 человек: $H_1 : a_y < a_x$.*

X	40	35	41	55	46	60	51	43
Y	30	30	38	21	49	53	31	27

Проверить гипотезу о том, что перерыв не влияет на производительность с помощью критерия знаков.

536. *Можно ли считать равномерным распределение студентов по знакам Зодиака?*

№ знака	1	2	3	4	5	6
n_i	12	13	23	11	9	10
№ знака	7	8	9	10	11	12
n_i	15	7	15	9	7	3

537. *Проверить гипотезу $H_0 : F = P_\lambda$;*

m	0	1	2	3	4	5
n_i	13	17	12	5	3	1

Ответы и указания к решению задач

§ 1. Классическое определение вероятности

1. 1/9. **2**. 1/3. **3**. 5/9. **4**. 2/45. **5**. 1/6. **6**. 2/9. **7**. 41/45. **8**. 1/6. **9**.5/9. **10**. 1/36. **11**. 25/36. **12**. 0, 42. **13**. 0, 52. **14**. 63/101. **15**. 2/11. **16**. $\frac{1}{C_{18}^5}$. **17**. 156/245. **18**. 48. **19**. 20/63. **20**. 37/190. **21**. 3/4. **22**. 0. **23**. 1/105. **24**. 4/35. **25**. $36/7^3$. **26**. 1/343. **27**. 2/343. **28**. 64/343. **29**. 36/343. **31**. 4/33. **33**. $\frac{A_7^5}{7^5}$. **34**. $\frac{A_{10}^6}{10^6}$. **35**. а) 0, 007; б) 0, 042. **36**. 2/7. **37**. 1/3. **38**. 1/3. **39**. $\frac{1}{6!}$. **40**. $\frac{84}{C_{15}^4}$. **41**. $\frac{1}{6!}$. **42**. $\frac{2}{9!}$. **43**. $1/26^4$.

§ 2. Основания теории вероятностей

44. а) $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_1\overline{\mathcal{A}}_2\mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\overline{\mathcal{A}}_3$, где A_i означает, что i-я сделка оказалась прибыльной.

45. а) $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}_1\overline{\mathcal{A}}_2\overline{\mathcal{A}}_3A_4$, где A_i означает, что i-й банк принимает положительное решение о кредитовании.

46. Пусть $A_i = \{$На первом посту находятся i охранников$\}$, $B_i = \{$На втором посту находятся i охранников$\}$. а) $\mathcal{A} = B_2A_1 + B_3(A_1 + A_2)$.

47. Пусть $A_{ij} = \{$i-й человек задумал цифру j$\}$,

$$\mathcal{A} = \bigcup_{j=0}^{9}\bigcap_{i=1}^{4} A_{ij}.$$

49. $\mathcal{A}\mathcal{B}$. **50**. $\overline{\mathcal{A}} \cdot \overline{\mathcal{B}}$. **51**. $\mathcal{A}\overline{\mathcal{B}}$. **52**. $\mathcal{A}\overline{\mathcal{B}} + \overline{\mathcal{A}}\mathcal{B}$. **53**. $\overline{\overline{\mathcal{A}} \cdot \overline{\mathcal{B}}}$.

54. Дождь или ветер («или» не разделительное); дождь и ветер; дождь или безветрие; ни дождя ни ветра; дождь без ветра.

55. {Вмятина или царапина}; {вмятина и царапина}; {вмятина или царапина или скол}; {нет вместе вмятины и скола}; {нет вмятины, нет царапины}.

56. Хотя бы одна из первых трех оформлена неправильно; первые три оформлены неправильно; четвертая оформлена неправильно, а шестая правильно; хотя бы одна оформлена неправильно; все оформлены правильно; первые восемь оформлены неправильно; хотя бы одна из первых пяти оформлена правильно.

57. Хотя бы один из пяти неисправен; первые четыре неисправны; хотя бы один из первых трех исправен; все исправны.

58. Все попали в цель; попал хотя бы один из первого и третьего; первый попал, третий нет; второй попал или первый не попал; все попали.

59. Выручка $X \in [0; 70000]$; $X \in [20000; 40000]$; $X \notin [20000; 40000]$; $X > 70000$.

60. $\overline{\mathcal{A}}\cdot\overline{\mathcal{B}}+B$. **61**. Ω. **62**. $\mathcal{A}\overline{\mathcal{B}}$. **65**. Верно. **66**. Неверно. **67**. Да. **68**. Нет. **69**. Нет. **70**. Нет. **71**. 5/14. **72**. 0, 6. **73**. 9/25. **74**. 134/219. **75**. 0, 07. **76**. 3/28. **77**. 1/5. **78**. 2/5. **79**. 2/9. **80**. 1/4. **81**. 1/4. **82**. 7/9. **83**. 23/27. **84**. 0, 64. **85**. 1/9. **86**. 1/4. **88**. 9/16. **89**. 2/15. **90**. 7/16. **91**. 111/400. **92**. 11/36. **93**. 2/27. **94**. 1/4.

§ 3. Теоремы исчисления вероятностей

95. Нет. **96**. 3/4. **97**. Нет. 0, 68. **98**. 5/7. **99**. Нет. **100**. 0, 91. **101**. $\mathrm{P}(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3) = 0,512$, $\mathrm{P}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_3) = 0,96$, $\mathrm{P}(\mathcal{A}_1\overline{\mathcal{A}_3}\ \overline{\mathcal{A}_3}) = 0,16$, $\mathrm{P}(\mathcal{A}_2 + \overline{\mathcal{A}_1}) =$

$0,84$, $\mathrm{P}(\bigcap_{i=1}^{3}\mathcal{A}_i) = 0,512$. **102**. $\mathrm{P}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = 7/10$, $\mathrm{P}(\mathcal{AB}) = 1/5$, $\mathrm{P}(\overline{\mathcal{A}}+\overline{\mathcal{B}}) = 4/5$, $\mathrm{P}(\overline{\mathcal{A}+\mathcal{B}}) = 3/10$. **103**. $\mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^{5}\mathcal{A}_i) = 0,96875$, $\mathrm{P}(\bigcap_{i=1}^{4}\mathcal{A}_i) = 0,0625$, $\mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^{3}\overline{\mathcal{A}_i}) = 0,875$, $\mathrm{P}(\bigcap_{i=1}^{5}\overline{\mathcal{A}_i}) = 0,03125$. **104**. $0,42$. **105**. $0,12$. **106**. $0,18$. **107**. $0,46$. **108**. $0,88$. **109**. $0,28$. **110**. $0,58$. **111**. $0,189$. **112**. $0,441$. **113**. $0,973$. **114**. $0,657$. **115**. $0,784$. **116**. $0,216$. **117**. $0,784$. **118**. $0,147$. **119**. $0,5184$. **120**. $0,1296$. **121**. $0,36288$. **122**. $0,9996$. **123**. $0,63672$. **125**. $0,095$. **126**. $1-\alpha_1\alpha_2$. **128**. $0,216$. **129**. $P \approx 0,62$. **130**. $0,488$. **131**. 8. **132**. $\frac{C_{95}^{10}}{C_{100}^{10}}$. **133**. $1/15$. **134**. $7/15$. **135**. $1/64$. **136**. $0,25$. **137**. $4/9$. **138**. $5/8$. **139**. $0,038$. **140**. $4/19$. **141**. $0,0046$. **142**. $20/23$. **143**. $0,146$. **144**. $0,38$. **145**. $3/19$. **146**. $7/46$.

§ 4. Схемы испытаний

153. а) $1/32$; б) $3/16$; в) $13/16$; г) $1/2$, д) $25/32$. **154**. а) $0,8^5 \approx 0,33$. **155**. $0,432$. **156**. $P \approx 0,26$. **157**. $0,73728$. **158**. 4. **159**. 800. **160**. $P \approx 0,578$. **162**. $P \approx 0,67$. **163**. 1. **164**. $0,488$. **165**. 1. **166**. $0,648$. **167**. Первое. **168**. 21. **169**. 24. **170**. $P \approx 0,1536$. **171**. $0,0256$. **172**. $P \approx 0,0059$. **174**. $0,000075$.

177. $\frac{1}{6e}$. **178**. $1-5e^{-2}$. **179**. $P \approx 0,27$. **180**. $1-e^{-0,2}$. **181**. $P \approx 0,325$. **182**. e^{-3}. **183**. $0,62$. **184**. $P \approx 0,61$. **185**. $P \approx 0,01$. **186**. $0,83848$. **187**. $P \approx 0,9876$. **188**. $P \approx 0,99$. **189**. $0,056$. **190**. $P \approx 0,683$. **191**. $n > 7656$.

§ 5. Одномерные дискретные случайные величины

192. $F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant c; \\ 1 & \text{при} \quad x > c. \end{cases}$ **193**. $F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0; \\ 0,7 & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1; \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$

194. $F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0; \\ 2/\pi & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1; \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$

195.

I	0	1
p	$4/9$	$5/9$

; $F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0; \\ 4/9 & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1; \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$

196.

ξ	0	1	2	3	5	9
p	$1/9$	$2/9$	$1/3$	$1/9$	$1/9$	$1/9$

; $p = 1/3$.

197. а) нет; б) да; в) нет; г) да; д) нет.
198. а) нет; б) нет; в) нет; г) да.
199. б) да, $c = 0$ или $c = 0,5$; б) нет.

200. $F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant -3; \\ 1/3 & \text{при} \quad -3 < x \leqslant 1; \\ 2/3 & \text{при} \quad 1 < x \leqslant 3; \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$

201. а) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 1, \\ 1/3 & \text{при} \quad 1 < x \leqslant 9, \\ 1 & \text{при} \quad x > 9; \end{cases}$

б) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant -1/3, \\ 1/3 & \text{при} \quad -1/3 < x \leqslant 1/3, \\ 2/3 & \text{при} \quad 1/3 < x \leqslant 1; \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$

$$\text{в)}\; F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 1/8, \\ 1/3 & \text{при} \quad 1/8 < x \leqslant 2, \\ 2/3 & \text{при} \quad 2 < x \leqslant 8; \\ 1 & \text{при} \quad x > 8. \end{cases}$$

$$\text{г)}\; F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0, \\ 2/3 & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1; \end{cases}$$

$$\text{д)}\; F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 1, \\ 1/3 & \text{при} \quad 1 < x \leqslant 9, \\ 1 & \text{при} \quad x > 9. \end{cases}$$

202. $F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 2; \\ 0,2 & \text{при} \quad 2 < x \leqslant 4; \\ 0,5 & \text{при} \quad 4 < x \leqslant 6; \\ 1 & \text{при} \quad x > 6. \end{cases}$

203. Распределение Бернулли $B(1;\ 0,8)$

204. Гипергеометрическое распределение с параметрами

$$N = 36, \quad M = 4, \quad n = 2.$$

205. Биномиальное распределение $B(2;\ 1/9)$.

206. Геометрическое распределение $G_{0,6}$.

207.

ξ	1	2	3
p	1/2	1/4	1/4

211. Биномиальное распределение $B(100\,000;\ 0,00001)$; распределение Пуассона P_1.

212. Распределение Пуассона P_2.

213. Биномиальное распределение $B(10;\ 0,2)$.

214. Геометрическое распределение $G_{0,2}$.

215. Отрицательное биномиальное распределение $\overline{Bi}\,(3;\ 0,2)$.

§ 6. Одномерные непрерывные случайные величины

219. $0,05$. **220**. а) $f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0, \\ 3x^2 & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 0 & \text{при} \quad 1 < x; \end{cases}$ б) $p = 7/8$.

221. а) $c = \pi/2$; б) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant -\pi/2; \\ (\sin x + 1)/2 & \text{при} \quad -\pi/2 < x \leqslant \pi/2; \\ 1 & \text{при} \quad \pi/2 < x; \end{cases}$ в) $\sqrt{2}/2$.

222. а) $A = 2h^2$; б) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0; \\ 1 - \exp(-h^2x^2) & \text{при} \quad 0 < x. \end{cases}$

226. а) нет; б) нет; в) да; г) да; д) нет.

227. $b = 1/\pi$; $c = 1/2$; $f_\xi(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

229. $0,1587$. **230**. $0,8413$. **231**. $0,9544$.

232. а) $0,6826$; б) $0,9544$; в) $0,9974$. **233**. $\mathrm{P}(2 \leqslant \xi < 4)$. **234**. $A = 2$. **235**. $0,8566$. **237**. $0,368$. **238**. $\mathrm{P}(1 \leqslant \xi < 2)$. **239**. $1/e$. **240**. $1 - 1/e$. **243**. $x = 0,1$; $\mathrm{P}(\eta > 0,5) = 0,8$. **244**. Нет.

245. Величины зависимы.

$$F_{\xi,\eta}(x,\,y)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\leqslant 3 \ \text{ или } \ y\leqslant 1; \\ 0,3 & \text{при} \quad 3<x\leqslant 4 \ \text{ и } \ 1<y\leqslant 2; \\ 0,4 & \text{при} \quad 3<x\leqslant 4 \ \text{ и } \ y>2; \\ 0,7 & \text{при} \quad x>4 \ \text{ и } \ 1<y\leqslant 2; \\ 1 & \text{при} \quad x>4 \ \text{ и } \ y>2. \end{cases}$$

246. По определению: например,

$$\mathrm{P}(\xi=0,\eta=-1)=0,3\neq \mathrm{P}(\xi=0)\cdot \mathrm{P}(\eta=-1)=0,3\cdot 0,3=0,09.$$

248. Величины зависимы.

$\eta\diagdown\xi$	0	1
0	2/3	1/6
1	1/6	0

249. $\mathrm{P}(\xi=0,\,\eta=0)=4/9.$ **250**. $\mathrm{P}(\xi=7,\,\eta\leqslant 4)=1/9.$
251.

$$f_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x,\,y)\,dy;$$

$$f_\eta(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x,\,y)\,dx.$$

252. $C=6;\quad f_\xi(x)=2x$ при $0<x<1.$
253. $\mathrm{P}(\xi+\eta\geqslant 1)=0,9;\quad \mathrm{P}(1/2<\xi<3/4)=5/16.$
254. $6\exp\{-(2x+3y)\}.$
257. $C=1/2;$ $f_\xi(x)=x/2$ при $0<x<2;$ $f_\eta(y)=y$ при $0<y<1.$

258. $C=\dfrac{1}{\pi^2};\quad f_\xi(x)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1+x^2};\quad f_\eta(y)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1+y^2}.$

259.

$$C=1;$$

$$f_\xi(x)=\cos x \ \text{ при } \ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2};$$

$$f_\eta(y)=\cos y \ \text{ при } \ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$$

(плотности равны нулю при остальных $x,\,y$).

260. $f_{\xi,\eta}(x,\,y)=\dfrac{1}{\pi R^2},\ \ (x,y)\in D_R.$

261. $\mathrm{P}(2\xi>\eta)=0,75.$ **262**. $0,5.$ **263**. Да. **264**. 0,0417.

§ 7. Числовые характеристики одномерной случайной величины

265. $1,4.$ **266**. $0,4.$ **267**. $7/4.$ **268**. $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_iM_i}{N}.$ **269**. $2,5.$

270. $2,25.$ **271**. $Np.$ **272**. $\lambda.$ **273**. $2,5.$ **274**. $a=4;$ $M\xi=0,8.$

275. $2/3$. **276**. $C=\pi/2$. **277**. $A=\dfrac{1}{\sigma}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$. **279**. $c=1/2,\ b=1/\pi$; $M\xi$ не существует. **280**. 0. **282**. $\sqrt[3]{a}$. **283**. $A=2/\pi$; $M\xi=0$.

284. $\dfrac{2}{h\sqrt{\pi}}$. **285**. $A=2h^2$; $M\xi=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2h}$. **286**. α.

287. $\dfrac{p}{p-1}$ $(p>1)$. **289**. λ. **295**. $m_0=0,\ m_e=\ln 2,\ D\xi=1$.

297. $m_e=0,\ D\xi=1/2$. **299**. $m_0=0,\ m_e=0,\ D\xi=2b^2$.

301. $D\xi=\dfrac{1}{h^2}(3/2-4/\pi)$. **304**. $0; -1,\ 2$. **306**. $0; 2;\ 6$. **308**. a.

309. 4. **310**.$\sigma\approx 6,1$. **311**. $3;\ 1,2$. **312**. $3;\ 3$. **313**. 4. **314**. $1;\ 1$.
315. $999;\ 999000$.

§ 8 . Линейная зависимость случайных величин

322. а) $\rho_{\xi,\eta}=0,36$; б) $\hat{\eta}=0,106\xi+2,115$; $S^2_{\text{ост}}=0,313$.
323. а) $\rho_{\xi,\eta}=0,56$; б) $\hat{\eta}=0,291\xi+0,896$; $S^2_{\text{ост}}=0,336$.
325. $-0,2$. **326**. $-0,2$. **327**. $-1;-1$. **328**. $1/2$. **329**. $3/4$.
330. $-5/13$. **331**. Нет. **332**. $-6; 29$. **332**. 0. **334**. Нет.

335. $R=\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1 & 9/10 \\ 2/3 & 9/10 & 1 \end{pmatrix}$

336. $K=\begin{pmatrix} 4 & -2,4 & 7,2 \\ -2,4 & 9 & -6 \\ 7,2 & -6 & 16 \end{pmatrix}$

338. $\widehat{\xi_0}=-0,88\xi_1+1,12\xi_2$; $S^2_{\text{ост}}=0,35$.
341. $\widehat{\xi_0}=0,133\xi_1+1,867\xi_2-3$; $S^2_{\text{ост}}=0,747$.
342. $\rho_{01.2}=-0,2$; $\rho_{02.1}=0,2$. **344**. $\rho_{01.2}=0,73$; $\rho_{0(1,2)}=0,8$.
345. $\rho_{0(1,2)}=0,902$.

§ 9 . Условные распределения

347.
$$f_{\xi/\eta=y}(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2};$$
$$f_{\eta/\xi=x}(y)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y^2}.$$

348.
$$f_{\xi/\eta=y}(x)=2xe^{-x^2},$$
$$f_{\eta/\xi=x}(y)=2ye^{-y^2}\ \text{при}\ x>0,\ y>0.$$

349.
$$f_{\xi/\eta=y}(x)=1/3;$$
$$f_{\eta/\xi=x}(y)=1\ \text{при}\ 0\leqslant x\leqslant 3,\ 0\leqslant y\leqslant 1.$$

350.
$$f_{\xi/\eta=y}(x)=\cos x;$$
$$f_{\eta/\xi=x}(y)=\cos y\ \text{при}\ 0\leqslant x,\ y\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

351.
$$f_{\xi/\eta=y}(x)=1;$$
$$f_{\eta/\xi=x}(y)=1 \text{ при } 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1.$$

352.
$$f_{\xi/\eta=y}(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad |x|>r \text{ или } |y|>\sqrt{r^2-x^2};\\ 1/\left(2\sqrt{r^2-x^2}\right) & \text{при} \quad |x|\leqslant r \text{ и } |y|\leqslant\sqrt{r^2-x^2}.\end{cases}$$
$$f_{\eta/\xi=x}(y)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad |y|>r \text{ или } |x|>\sqrt{r^2-y^2};\\ 1/\left(2\sqrt{r^2-y^2}\right) & \text{при} \quad |y|\leqslant r \text{ и } |x|\leqslant\sqrt{r^2-y^2}.\end{cases}$$

353.
$$f_{\xi/\eta=y}(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad |x|>a \text{ или } |y|>b\sqrt{1-x^2/a^2};\\ 1/\left(2b\sqrt{1-x^2/a^2}\right) & \text{при} \quad |x|\leqslant a \text{ и } |y|\leqslant b\sqrt{1-x^2/a^2}.\end{cases}$$
$$f_{\eta/\xi=x}(y)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad |y|>b \text{ или } |x|>a\sqrt{1-y^2/b^2};\\ 1/\left(2a\sqrt{1-y^2/b^2}\right) & \text{при} \quad |y|\leqslant b \text{ и } |x|\leqslant a\sqrt{1-y^2/b^2}.\end{cases}$$

355. а) $p/(1+q)$;
б) $q/(1+q)$;
в) $q/(1+q)$;
г) $pq^{k-2}(1+q)(1-q^{k-1}),\ k\geqslant 2$;
д) $pq^{2k-2}(1+q)(1-q^{k-1}),\ k\geqslant 1$.

356. $(1-p)^m p$. **357**. $1/(n+1)$. **358**. $C_n^k\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\cdot\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$.

359. $\theta^2_{\eta,\xi}=0,167$; $\theta^2_{\xi,\eta}=0,151$.

360. $r\,(\xi)=\begin{cases} 1/3 & \text{при} \quad \xi=-1,\\ 3/2 & \text{при} \quad \xi=0,\\ 7/5 & \text{при} \quad \xi=2;\end{cases}$ $\quad r\,(\eta)=\begin{cases} -1 & \text{при} \quad \eta=0,\\ 1 & \text{при} \quad \eta=1,\\ 4/3 & \text{при} \quad \eta=2.\end{cases}$

362. Нет.

§ 10. Неравенства, ЗБЧ, ЦПТ

366. $1/3$. **367**. $5/36$. **368**. $1/256$. **369**. $0,75$ и $0,954$.

370. Сходится. **371**. При $\alpha>0$ сходится к $\xi\equiv 1$; при $\alpha=0$ сходится к $\xi\equiv 0$. **372**. Сходится. **373**. Сходится. **374**. Сходимости нет. **375**. Сходится.

377. Да. **378**. Да. **379**. Да. **380**. Да. **381**. Да. **382**. Нет. **383**. Да. **384**. Да.

385. $0,7699$. **386**. $0,9759$. **387**. Вероятность отклонения меньше 0,0001; отклонение нельзя считать случайным. **388**. $n>450000$. **389**. $0,04$. **390**. а) $0,68$; б) $0,65$. **391**. $n>900$. **393**. $n=233$. **394**. $n=1433$.

§ 11. Случайная выборка

395. $B(3;p)$. **396**. Гипергеометрическая. **397**. Нормальная. **398**. Нормальная $N(35;\sigma)$. **399**. Равномерная. **405**. а) Да. б) Нет. **410**. Гамма-распределение. **411**. Равномерное распределение. **412**. Нормальное распределение.

§ 12. Числовые характеристики выборки

415. $75/8$. **416**. $41/36$. **417**. $41/30$. **418**. $m_0 = 1$; $S \approx 1,4$. **419**. $m_0 = 1$; $S \approx 1,4$. **420**. $a_2 = 1,7$; $a_3 = 3$. **421**. $\overline{X} = 68/23$; $S^2 \approx 2,74$. **422**. $a_2 = 13/17$; $a_3 = 7/17$. **423**. $m_0 \approx 10,286$; $m_e = 13,2$. **424**. $a_3 = 159,125$. **425**. $\overline{X} = 13/6$.

§ 13. Статистические оценки

443. а) Несмещенная; б) асимптотически несмещенная. **444**. Несмещенная. **445**. Несмещенная. **446**. Смещенная. **447**. Смещенная. **448**. Несмещенная. **449**. Обе асимптотически несмещенные. **450**. а) асимптотически несмещенная; б) несмещенная. **451**. $k = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{n}$. **452**. $k = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. **453**. $k = \sqrt{\frac{\pi}{2(n-1)n}}$. **454**. $k = \sqrt{\frac{\pi}{2n^2+n(\pi-2)n}}$. **455**. $k = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. **457**. Асимптотически несмещенная. **462**. Состоятельная. **463**. Состоятельная. **464**. Состоятельная. **465**. Состоятельная. **466**. Состоятельная. **467**. Эффективная. **468**. Не эффективная. **469**. Не эффективная. **470**. Эффективная. **471**. Не эффективная. **472**. Оптимальная. **473**. Оптимальная.

475. $\hat{a} = \bar{X}$, $\widehat{\sigma^2} = s^2$. **476**. $(\bar{X})^2 + \bar{X}$. **477**. $\hat{p} = \frac{\overline{X}}{N}$. **478**. $\sum_{i=0}^{3}\left(\frac{\overline{X}}{N}\right)^i$. **479**. $2\bar{X} + 3$. **480**. $\hat{a} = X_1^*$. **481**. $\hat{b} = X_n^*$. **482**. $\hat{\alpha} = X_1^*$. **483**. $\hat{\alpha} = X_n^*$. **484**. $\hat{\alpha} = \frac{\beta}{\bar{X}}$. **485**. $\hat{a} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}\sum X_i^2} - 1$; состоятельна. **486**. $\hat{a} = \bar{X}$, $\widehat{\sigma^2} = s^2$. **487**. $\hat{\lambda} = \bar{X}$. **488**. $\hat{a} = 2\bar{X}$. **489**. $\hat{p} = \frac{\sum X_i}{nN}$. **490**. $\hat{p} = 1 - \frac{S^2}{\bar{X}}$; $\hat{N} = \frac{\bar{X}^2}{\bar{X}-S^2}$. **491**. $\hat{n} = \bar{X}$.

§ 14. Доверительные интервалы

492. $I_a = \left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$.

493. $I_a = \left(\overline{X} - \frac{\overline{S}}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1,\,1-\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X} + \frac{\overline{S}}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1,\,1-\frac{\alpha}{2}}\right)$.

494. $[3,61; 4,59]$. **495**. $[3,57; 4,63]$. **496**. $[101,7; 104,3]$. **497**. $[1,7; 2,1]$. **498**. $[736; 31900]$; $[27, ; 178]$. **499**. $[492,16; 507,84]$. **500**. $[23,59; 24,62]$. **501**. $[46,32; 47,68]$; $[46,10; 47,90]$.

503. $\left[\frac{2n\overline{X}+u_{1-\alpha/2}^2-u_{1-\alpha/2}\sqrt{4n\overline{X}+u_{1-\alpha/2}^2}}{2n}; \frac{2n\overline{X}+u_{1-\alpha/2}^2+u_{1-\alpha/2}\sqrt{4n\overline{X}+u_{1-\alpha/2}^2}}{2n}\right]$.

§ 15. Статистические гипотезы

507. $H_0: \ a_1 = a_2; H_1: \ a_1 > a_2$, где a_i — математические ожидания оценок в группах.

508. $H_0: \ a_1 = a_2; H_1: \ a_1 \neq a_2$, где a_i — математические ожидания оценок в группах.

509. $H_0: \ \sigma_1 = \sigma_2; H_1: \ \sigma_1 \neq \sigma_2$, где σ_i — средние квадратические отклонения оценок в группах.

510. $H_0: \ a_1 = a_2; H_1: \ a_1 > a_2$, где a_i — математические ожидания ежедневных покупок, совершенных в магазине в течение одного месяца до и после раздачи рекламных листовок.

511. $H_0: \ a_1 = a_2; H_1: \ a_1 < a_2$, где a_i — математические ожидания ежедневных покупок, совершенных в магазине в течение одного месяца до и после раздачи рекламных листовок.

512. $H_0: \ \sigma_1 = \sigma_2; H_1: \ \sigma_1 > \sigma_2$, где σ_i — средние квадратические отклонения ежедневных покупок.

513. $H_0: \ a_1 = a_2; H_1: \ a_1 < a_2$, где a_i — математические ожидания артериального давления до и после приема лекарства.

514. $H_0: \ a_1 = a_2; H_1: \ a_1 > a_2$, где a_i — математические ожидания артериального давления до и после приема лекарства.

515. $H_0: \ \sigma_1 = \sigma_2; H_1: \ \sigma_1 \neq \sigma_2$, где σ_i — средние квадратические отклонения
516. $H_0: \ \rho = 0; H_1: \ \rho < 0$.
518. Критическая область: $\overline{X} > 2,64$.
519. Критическая область: $(0;\ 0,1)$. $M = e^{-0,4}$.
522. Критическая область: $(-\infty;\ -1) \cup (-0,05; 0,05) \cup (1;\ \infty)$. $M = 0,126$.
523. Критическая область: $(-1;\ -0,83) \cup (0,83; 1)$. $M = 0,17$.

Проверка статистических гипотез

531. Нулевая гипотеза отвергается, разброс производительности различается.
533. Нулевая гипотеза не отвергается, различия следует считать случайными.
535. Нулевая гипотеза отвергается.
537. Гипотеза о распределении Пуассона не отвергается.

Приложение.

Таблица 3. Значения функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$0,0$	39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
$0,1$	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
$0,2$	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
$0,3$	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
$0,4$	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
$0,5$	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
$0,6$	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
$0,7$	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
$0,8$	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
$0,9$	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
$1,0$	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
$1,1$	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
$1,2$	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
$1,3$	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
$1,4$	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
$1,5$	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
$1,6$	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
$1,7$	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08330	08183	08038
$1,8$	07895	07754	07614	07477	07341	07207	07074	06943	06814	06687
$1,9$	06562	06438	06316	06195	06077	05960	05844	05730	05618	05508
$2,0$	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04492
$2,1$	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
$2,2$	03548	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02966	02899
$2,3$	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
$2,4$	02240	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01889	01842	01797
$2,5$	01753	01710	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
$2,6$	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
$2,7$	01042	01014	00987	00961	00935	00910	00885	00861	00837	00814
$2,8$	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
$2,9$	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00471	00457
$3,0$	00443	00430	00417	00405	00393	00381	00370	00358	00348	00337

x	Десятые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	00443	00327	00238	00172	00123	00084	00061	00043	00029	00020

Замечание. В таблице даны значения, округленные до пятого знака после запятой.

Указание. Пусть необходимо получить значение $\varphi(0,62)$. На пересечении столбца 2 («Сотые доли x») и строки $0,6$ («x») получаем значение 32918, т. е.

$$\varphi(0,62) = 0,32918.$$

Таблица 4. Значения функции $\Phi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$0,0$	$0,0000$	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
$0,1$	03983	04380	04776	05117	05567	05962	06356	06749	07142	07535
$0,2$	07920	08317	08700	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
$0,3$	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
$0,4$	15542	15910	16276	16640	17003	17365	17724	18082	18439	18793
$0,5$	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22241
$0,6$	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
$0,7$	25804	26115	26424	26731	27035	27337	27637	27935	28230	28524
$0,8$	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31328
$0,9$	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
$1,0$	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
$1,1$	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
$1,2$	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40148
$1,3$	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
$1,4$	41924	42073	42220	42634	42507	42647	42786	42922	43056	43189
$1,5$	43319	43447	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
$1,6$	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
$1,7$	45543	45637	45728	45819	45907	45994	46080	46164	46246	46327
$1,8$	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
$1,9$	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47671
$2,0$	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
$2,1$	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48499	48537	48574
$2,2$	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48839	48870	48899
$2,3$	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
$2,4$	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
$2,5$	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49491	49506	49520
$2,6$	49535	49547	49560	49573	49586	49598	49609	49621	49632	49643
$2,7$	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49737
$2,8$	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
$2,9$	49813	49819	49825	49830	49836	49841	49846	49851	49856	49861
$3,0$	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49897	49899

x	Десятые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	49865	49903	49931	49952	49966	49977	49984	49989	49993	49995

Замечание. В таблице даны значения, округленные до пятого знака после запятой.

Указание. Пусть необходимо получить значение $\Phi_0(1,57)$. На пересечении столбца 7 («Сотые доли x») и строки $1,5$ («x») получаем значение 44179, т. е.

$$\Phi_0(1,57) = 0,44179.$$

Таблица 5. Некоторые важные дискретные распределения

Обозначение	**Значения**	**Закон распределения**	**Интерпретация**
Вырожденное	$\xi \equiv c$	$\mathrm{P}(\xi = c) = 1$	Случайная величина — постоянная c
Дискретное равномерное	$\xi = x_i$; $i = 1, 2, \ldots, n$	$\mathrm{P}(\xi = x_i) = \dfrac{1}{n}$	Величина с равновероятными значениями
$B\,(1, p)$ — Бернулли	$\xi = 0, 1$	$\mathrm{P}(\xi = 0) = 1 - p, \quad \mathrm{P}(\xi = 1) = p$	Число успехов в одном испытании
$B\,(N, p)$ — Биномиальное	$\xi = 0, 1, \ldots, N$	$\mathrm{P}(\xi = m) = C_N^m p^m (1-p)^{N-m}.$ $m = 0, 1, \ldots, N; \quad N \in \mathbb{N};$ $0 < p < 1$	Число успехов в N испытаниях, проводимых по схеме Бернулли
P_λ — Пуассона	$\xi = 0, 1, \ldots$	$\mathrm{P}(\xi = m) = p_\lambda(m) = \dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$ $\lambda > 0$	Число маловероятных успехов в бесконечном ряду испытаний (λ — среднее число успехов)
$GG\,(N, M, n)$ — Гипергеометрическое	$\xi = 0, 1, \ldots, \min\,(M, n)$	$\mathrm{P}(\xi = m) = p_{M,N}(m, n);$ $p_{M,N}(m, n) = \dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$ $n \leqslant N, \quad m \leqslant M$	Из совокупности N предметов, среди которых M предметов первого вида и $(N - M)$ предметов второго вида, производят выборку без возвращения n предметов, где $1 \leqslant n \leqslant N$. Случайная величина — число предметов первого вида в выборке
G_p — Геометрическое	$\xi = 0, 1, \ldots$	$\mathrm{P}(\xi = m) = p(1-p)^m,$ $0 < p < 1$	Число неудач до первого успеха
$\overline{B\,(r, p)}$ — Отрицательное биномиальное (Паскаля)	$\xi = 0, 1, \ldots$	$\mathrm{P}(\xi = m) = C_{r+m-1}^m p^r (1-p)^m,$ $m = 0, 1, \ldots; \quad r > 0; \quad 0 < p < 1$	Если $r \in \mathbb{Z}$, то m — число неудач до r-го успеха

Таблица 6. Некоторые важные непрерывные распределения

Обозначение	Параметры	Плотность распределения
$R\,[a,\,b]$ — Равномерное	$a < b$	$\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \notin [a,\,b], \\ 1/(b-a) & \text{при} \quad x \in [a,\,b] \end{cases}$
$N\,(a,\,\sigma)$ — Нормальное [$\mathrm{N}\,(0,1)$ — стандартное нормальное распределение, причем $f_\xi(x) = \varphi\,(x)$, $F_\xi(x) = \Phi\,(x)$]	$a, \quad \sigma > 0$	$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} = \varphi_{a,\,\sigma}(x)$
E_λ — Показательное (экспоненциальное)	$\lambda > 0$	$\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$
$C_{a,\,\lambda}$ — Коши	$a > 0, \quad \lambda > 0$	$\dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{\lambda}{\lambda^2 + (x-a)^2}$
$\Gamma_{\alpha,\,\beta}$ — Г-распределение	$\alpha > 0, \quad \beta > 0$	$\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0 \\ \Gamma^{-1}(\beta)\alpha^\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x} & \text{при} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$
Кэптейна	$a, \quad \sigma > 0$	$\dfrac{g'(x)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(g\,(x)-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$
Логарифмически нормальное [частный случай распределения Кэптейна при $g\,(x) = \ln x$]	$a, \quad \sigma > 0$	$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}x} \exp\left\{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x > 0$
Лапласа	$\lambda > 0$	$\dfrac{\lambda}{2} \exp\{-\lambda\|x-\alpha\|\}$
Парето	$p > 0$	$\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 1, \\ px^{-(p+1)} & \text{при} \quad x \geqslant 1. \end{cases}$
Логистическое	$\beta > 0$	$\dfrac{1}{\beta} \cdot \dfrac{\exp\left\{-\frac{x-\alpha}{\beta}\right\}}{\left(1 + \exp\left\{-\frac{x-\alpha}{\beta}\right\}\right)^2}$

Таблица 7. Матем. ожидания и дисперсии некоторых важных распределений

Распределение		$\mathbf{M}\xi$	$\mathbf{D}\xi$
Бернулли	$B\,(1,\,p)$	p	pq
Биномиальное	$B\,(N,\,p)$	Np	Npq
Пуассона	P_λ	λ	λ
Гипергеометрическое	$G_{m,n}(M,\,N)$	$n\dfrac{M}{N}$	$\dfrac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
Геометрическое	G_p	$\dfrac{q}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$
Паскаля	$\overline{B}\,(r,\,p)$	$\dfrac{rq}{p}$	$\dfrac{rq}{p^2}$
Равномерное	$R[a,\,b]$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Нормальное	$N\,(a,\,\sigma)$	a	σ^2
Показательное	E_λ	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
Коши	$C_{a,\lambda}$	не $\exists$	не $\exists$
Г (Гамма)	$\Gamma_{\alpha,\beta}$	$\dfrac{\beta}{\alpha}$	$\dfrac{\beta}{\alpha^2}$
Лапласа		α	$\dfrac{2}{\lambda^2}$

Таблица 8. Греческий алфавит

Буква		Название
A	α	альфа
B	β	бета
Γ	γ	гамма
Δ	δ	дельта
E	ε	эпсилон
Z	ζ	дзета
H	η	эта
Θ	ϑ	тета
I	ι	йота
K	κ	каппа
Λ	λ	лямбда
M	μ	мю
N	ν	ню
Ξ	ξ	кси
O	o	омикрон
Π	π	пи
P	ρ	ро
Σ	σ	сигма
T	τ	тау
Υ	υ	ипсилон
Φ	φ	фи
X	χ	хи
Ψ	ψ	пси
Ω	ω	омега

Таблица 9. Таблица случайных чисел

5686	4215	5470	4452	4841	0477	9567	7496	1297	3594	1020	3531	4296
3106	9375	4545	0447	0754	6377	1127	7126	1021	4070	4488	2365	9633
9359	1271	7562	0122	8112	4863	1022	0731	8446	2302	8433	3299	5987
2057	0762	1429	8535	9029	9745	3458	5023	3502	2436	6435	2646	0295
6177	2755	3080	3275	0521	6623	1133	3278	0500	7573	7426	3188	0187
7707	3047	4901	3519	7888	6411	1631	6981	1972	4269	0022	3860	1580
6751	4022	6540	7804	5528	4690	3586	9839	6641	0404	0735	0888	3504
2651	9051	5764	7155	6489	2660	3341	8784	0605	4640	8692	7712	9832
6607	0480	2557	3461	9755	4398	8857	0221	3844	1823	4407	5914	7545
2362	2428	7899	2623	9965	7366	0486	8185	5896	3985	3105	7210	5375
2213	8481	0919	2350	7310	7106	0046	1683	6269	1120	5436	8921	6457
8361	9849	9902	4244	2377	9213	4625	5978	5266	7521	8488	6854	9203
2598	2673	2399	5112	4318	5003	3532	6430	5679	5041	2108	1813	4235
3915	9380	3918	5957	3603	6553	6247	8907	5282	1106	9223	5629	6982
4138	2901	7592	1650	2580	5676	6470	0122	0820	2140	5291	8499	3653
1727	0453	3032	2902	4114	2462	2820	0414	7197	3854	2940	3500	8685
6131	0774	7788	5011	4971	0848	0748	7103	3262	5182	1185	1493	3425
0114	4662	0802	1125	8745	5513	9750	0695	5727	7577	8631	0759	5430
9953	1426	0405	2109	2304	5329	2475	8555	8172	1376	3459	6778	6917
0159	9635	7058	4886	2373	5937	9383	5763	8004	8602	2457	9134	0099
2200	2369	8140	4865	4874	4867	5206	0434	3845	0659	0499	3671	2771
2104	9275	2118	8024	1033	0528	3665	9721	6339	3377	3780	0366	4746

Содержание