Пример

Задача 5. С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите массу дуги плоской материальной кривой $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$

при $0 \le t \le \dfrac{\pi}{3}$, если плотность вещества равна $\rho(x, y) = \dfrac{6y^2}{\sqrt{1+3x^2}}$.

Решение. Масса M дуги плоской материальной кривой между точками A и B выражается криволинейным интегралом первого рода по дуге AB кривой:

$M = \int\limits_{AB} \rho(x, y)dl$, где dl – дифференциал длины дуги. Если кривая задана параметрическим способом $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, то $dl = \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\, dt$, а криволинейный интеграл преобразуется в определенный интеграл по формуле

$$M = \int\limits_{t_1}^{t_2} \rho\left(\varphi(t), \psi(t)\right) \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\, dt,$$

где t_1 и t_2 – значения параметра t, соответствующие абсциссам точек A и B.

В нашем случае $\varphi'(t) = x'_t = -\sin t$, $\psi'(t) = y'_t = 2\cos t$, В нашем случае $\varphi'(t)=x'_t=-\sin t$, $\psi'(t)=y'_t=2\cos t$, поэтому

$$dl=\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt=\sqrt{\sin^2 t+4\cos^2 t}\,dt=\sqrt{1+3\cos^2 t}\,dt,$$

$$t_1=0,\quad t_2=\frac{\pi}{3}.$$

Плотность примет вид

$$\rho(x,y)=\frac{6y^2}{\sqrt{1+3x^2}}\Rightarrow\rho(\cos t,2\sin t)=\frac{24\sin^2 t}{\sqrt{1+3\cos^2 t}}.$$

Подставив полученные формулы в выражение криволинейного интеграла, будем иметь

$$M=\int_0^{\pi/3}\frac{24\sin^2 t\sqrt{1+3\cos^2 t}}{\sqrt{1+3\cos^2 t}}dt=\int_0^{\pi/3}24\sin^2 t\,dt=12\int_0^{\pi/3}(1-\cos 2t)dt=$$

$$=12\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/3}=12\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}\right)=12\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=4\pi-3\sqrt{3}.$$

Ответ: $4\pi-3\sqrt{3}$.

Задание

III. С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите массу M дуги плоской материальной кривой, заданной уравнениями а) $y=f(x)$ при $x_1\le x\le x_2$; б) $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ при $t_1\le t\le t_2$, если плотность вещества равна $\rho(x,y)$.

б) $\begin{cases}x=e^t\\ y=e^{-t}\end{cases}$, $\rho(x,y)=\dfrac{3x^2}{y^3}$, $t_1=\dfrac{1}{4}\ln 8$, $t_2=\dfrac{1}{4}\ln 24$.