

Практическое занятие №1
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
В МАШИНОСТРОЕНИИ
НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

3.1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Освоить математическое программирование, выполнив конкретное задание по определению программ выпуска изделий, по «расцеховке» изделий и по рациональному раскрою листового материала. Научиться выполнять решения задач математического программирования в среде *MS Excel*

3.2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Методы математического программирования представляют собой класс моделей, применяемых для формализации задач планирования, предусматривающих распределение ограниченного количества ресурсов разных видов. Подобного рода задачи решаются в различных отраслях деятельности: в экономике, в промышленности, при разработке проектов, составлении расписаний, планировании военных операций и т. п.

Употребление слова «программирование» связано с тем, что при решении задач находят такой набор переменных, который является *программой* (планом) при выполнении поставленной задачи. Методы линейного программирования применяются в случае, когда математическая модель изучаемого процесса может быть представлена в виде совокупности линейных отношений. Эти линейные отношения связывают некоторые параметры, определяющие ход процесса, и состоят из *системы ограничений* и *целевой функции*.

Методы решения такого типа задач позволяют найти оптимальные варианты управления, процессы, структуры, т. е. выбрать лучшее решение из всех возможных. Такие задачи относятся к *задачам оптимизации*.

Условно типы задач из области машиностроения можно разделить на технико-экономические, технические, технологические, проектно-организационные, транспортные. Косвенным образом соотносятся с машиностроением и другие типы задач, которые могут быть решены методом линейного программирования: задачи оптимального планирования, распределения различных ресурсов, управления запасами, календарное планирование, межотраслевого баланса и т. п.

В рассматриваемой работе требуется составить математическую модель задачи машиностроения, основанной на линейном программировании. Требуется составить целевую функцию, систему ограничений и решить задачу, пользуясь MS EXCEL.

3.2.1. Техничко-экономическая задача определения программ выпуска нескольких видов продукции при ограниченности сырья

Рассмотрим постановку этой задачи на конкретном примере.

Для изготовления двух видов продукции P_1, P_2 используют три вида сырья: S_1, S_2, S_3 . Запасы сырья, затрачиваемые на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемая от реализации единицы продукции приведены в табл. 2.1. Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при её реализации получить максимальную прибыль.

Таблица 3.1

Исходные данные

Вид сырья	Запасы сырья	Кол-во единиц сырья, идущих на изготовление единицы продукции	
		P_1	P_2
S_1	20	2	5
S_2	40	8	5
S_3	30	5	6
Прибыль от единицы продукции, руб.		50	40

Обозначим через x_1 количество единиц продукции P_1 , а через x_2 количество единиц продукции P_2 . Тогда, учитывая количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также запасы сырья, получим систему ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 40, \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30; \end{cases} \quad x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \quad (3.1)$$

которая показывает, что количество сырья, необходимое на изготовление продукции, не может превысить имеющихся запасов. Кроме того, на неизвестные x_1 и x_2 должно быть

наложено ограничение неотрицательности: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ (с позиций здравого смысла)

Конечную цель решаемой задачи – получение максимальной прибыли при реализации

продукции – выразим как функцию двух переменных x_1 и x_2 . Реализация x_1 единиц продукции вида P_1 и x_2 единиц продукции вида P_2 дает

соответственно $50x_1$ и $40x_2$ руб. прибыли. Выражение для суммарной прибыли есть также выражение для целевой функции задачи

$$Z = 50x_1 + 40x_2 \text{ (руб)}. \quad (3.2)$$

Необходимо найти такие неотрицательные значения x_1 и x_2 , которые удовлетворяли бы системе ограничений (3.1) и при которых функция (3.2) měla бы максимальное значение.

3.2.2. Техническая задача определения рационального способа разрезки (раскроя) листового материала

Также рассмотрим на конкретном примере.

На предприятии из стандартных листов стального проката необходимо вырезать заготовки трех видов в количествах, соответственно равных 24, 31 и 18 шт. Каждый лист может быть разрезан на заготовки двумя способами. Количество получаемых заготовок при данном способе раскроя приведено в табл. 2.2. В ней же указана величина отходов, которые получают при данном способе раскроя одного листа стального проката.

Таблица 3.2

Исходные данные к задаче определения рационального способа разрезки листового материала

Вид заготовки	Количество заготовок (шт.) при раскрое по способу	
	1	2
I	2	6
II	5	4
III	2	3
Величина отходов (см 2)	12	16

Определить, сколько листов проката и по какому способу следует раскроить так, чтобы было получено не меньше нужного количества заготовок при минимальных отходах.

3.2.3. Организационно-техническая задача распределения различных изделий для изготовления в различных цехах («расцеховка») либо распределение по участкам цеха, либо распределение по рабочим местам (оборудованию)

При разработке межцехового технологического маршрута необходимо провести так называемую расцеховку деталей (изделий): распределить множество групп деталей $D = \{d_i\}$ между группой цехов $C = \{c_j\}$. Заданы:

суммарная трудоемкость t_i изготовления детали-представителя i -й группы.

Найти x_{ij} – количество деталей i -й группы (часть от программы N_i), обработка которых должна производиться в j -м цехе. На рис. 3.1 показан двудольный граф соответствий элементов множеств D и C .

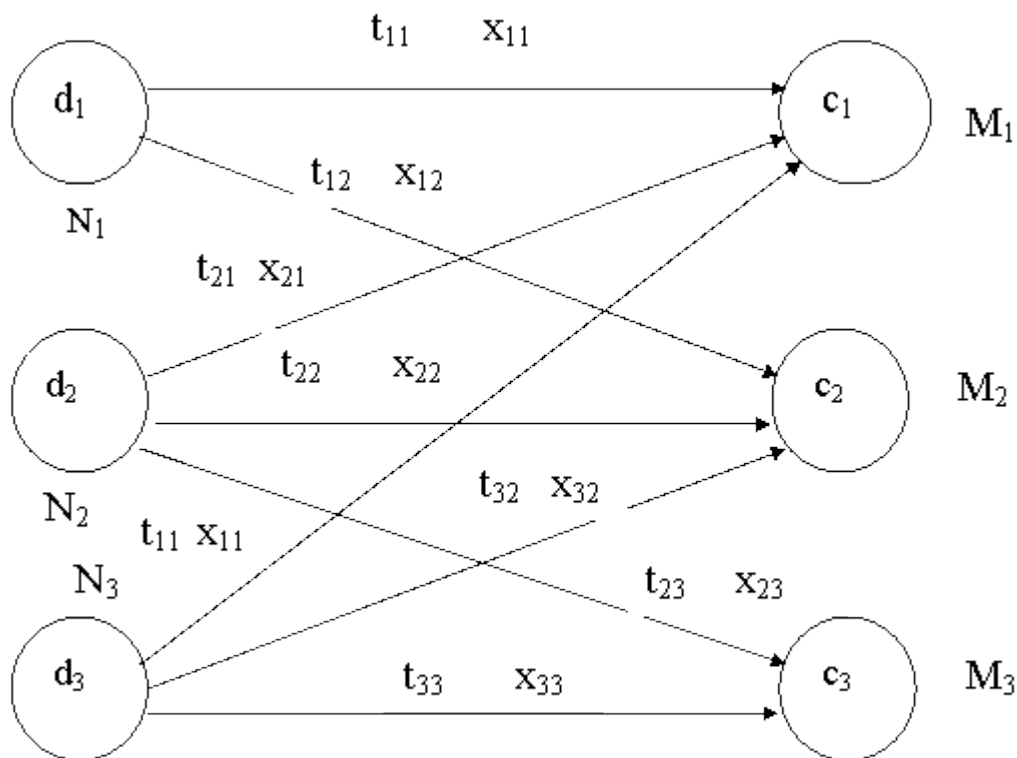


Рис. 3.1. Двудольный граф соответствий элементов множеств D и C :

N_i – программа выпуска i -й детали, M_j – мощность j -го цеха в нормо-часах
Для решения задачи составляются системы линейных уравнений:

1. Баланс мощностей цехов M_i

$$t_{11}x_{11} + t_{21}x_{21} + \dots + t_{m1}x_{m1} + E_1 = M_1;$$

$$t_{12}x_{12} + t_{22}x_{22} + \dots + t_{m2}x_{m2} + E_2 = M_2; \quad (3.3)$$

.....

$$t_{1n}x_{1n} + t_{2n}x_{2n} + \dots + t_{mn}x_{mn} + E_n = M_n.$$

Мощность цеха M_i задается в нормо-часах и определяется суммарным временем работы оборудования цеха за определенный период времени (в рассматриваемом случае – за год).

E_i - резерв мощности i -го цеха, показывает недоиспользованную мощность цеха при выбранном варианте распределения деталей.

2. Баланс расчетных программ групп деталей N_i

$$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = N_1;$$

$$x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = N_2; \quad (3.4)$$

.....

$$x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = N_m$$

3. Равномерность относительной загрузки цехов

$$\frac{E_1}{M_1} = \frac{E_2}{M_2};$$

$$\frac{E_2}{M_2} = \frac{E_3}{M_3}; \quad (3.5)$$

.....

$$\frac{E_{n-1}}{M_{n-1}} = \frac{E_n}{M_n},$$

где M_j – мощность j -го цеха; E_j – резерв мощности j -го цеха.

Целевая функция, которую необходимо максимизировать, записывается в виде

$$F = \frac{E_1}{M_1} + \frac{E_2}{M_2} + \dots + \frac{E_n}{M_n}. \quad (3.6)$$

Эта функция выражает стремление минимизировать время обработки деталей в каждом цехе (относительный резерв мощности при этом должен увеличиваться)

3.3. ЗАДАНИЕ

Работа включает три задания:

- 1) определить программы выпуска нескольких видов продукции при ограниченности сырья (см. п. 1.1);
- 2) определить рациональный способ резки (раскроя) листового материала (см. п. 1.2);
- 3) распределить различные изделия для изготовления в различных цехах («расцеховка») (см. п. 1.3).

По каждому заданию преподаватель выдает каждому студенту (или 2-м, 3-м студентам, работающим за одним компьютером) индивидуальный вариант.

Примеры заданий.

К заданию 1:

Вид сырья	Запасы сырья	Кол-во единиц сырья, идущих на изготовление единицы продукции	
		P_1	P_2
S_1	25	3	4
S_2	35	5	5
S_3	40	4	3
S_4	20	3	4
Прибыль от единицы продукции, руб.		40	45

К заданию 2:

Вид заготовки	Количество заготовок (шт.) при раскрое по способу	
	I	II
I	3	5
II	4	5
III	3	6
Величина отходов (см 2)	10	9

К заданию 3:

Программы	Мощности цехов, <i>нормо-часы</i>		
	200	300	400
	Трудоемкость, <i>час</i>		
20	3	2	1
30	0	3	2
40	0	0	4
50	5	0	3

3.4. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

По каждому заданию необходимо:

- 1) записать систему ограничений задачи и выражение для целевой функции;
- 2) записать результаты решения: искомые параметры (с расшифровкой полученных числовых величин), экстремальное значение целевой функции;
- 3) скопировать соответствующие результаты решения из *MS Excel* в отчет

3.5. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

Отчет выполнить в письменном виде на формате А4. Отчет должен включать:

- 1) краткие теоретические сведения;
- 2) задание;

- 3) аналитические зависимости: систему ограничений и целевую функцию;
- 4) распечатку результатов расчета неизвестных параметров;
- 5) результаты расчета в расшифрованном виде.

3.6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

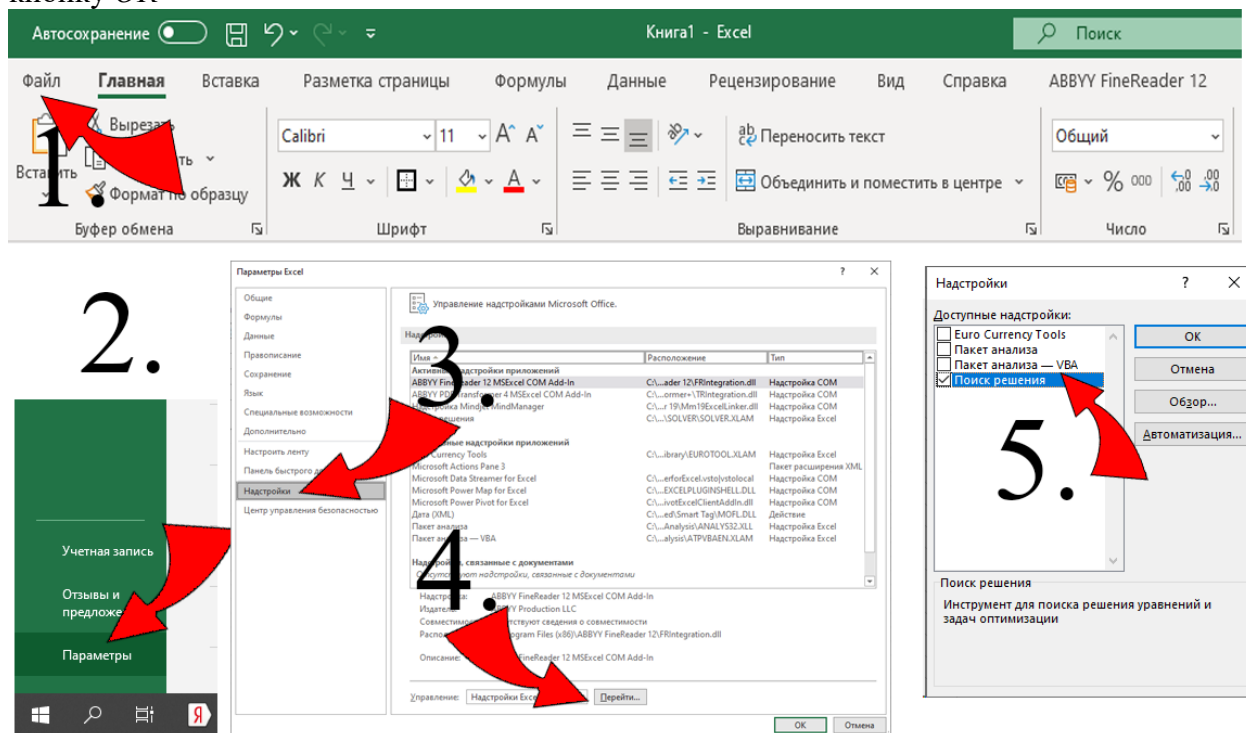
- 1) Какие технические задачи решаются в математическом программировании?
- 2) Какие технологические задачи решаются в математическом программировании?
- 3) Какие технико-экономические задачи решаются в математическом программировании?
- 4) Что входит в систему ограничений задачи линейного программирования при расцеховке изделий?
- 5) Что оптимизируется в задаче расцеховки изделий?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. , Бакусова моделирование в машиностроении на основе линейного программирования: [учебное пособие](#) по дисциплине «Системный анализ и математическое моделирование процессов в машиностроении» / , ; Уфимск. гос. авиац. ун-т – Уфа, 20с.
2. Акулич программирование в примерах и задачах.. М.: Высшая школа, 19с.
3. Решение задачи расцеховки изделий с использованием линейного программирования: методические указания / сост. ёров, . Уфа: УГАТУ, 19с.
4. Бережная, Е. В., Бережной, методы моделирования экономических систем: учеб. пособие / , . М.: Финансы и статистика, 20с.
5. Долголаптев, в Excel 7.0 для Windows 95 на примерах / . М.: БИНОМ, 19с.
6. Давлеткулов задачи расцеховки изделий методом линейного программирования: Методические указания к лабораторной работе по дисциплине «Математическое моделирование в машиностроении» / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т, Уфа, 1996. – 10 с.

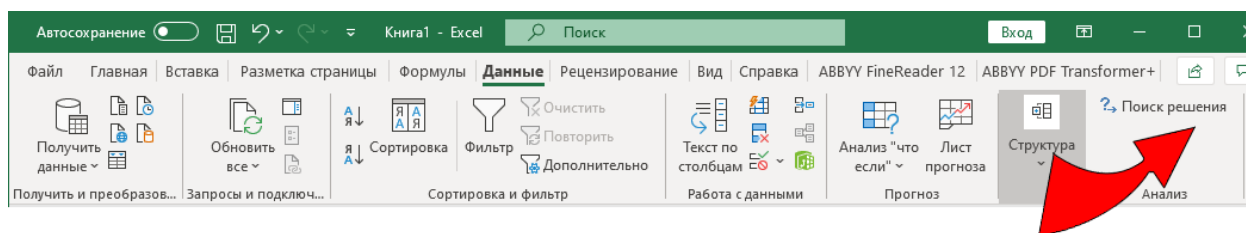
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В MS Excel

Активизировать решение задач математического программирования можно с помощью инструмента *Поиск решения*. Для запуска этого инструмента выполните команду *Файл* (1) / *Параметры* (2). Появится окно диалога «*Параметры Excell*» (3), в котором необходимо перейти в раздел «*Надстройки*» (3) и нажать кнопку перейти в «*Надстройка Excell*» (4). И уже в новом диалоговом окне установите флажок на строке *Поиск решения* (5) и нажмите кнопку *OK*



Пример активации инструмента «поиска решения» в Word 2016/365

После загрузки инструмента *Поиск решения* на вкладке *Данные* появиться меню *Поиск решения*.



В результате нажатия этой кнопки появляется окно диалога «*Поиск решения*».

В поле ввода *Установить целевую ячейку* указывается ссылка на ячейку с целевой функцией, значение которой будет максимальным, минимальным или нулем в зависимости от выбранного вами переключателя.

В поле ввода *Изменяя ячейки* указываются ячейки, которые отведены под переменные целевой функции.

Кнопка *Параметры* вызывает окно диалога «*Параметры поиска решения*», в котором вы можете изменять параметры алгоритма поиска решения.

Для примера определим оптимальный план выпуска продукции в условиях дефицита сырья. Предположим, что предприятие выпускает два вида продукции. Цена единицы 1 вида продукции равна 25000 руб., 2 вида – 50 000 руб.

Для изготовления продукции используются три вида сырья, запасы которого оцениваются в 37, 57,6 и 7 условных единиц. Соответствующие коэффициенты приведены в табл. 1.

Таблица 1. Исходные данные

Коэффициенты расхода сырья на единицу продукции

Продукция		Запасы сырья
Вид 1	Вид 2	(усл. ед.)
1,2	1,9	37
2,3	1,8	57,6
0,1	0,7	7

Таблицу исходных данных перенесем в Excell

		Продукция		Запасы
		Вид 1	Вид 2	(усл. ед.)
		1,2	1,9	37
		2,3	1,8	57,6
		0,1	0,7	7
	ЦЕНА	25000	50000	

Обозначим количество произведенной продукции 1 вида через $B1$, 2 вида – $B2$. Целевая функция есть выражение следующего вида:

$$J(B1, B2) = 25000 * B1 + 50000 * B2$$

Это есть цена произведенной продукции. Наше решение должно обеспечить максимальное значение этой функции.

Табл. П1 налагает на величины $B1$ и $B2$ ограничения следующего вида:

$$1,2 * B1 + 1,9 * B2 \leq 37$$

$$2,3 * B1 + 1,8 * B2 \leq 57,6$$

$$0,1 * B1 + 0,7 * B2 \leq 7$$

$$B1 \geq 0$$

$$B2 \geq 0$$

Задача поставлена и приступаем к ее решению. Выполните следующие действия:

1. Введите в ячейки $B1$ и $B2$ начальные значения переменных. В нашем случае примем эти значения нулевыми.
2. Введите в ячейку $B3$ формулу для целевой функции: $=25000*B1 + 50000*B2$ (для ввода $B1$ и $B2$ нужно щелкнуть на соответствующей ячейке, т. е. создать Ссылку, аналогично можно поступить и с коэффициентами данных неизвестных).
3. Введите в ячейку $B5$ формулу для ограничения: $=1,2*B1+1,9*B2$.
4. Введите в ячейку $B6$ формулу для ограничения: $=2,3*B1+1,8*B2$
5. Введите в ячейку $B7$ формулу для ограничения: $=0,1*B1+0,7*B2$

6. Введите в ячейку B8 формулу для ограничения: =B1
7. Введите в ячейку B9 формулу для ограничения: =B2.
8. Выполните команду *Поиск решения*. Появится окно диалога «Поиск решения»

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

До: ☒ Максимум ☐ Минимум ☐ Значения:

Изменяя ячейки переменных:

В соответствии с ограничениями:

- \$B\$2 = целое
- \$B\$1 = целое
- \$B\$5 <= 37
- \$B\$6 <= 57,6
- \$B\$7 <= 7
- \$B\$8 >= 0
- \$B\$9 >= 0

☒ Сделать переменные без ограничений неотрицательными

Выберите метод решения: Поиск решения нелинейных задач методом ОПГ

Метод решения

Для гладких нелинейных задач используйте поиск решения нелинейных задач методом ОПГ, для линейных задач - поиск решения линейных задач симплекс-методом, а для негладких задач - эволюционный поиск решения.

Справка Найти решение Заккрыть

9. В поле ввода *Установить целевую ячейку* введите ссылку на ячейку B3.
10. В поле ввода *Изменяя ячейки* укажите ссылки на ячейки B1:B2.
11. Начинаем вводить информацию в поле ввода *Ограничения*. Нажмите кнопку *Добавить*. Появится окно диалога *Добавить ограничения*. В поле ввода *Ссылка на ячейку* введите ссылку на ячейку B5. В поле ввода *Ограничение* введите \leq и число 37 (или указываем ссылку на ячейку а тпблице исходных данных).
12. Воспользуйтесь кнопкой *Добавить* для ввода остальных ограничений. Для изменения ограничения установите на него курсор и нажмите кнопку *Изменить*.
13. Аналогичную операцию проделайте для ввода ограничения на целочисленность переменных. В поле ввода *Ссылка на ячейку* введите ссылку на ячейку B1. В поле ввода *Ограничение* введите *цел*. Аналогично – для ячейки B2.
14. Нажмите кнопку *Выполнить*. После окончания расчета Excel откроет окно диалога «Результаты поиска решения».
15. Выберите в окне «*Тип отчета*» *Результаты* и нажмите кнопку *ОК*. Перед вашим листом, где записана постановка задачи, будет вставлен лист «Отчет по результатам 1», а

Задания по вариантам

1 вариант:

Вид сырья	Запасы сырья	Кол-во единиц сырья, идущих на изготовление единицы продукции	
		P_1	P_2
S_1	25	3	4
S_2	35	5	5
S_3	40	4	3
S_4	20	3	4
Прибыль от единицы продукции, руб.		40	45

2 вариант:

Вид заготовки	Количество заготовок (шт.) при раскрое по способу	
	I	II
I	3	5
II	4	5
III	3	6
Величина отходов (см 2)	10	9

3 вариант

Программы	Мощности цехов, <i>нормо-часы</i>		
	200	300	400
	Трудоемкость, <i>час</i>		
20	3	2	1
30	0	3	2
40	0	0	4
50	5	0	3

4 вариант

Вид сырья	Запасы сырья	Кол-во единиц сырья, идущих на изготовление единицы продукции	
		P_1	P_2
S_1	20	7	6
S_2	3	6	5
S_3	44	4	5
S_4	33	2	4
Прибыль от единицы продукции, руб.		60	55

5 вариант

Вид заготовки	Количество заготовок (шт.) при раскрое по способу	
	<i>I</i>	<i>II</i>
I	5	7
II	2	5
III	2	6
Величина отходов	3	8

6 вариант

Программы	Мощности цехов, <i>нормо-часы</i>		
	200	300	400
	Трудоемкость, <i>час</i>		
20	4	2	2
30	0	5	2
40	0	0	4
50	7	0	2

7 вариант

Вид сырья	Запасы сырья	Кол-во единиц сырья, идущих на изготовление единицы продукции	
		<i>P₁</i>	<i>P₂</i>
S₁	35	7	6
S₂	12	6	7
S₃	43	9	5
S₄	60	4	7
Прибыль от единицы продукции, руб.		49	80

8 вариант

Вид заготовки	Количество заготовок (шт.) при раскрое по способу	
	<i>I</i>	<i>II</i>
I	5	7
II	2	5
III	2	6
Величина отходов	8	10

9 вариант

Программы	Мощности цехов, <i>нормо-часы</i>		
	200	300	400
	Трудоемкость, <i>час</i>		
20	1	2	4
30	0	4	3
40	0	0	5
50	7	0	3

10 вариант

Вид сырья	Запасы сырья	Кол-во единиц сырья, идущих на изготовление единицы продукции	
		P_1	P_2
S_1	45	7	7
S_2	22	8	7
S_3	73	9	8
S_4	20	5	4
Прибыль от единицы продукции, руб.		79	40

11 вариант

Вид заготовки	Количество заготовок (шт.) при раскрое по способу	
	I	II
I	15	7
II	6	8
III	12	9
Величина отходов	10	8

12 вариант

Вид сырья	Запасы сырья	Кол-во единиц сырья, идущих на изготовление единицы продукции	
		P_1	P_2
S_1	35	7	6
S_2	12	6	7
S_3	43	9	5
S_4	60	4	7
Прибыль от единицы продукции, руб.		49	80

13 вариант

Вид заготовки	Количество заготовок (шт.) при раскрое по способу	
	I	II
I	5	7
II	2	5
III	2	6
Величина отходов	8	10

14 вариант

Вид заготовки	Количество заготовок (шт.) при раскрое по способу	
	<i>I</i>	<i>II</i>
I	5	7
II	2	5
III	2	6
Величина отходов	8	10

15 вариант

Программы	Мощности цехов, <i>нормо-часы</i>		
	200	300	400
	Трудоемкость, <i>час</i>		
20	4	2	2
30	0	5	2
40	0	0	4
50	7	0	2