

## ЗАДАНИЕ Д-4

### Плоскопараллельное движение твердого тела

Барабан радиуса  $R$  весом  $P$  имеет проточку (как у катушки) радиуса  $r=0,5R$  (рис.4.1, табл. Д-4). К концам намотанных на барабан нитей приложены постоянные силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , направления которых определяются углом  $\beta$ . Кроме сил на барабане действует пара с моментом  $M$ . При движении, начинающимся из состояния покоя, барабан катится без скольжения по шероховатой наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  так, как показано на рисунках.

Пренебрегая сопротивлением качению, определить закон движения центра масс барабана, т.е.  $x_C=f(t)$ , и наименьшее значение коэффициента трения  $f_{min}$  о плоскость, при котором возможно качение без скольжения. Барабан рассматривать как сплошной однородный цилиндр радиуса  $R$ .

**Указания.** При решении задачи Д-4 следует использовать дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела. При составлении уравнений следует, во избежание ошибок в знаках, направить координатную ось  $x$  в ту сторону, куда предполагается направление движения центра масс барабана (точка  $C$ ), и считать положительными моменты, направленные в сторону вращения барабана. Если фактически направление движения центра  $C$  является другим, то в результате получится  $a_C < 0$  и найденная величина будет верной. Силу трения, когда не ясно, куда она направлена, можно направлять в любую сторону.

Определяя наименьшее значение коэффициента трения, при котором возможно качение без скольжения, следует учесть, что сила трения не может быть больше предельной, т.е. что  $|F_{TP}| \leq fN$ , откуда  $f \geq \frac{|F_{TP}|}{N}$ . Следовательно

$f_{min} = \frac{|F_{TP}|}{N}$ . Очень существенно, что во все эти выражения входят модули сил (мы не пишем  $|N|$ , так как в данной задаче не может быть  $N < 0$ ). Если при расчетах получится  $F_{TP} < 0$ , то это означает лишь, что фактически сила  $F_{TP}$  направлена в другую сторону.

### Пример выполнения задания Д-4

Барабан (сплошной однородный цилиндр) радиусом  $R$  и весом  $P$  начинает катиться без скольжения из состояния покоя по наклонной плоскости с углом  $\alpha$ . На барабан действует сила и пара сил с моментом  $M$  (рис.4.2).

Дано:  $P$ ,  $F = 0,8P$ ,  $M = 1,1PR$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ .

Определить: 1)  $x_C=f(t)$  - закон движения центра масс барабана; 2)  $f_{min}$  - наименьший коэффициент трения, при котором возможно качение без скольжения.

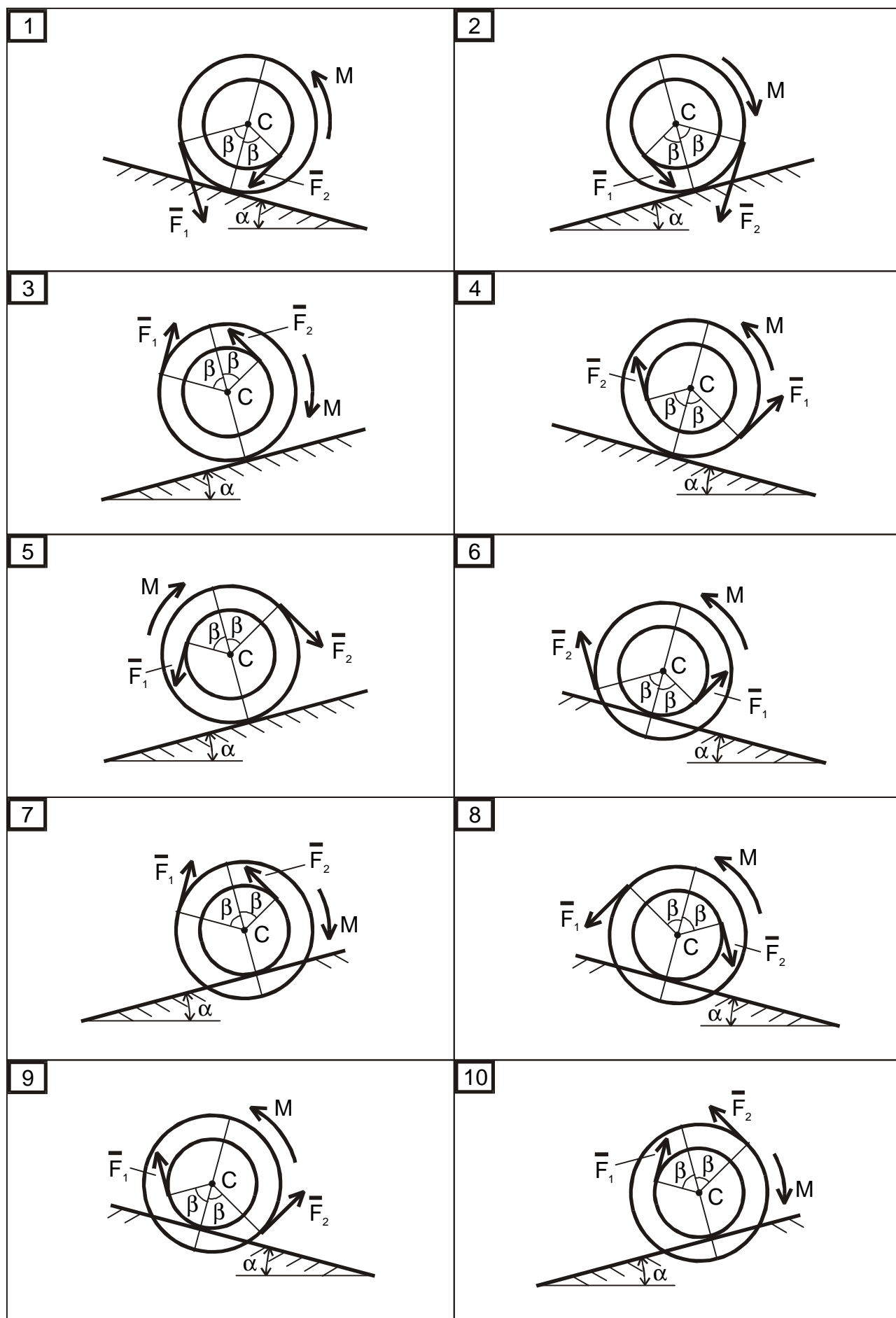


Рис. 4.1

Таблица Д-4

№ варианта	№ рисунка	$\alpha, ^\circ$	$\beta, ^\circ$	$F_1$	$F_2$	$M$
1	1	30	60	0	0,4P	0
2	2	30	30	0,2P	0	0
3	3	0	30	0	0,2P	0,1PR
4	4	30	-	0	0	0,4PR
5	5	30	90	0,1P	0	0,2PR
6	6	0	60	0,3P	0,1P	0
7	7	30	0	0	0,3P	0,2PR
8	8	0	60	0,2P	0	0,3PR
9	9	30	90	0	0,2P	0,4PR
10	10	30	60	0,1P	0	0,3PR
11	1	30	60	0,4P	0	0
12	2	0	30	0	0,2P	0,3PR
13	3	30	30	0,2P	0,3P	0
14	4	0	60	0,1P	0	0,1PR
15	5	30	30	0	0,2P	0,4PR
16	6	0	90	0,1P	0	0,3PR
17	7	30	60	0,2P	0	0,4PR
18	8	30	30	0	0,1P	0,3PR
19	9	0	90	0,4P	0	0,1PR
20	10	30	60	0	0,3P	0,4PR
21	1	30	60	0,1P	0,2P	0
22	2	0	30	0	0,3P	0,5PR
23	3	30	90	0,1P	0	0,2PR
24	4	30	60	0	0,4P	0,1PR
25	5	30	30	0,2P	0	0,2PR
26	6	0	60	0,1P	0,2P	0
27	7	30	90	0,3P	0	0,1PR
28	8	30	60	0	0,1P	0,4PR
29	9	0	30	0,2P	0	0,1PR
30	10	30	90	0	0,4P	0,2PR

**Решение.**

Барабан совершает плоскопараллельное движение под действием сил:  $\vec{P}$ ,  $\vec{F}$ ,  $\vec{N}$  и  $\vec{F}_{TP}$  и момента  $M$ . Так как направление силы трения  $\vec{F}_{TP}$  нам заранее неизвестно, выбираем его произвольно. Выбираем оси  $Ox$ ,  $Oy$  и составляем дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{kx} \quad , \quad m\ddot{x}_C = F \cos \beta + P \sin \alpha + F_{TP} \quad ; \quad (1)$$

$$m\ddot{y}_C = \sum F_{ky} \quad , \quad m\ddot{y}_C = N - P \cos \alpha - F \sin \beta \quad ; \quad (2)$$

$$I_{Cz} \ddot{\varphi} = \sum M_{Cz}(\vec{F}_k) \quad , \quad \frac{mR^2}{2} \varepsilon = FR - F_{TP}R - M \quad . \quad (3)$$

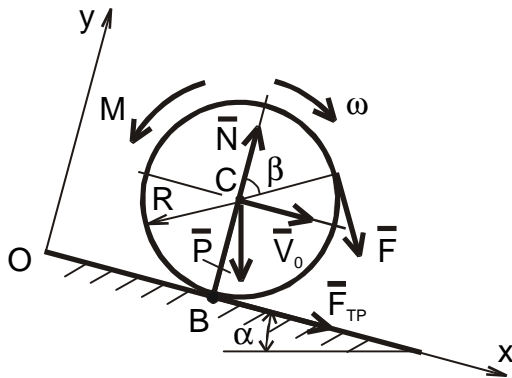


Рис. 4.2

За положительное направление для моментов принято направление угловой скорости  $\omega$ , т.е. в ту сторону, куда будет вращаться барабан при движении центра от оси  $Oy$ .

В систему уравнений (1), (2), (3) входят пять неизвестных ( $\ddot{x}_C$ ,  $\ddot{y}_C$ ,  $\varepsilon$ ,  $F_{TP}$ ,  $N$ ).

Но так как  $y_C = \text{const} = R$ , то  $\ddot{y}_C = 0$ , следовательно осталось четыре неизвестных ( $\ddot{x}_C$ ,  $\varepsilon$ ,  $F_{TP}$ ,  $N$ ).

Для решения задачи необходимо воспользоваться

соотношением из кинематики. Так как точка  $B$  является мгновенным центром скоростей, то

$$V_C = \dot{x}_C = \omega R \quad , \quad a_C = \ddot{x}_C = \dot{\omega}R = \varepsilon R \quad . \quad (4)$$

1) Определение  $\ddot{x}_C = f(t)$ .

Чтобы определить  $\ddot{x}_C = f(t)$ , исключим  $\varepsilon$  из уравнения (3), подставив в него (4)

$$\frac{1}{2}m\ddot{x}_C = F - F_{TP} - \frac{M}{R} \quad . \quad (5)$$

Далее из (1) и (5) исключим неизвестную силу  $F_{TP}$ , для этого сложим отдельно левые и правые части уравнений

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_C = F(1 + \cos \beta) + P \sin \alpha - \frac{M}{R} \quad ,$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_C = 0,8P(1 + \cos 30^\circ) + P \sin 30^\circ - 1,1P \quad ,$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_C = 0,89P \quad .$$

Отсюда, так как  $P = mg$  получим для определения  $x_C = f(t)$  следующее дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}_C = 0,6g \quad . \quad (6)$$

Интегрируя уравнение (6), получим

$$\dot{x}_C = 0,6gt + C_1, \quad x_C = 0,3gt^2 + C_1t + C_2. \quad (7)$$

На основании начальных условий  $\dot{x}_C(0)=0$ ,  $x_C(0)=0$  и уравнений (7) имеем  $C_1=0$ ,  $C_2=0$ .

Таким образом получим закон движения центра масс

$$x_C = 0,3gt^2. \quad (8)$$

2) Определение  $f_{\min}$ .

Для определения  $f$  исходим из того, что при качении без скольжения сила трения должна удовлетворять неравенству

$$|F_{TP}| \leq fN. \quad (9)$$

В (9) входят модули сил. Величину  $N$  находим из (2), учитывая, что  $\ddot{y}_C = 0$ . Получим

$$N = P \cos \alpha + F \sin \beta = P \cos 30^\circ + 0,8P \sin 30^\circ = 1,27P. \quad (10)$$

Значение  $F_{TP}$  можно найти из (5), подставив в него  $\ddot{x}_C$  из (6).

Получим

$$0,3mg = F - F_{TP} - \frac{M}{R}, \quad \text{т. к. } mg = P, \quad \text{то}$$

$$F_{TP} = F - \frac{M}{R} - 0,3P = 0,8P - 1,1P - 0,3P = -0,6P. \quad (11)$$

Знак указывает, что сила  $\vec{F}_{TP}$  имеет направление, противоположное указанному на рисунке.

Подставляя значения  $F_{TP}$  и  $N$  из равенств (10) и (11) в неравенство (9), получим  $0,6P \leq 1,27Pf$ , откуда  $f \geq 0,47$ .

Следовательно наименьшим коэффициентом трения, при котором возможно качение барабана без скольжения, будет  $f_{\min} = 0,47$ .