

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЯНОЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт экономики и сервиса**

Кафедра «Управление и сервис в технических системах»

**Учебно-методическое пособие
для выполнения лабораторных работ
по теме «Центральное растяжение и сжатие»**

**Уфа
УГНТУ
2018**

Пособие охватывает один из разделов курса «Сопротивление материалов», встречающееся при решении практических инженерных вопросов расчета на прочность, жесткость и устойчивость конструкций машиностроения. В данном пособии даются задания на лабораторные работы, порядок и пример выполнения работы по теме «Центральное растяжение и сжатие». Основываясь на рассмотренных примерах, студенты самостоятельно смогут выполнять лабораторные работы. Пособие предназначено для самостоятельного изучения предмета и подготовки к зачету и экзамену по курсу «Сопротивление материалов».

Данное пособие предназначено для студентов, изучающих дисциплину «Сопротивление материалов» как отдельный предмет, или как один из разделов таких дисциплин как «Механика», «Прикладная механика», «Техническая механика».

Пособие предназначено для студентов инженерных специальностей всех форм обучения: 15.03.02 Технологические машины и оборудование, 18.03.01 Химическая технология, 19.03.02 Продукты питания из растительного сырья, 20.03.01 Техносферная безопасность, 29.03.02 Технологии и проектирование текстильных изделий, 29.03.05 Конструирование изделий легкой промышленности.

Составители: Хизбуллина С.Ф., канд. физ.-мат. наук
Зарипов Д.М., канд. физ.-мат. наук

Рецензент: Шатдинов Н.С., канд. техн. наук,
Низамутдинов М.Х., канд. техн. наук

Содержание

Введение	4
Основные термины и определения	5
Основные гипотезы (допущения)	8
Основные условные обозначения	9
Вводная часть.....	11
Лабораторная работа №1 – Расчет статически определимого стержня переменного сечения.....	13
Лабораторная работа №2 – Расчет статически неопределимого стержня постоянного сечения.....	21
Лабораторная работа №3 – Расчет статически неопределимого стержня переменного сечения.....	31
Общие положения и указания по выполнению лабораторных работ	42
Список рекомендуемой литературы.....	43
Приложение А. Единицы измерений	44

Введение

Сопротивление материалов решает указанные задачи, основываясь как на теоретических, так и на опытных данных, имеющих в этой науке одинаково важное значение. В теоретической части сопротивление материалов базируется на теоретической механике и математике, а в экспериментальной – на физике и материаловедении. Сопротивление материалов не исчерпывает всех вопросов механики деформируемого твёрдого тела. Этими вопросами занимаются такие смежные дисциплины, как строительная механика стержневых систем, теория упругости и теория пластичности. Однако основная роль при решении задач на прочность принадлежит сопротивлению материалов. При всём разнообразии видов конструктивных элементов, встречающихся в сооружениях и машинах, их можно свести к сравнительно небольшому числу основных форм. Тела, имеющие эти основные формы, и являются объектами расчёта на прочность, жёсткость и устойчивость.

Учебное методическое пособие составлено с целью оказания методической помощи студентам при выполнении лабораторных работ по курсу «Сопротивление материалов». Перед выполнением лабораторной работы необходимо изучить соответствующий раздел курса «Сопротивление материалов» по лекциям, рекомендуемым учебникам и учебным пособиям, также указаниям, данным в вводной части настоящего пособия.

Основные термины и определения

Соппротивление материалов – наука об инженерных методах расчёта на прочность, жёсткость и устойчивость элементов машин и сооружений.

Прочность – способность конструкции, её частей и деталей выдерживать определённую нагрузку, не разрушаясь.

Жёсткость – способность конструкции и её элементов противостоять внешним нагрузкам в отношении деформаций (изменение формы и размеров).

При заданных нагрузках деформации не должны превышать определённых величин, устанавливаемых в соответствии с требованиями к конструкции.

Устойчивость – способность конструкции и её элементов сохранять определённую начальную форму упругого равновесия.

Основными объектами расчёта являются брусья (стержни), пластины, оболочки, массивные тела.

Брус – это деталь удлинённой формы, у которой высота и ширина малы по сравнению с третьим размером – длиной, т. е. третий размер – значительно больше двух других габаритных размеров: $L \gg b$ и $L \gg h$.

Брус условно рассматривают в виде совокупности параллельных или почти параллельных продольных волокон. Сечения бруса, нормальные волокнам, называются поперечными сечениями.

Прямой брус, работающий на растяжение – сжатие, называют стержнем.

Прямой брус, работающий на изгиб – кручение, называют балкой.

Прямой брус, работающий на кручение, называют валом.

Основными факторами работы бруса являются: нагрузки; усилия в сечениях; деформации; перемещения сечений.

Поперечное сечение – это сечение бруса плоскостью, перпендикулярной его оси. По схеме бруса рассчитывают валы редукторов, приводов, балки и стойки кранов, элементы конвейеров, транспортёров и многое другое.

Стержень – это тонкий и длинный брус, у которого размеры поперечного сечения ничтожны по сравнению с длиной оси.

Пластиной называется тело, у которого один из трёх размеров (толщина) значительно меньше двух других. Пластины могут быть круглыми, прямоугольными и иметь другие очертания контура.

Оболочка представляет собой тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, близко расположенными друг от друга. По форме оболочки бывают цилиндрические, конические, сферические и др.

Массивное тело – это тело, у которого все три размера одного порядка. Реальные тела под действием нагрузок или изменения температуры могут деформироваться, т. е. изменять свою форму и размеры.

Различают деформации упругие, пластические и остаточные.

Основные виды деформаций:

- растяжение и сжатие;
- сдвиг (или срез);
- кручение;
- изгиб.

Сочетание основных видов деформации приведёт к сложному виду деформации.

Растяжение или сжатие возникает, например, в случае, когда к стержню вдоль его оси приложены противоположно направленные силы. При этом происходит поступательное перемещение сечений вдоль оси стержня, который удлиняется, а при сжатии укорачивается. Изменение первоначальной длины стержня L , обозначенное ΔL , называется **абсолютным удлинением** (при растяжении) или **абсолютным укорочением** (при сжатии). Отношение абсолютного удлинения (укорочения) ΔL к первоначальной длине L стержня или его участка называется **средним относительным удлинением (укорочением)** на длине L или **средней линейной относительной деформацией** стержня или его участка и обозначается:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta L}{L}.$$

Сдвиг, или срез, возникает, когда внешние силы смещают два параллельных плоских сечения одно относительно другого при неизменном расстоянии между ними. Величина смещения Δs называется **абсолютным сдвигом**. Отношение абсолютного сдвига к расстоянию между смещающимися плоскостями (тангенс угла) называется **относительным сдвигом**. Вследствие малости угла γ можно принять:

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma \approx \frac{\Delta s}{a}.$$

Кручение возникает при действии на стержень внешних сил, образующих момент относительно его оси. Деформация кручения сопровождается поворотом поперечных сечений стержня друг относительно друга вокруг его оси. Угол поворота одного сечения стержня относительно другого, находящегося на расстоянии L , - угол закручивания φ .

Отношение угла закручивания φ к длине L называется **относительным углом закручивания** θ :

$$\theta = \frac{\varphi}{L}.$$

Изгиб заключается в искривлении оси прямого стержня или в изменении кривизны кривого стержня.

Происходящее при изгибе перемещение какой-либо точки оси стержня выражается вектором, начало которого совмещено с первоначальным положением точки, а конец s – с положением той же точки в деформированном стержне. В прямых стержнях перемещения точек, направленные перпендикулярно к начальному положению оси, называются **прогибами** w , а наибольший из них – y . При изгибе также происходит поворот сечений стержня вокруг осей, лежащих в плоскостях сечений, относительно своих начальных положений углы поворота сечений – $\theta_{x(y)}$.

Перемещения – изменение положения поверхностных или внутренних точек детали при воздействии внешних сил. Перемещения возникают при растяжении, сжатии, сдвиге, изгибе, кручении.

Внешние силы – это активные силы, приложенные к рассматриваемой детали, а также реактивные силы, возникающие в опорах.

Активные внешние силы делятся на объёмные и поверхностные.

Объёмные силы – это силы, приложенные к каждой элементарной частичке детали (силы веса, инерции и др.).

Поверхностные силы – это силы, приложенные к поверхности детали различным способом. Поверхностные силы подразделяются на сосредоточенные и распределённые.

Сосредоточенная сила – это сила, приложенная на площадке, пренебрежимо малой по сравнению с поверхностью детали. В расчётных схемах принимают приложение сосредоточенной силы в точке.

Распределённая сила q – это сила, приложенная на площадке, соизмеримой с поверхностью детали.

Внешний скручивающий момент вызывается внешними парами сил, действующими относительно геометрической оси стержня и лежащими в плоскостях, перпендикулярных к оси стержня, но не проходящих через центр тяжести поперечного сечения вала.

Внутренние силы – это силы, возникающие внутри тела, препятствующие действию внешних сил.

Определяются внутренние силы **методом сечений**, т.е. деталь мысленно разрезается плоскостью на две части и одна из них уравнивается противодействующими внутренними силами. Вторая часть мысленно отбрасывается.

Для рассматриваемой части так же, как для целого бруса, составляются уравнения равновесия по закону статики.

Напряжение – интенсивность внутреннего усилия, приходящегося на единицу геометрической характеристики рассматриваемого сечения, например, площади сечения.

Основные гипотезы (допущения)

1. Материал детали считается сплошным (без пустот) и однородным.
2. Упругие свойства материала во всех направлениях одинаковы, т.е. материал тела обладает упругой изотропностью.
3. Тело считается абсолютно упругим, если после устранения причин, вызывающих деформацию оно полностью восстанавливает свои первоначальные размеры и форму (абсолютная упругость). Это допущение справедливо при напряжениях, не превышающих предел упругости σ_y .
4. Деформации материала конструкции в каждой точке прямо пропорциональны напряжениям в этой точке (закон Гука). Закон Гука справедлив лишь при напряжениях, не превышающих предел пропорциональности σ_{nc} .
5. Деформации малы по сравнению с размерами детали.
6. Результат воздействия на конструкцию системы нагрузок равен сумме результатов воздействия каждой нагрузки в отдельности (принцип независимости действия сил или принцип суперпозиции).
7. Поперечное сечение, плоское до деформации, остаётся плоским и после деформации (гипотеза Бернулли).

Основные условные обозначения

Линейные размеры

- L, l, a – длины стержня, балки вала или их участков
 μl – приведённая длина стержня
 a, b, H, h, d – размеры поперечного сечения
 C – расстояние – размер раздвижки элементов составного сечения
 z – координата произвольной точки сечения
 Δ – линейная величина неточности изготовления (натяг)

Геометрические характеристики плоских сечений

- F – площадь поперечного сечения стержня
 S_X, S_Y, S_Z – статические моменты площади фигуры поперечного сечения стержня относительно осей X, Y, Z
 X_C, Y_C – координаты центра тяжести сечения
 J_X, J_Y – осевые моменты инерции сечения
 J_{XY} – центробежный момент инерции
 J_P – полярный момент инерции
 i_X, i_Y – радиусы инерции
 W_X, W_Y – осевые моменты сопротивления
 W_P – полярный момент сопротивления

Напряжения

- σ – нормальное напряжение
 τ – касательное напряжение
 $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение
 $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение
 $\sigma_{\max}, \tau_{\max}$ – максимальные напряжения
 n, n_y – коэффициенты запаса прочности и устойчивости
 φ – коэффициент уменьшения напряжения при продольном изгибе

Деформации и перемещения

- Δl — абсолютная продольная деформация
- ε — относительное продольное удлинение
- φ — угол закручивания при кручении
- θ — относительный угол закручивания
(или угол поворота сечения при изгибе)
- y — прогиб балки
- λ — гибкость стержня
- γ — угол сдвига, относительный

Вводная часть

При растяжении, сжатии от действия внешних нагрузок в прямом стержне возникают невидимые внутренние нормальные силы N , вызывающие в поперечных сечениях нормальные напряжения σ .

Направление нормальных напряжений совпадает с направлением нормальной силы. Эти напряжения есть интенсивность внутреннего усилия N , приходящегося на единицу площади поперечного сечения F :

$$\sigma = \frac{N}{F}.$$

При действии разнохарактерной нагрузки на брус с переменными сечениями нормальные напряжения следует определять по каждому участку бруса по формуле $\sigma_i = \frac{N_i}{F_i}$. Из полученных результатов максимальное значение напряжения σ_{\max} сравнивается с допускаемым значением $[\sigma]$ для выбранного или назначенного вида материала детали.

Условие прочности при растяжении, сжатии:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{F} \leq [\sigma].$$

Допускаемое нормальное напряжение $[\sigma]$ определяется в зависимости от коэффициентов запаса прочности по пределу текучести n_T или по пределу прочности n_B для рассчитываемой конструкции или для конкретной детали и механических свойств материала бруса σ_T или σ_B :

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} \text{ или } [\sigma] = \frac{\sigma_B}{n_B}.$$

Для расчёта стальных брусев в курсовых работах коэффициент запаса по текучести принимается $n_T = 1,5$; по временному сопротивлению $n_B = 2,5$. Напряжения σ_T и σ_B принимаются по таблицам ГОСТ на материал бруса.

Вместе с напряжениями σ в брусѣ возникают абсолютные продольные и поперечные удлинения ΔL_{np} и ΔL_{non} .

Их отношение к общей длине бруса является относительной продольной деформацией $\varepsilon_{np} = \frac{\Delta L_{np}}{L}$ и относительной поперечной деформацией $\varepsilon' = \frac{\Delta L_{non}}{L}$.

Абсолютная величина отношения относительной поперечной деформации ε' к относительной продольной деформации ε является относительной деформацией

$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|$ и называется коэффициентом Пуассона.

При известных геометрических данных бруса (L – длина, F – площадь поперечного сечения) и известном модуле упругости первого рода E (модуль Юнга при растяжении) и вычисленной продольной (нормальной) силе N можно определить абсолютное удлинение бруса с помощью закона Гука:

$$\Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot F}.$$

Для бруса, изготовленного из разных материалов и нагруженного несколькими силами на разных расстояниях, полное абсолютное осевое перемещение конца вычисляется как сумма абсолютных удлинений по участкам в зависимости от точек приложения сил и модулей упругости материалов по закону Гука:

$$\Delta L = \sum \Delta L_i = \sum \frac{N_i \cdot L_i}{E_i \cdot F_i}.$$

Кроме условий по прочности, к брусу могут быть предъявлены условия по жёсткости, где критерием служит допускаемая относительная продольная деформация.

Условие жёсткости имеет вид:

$$\varepsilon_{\max} = \frac{N}{E \cdot F} \leq [\varepsilon].$$

Лабораторная работа №1 – Расчет статически определимого стержня переменного сечения

Данная лабораторная работа посвящена расчёту на прочность и жёсткость статически определимого стержня переменного сечения на растяжение и сжатие при осевом воздействии внешней продольной нагрузки.

Цель: определить действующие в стержне (рисунок 1.1) нормальные напряжения σ_i , определить полное удлинение ΔL стержня и сделать вывод.

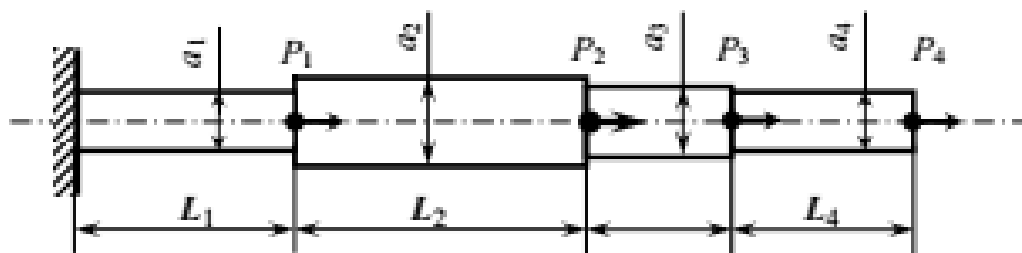


Рисунок 1.1 – Схема ступенчатого стержня, нагруженного осевыми силами

Общие исходные данные:

- Материал стержня – сталь Ст. 4.
- Сечение стержня - квадрат со стороной a_i .
- Модуль нормальной упругости – $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.
- Допускаемое напряжение – $[\sigma] = 160$ МПа.
- Коэффициент запаса прочности по пределу текучести – $n_T = 1,5$; по временному сопротивлению – $n_B = 2,5$.

Остальные данные для выполнения взять из таблицы 1.1.

Порядок выполнения:

1. Вычертить в масштабе расчётную схему.
2. Определить опорную реакцию.
3. Определить зависимость внутренних усилий N_i от внешних сил, используя метод сечений на каждом участке.
4. Вычислить нормальные силы N_i и построить их эпюру.
5. Вычислить нормальные напряжения σ_i , построить их эпюру и определить наиболее напряжённый участок стержня.
6. Проверить соблюдение условия прочности для наиболее напряжённого участка стержня по допускаемому напряжению $[\sigma]$.
7. Определить абсолютную продольную деформацию Δl_i каждого участка стержня. Выразить деформации через внутренние усилия по закону Гука.
8. Вычислить величину полного удлинения стержня.
9. Результаты и выводы.

Таблица 1.1 – Варианты исходных данных для величин P_i , a_i , L_i

Вариант	P_i				a_i				L_i			
	P_1	P_2	P_3	P_4	a_1	a_2	a_3	a_4	L_1	L_2	L_3	L_4
1	P	$3P$	P	P	$2a$	a	$2a$	a	L	L	L	L
2	P	$3P$	$2P$	P	a	a	$2a$	$2a$	$2L$	L	L	L
3	P	$3P$	P	$3P$	$3a$	a	$3a$	$3a$	L	$2L$	L	L
4	P	P	$2P$	$2P$	$4a$	$2a$	a	a	L	L	$2L$	L
5	P	$2P$	$2P$	P	$4a$	a	$2a$	$2a$	L	L	L	$2L$
6	$2P$	$3P$	P	P	$3a$	$2a$	$4a$	$4a$	$2L$	$2L$	L	L
7	$2P$	$5P$	P	$2P$	$4a$	$4a$	$2a$	$2a$	$2L$	L	$2L$	L
8	P	$2P$	P	P	$4a$	$4a$	a	$2a$	L	L	$2L$	$2L$
9	P	$4P$	P	$2P$	a	$3a$	$2a$	$2a$	L	L	L	L
10	P	$2P$	P	$2P$	$4a$	$4a$	$2a$	$3a$	L	$2L$	L	L
11	P	$3P$	P	P	$2a$	a	$2a$	a	L	L	L	L
12	P	P	P	$2P$	a	a	$2a$	$2a$	$2L$	L	L	L
13	P	$3P$	P	P	$3a$	a	$3a$	$3a$	L	$2L$	L	L
14	$2P$	$2P$	P	$2P$	$4a$	$2a$	a	a	L	L	$2L$	L
15	P	$2P$	P	$2P$	$4a$	a	$2a$	$2a$	L	L	L	$2L$
16	P	P	$2P$	$3P$	$3a$	$2a$	$4a$	$4a$	$2L$	$2L$	L	L
17	P	P	$2P$	$5P$	$4a$	$4a$	$2a$	$2a$	$2L$	L	$2L$	L
18	$2P$	P	P	$2P$	$4a$	$4a$	a	$2a$	L	L	$2L$	$2L$
19	$2P$	P	P	$2P$	a	$3a$	$2a$	$2a$	L	L	L	L
20	P	P	P	$3P$	$4a$	$4a$	$2a$	$3a$	L	$2L$	L	L
21	P	$2P$	$2P$	P	$3a$	$2a$	$4a$	$4a$	$2L$	$2L$	L	L
22	$2P$	$3P$	$2P$	P	$4a$	$4a$	$2a$	$2a$	$2L$	L	$2L$	L
23	P	$3P$	P	P	$4a$	$4a$	a	$2a$	L	L	$2L$	$2L$
24	P	$2P$	P	$2P$	a	$3a$	$2a$	$2a$	L	L	L	L
25	P	P	$2P$	$3P$	$4a$	$4a$	$2a$	$3a$	L	$2L$	L	L
26	P	P	$2P$	$2P$	$4a$	a	$2a$	a	L	$2L$	$2L$	$3L$
27	P	$2P$	$2P$	P	$3a$	$2a$	$2a$	$3a$	L	L	$3L$	$2L$
28	P	P	P	$2P$	$4a$	$2a$	$3a$	a	$2L$	L	L	3
29	P	$3P$	P	P	$4a$	$4a$	a	$2a$	L	L	$2L$	$2L$
30	P	$2P$	$2P$	P	a	$3a$	$2a$	$2a$	$3L$	$2L$	L	L

Пример выполнения:

Стержень переменного сечения закреплён одним концом в точке A и нагружен продольными силами P_i . Форма всех поперечных сечений стержня – квадрат со стороной a_i . Длины участков по ступеням – L_i .

На рисунке 1.2 изображена в масштабе заданная схема.

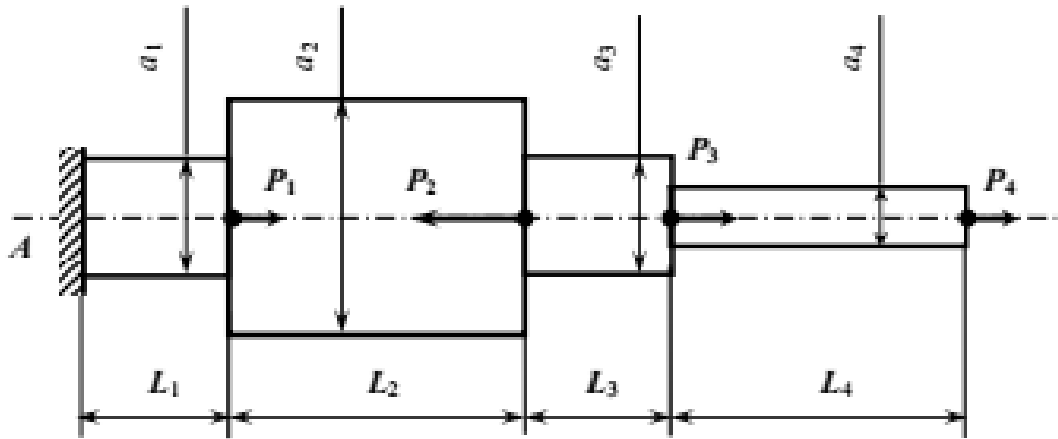


Рисунок 1.2. – Заданная схема ступенчатого стержня, нагруженного осевыми силами

Требуется:

- построить эпюры нормальных усилий N_i ;
- построить эпюры нормальных напряжений σ_i ;
- вычислить полное удлинение стержня ΔL ;
- сделать вывод о прочности стержня.

Материал стержня – сталь Ст. 4.

Сечение стержня - квадрат со стороной a_i .

Модуль нормальной упругости – $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Допускаемое напряжение – $[\sigma] = 160$ МПа.

Коэффициент запаса прочности:

- по пределу текучести $n_T = 1,5$;
- по временному сопротивлению $n_B = 2,5$.

Исходные данные по номеру варианта из таблицы 1.1:

$P = 10$ кН;	$a = 10$ мм;	$L = 500$ мм;
$P_1 = +P = 10$ кН;	$a_1 = 2a = 20$ мм;	$L_1 = L = 500$ мм;
$P_2 = -5P = -50$ кН;	$a_2 = 4a = 40$ мм;	$L_2 = 2L = 1000$ мм;
$P_3 = +P = 10$ кН;	$a_3 = 2a = 20$ мм;	$L_3 = L = 500$ мм;
$P_4 = +P = 10$ кН;	$a_4 = a = 10$ мм;	$L_4 = 2L = 1000$ мм.

1. Вычерчиваем расчётную схему с заданными внешними нагрузками (рисунок 1.3)

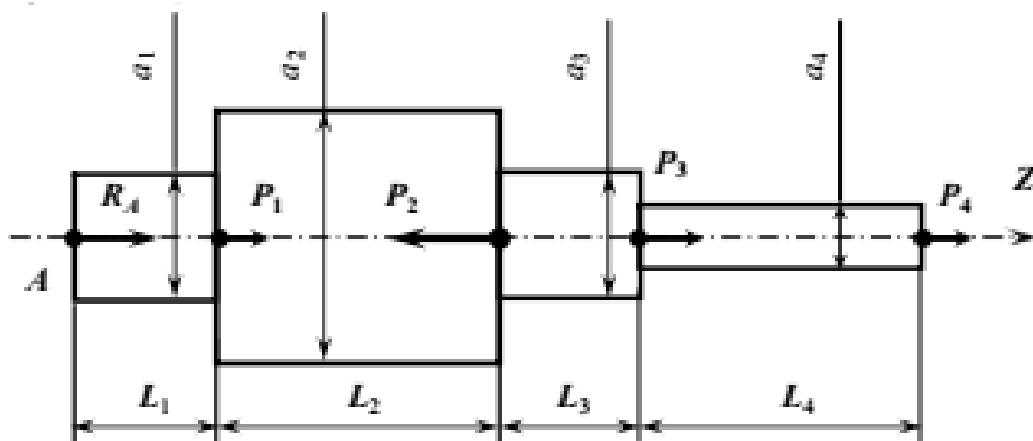


Рисунок 1.3. – Расчетная схема ступенчатого стержня, нагруженного осевыми силами

В расчётной схеме мысленно делаем замену опорного закрепления стержня в точке A реакцией опоры R_A .

Так как нам неизвестно направление реакции R_A , то произвольно указываем предполагаемое направление.

2. Определяем опорную реакцию в защемлении.

Составляем уравнения статики – уравнения равновесия всех внешних сил:

$$\Sigma Z = 0; \quad R_A + P_1 - P_2 + P_3 + P_4 = 0. \quad (1)$$

В плоскости, перпендикулярной к оси Z , силы отсутствуют, поэтому относительно осей X и Y отсутствуют и уравнения. Остаётся одно уравнение $\Sigma Z = 0$, из которого находим:

$$R_A = -P_1 + P_2 - P_3 - P_4;$$

$$R_A = -P + 5P - P - P = 2P; \quad R_A = 2P = 2 \cdot 10 = 20 \text{ кН}. \quad R_A = 20 \text{ кН}.$$

Результат вычислений получен со знаком «+», значит, принятое перед расчётом, направление реакции R_A было выбрано правильно.

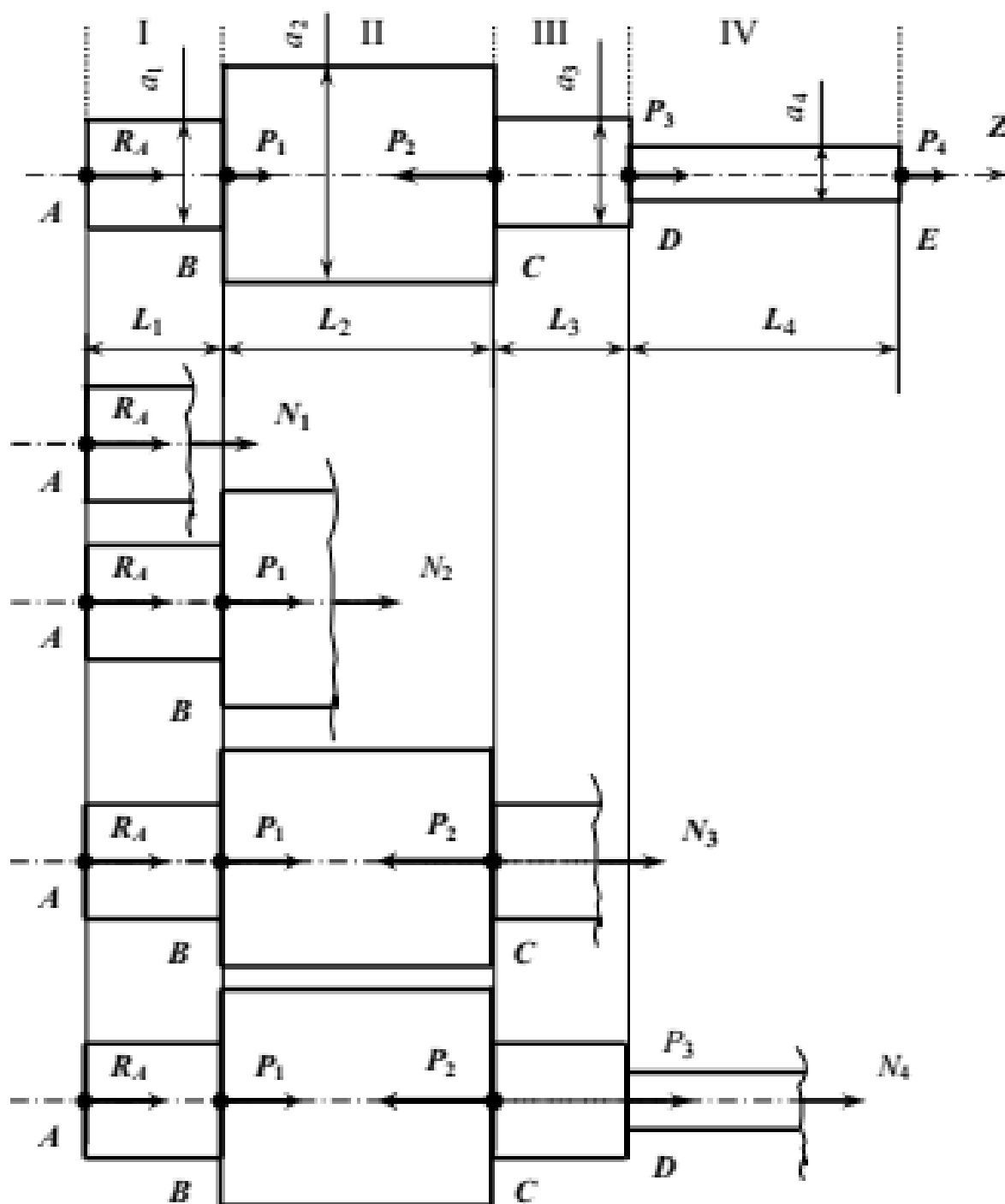
3. Для определения в любом поперечном сечении стержня внутренних усилий разграничиваем его на характерные участки (I, II, III, IV).

Определяем количество участков. Границами участков являются точки приложения внешних сил A, B, C, D, E . Нумеруем участки (рисунок 1.4).

Определяем зависимость внутренних усилий N_i от внешних сил, используя метод сечений на каждом участке.

В пределах каждого участка проводим произвольное сечение, которое делит стержень на две части. В центре тяжести сечения изображаем внутреннее усилие N_i в произвольно предполагаемом направлении. Полагаем направление положительным, если оно совпадает с положительным направлением оси Z , а усилие N_i при этом растягивающим, имеющим знак «плюс». Рассматриваем равновесие одной из них. (В данном примере рассматриваются левые отсечённые части стержня.) На рисунке 1.4 изображены положительные направления

Записываем уравнения равновесия отсечённых частей стержня, которые выражают зависимость внутреннего усилия в рассматриваемом сечении от всех внешних сил, действующих по левую сторону от сечения.



17

Сечение:

на I участке $R_A + N_1 = 0;$ (2)

на II участке $R_A + P_1 + N_2 = 0;$ (3)

на III участке $R_A + P_1 - P_2 + N_3 = 0;$ (4)

на IV участке $R_A + P_1 - P_2 + P_3 + N_4 = 0.$ (5)

Из уравнений равновесия определяем зависимость внутреннего усилия N_i от внешних сил:

на I участке $R_A + N_1 = 0.$
 $N_1 = -R_A.$ (6)

на II участке $N_2 = -R_A - P_1.$ (7)

на III участке $N_3 = -R_A - P_1 + P_2.$ (8)

на IV участке $N_4 = -R_A - P_1 + P_2 - P_3.$ (9)

4. Вычисляем нормальные силы N_i и строим их эпюру.

Из равенств (6), (7), (8), (9) имеем:

$N_1 = -20 \text{ кН}$ (сжатие).

$N_2 = -30 \text{ кН}$ (сжатие).

$N_3 = +20 \text{ кН}$ (растяжение).

$N_4 = +10 \text{ кН}$ (растяжение).

Знак «минус» в результатах вычислений указывает на противоположное действительное направление внутреннего усилия, выбранного неверно перед определением зависимостей N_i от R_A на схеме для участков I и II. В действительности I и II работают на сжатие. Строим эпюру внутренних усилий N_i по участкам (рисунок 1.5).

5. Определяем нормальные напряжения σ_i в сечениях стержня по участкам, учитывая, что площадь квадратного поперечного $F_i = a_i^2$, по условию $a = 10 \text{ мм}$.

Заметим, что $1 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} = 1 \text{ МПа}$.

на I участке $\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{-20000}{(2 \cdot 10)^2} = -50 \text{ МПа}$ (сжатие).

на II участке $\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{-30000}{(4 \cdot 10)^2} = -18,75 \text{ МПа}$ (сжатие).

на III участке $\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{+20000}{(2 \cdot 10)^2} = +50 \text{ МПа}$ (растяжение).

на IV участке $\sigma_4 = \frac{N_4}{F_4} = \frac{+10000}{10^2} = +100 \text{ МПа}$ (растяжение).

Строим эпюру нормальных напряжений по участкам (рисунок 1.5).

Из эпюры нормальных напряжений σ_i видно, что наиболее нагруженным является 4-й участок стержня.

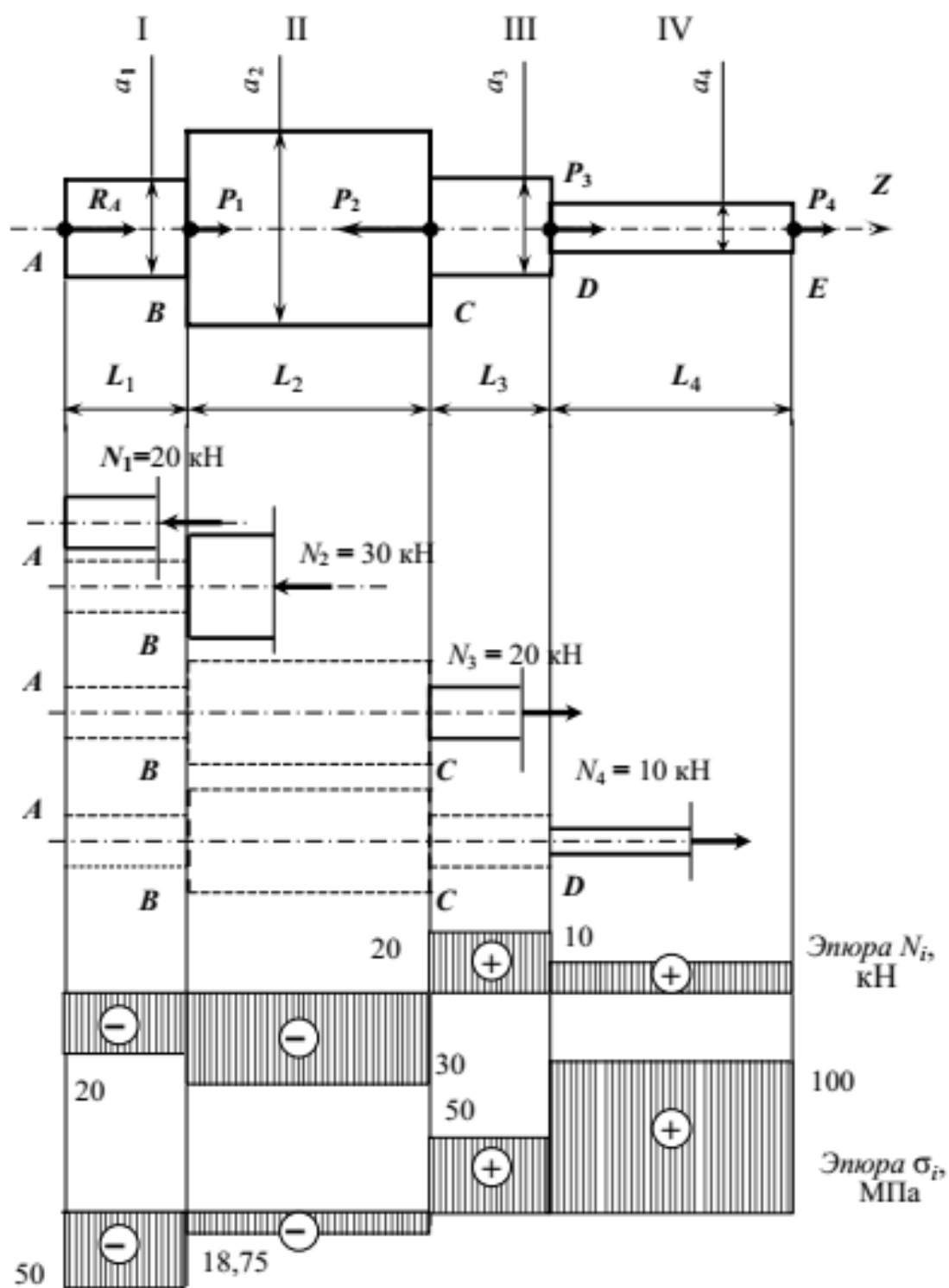


Рисунок 1.5. – Схема действительных направлений внутренних усилий и эпюры N_i и напряжений σ_i по участкам стержня

6. Проверяем прочность стержня по допускаемому напряжению.

При центральном растяжении или сжатии условие прочности имеет вид

$$|\sigma_{\max}| \leq [\sigma] \text{ или } \sigma_{\max} \leq \frac{|N_{\max}|}{F} \leq [\sigma].$$

Так как $|\sigma_{\max}| = 100 < [\sigma] = 160$ МПа, условие прочности выполняется.

7. Определяем абсолютные деформации участков стержня.

По закону Гука $\Delta L_i = \frac{N_i \cdot L_i}{E \cdot F_i}$ или $\Delta L_i = \frac{\sigma_i \cdot L_i}{E}$, тогда имеем:

$$\Delta L_1 = \frac{\sigma_1 \cdot L_1}{E} = \frac{-50 \cdot 500}{2 \cdot 10^5} = -12,5 \cdot 10^{-2} \text{ мм};$$

$$\Delta L_2 = \frac{\sigma_2 \cdot L_2}{E} = \frac{-18,75 \cdot 1000}{2 \cdot 10^5} = -9,375 \cdot 10^{-2} \text{ мм};$$

$$\Delta L_3 = \frac{\sigma_3 \cdot L_3}{E} = \frac{+50 \cdot 500}{2 \cdot 10^5} = +12,5 \cdot 10^{-2} \text{ мм};$$

$$\Delta L_4 = \frac{\sigma_4 \cdot L_4}{E} = \frac{+100 \cdot 1000}{2 \cdot 10^5} = +50,0 \cdot 10^{-2} \text{ мм}.$$

8. Вычисляем величину полного удлинения стержня.

Из условий закрепления стержня увеличение его общей длины на величину δ возможно (см. рисунок 1.1), так как нет ограничений на перемещение вдоль оси Z какой-либо точки, в том числе возможно перемещение и конца стержня в точке E.

Полное удлинение стержня выражается алгебраической суммой абсолютных деформаций его участков и имеет вид:

$$\delta = \sum_1^n \Delta L_i \text{ или } \delta = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 + \Delta L_4;$$

$$\delta = (-12,5 - 9,375 + 12,5 + 50) \cdot 10^{-2} = 40,625 \cdot 10^{-2} \text{ мм}.$$

9. Вывод:

- В результате решения задачи определены числовые значения внутренних продольных усилий и соответствующие им нормальные напряжения в любом поперечном сечении стержня.

- Построены эпюры внутренних растягивающих и сжимающих усилий и нормальных напряжений.

- Определено полное абсолютное удлинение стержня.

- Наиболее нагруженным является 4-й участок стержня. Все сечения этого участка имеют одинаковую величину максимального нормального напряжения, равную 100 МПа.

- Действующие нормальные напряжения в любом сечении стержня не превышают допускаемого напряжения.

Лабораторная работа №2 – Расчет статически неопределимого стержня постоянного сечения

Данная лабораторная работа посвящена расчёту по определению зависимостей внутренних усилий и деформаций от внешних сил в статически неопределимом стержне постоянного сечения при растяжении и сжатии (рисунок 2.1).

Цель:

- определить внутренние нормальные усилия N_i в поперечных сечениях стержня;
- построить эпюру нормальных усилий N_i ;
- построить эпюру линейных перемещений Δ .

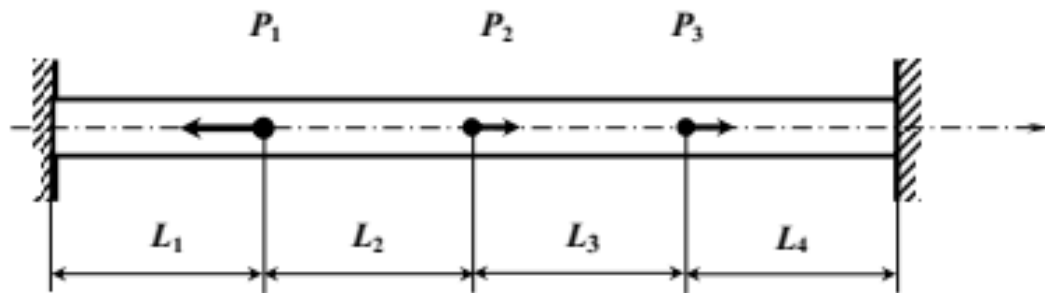


Рисунок 2.1. – Заданная схема постоянного поперечного сечения, нагруженного осевыми силами

Данные для задачи выбрать из таблицы 2.1 и по рисунку 2.2.

Решение задачи выполнить в алгебраическом виде, в символической форме P, L, N, Δ, E, F без числовых значений.

Порядок выполнения

1. Вычертить в масштабе расчётную схему с указанием заданных и реактивных сил и границ участков.
2. Составить уравнение статики.
3. Определить степень статической неопределимости.
4. Составить уравнение совместности деформаций.
5. Раскрыть статическую неопределимость с использованием основной и эквивалентной систем.
6. Определить внутренние усилия N_i и построить их эпюру.
7. Определить перемещения ΔL_i и построить их эпюру.
8. Вывод.

Таблица 2.1 – Варианты геометрических параметров стержня

Номер строки	Номер схемы по рисунку	L_1	L_2	L_3	L_4
1	1	L	$1,8L$	$0,2L$	$0,4L$
2	15	$1,2L$	$1,6L$	$0,4L$	$0,6L$
3	16	$1,4L$	$1,4L$	$0,6L$	$0,8L$
4	17	$0,6L$	$1,2L$	$0,8L$	L
5	10	$1,8L$	L	L	$2,0L$
6	14	$2,0L$	$1,2L$	$1,2L$	L
7	23	$1,6L$	$0,4L$	$1,4L$	$1,6L$
8	13	$2,4L$	$0,6L$	$1,6L$	$1,6L$
9	18	$2,0L$	$0,8L$	$0,8L$	$2,0L$
10	19	$2,0L$	L	$2,0L$	$1,2L$
11	20	L	$1,8L$	L	L
12	26	$1,2L$	$1,6L$	$1,2L$	$1,2L$
13	8	$1,4L$	$1,4L$	$1,4L$	$1,4L$
14	25	$1,6L$	$1,2L$	$0,6L$	$1,6L$
15	2	$0,8L$	L	$1,8L$	$0,8L$
16	28	$2,0L$	$1,2L$	$2,0L$	$2,0L$
17	4	L	$0,4L$	L	L
18	27	$1,2L$	$0,6L$	$1,2L$	$1,2L$
19	22	$1,4L$	$0,8L$	$1,4L$	$1,4L$
20	11	$0,6L$	$1,8L$	$1,6L$	$0,6L$
21	30	$1,8L$	$1,6L$	$0,8L$	$1,8L$
22	5	$2,0L$	$1,4L$	$2,0L$	$2,0L$
23	7	$1,6L$	$1,2L$	L	$1,6L$
24	29	$2,4L$	L	$1,2L$	$2,4L$
25	6	$2,0L$	$1,2L$	$1,4L$	$2,0L$
26	12	$2,0L$	$0,4L$	$0,6L$	$2,0L$
27	9	L	$0,6L$	$1,8L$	L
28	3	$1,6L$	$0,8L$	$2,0L$	$1,6L$
29	24	$2,4L$	$1,4L$	$1,6L$	$2,4L$
30	21	$2,0L$	$1,2L$	$2,4L$	$2,0L$

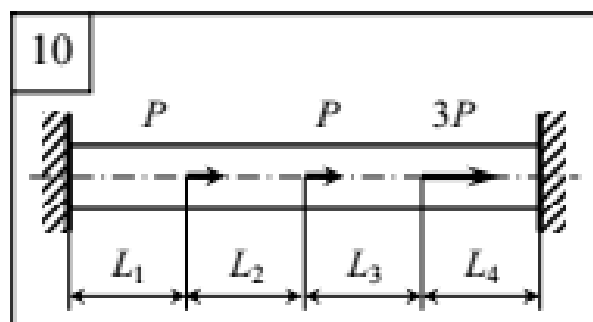
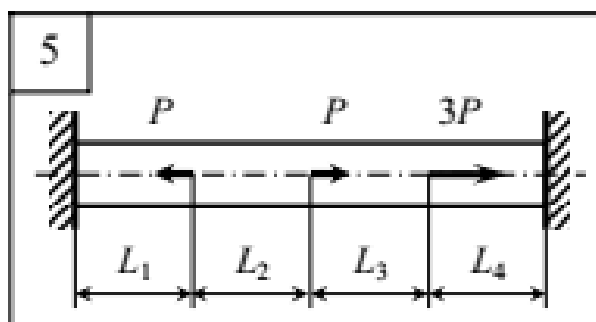
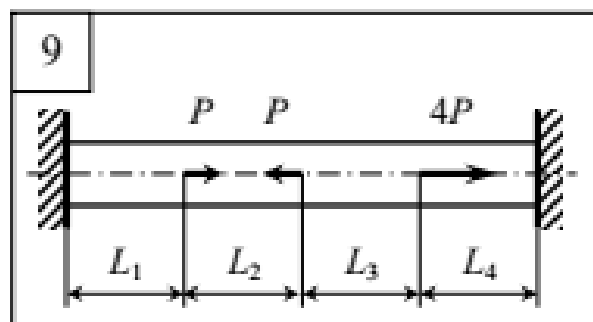
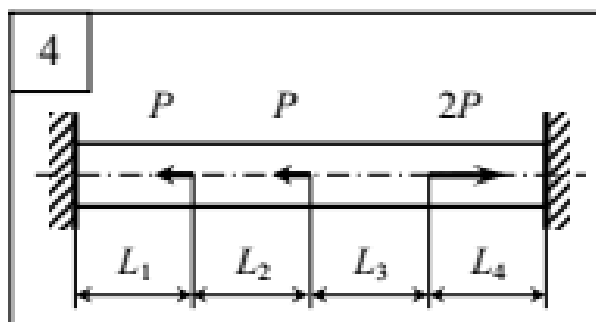
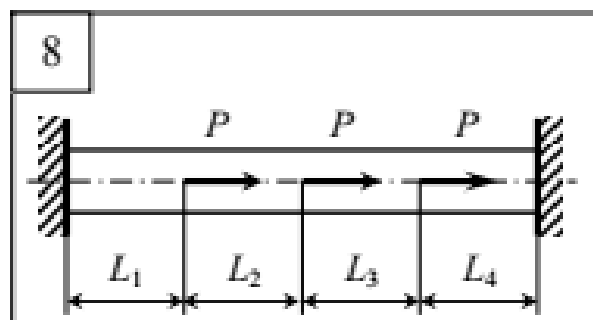
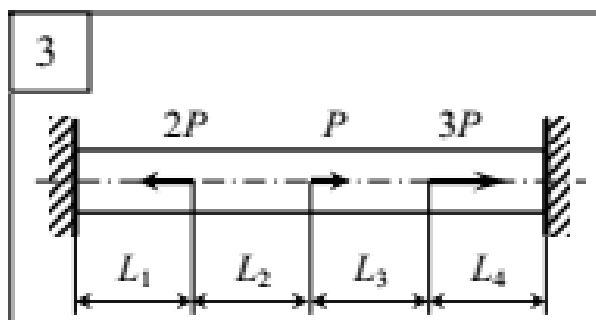
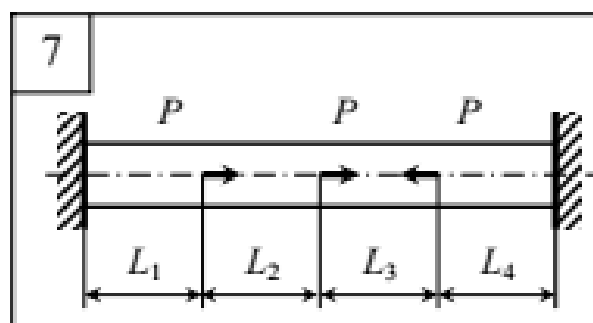
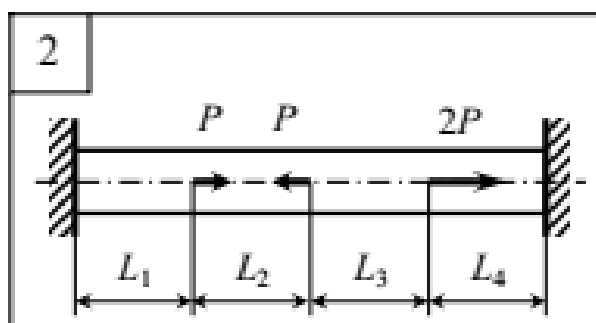
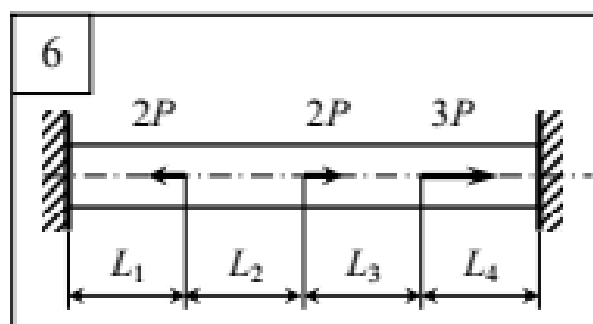
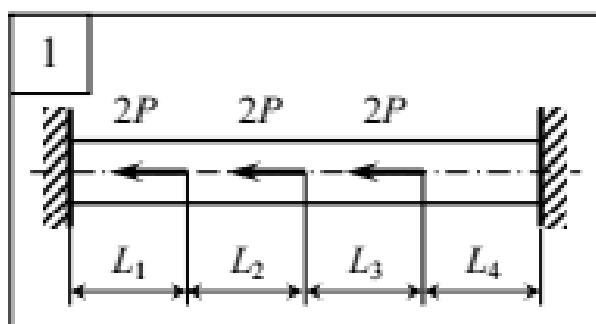


Рисунок 2.2. – Схемы статически неопределимых стержней

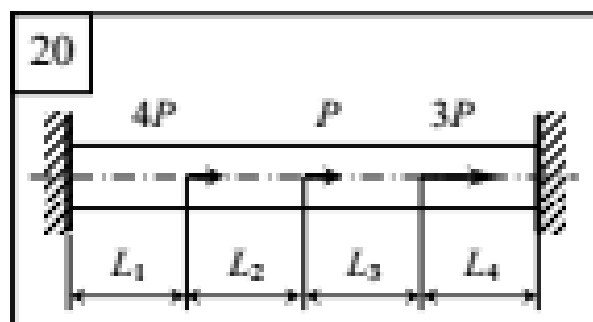
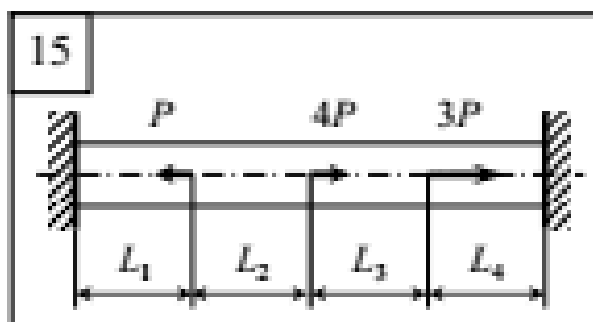
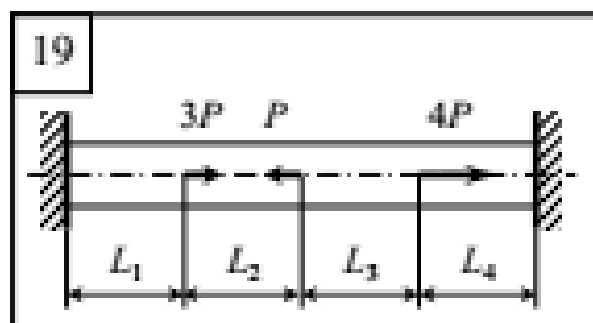
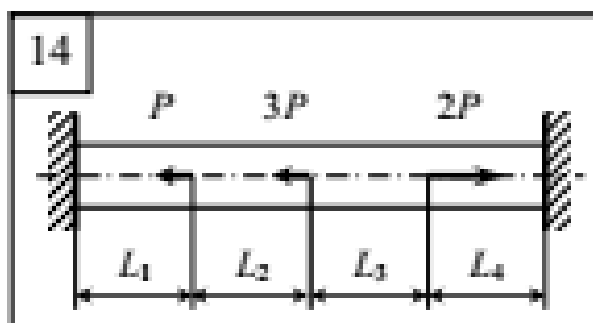
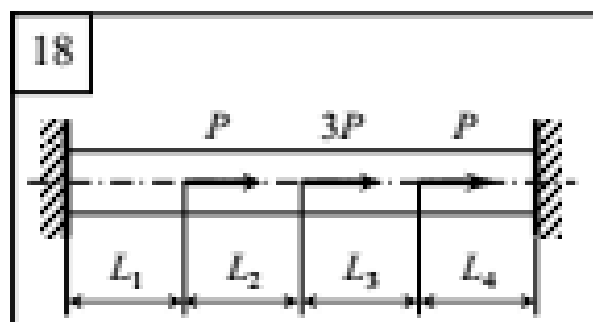
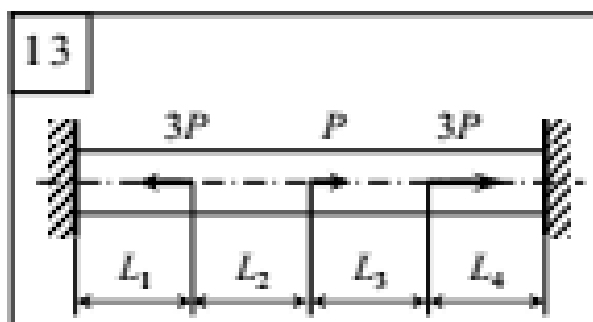
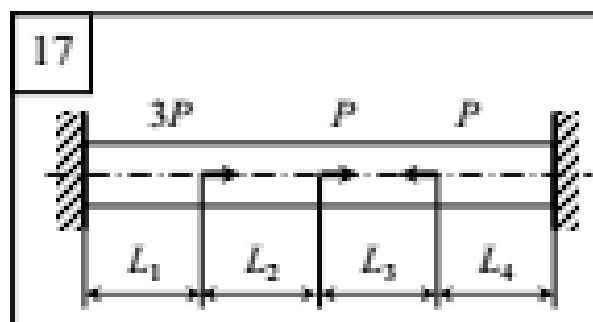
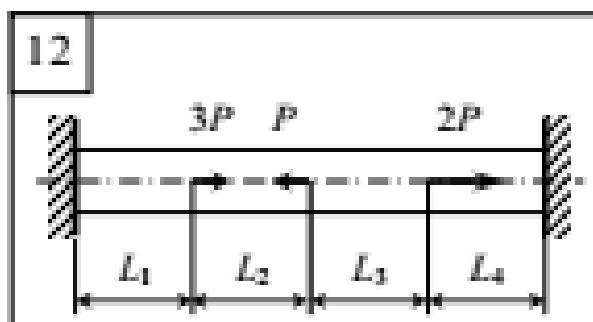
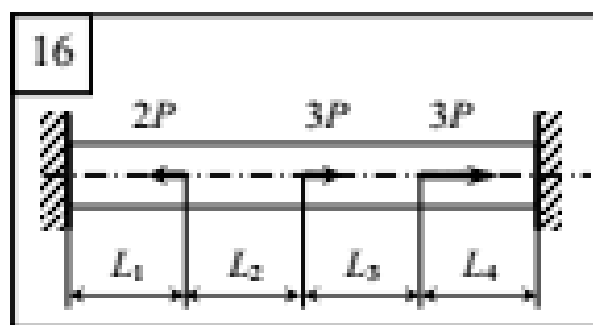
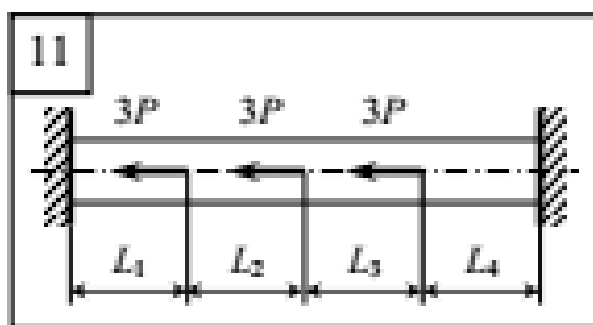


Рисунок 2.2. – Схемы статически неопределимых стержней (продолжение)

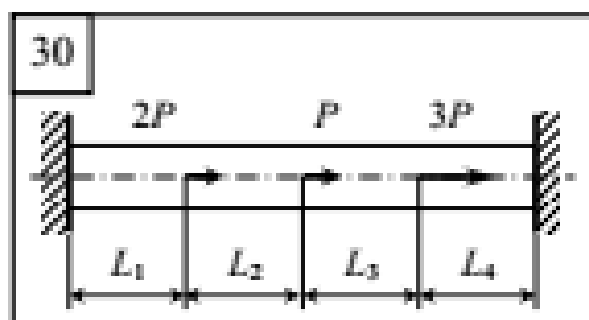
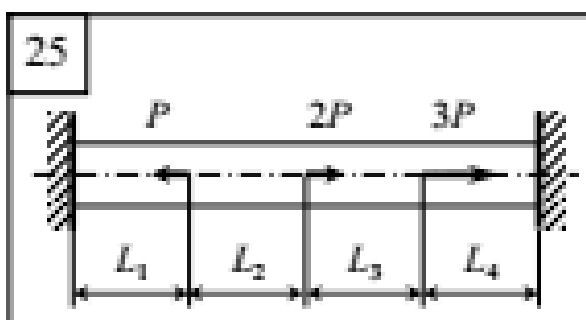
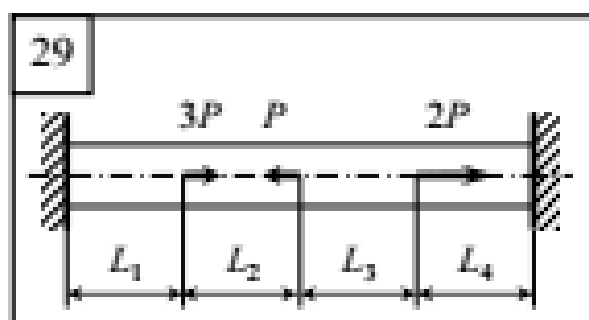
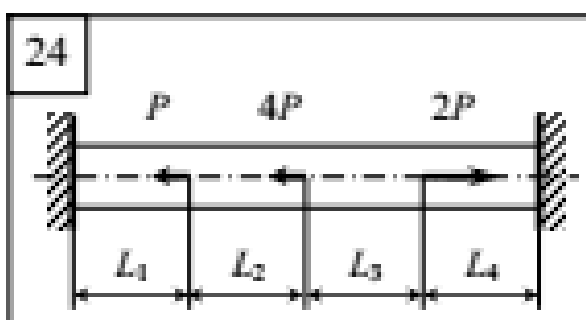
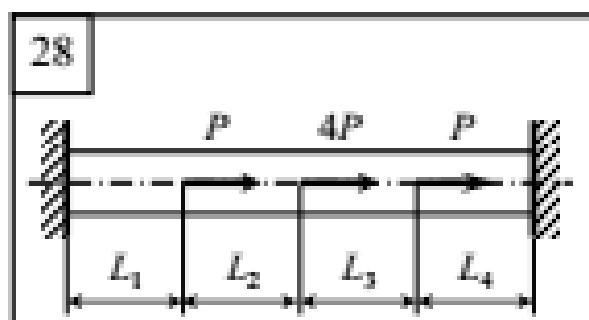
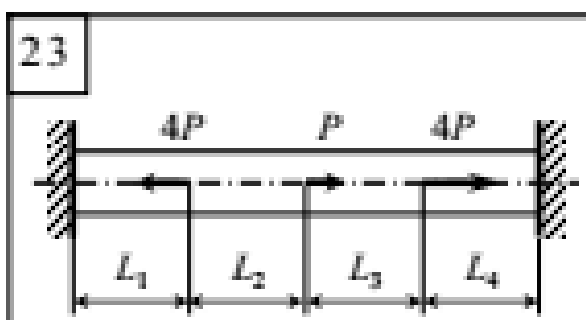
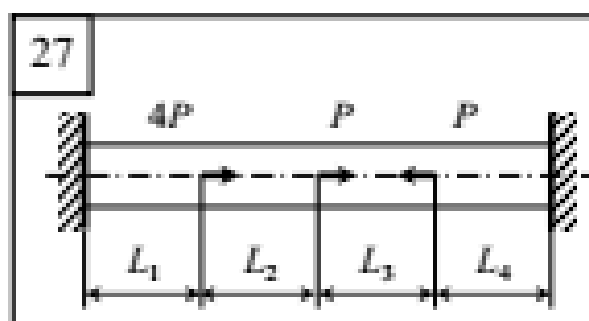
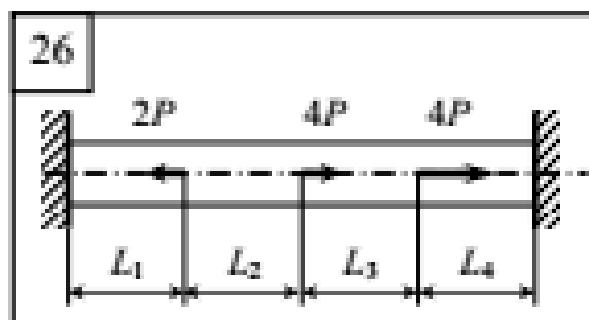
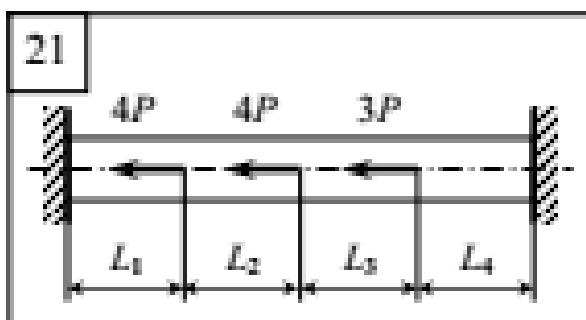


Рисунок 2.2. – Схемы статически неопределимых стержней (продолжение)

Пример выполнения:

Стержень постоянного поперечного сечения закреплён обоими концами и нагружен продольными силами P_i (рисунок 2.3).

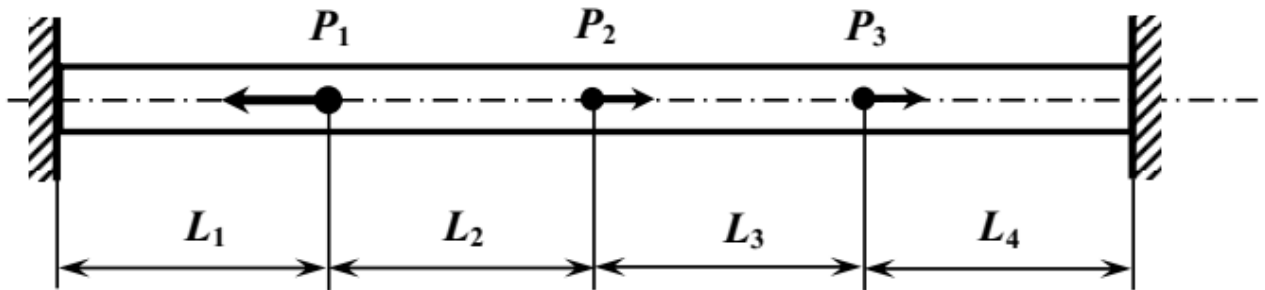


Рисунок 2.3. – Заданная схема стержня постоянного поперечного сечения, нагруженного осевыми силами

Цель:

- раскрыть статическую неопределимость;
- построить эпюры N_i и ΔL_i .

Задачу решаем в алгебраическом виде.

Исходные данные по номеру варианта _____ из таблицы 2.1; схема № ____ по рисунку 2.2.

Внешние осевые силы: $P_1 = 2P$; $P_2 = P$; $P_3 = P$.

Расстояния между точками приложения сил: $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = L$.

Модуль упругости материала стержня E .

Площадь поперечного сечения стержня F .

1. Вычерчиваем расчетную схему (рисунок 2.4).

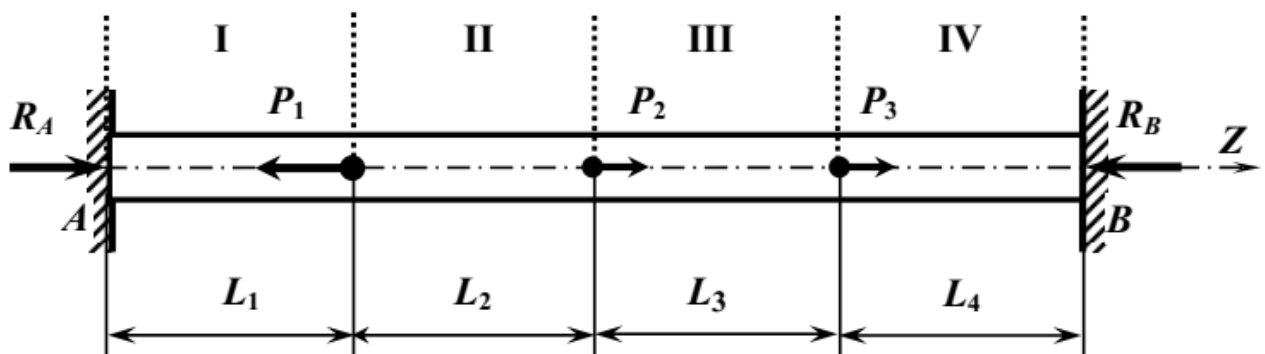


Рисунок 2.4. – Расчетная схема стержня, нагруженного осевыми активными и реактивными силами

Так как стержень статически неопределимый, необходимо предварительно в местах закрепления определить значение реактивных сил, позволяющих раскрыть неопределимость. Для этого на схеме в местах закрепления показываем неизвестные реакции R_A и R_B с произвольными направлениями. Определяем границы характерных участков AC , CD , DE , EB .

2. Составляем уравнения равновесия всех активных и реактивных сил (уравнения статики).

$$\sum Z = 0. \quad R_A - P_1 + P_2 + P_3 + R_B = 0. \quad (1)$$

Относительно осей X и Y уравнения не могут быть составлены, так как отсутствуют силы, действующие в направлении этих осей (перпендикулярных к оси Z).

Получено одно уравнение ($n_{\text{ур}}$) с двумя неизвестными (n_n).

3. Определяем степень статической неопределимости.

Степень статической неопределимости ($n_{\text{ССН}}$) определяется как разность между количеством неизвестных и количеством уравнений

$$n_{\text{ССН}} = n_n - n_{\text{ур}}; \quad n_{\text{ССН}} = 2 - 1 = 1.$$

Степень статической неопределимости $n_{\text{ССН}}$ равна единице, следовательно, система «стержень–опоры» один раз статически неопределима.

4. Составляем уравнение совместности деформаций.

Решение выполняем с использованием «основной» (рисунок 2.5) и эквивалентной системы (рисунок 2.6).

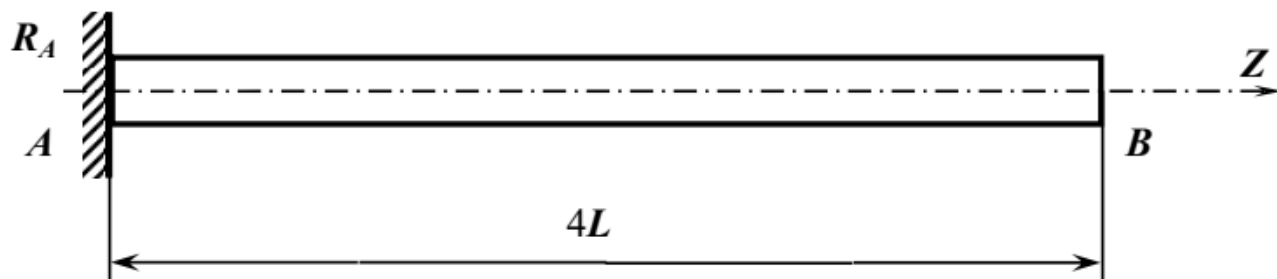


Рисунок 2.5. – Основная система

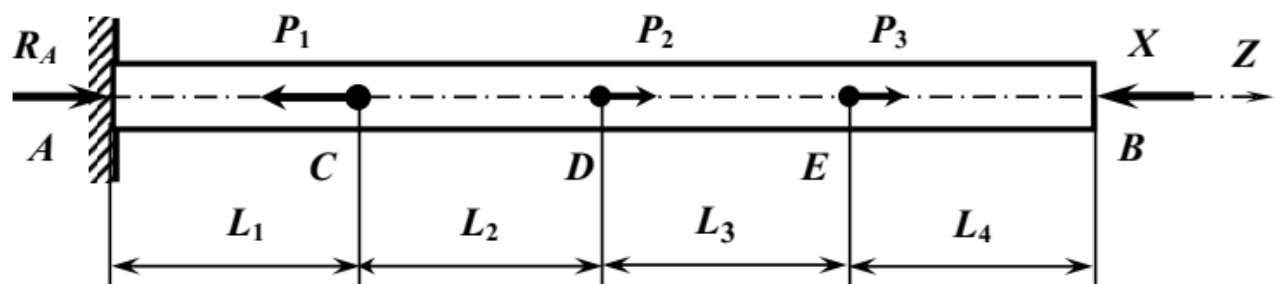


Рисунок 2.6. – Эквивалентная схема стержня, нагруженного осевыми активными и реактивными силами

«Основная» система получается из заданной путём освобождения от лишней связи. Принимаем за лишнюю связь защемление в опоре **B**.

Нагружаем «основную» систему заданными силами и накладываем следующее условие эквивалентности её заданной системе: перемещение сечения **B** в заданной и «основной» системах должно быть одинаковым, т.е.

$$\Delta_B = 0.$$

В сечении **B** приложим фиктивную неизвестную силу **X**, величина которой будет удовлетворять условию эквивалентности (см. рисунок 2.6).

Перемещение Δ_B в сечении **B** выразим через приложенные нагрузки, применяя принцип независимости действия сил:

$$\Delta_B = \Delta_B(X) + \sum_1^n \Delta_B(P_i) = 0, \quad (2)$$

где $\Delta_B(X)$ – перемещение сечения **B** от неизвестной силы **X**;

$\Delta_B(P_i)$ – перемещение сечения **B** от каждой из известных сил P_1, P_2, P_3 .

Уравнение (2) – это уравнение совместности деформаций.

Нагрузки, вызывающие сжатие, считаем отрицательными, а направление их действия противоположным направлению оси **Z**.

Выразим уравнение (2) через закон Гука $\Delta L_i = \frac{P_i \cdot L_i}{E \cdot F_i}$. Деформации по закону

Гука в зависимости от действия каждой силы, геометрических размеров и модуля упругости материала стержня имеют следующее выражение:

$$\Delta_B(P_1) = \frac{P_1 \cdot L_1}{E \cdot F}; \quad (3)$$

$$\Delta_B(P_2) = \frac{P_2 \cdot (L_1 + L_2)}{E \cdot F}; \quad (4)$$

$$\Delta_B(P_3) = \frac{P_3 \cdot (L_1 + L_2 + L_3)}{E \cdot F}; \quad (5)$$

$$\Delta_B(X) = \frac{X \cdot (L_1 + L_2 + L_3 + L_4)}{E \cdot F} \quad (6)$$

Подставляя выражения (3), (4), (5), (6) в формулу (2) и заменяя силовые и геометрические параметры на данные варианта задачи, в результате преобразований получим:

$$\Delta_B = -\frac{2P \cdot L}{E \cdot F} + \frac{P \cdot 2L}{E \cdot F} + \frac{P \cdot 3L}{E \cdot F} - \frac{X \cdot 4L}{E \cdot F} = 0 \quad (7)$$

5. Раскрываем статическую неопределимость. Решая совместно уравнения (1) и (7), находим R_A и R_B .

$$\left. \begin{aligned} R_A - P_1 + P_2 + P_3 + R_B &= 0; \\ -\frac{2P \cdot L}{E \cdot F} + \frac{P \cdot 2L}{E \cdot F} + \frac{P \cdot 3L}{E \cdot F} - \frac{X \cdot 4L}{E \cdot F} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Из уравнения (7) находим $X = \frac{3}{4}P$, следовательно, $R_B = \frac{3}{4}P$.

Из уравнения равновесия (1) $R_A = \frac{3}{4}P$. Таким образом, статическая неопределимость раскрыта – все внешние силы стали известными.

6. Определяем внутренние усилия N_i методом сечения. В общем случае можно на каком-либо участке плоским сечением разделить стержень на две части: левую и правую. Рассматривая равновесие одной из них при действии внутренних N_i и внешних P_i сил можно вычислить значение N_i . В данном примере рассматриваются левые отсечённые части.

на I участке
$$N_1 = -R_A = -\frac{3}{4}P.$$

на II участке
$$N_2 = -R_A + 2P = -\frac{3}{4}P + 2P = \frac{5}{4}P.$$

на III участке
$$N_3 = -R_A + 2P - P = -\frac{3}{4}P + 2P - P = \frac{1}{4}P.$$

на IV участке
$$N_4 = -R_A + 2P - P - P = -\frac{3}{4}P + 2P - P - P = -\frac{3}{4}P.$$

По полученным значениям строим эпюру нормальных усилий (рисунок 2.7).

7. Определяем перемещения граничных сечений **A, C, D, E, B**.

Перемещение конца какого-либо участка равно сумме деформаций предыдущих участков и его абсолютной деформации: $\Delta_i = \Delta_{i-1} + \sum_1^n \frac{N_i \cdot L_i}{(EF)_i}.$

Деформация сжатия считается отрицательной.

Перемещение сечения **A**: $\Delta_A = 0.$

Перемещение сечения **B**:
$$\Delta_B = \Delta_A + \frac{N_1 \cdot L_1}{E \cdot F} = -\frac{3PL}{4EF}.$$

Перемещение сечения **C**:
$$\Delta_C = \Delta_B + \frac{N_2 \cdot L_2}{E \cdot F} = -\frac{3PL}{4EF} + \frac{5PL}{4EF} = \frac{2PL}{4EF}.$$

Перемещение сечения **D**:
$$\Delta_D = \Delta_C + \frac{N_3 \cdot L_3}{E \cdot F} = \frac{2PL}{4EF} + \frac{PL}{4EF} = \frac{3PL}{4EF}.$$

Перемещение сечения **E**:
$$\Delta_E = \Delta_D + \frac{N_4 \cdot L_4}{E \cdot F} = \frac{3PL}{4EF} - \frac{3PL}{4EF} = 0.$$

Строим эпюру перемещений по результатам полученных коэффициентов (см. рисунок 2.7)

8. Вывод.

Построение эпюры перемещений Δ является деформационной проверкой правильности вычислений. Равенство нулю перемещения концевое сечения Δ_E показывает, что статическая неопределимость раскрыта верно.

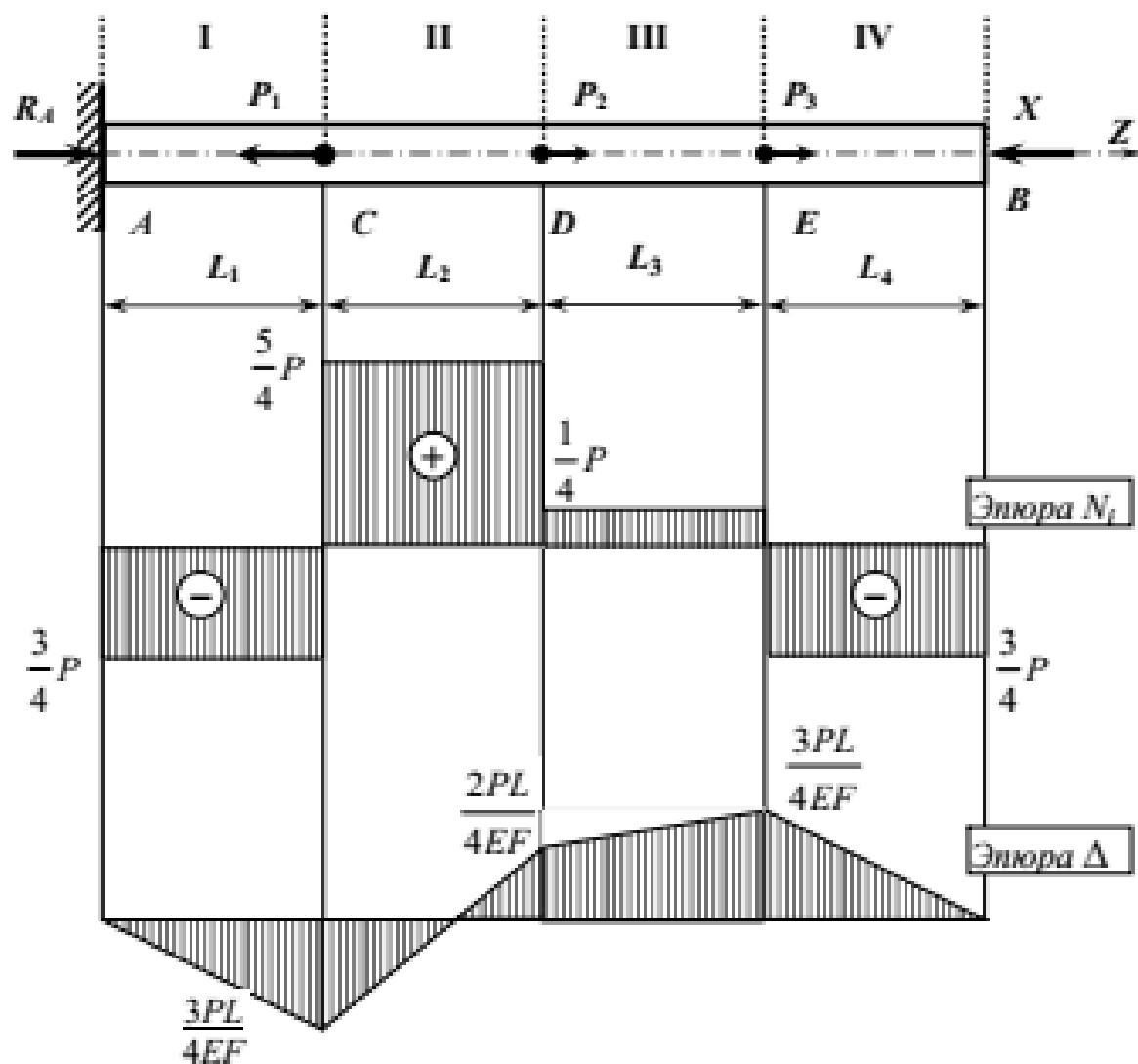


Рисунок 2.7. – Эпюры внутренних усилий N_i и перемещений Δ

Лабораторная работа №3 – Расчет статически неопределимого стержня переменного сечения

Данная лабораторная работа посвящена расчёту на прочность и жесткость статически неопределимого стержня переменного сечения при центральном растяжении и сжатии. Стержень имеет жесткое защемление по концам.

Цель: из условий прочности и жёсткости подобрать безопасные диаметры жёстко защемлённого стального стержня переменного сечения, нагруженного сосредоточенными продольными силами (рисунок 3.1).

Данные для выполнения взять из таблиц 3.1 и 3.2.

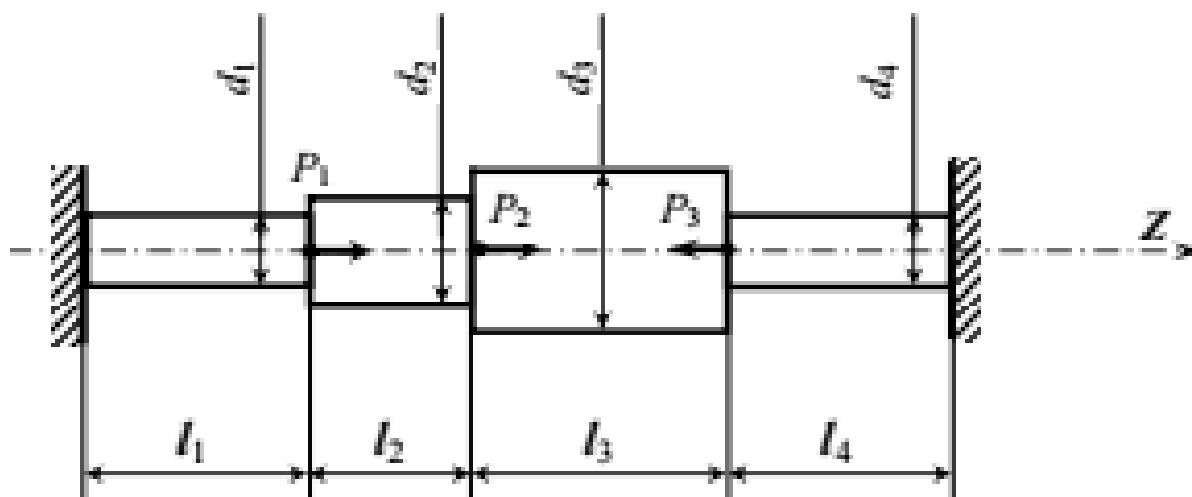


Рисунок 3.1. – Схема стержня переменного сечения, жестко защемленного по концам

Отношения между диаметрами поперечного сечения стержня на участках и площади поперечного сечения определяются по зависимостям

$$\alpha_i = \frac{d_i}{d_1},$$

где $i = 1, 2, 3, 4$ и $F_i = F_1 \cdot \alpha_i^2$.

В расчетах принять:

- $n_T = 1,5$ (для пластичных материалов);
- $n_B = 2,5$ (для хрупких материалов).

Таблица 3.1 – Варианты исходных данных для P_i и α_i

Вариант	P_1	P_2	P_3	α_2	α_3	α_4
	кН			-		
1	10	6	5	0,5	1,3	1,7
2	8	7	5	0,4	0,9	1,2
3	5	11	–8	1,0	1,0	1,2
4	10	–5	5	0,5	1,5	2,0
5	3	3	7	1,5	1,5	1,0
6	6	4	12	1,2	1,0	1,0
7	10	7	–5	1,3	0,8	1,0
8	8	6	6	0,6	0,6	1,5
9	–10	–5	5	0,5	0,8	0,7
10	8	10	5	0,6	1,0	1,0
11	6	–3	11	1,5	1,2	1,0
12	5	–1	–10	0,5	0,5	1,0
13	12	–8	–2	1,0	1,5	1,3
14	2	6	2	1,2	0,5	1,5
15	3	3	–10	1,5	0,5	0,7
16	–7	–2	11	1,0	1,0	1,5
17	5	–12	–5	1,2	1,5	0,5
18	–5	–2	–12	0,8	0,4	1,5
19	10	5	–5	0,5	1,5	2,0
20	3	0	–10	2,0	0,8	0,5
21	5	–12	8	1,5	1,0	0,5
22	4	–3	–12	0,8	0,5	1,2
23	3	0	–10	1,0	1,5	0,8
24	–4	3	12	0,5	0,5	1,2
25	–9	12	–11	1,2	1,0	1,0
26	–10	–5	–5	0,5	0,7	1,3
27	–10	5	–5	0,5	0,9	0,7
28	5	0	12	1,0	0,5	0,5
29	3	0	–15	1,5	0,8	0,5
30	10	–5	–5	0,5	1,5	0,6

Здесь P_i – внешняя осевая сосредоточенная сила; α_i – отношение диаметра стержня на рассматриваемом участке к диаметру стержня первого участка.

Таблица 3.2 – Варианты данных: длины участков стержня L_i ; материал стержня и допускаемая относительная деформация $[\varepsilon_i]$

Вариант	L_1	L_2	L_3	L_4	Материал стержня	$[\varepsilon_i]$
	м					
1	0,7	0,5	0,3	0,5	Бронза Бр. А5	$4 \cdot 10^{-4}$
2	0,5	0,4	0,5	0,5	Сталь Ст. 3	$3 \cdot 10^{-4}$
3	0,6	0,8	0,4	0,5	Латунь ЛС59-1	$2 \cdot 10^{-4}$
4	0,5	0,3	0,6	0,5	Сталь Ст. 5	$4 \cdot 10^{-4}$
5	0,2	0,3	0,3	0,4	Бронза КМц3-1	$3 \cdot 10^{-4}$
6	0,7	0,2	0,3	0,5	Сталь 20	$2 \cdot 10^{-4}$
7	0,5	0,5	0,	0,4	Латунь Л68	$1 \cdot 10^{-4}$
8	0,4	0,6	0,2	0,3	Алюминиевый сплав АЛ13	$3 \cdot 10^{-4}$
9	0,6	0,3	0,6	0,3	Алюминиевый сплав АЛ13	$2 \cdot 10^{-4}$
10	0,4	0,8	0,6	0,2	Сталь 4	$4 \cdot 10^{-4}$
11	0,8	0,4	0,6	0,6	Сталь 40Х	$3 \cdot 10^{-4}$
12	0,2	0,4	0,6	0,7	Сталь 30	$3 \cdot 10^{-4}$
13	0,7	0,2	0,3	0,5	Бронза КМц3	$4 \cdot 10^{-4}$
14	0,5	0,5	0,	0,4	Алюминиевый сплав Д16	$2 \cdot 10^{-4}$
15	0,4	0,6	0,2	0,3	Латунь Л68	$1 \cdot 10^{-4}$
16	0,6	0,3	0,6	0,3	Сталь Ст. 3	$3 \cdot 10^{-4}$
17	0,4	0,8	0,6	0,2	Алюминиевый сплав АЛ13	$2 \cdot 10^{-4}$
18	0,8	0,4	0,6	0,6	Сталь Ст. 5	$4 \cdot 10^{-4}$
19	0,2	0,4	0,6	0,7	Сталь 30	$3 \cdot 10^{-4}$
20	0,6	0,8	0,4	0,5	Алюминиевый сплав Д16	$2 \cdot 10^{-4}$
21	0,5	0,3	0,6	0,5	Бронза Бр. А5	$4 \cdot 10^{-4}$
22	0,2	0,3	0,3	0,4	Сталь 20	$2 \cdot 10^{-4}$
23	0,7	0,2	0,3	0,5	Латунь ЛС59-1	$4 \cdot 10^{-4}$
24	0,5	0,5	0,	0,4	Сталь Ст. 5	$4 \cdot 10^{-4}$
25	0,4	0,6	0,2	0,3	Бронза КМц3-1	$3 \cdot 10^{-4}$
26	0,6	0,3	0,6	0,3	Сталь 20	$2 \cdot 10^{-4}$
27	0,4	0,8	0,6	0,2	Латунь Л68	$4 \cdot 10^{-4}$
28	0,8	0,4	0,6	0,6	Алюминиевый сплав АЛ13	$2 \cdot 10^{-4}$
29	0,2	0,4	0,6	0,7	Сталь Ст. 5	$4 \cdot 10^{-4}$
30	0,5	0,3	0,6	0,5	Сталь 30	$3 \cdot 10^{-4}$

Порядок выполнения

1. Вычертить в масштабе расчётную схему с указанием активных и реактивных внешних сил.
2. Составить уравнения статики. Определить степень статической неопределимости (СН).
3. Определить приведённые внутренние усилия N_i в пределах каждого участка.
4. Составить уравнение совместности деформаций.
5. Раскрыть статическую неопределимость стержня, решив совместно уравнение статики и уравнение совместности деформаций.
6. Вычислить нормальные силы N_i и построить их эпюру.
7. Выполнить проверку правильности вычислений.
8. Вычислить приведённый диаметр стержня по условию прочности и жёсткости.
9. Вычислить площадь F_i поперечного сечения на каждом участке стержня.
10. Определить действительные напряжения σ_i и построить их эпюру.
11. Вычислить величину продольной деформации Δl_i на каждом участке.
12. Определить перемещения сечений на границах участков вдоль оси Z и построить эпюру перемещений.
13. Сделать выводы.

Пример выполнения:

Стержень переменного поперечного сечения закреплён обоими концами в точках **A** и **B** и нагружен продольными силами. На рисунке 3.2 изображена заданная схема стержня.

Цель: из условия прочности и жёсткости подобрать безопасные диаметры жёстко закреплённого стержня переменного сечения, нагруженного сосредоточенными силами.

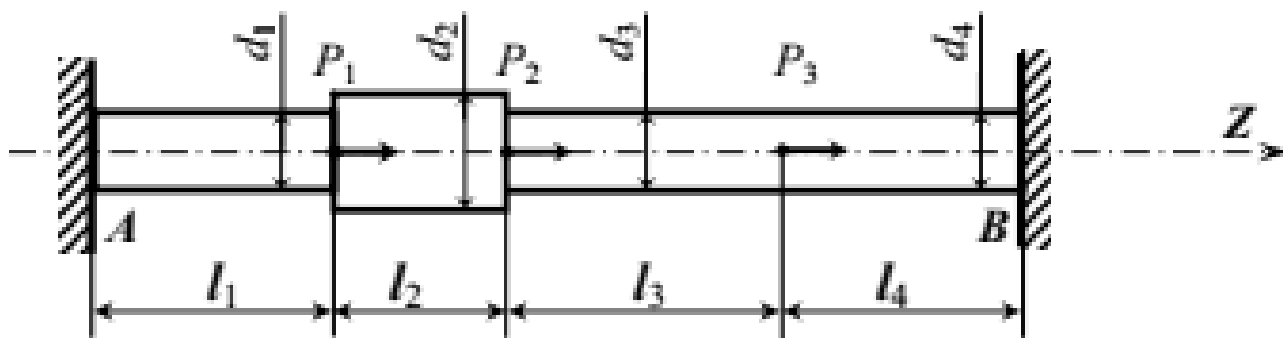


Рисунок 3.2. – Заданная схема стержня

Исходные данные приняты по номеру варианта ____ из таблиц 3.1 и 3.2; схема № ____ по рисунку 3.1.

Дано:

$$\begin{array}{lll} P_1 = 4 \text{ кН}; & \alpha_1 = 1; & l_1 = 0,5 \text{ м}; \\ P_2 = 6 \text{ кН}; & \alpha_2 = 1,2; & l_2 = 0,3 \text{ м}; \\ P_3 = 12 \text{ кН}; & \alpha_3 = 1; & l_3 = 0,6 \text{ м}; \\ & \alpha_4 = 1; & l_4 = 0,5 \text{ м}. \end{array}$$

$$\sigma_T = 260 \text{ МПа}, \sigma_B = 500 \text{ МПа}, E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, [\varepsilon] = 4 \cdot 10^{-4}.$$

Принимаем коэффициент запаса прочности по текучести $n_T = 1,5$; по временному сопротивлению $n_B = 2,5$.

1. Вычерчиваем расчетную схему.

Под действием внешних сил P_i в местах закрепления стержня возникают реакции. На расчётной схеме (рисунок 3.3) показываем замену опорных закреплений стержня в точках A и B реакциями опор R_A и R_B . На схеме указываем предполагаемое направление реакций.

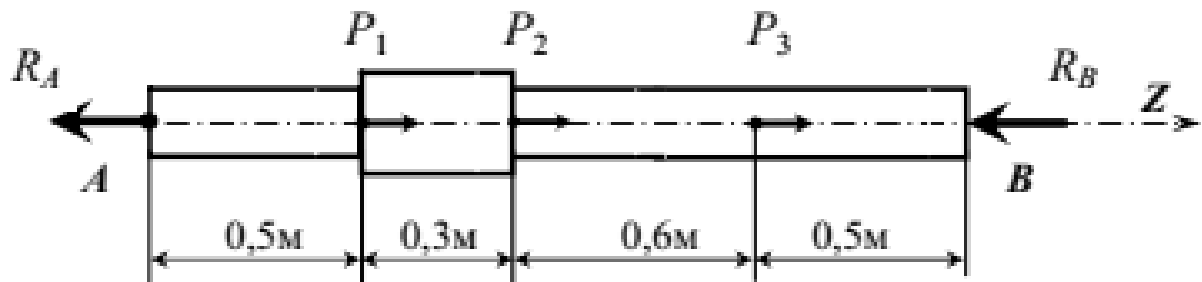


Рисунок 3.3. – Расчетная схема статически неопределимого стержня

2. Составляем уравнения статики. Определяем степень статической неопределимости (ССН) стержня.

$$\sum Z = 0. \quad -R_A + P_1 + P_2 + P_3 - R_B = 0. \quad (1)$$

Получено одно уравнение с двумя неизвестными R_A и R_B . Лишнее неизвестное указывает на статическую неопределимость стержня.

Степень статической неопределимости определяется как разность между количеством неизвестных n_n и количеством возможных уравнений n_{yp} . В данном примере $n_n = 2$, $n_{yp} = 1$.

$$CCN = n_n - n_{yp} = 2 - 1 = 1, \text{ т.е. система один раз статически неопределима}$$

$$CCN = 1.$$

Таким образом, к уравнению статики (1) необходимо добавить ещё одно недостающее уравнение. Дополнительное уравнение можно составить на основе условий совместности деформаций элементов (участков) системы. Для этого определяем количество и границы участков стержня.

3. Разграничиваем длину стержня на характерные участки. Определяем внутренние продольные усилия N_i . Определяем положение границ характерных участков по длине стержня A, C, D, E, B , их количество и нумеруем их I, II, III, IV (рисунок 3.4).

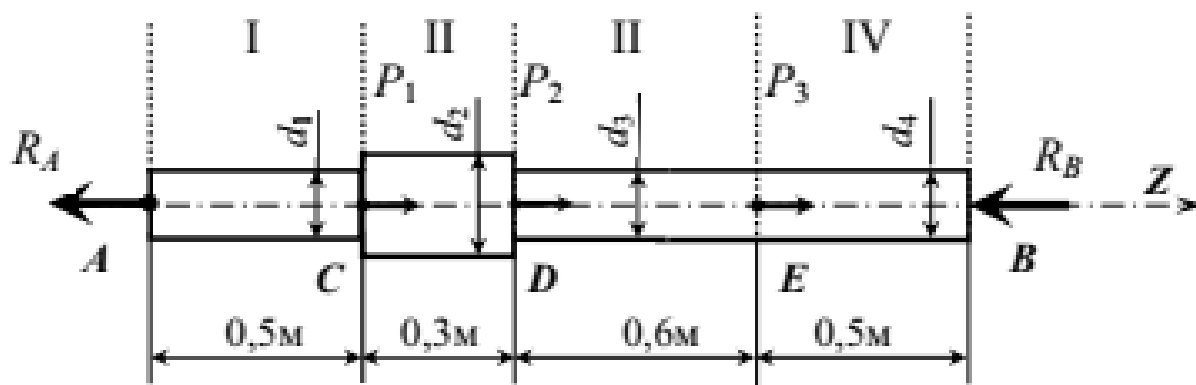


Рисунок 3.4. – Распределение и положение границ участков статически неопределимого стержня

В пределах каждого участка (рисунок 3.5) проводим произвольное сечение, которое делит стержень на две части. В центре тяжести сечения изображаем внутреннее усилие N_i в предполагаемом произвольном направлении. Полагаем направление положительным, если оно совпадает с положительным направлением оси Z , а усилие N_i растягивающим, имеющим знак «плюс», если оно направлено от сечения. Составляем равновесие одной из отсечённых частей. В данном примере рассматриваем левые отсечённые части. На рисунке 3.5 изображены положительные направления внутренних усилий N_i .

Записываем уравнения равновесия отсечённых частей стержня.

Сечение:

на I участке

$$-R_A + N_1 = 0;$$

на II участке

$$-R_A + P_1 + N_2 = 0;$$

на III участке

$$-R_A + P_1 + P_2 + N_3 = 0;$$

на IV участке

$$-R_A + P_1 + P_2 + P_3 + N_4 = 0.$$

$$N_1 = R_A; \quad (2)$$

$$N_2 = R_A - P_1; \quad (3)$$

$$N_3 = R_A - P_1 - P_2; \quad (4)$$

$$N_4 = R_A - P_1 - P_2 - P_3. \quad (5)$$

Из уравнений равновесия определяем зависимость внутреннего усилия N_i от внешних сил.

4. Составляем уравнение совместности деформаций.

Из условий закрепления увеличение (уменьшение) общей длины стержня δ невозможно (см. рисунок 3.2), поэтому уравнение совместности деформаций выражает алгебраическую сумму деформаций участков стержня и имеет вид

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = 0 \quad (6)$$

Выражаем деформации в уравнении (6) через внутренние усилия N_i по закону Гука $\Delta l_i = \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot F_i}$, поэтому для стержня, изготовленного из одного материала, E_i можно обозначить через постоянную величину E .

$$\frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot F_1} + \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot F_2} + \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot F_3} + \frac{N_4 \cdot l_4}{E \cdot F_4} = 0. \quad (7)$$

В уравнении (7) сделаем замену усилий N_i на соответствующие выражения (2), (3), (4), (5).

$$\frac{R_A \cdot l_1}{E \cdot F_1 \cdot \alpha_1^2} + \frac{(R_A - P_1) \cdot l_2}{E \cdot F_1 \cdot \alpha_2^2} + \frac{(R_A - P_1 - P_2) \cdot l_3}{E \cdot F_1 \cdot \alpha_3^2} + \frac{(R_A - P_1 - P_2 - P_3) \cdot l_4}{E \cdot F_1 \cdot \alpha_4^2} = 0. \quad (8)$$

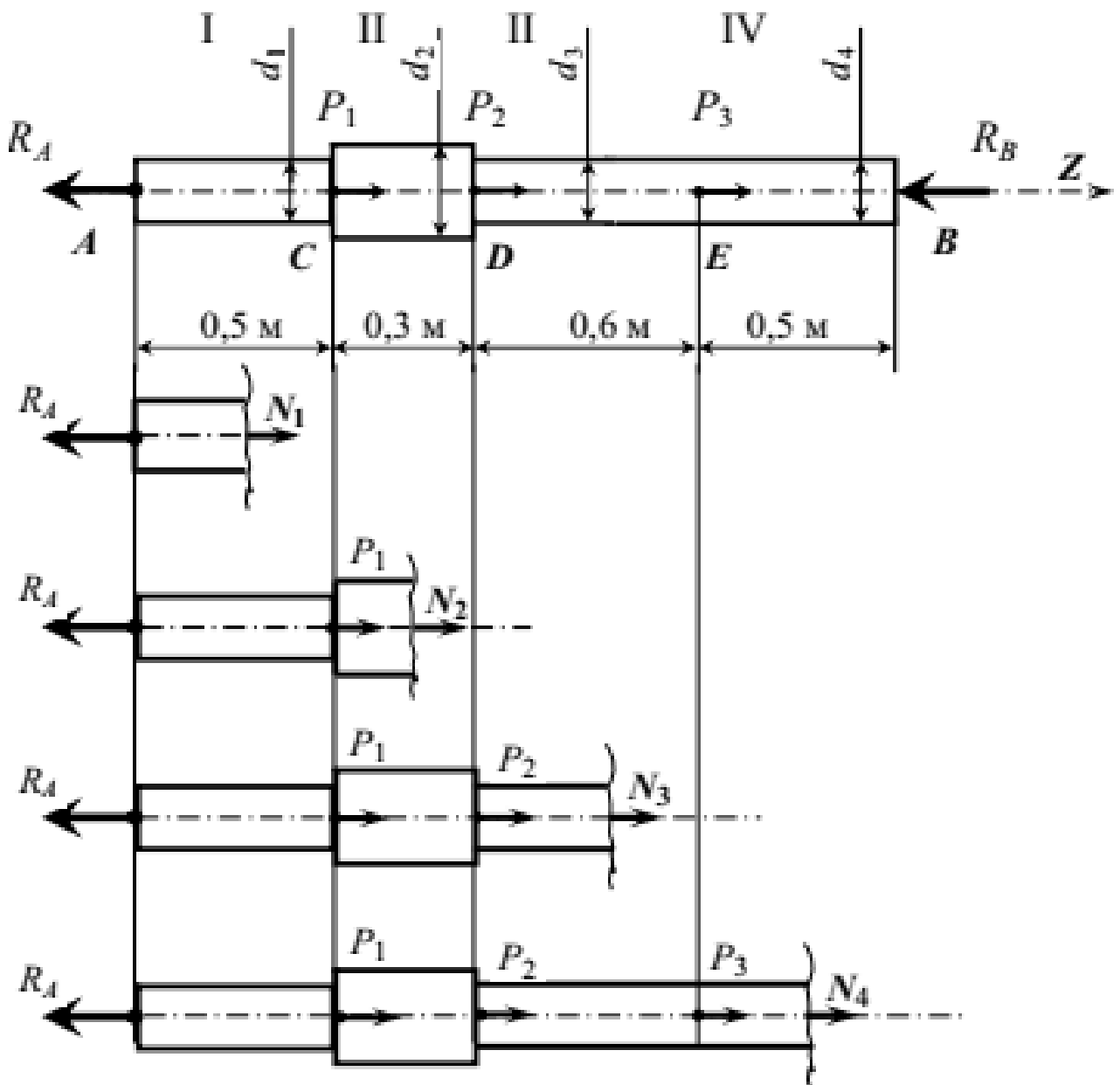


Рисунок 3.5. – Положение границ участков и направления внутренних усилий N_i стержня

5. Раскрываем статическую неопределимость стержня, решая уравнения (1) и (8).

Подставляя в (8) все известные величины, находим R_A .

$$\frac{R_A \cdot 500}{1^2} + \frac{(R_A - 4000) \cdot 300}{1,2^2} + \frac{(R_A - 4000 - 6000) \cdot 600}{1^2} + \frac{(R_A - 4000 - 6000 - 12000) \cdot 500}{1^2} = 0$$

$R_A = 9,862$ кН.

Подставляя найденное значение R_A в (1) находим R_B .

$$-R_A + P_1 + P_2 + P_3 - R_B = 0. \quad -9,862 + 4,0 + 6 + 12 - R_B = 0.$$

Откуда $R_B = 12,138$ кН. Все неизвестные внешние силы найдены.

Статическая неопределимость раскрыта.

6. Вычисляем нормальные внутренние силы N_i , подставляя найденное значение внешней реактивной силы R_A в уравнения (2), (3), (4), (5).

$N_1 = 9,862$ кН; в сечениях I участка действует растягивающее усилие;

$N_2 = 5,862$ кН; в сечениях II участка действует растягивающее усилие;

$N_3 = -0,138$ кН; в сечениях III участка – сжимающее усилие;

$N_4 = -12,138$ кН; в сечениях IV участка – сжимающее усилие.

N_3 и N_4 в результате вычислений получили знак «–», следовательно, неправильно было выбрано предварительно направление внутренних сил.

При дальнейшем решении необходимо или поменять направления, или подставлять N_3 и N_4 со знаком «–».

Строим эпюру N_i (рисунок 3.6).

7. Сделаем проверку вычислений, подставив полученные значения нормальных сил в уравнение (3) с учётом знаков растягивающих и сжимающих усилий и заданных соотношений α_i поперечных сечений стержня.

$$\delta = \frac{1}{EF_1} \left(\frac{9,862 \cdot 0,5}{1^2} + \frac{5,862 \cdot 0,3}{1,2^2} + \frac{-0,138 \cdot 0,6}{1^2} + \frac{-12,138 \cdot 0,5}{1^2} \right) = 0 \text{ мм.}$$

Результат проверки подтверждает правильность раскрытия статической неопределимости.

В действительности конец стержня в точке **B** не может иметь перемещений, так как жёсткая заделка препятствует этому.

8. Вычисляем приведенные нормальные напряжения σ_i .

Выразим их через площадь сечения F_1 .

Значения сил N_i принимаем по модулю.

$$\sigma^I = \frac{|N_1|}{F_1 \cdot \alpha_1^2} = \frac{9,862}{F_1 \cdot 1^2} = \frac{9,862}{F_1};$$

$$\sigma^{II} = \frac{|N_2|}{F_1 \cdot \alpha_2^2} = \frac{5,862}{F_1 \cdot 1,2^2} = \frac{4,071}{F_1};$$

$$\sigma^{III} = \frac{|N_3|}{F_1 \cdot \alpha_3^2} = \frac{0,138}{F_1 \cdot 1^2} = \frac{0,138}{F_1};$$

$$\sigma^{IV} = \frac{|N_4|}{F_1 \cdot \alpha_4^2} = \frac{12,138}{F_1 \cdot 1^2} = \frac{12,138}{F_1}.$$

По приведенным напряжениям видно, что опасный участок – четвертый, так как

$$\sigma^{IV} > \sigma^I > \sigma^{II} > \sigma^{III}.$$

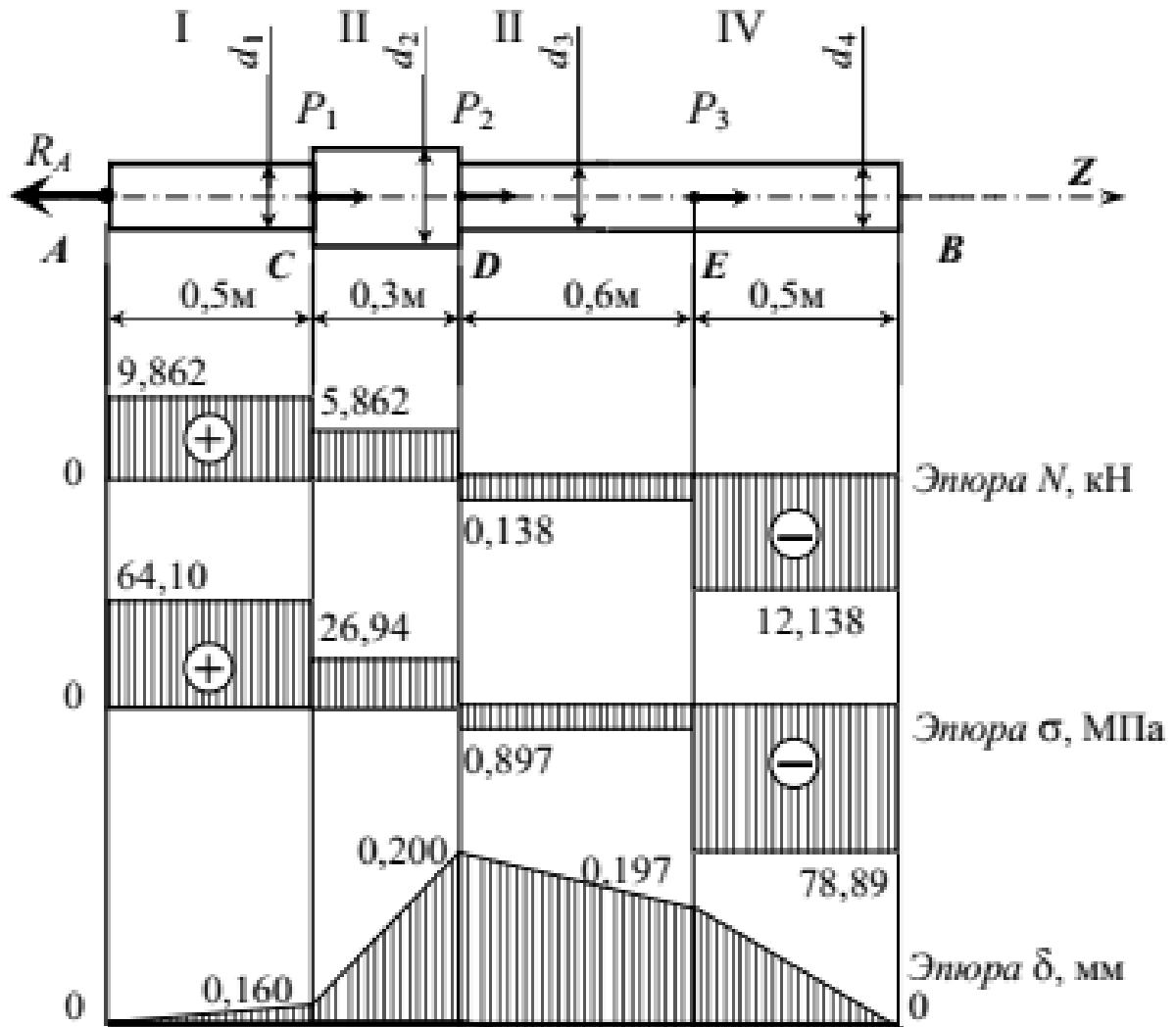


Рисунок 3.6. – Эпюры N , σ и δ статически неопределимого стержня

9. Из условия прочности и жесткости определяем приведенный диаметр сечения опасного участка, так как на четвертом участке действуют максимальные напряжения, используя зависимость $F_i = F_1 \cdot \alpha_i^2$, т.е. для опасного сечения

$$F_4 = F_1 \cdot \alpha_4^2 = \frac{\pi d_1^2}{4} \cdot \alpha_4^2,$$

где d_1 – приведенный диаметр.

Предварительно вычисляем допускаемое нормальное напряжение.

Используя коэффициент запаса прочности по текучести, получаем:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{260}{1,5} = 173, (3) \text{ МПа.}$$

Принимаем $[\sigma] = 170 \text{ МПа}$.

Используя коэффициент запаса прочности по временному сопротивлению, получим:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n_B} = \frac{500}{2,5} = 200,0 \text{ МПа.}$$

Принимаем $[\sigma] = 200 \text{ МПа}$.

Из двух значений допускаемых напряжений окончательно принимаем наименьшее

$$[\sigma] = 170 \text{ МПа.}$$

Определяем диаметр d_1 из условия прочности.

Условие прочности стержня:

$$\sigma_{\max} = \frac{\max N}{F_4} \leq [\sigma].$$

Так как $F_4 = \frac{\pi d_1^2}{4} \cdot \alpha_4^2$, то $\sigma_{\max} = \frac{4|N_4|}{\pi d_1^2 \cdot \alpha_4^2} \leq [\sigma]$.

Откуда $d_{\text{проч}} = d_1 \geq \sqrt{\frac{4|N_4|}{[\sigma] \cdot \pi \cdot \alpha_4^2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 12,138 \cdot 10^3}{170 \cdot 3,14 \cdot 1^2}} = 9,54 \text{ мм.}$

Принимаем $d_{\text{проч}} = 10 \text{ мм}$.

Определяем диаметр d_1 из условия жесткости.

По закону Гука $\sigma = E\varepsilon$ или $\frac{|N_4|}{F_4} = E\varepsilon$.

Условие жесткости $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \leq [\varepsilon]$; $\varepsilon = \frac{|N_4|}{E \cdot F_4} \leq [\varepsilon]$, тогда

$$d_1 = d_{\text{жест}} \geq \sqrt{\frac{4|N_4|}{E[\varepsilon] \cdot \pi \cdot \alpha_4^2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 12,138}{2 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 3,14 \cdot 1^2}} = 13,9 \text{ мм.}$$

Из найденных по условиям жесткости и прочности диаметров выбираем наибольший $d_1 = 14 \text{ мм}$.

10. Определяем площади F_i сечений стержня по участкам.

Принимаем $d_{\text{жест}} = 14 \text{ мм}$.

$$F_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} \cdot \alpha_1^2 = \frac{3,14 \cdot 14,0^2}{4} \cdot 1^2 = 153,86 \text{ мм}^2.$$

$$F_2 = F_1 \cdot \alpha_2^2 = 153,86 \cdot 1,2^2 = 221,56 \text{ мм}^2.$$

$$F_3 = F_1 \cdot \alpha_3^2 = 153,86 \cdot 1^2 = 153,86 \text{ мм}^2.$$

$$F_4 = F_1 \cdot \alpha_4^2 = 153,86 \cdot 1^2 = 153,86 \text{ мм}^2.$$

11. Определяем действительные напряжения σ_i на участках и строим их эпюры (см. рисунок 3.6)

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{9,862 \cdot 10^3}{153,86} = 64,1 \text{ Н/мм}^2 = 64,1 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{5,968 \cdot 10^3}{221,56} = 26,94 \text{ Н/мм}^2 = 26,94 \text{ МПа}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{-0,138 \cdot 10^3}{153,86} = -0,897 \text{ Н/мм}^2 = -0,897 \text{ МПа}$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{F_4} = \frac{-12,138 \cdot 10^3}{153,86} = -78,89 \text{ Н/мм}^2 = -78,89 \text{ МПа}.$$

12. Находим величину продольной деформации Δl_i на каждом участке, учитывая знак внутреннего усилия N_i :

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot F_1} = \frac{9,862 \cdot 500 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 153,86} = 0,16 \text{ мм.}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot F_2} = \frac{5,862 \cdot 300 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 221,56} = 0,040 \text{ мм.}$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot F_3} = \frac{-0,138 \cdot 600 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 153,86} = -0,003 \text{ мм.}$$

$$\Delta l_4 = \frac{N_4 \cdot l_4}{E \cdot F_4} = \frac{-12,138 \cdot 500 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 153,86} = -0,197 \text{ мм.}$$

13. Найдем перемещения сечений **A, C, D, E, B**:

$\delta_A = 0$, так как сечение **A** имеет жесткую заделку;

$\delta_C = \delta_A + \Delta l_1 = 0 + 0,16 = 0,16 \text{ мм};$

$\delta_D = \delta_C + \Delta l_2 = 0,16 + 0,04 = 0,20 \text{ мм};$

$\delta_E = \delta_D + \Delta l_3 = 0,20 - 0,003 = +0,197 \text{ мм};$

$\delta_B = \delta_D + \Delta l_4 = +0,197 - 0,197 = 0 \text{ мм.}$

Строим эпюру перемещений сечений **A, C, D, E, B** (см. рисунок 3.6).

Вывод:

- Последовательность вычислений перемещений сечений **A, C, D, E** и равенство нулю перемещения точки **B** указывают на правильность раскрытия статической неопределимости и правильность решения задачи по определению напряжений, деформаций и безопасных размеров поперечных сечений стержня.
- Принятые в результате расчёта размеры диаметров поперечных сечений стержня обеспечат его работоспособность, так как удовлетворяют условиям прочности и жёсткости.

Общие положения и указания по выполнению лабораторных работ

Перед выполнением лабораторной работы необходимо записать полностью её название, условие (цель), все исходные данные и вычертить заданную схему. На заданной схеме должны быть указаны условными обозначениями все внешние нагрузки, соответствующие варианту задания. Решение должно сопровождаться краткими последовательными, без сокращения слов, объяснениями и чертежами, на которых все входящие в расчёт величины должны быть показаны только в условных обозначениях. При использовании формул и данных, отсутствующих в рекомендуемой литературе, необходимо кратко и точно указать использованный источник. Подстановка цифр должна выполняться полностью, без сокращений. Вычисления должны вестись с точностью до трёхзначных цифр с обязательным указанием размерности полученного результата. Порядок и последовательность выполнения лабораторной работы приведены в примерах выполнения каждой работы.

Количество работ, объем каждой и сроки выполнения определяются кафедрой в соответствии с программой по учебной дисциплине и учебным графиком.

Студент должен взять для каждой работы из таблицы и рисунка данные в соответствии с номером своего шифра. Последняя цифра шифра соответствует схеме, предпоследняя – данным к задаче.

Работы, выполненные с нарушением этих указаний, рассматриваться не будут.

В чертежах должны быть проставлены числовые данные соответствующего варианта (не буквенные значения!). Расчеты производить только с числовыми значениями. Чертеж должен быть аккуратным и наглядным. Решение задачи необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т.п.) и подробно излагать весь ход расчетов. Чертежи и схемы в текстовой части выполняются в карандаше в соответствии с требованиями Единой системы конструкторской документации (ЕСКД). Все графики и эпюры должны содержать числовые величины в характерных точках и размерность.

Необходимо указывать размерность всех величин и подчеркивать окончательные результаты. Решения производить в международной системе единиц (СИ). Основные единицы приведены в приложении.

Список рекомендуемой литературы

1. Сопротивление материалов: учебник: В 2 ч. Ч. 1 / А.Г. Схиртладзе, А.В. Чеканин, В.В. Волков. М.: КУРС: ИНФРА-М, 2018. 272 с. Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/933939>.
2. Сопротивление материалов: учебник: в 2 ч. Ч. 2: / А.Г. Схиртладзе, А.В. Чеканин, В.В. Волков. М.: КУРС: ИНФРА-М, 2018. 192 с. Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/933947>.
3. Атапин, В.Г. Сопротивление материалов: Краткий теоретический курс: учебное пособие / В.Г. Атапин. Новосибирск: НГТУ, 2011. 204 с. [Электронный ресурс]. URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=228576>.
4. Сопротивление материалов в примерах и задачах: Учебное пособие / Н.М. Атаров. М.: ИНФРА-М, 2010. 407 с. Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/191566>.
5. Сопротивление материалов: Сборник задач с решениями: Учебное пособие / С.И. Евтушенко, Т.А. Дукмасова, Н.А. Вильбицкая. М.: ИЦ РИОР: НИЦ ИНФРА-М, 2014. 210 с. Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/390026>.
6. ГОСТ 8.417-2002 Государственная система обеспечения единства измерений (ГСИ). Единицы величин (с Поправкой).

Приложение А. Единицы измерений

Наименование, обозначение и правила применения основных единиц измерения физических величин установлены ГОСТ 8.417-2002 [6].

Международная система единиц (СИ)

- м, кг, с — метр, килограмм, секунда; единицы длины, массы, времени
(основные единицы)
- см, мм — дольные единицы длины (сантиметр, миллиметр)
- Н — ньютон, единица силы ($1 \text{ Н} \approx 1/9,81 \text{ кГ} = 0,102 \text{ кГ}$)
- кН, МН — дольные единицы силы: килоньютон, меганьютон
($1 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н}$; $1 \text{ МН} = 10^6 \text{ Н}$)
- Н/м^2 — единица напряжения и давления ($1 \text{ Н/м}^2 \approx 1,02 \cdot 10^5 \text{ кГ/см}^2$)
- МН/м^2 — дольная единица напряжения и давления
($1 \text{ МН/м}^2 = 10^6 \text{ Н/м}^2 \approx 10,2 \text{ кГ/см}^2$)
- Дж — джоуль, единица работы ($1 \text{ Дж} \approx 1/9,81 \text{ кГ} \cdot \text{м} \approx 0,102 \text{ кГ} \cdot \text{м}$)
- Вт, кВт — ватт; киловатт — единицы мощности
($1 \text{ кВт} \approx 102 \text{ кГ} \cdot \text{м/с} \approx 1,36 \text{ л.с.}$)

Техническая система единиц (МКГСС)

- м, кГ, с — метр, килограмм-сила, секунда ($1 \text{ кГ} \approx 9,81 \text{ Н}$)
- Т — тонна-сила ($1 \text{ Т} = 10^3 \text{ кГ} \approx 9,81 \cdot 10^3 \text{ Н} = 9,81 \text{ кН}$)
- кГ/см^2 — единица напряжения и давления
($1 \text{ кГ/см}^2 \approx 9,81 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2 \approx 0,0981 \text{ МН/м}^2$)
- $\text{кГ} \cdot \text{м}$ — единица работы ($1 \text{ кГ} \cdot \text{м} \approx 9,81 \text{ Дж}$)
- л.с. — внесистемная единица лошадиная сила
($1 \text{ л.с.} = 75 \text{ кГ} \cdot \text{м/с} \approx 0,736 \text{ кВт}$)