

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЯНОЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт экономики и сервиса**

Кафедра «Управление и сервис в технических системах»

**Учебно-методическое пособие
для выполнения лабораторных работ
по теме «Изгиб и кручение»**

**Уфа
УГНТУ
2018**

Пособие охватывает несколько разделов курса «Сопротивление материалов», встречающееся при решении практических инженерных вопросов расчета на прочность, жесткость и устойчивость конструкций машиностроения. В данном пособии даются задания на лабораторные работы, порядок и пример выполнения работ по темам «Изгиб», «Кручение». Основываясь на рассмотренном примере, студенты самостоятельно смогут выполнить лабораторную работу. Пособие предназначено для самостоятельного изучения предмета и подготовки к зачету и экзамену по курсу «Сопротивление материалов».

Данное пособие предназначено для студентов, изучающих дисциплину «Сопротивление материалов» как отдельный предмет, или как один из разделов таких дисциплин как «Механика», «Прикладная механика», «Техническая механика».

Пособие предназначено для студентов инженерных специальностей всех форм обучения: 15.03.02 Технологические машины и оборудование, 18.03.01 Химическая технология, 19.03.02 Продукты питания из растительного сырья, 20.03.01 Техносферная безопасность, 29.03.02 Технологии и проектирование текстильных изделий, 29.03.05 Конструирование изделий легкой промышленности.

Составители: Хизбуллина С.Ф., канд. физ.-мат. наук
Зарипов Д.М., канд. физ.-мат. наук

Рецензент: Шатдинов Н.С., канд. техн. наук,
Низамутдинов М.Х., канд. техн. наук

© ФГБОУ ВО «Уфимский государственный
нефтяной технический университет», 2018

Содержание

Введение	4
Основные термины и определения	5
Основные гипотезы (допущения)	9
Основные условные обозначения	10
Вводная часть.....	12
Лабораторная работа №1 – Исследование статически определимой балки на изгиб	17
Лабораторная работа №2 – Исследование на прочность и жесткость статически определимой балки при изгибе	24
Лабораторная работа №3 – Исследование трансмиссионного вала на прочность и жесткость при кручении	38
Общие положения и указания по выполнению лабораторной работы.....	51
Список рекомендуемой литературы.....	52
Приложение А. Единицы измерений	53
Приложение В. Ряды нормальных линейных размеров	54

Введение

Сопротивление материалов решает указанные задачи, основываясь как на теоретических, так и на опытных данных, имеющих в этой науке одинаково важное значение. В теоретической части сопротивление материалов базируется на теоретической механике и математике, а в экспериментальной – на физике и материаловедении. Сопротивление материалов не исчерпывает всех вопросов механики деформируемого твёрдого тела. Этими вопросами занимаются такие смежные дисциплины, как строительная механика стержневых систем, теория упругости и теория пластичности. Однако основная роль при решении задач на прочность принадлежит сопротивлению материалов. При всём разнообразии видов конструктивных элементов, встречающихся в сооружениях и машинах, их можно свести к сравнительно небольшому числу основных форм. Тела, имеющие эти основные формы, и являются объектами расчёта на прочность, жёсткость и устойчивость.

Учебное методическое пособие составлено с целью оказания методической помощи студентам при выполнении лабораторных работ по курсу «Сопротивление материалов». Перед выполнением лабораторной работы необходимо изучить соответствующий раздел курса «Сопротивление материалов» по лекциям, рекомендуемым учебникам и учебным пособиям, также указаниям, данным в вводной части настоящего пособия.

Основные термины и определения

Соппротивление материалов – наука об инженерных методах расчёта на прочность, жёсткость и устойчивость элементов машин и сооружений.

Прочность – способность конструкции, её частей и деталей выдерживать определённую нагрузку, не разрушаясь.

Жёсткость – способность конструкции и её элементов противостоять внешним нагрузкам в отношении деформаций (изменение формы и размеров).

При заданных нагрузках деформации не должны превышать определённых величин, устанавливаемых в соответствии с требованиями к конструкции.

Устойчивость – способность конструкции и её элементов сохранять определённую начальную форму упругого равновесия.

Основными объектами расчёта являются брусья (стержни), пластины, оболочки, массивные тела.

Брус – это деталь удлинённой формы, у которой высота и ширина малы по сравнению с третьим размером – длиной, т. е. третий размер – значительно больше двух других габаритных размеров: $L \gg b$ и $L \gg h$.

Брус условно рассматривают в виде совокупности параллельных или почти параллельных продольных волокон. Сечения бруса, нормальные волокнам, называются поперечными сечениями.

Прямой брус, работающий на растяжение – сжатие, называют стержнем.

Прямой брус, работающий на изгиб – кручение, называют балкой.

Прямой брус, работающий на кручение, называют валом.

Основными факторами работы бруса являются: нагрузки; усилия в сечениях; деформации; перемещения сечений.

Поперечное сечение – это сечение бруса плоскостью, перпендикулярной его оси. По схеме бруса рассчитывают валы редукторов, приводов, балки и стойки кранов, элементы конвейеров, транспортёров и многое другое.

Стержень – это тонкий и длинный брус, у которого размеры поперечного сечения ничтожны по сравнению с длиной оси.

Пластиной называется тело, у которого один из трёх размеров (толщина) значительно меньше двух других. Пластины могут быть круглыми, прямоугольными и иметь другие очертания контура.

Оболочка представляет собой тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, близко расположенными друг от друга. По форме оболочки бывают цилиндрические, конические, сферические и др.

Массивное тело – это тело, у которого все три размера одного порядка. Реальные тела под действием нагрузок или изменения температуры могут деформироваться, т. е. изменять свою форму и размеры.

Различают деформации упругие, пластические и остаточные.

Основные виды деформаций:

- растяжение и сжатие;
- сдвиг (или срез);
- кручение;
- изгиб.

Сочетание основных видов деформации приведёт к сложному виду деформации.

Растяжение или сжатие возникает, например, в случае, когда к стержню вдоль его оси приложены противоположно направленные силы. При этом происходит поступательное перемещение сечений вдоль оси стержня, который удлиняется, а при сжатии укорачивается. Изменение первоначальной длины стержня L , обозначенное ΔL , называется **абсолютным удлинением** (при растяжении) или **абсолютным укорочением** (при сжатии). Отношение абсолютного удлинения (укорочения) ΔL к первоначальной длине L стержня или его участка называется **средним относительным удлинением (укорочением)** на длине L или **средней линейной относительной деформацией** стержня или его участка и обозначается:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta L}{L}.$$

Сдвиг, или срез, возникает, когда внешние силы смещают два параллельных плоских сечения одно относительно другого при неизменном расстоянии между ними. Величина смещения Δs называется **абсолютным сдвигом**. Отношение

абсолютного сдвига к расстоянию между смещающимися плоскостями (тангенс угла) называется **относительным сдвигом**. Вследствие малости угла γ можно принять:

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma \approx \frac{\Delta s}{a}.$$

Кручение возникает при действии на стержень внешних сил, образующих момент относительно его оси. Деформация кручения сопровождается поворотом поперечных сечений стержня друг относительно друга вокруг его оси. Угол поворота одного сечения стержня относительно другого, находящегося на расстоянии L , - угол закручивания φ .

Отношение угла закручивания φ к длине L называется **относительным углом закручивания** θ :

$$\theta = \frac{\varphi}{L}.$$

Изгиб заключается в искривлении оси прямого стержня или в изменении кривизны кривого стержня.

Происходящее при изгибе перемещение какой-либо точки оси стержня выражается вектором, начало которого совмещено с первоначальным положением точки, а конец c – с положением той же точки в деформированном стержне. В прямых стержнях перемещения точек, направленные перпендикулярно к начальному положению оси, называются **прогибами** w , а наибольший из них – y . При изгибе также происходит поворот сечений стержня вокруг осей, лежащих в плоскостях сечений, относительно своих начальных положений углы поворота сечений – $\theta_{x(y)}$.

Перемещения – изменение положения поверхностных или внутренних точек детали при воздействии внешних сил. Перемещения возникают при растяжении, сжатии, сдвиге, изгибе, кручении.

Внешние силы – это активные силы, приложенные к рассматриваемой детали, а также реактивные силы, возникающие в опорах.

Активные внешние силы делятся на объёмные и поверхностные.

Объёмные силы – это силы, приложенные к каждой элементарной частичке детали (силы веса, инерции и др.).

Поверхностные силы – это силы, приложенные к поверхности детали различным способом. Поверхностные силы подразделяются на сосредоточенные и распределённые.

Сосредоточенная сила – это сила, приложенная на площадке, пренебрежимо малой по сравнению с поверхностью детали. В расчётных схемах принимают приложение сосредоточенной силы в точке.

Распределённая сила q – это сила, приложенная на площадке, соизмеримой с поверхностью детали.

Внешний скручивающий момент вызывается внешними парами сил, действующими относительно геометрической оси стержня и лежащими в плоскостях, перпендикулярных к оси стержня, но не проходящих через центр тяжести поперечного сечения вала.

Внутренние силы – это силы, возникающие внутри тела, препятствующие действию внешних сил.

Определяются внутренние силы **методом сечений**, т.е. деталь мысленно разрезается плоскостью на две части и одна из них уравнивается противодействующими внутренними силами. Вторая часть мысленно отбрасывается.

Для рассматриваемой части так же, как для целого бруса, составляются уравнения равновесия по закону статики.

Напряжение – интенсивность внутреннего усилия, приходящегося на единицу геометрической характеристики рассматриваемого сечения, например, площади сечения.

Основные гипотезы (допущения)

1. Материал детали считается сплошным (без пустот) и однородным.
2. Упругие свойства материала во всех направлениях одинаковы, т.е. материал тела обладает упругой изотропностью.
3. Тело считается абсолютно упругим, если после устранения причин, вызывающих деформацию оно полностью восстанавливает свои первоначальные размеры и форму (абсолютная упругость). Это допущение справедливо при напряжениях, не превышающих предел упругости σ_y .
4. Деформации материала конструкции в каждой точке прямо пропорциональны напряжениям в этой точке (закон Гука). Закон Гука справедлив лишь при напряжениях, не превышающих предел пропорциональности σ_{nc} .
5. Деформации малы по сравнению с размерами детали.
6. Результат воздействия на конструкцию системы нагрузок равен сумме результатов воздействия каждой нагрузки в отдельности (принцип независимости действия сил или принцип суперпозиции).
7. Поперечное сечение, плоское до деформации, остаётся плоским и после деформации (гипотеза Бернулли).

Основные условные обозначения

Линейные размеры

- L, l, a – длины стержня, балки вала или их участков
 μl – приведённая длина стержня
 a, b, H, h, d – размеры поперечного сечения
 C – расстояние – размер раздвижки элементов составного сечения
 z – координата произвольной точки сечения
 Δ – линейная величина неточности изготовления (натяг)

Геометрические характеристики плоских сечений

- F – площадь поперечного сечения стержня
 S_X, S_Y, S_Z – статические моменты площади фигуры поперечного сечения стержня относительно осей X, Y, Z
 X_C, Y_C – координаты центра тяжести сечения
 J_X, J_Y – осевые моменты инерции сечения
 J_{XY} – центробежный момент инерции
 J_P – полярный момент инерции
 i_X, i_Y – радиусы инерции
 W_X, W_Y – осевые моменты сопротивления
 W_P – полярный момент сопротивления

Напряжения

- σ – нормальное напряжение
 τ – касательное напряжение
 $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение
 $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение
 $\sigma_{\max}, \tau_{\max}$ – максимальные напряжения
 n, n_y – коэффициенты запаса прочности и устойчивости
 φ – коэффициент уменьшения напряжения при продольном изгибе

Деформации и перемещения

- Δl — абсолютная продольная деформация
- ε — относительное продольное удлинение
- φ — угол закручивания при кручении
- θ — относительный угол закручивания
(или угол поворота сечения при изгибе)
- y — прогиб балки
- λ — гибкость стержня
- γ — угол сдвига, относительный

Вводная часть

Если к стержню приложены внешние силы (пары сил, сосредоточенные силы и равномерно распределённые силы), лежащие в плоскости, проходящей через продольную ось стержня и направленные перпендикулярно к продольной оси, то в стержне возникает прямой плоский изгиб. Стержень, работающий на изгиб, принято называть балкой.

Если плоскость действия сил является плоскостью симметрии, то в поперечных сечениях возникают два внутренних усилия и два вида деформационных перемещений - прогиб и угол поворота.

В декартовой прямоугольной системе координат, если вертикальной осью назначена ось Y , продольной осью принята ось Z , то поперечной осью, перпендикулярной к плоскости YOZ , остаётся ось X , относительно которой в этой плоскости возникает один из внутренних силовых факторов - изгибающий момент M_x , а в плоскости YOX возникает второй внутренний силовой фактор - поперечная сила Q_y , действующая в направлении оси Y .

Условия для знаков направлений внешних сил при составлении уравнений равновесия для целой балки:

- принимаем положительное направление внешних сосредоточенных и равномерно распределённых сил вертикально вверх со знаком «плюс» (в сторону положительного направления оси Y);
- положительное направление вращения заданных внешних моментов принимаем со знаком «плюс» при условии их движения против часовой стрелки.

В случае отсечённой части балки:

- изгибающий момент M_x , возникающий от внешних моментов, действующих в левой отсечённой части балки, вращающих балку относительно центра тяжести произвольного сечения в направлении движения часовой стрелки, принимается со знаком «плюс», а для правой отсечённой части наоборот;

- поперечная сила Q_i , возникающая в сечении, уравнивается внешними силами, действующими по одну сторону от сечения. Если внешние силы направлены в положительном направлении оси Y для левой отсечённой части балки, то поперечная сила принимается со знаком «плюс», а для правой отсечённой части наоборот.

Нормальное напряжение в сечениях в общем случае имеет вид:

$$\sigma_u = \frac{M_x}{J_x} y,$$

где σ_u – нормальное напряжение при изгибе;

M_x – изгибающий момент относительно поперечной оси X ;

y – расстояние до оси X ;

J_x – осевой момент инерции.

Для прямоугольного сечения максимальное напряжение:

$$\sigma_{\max} = \frac{\max M_x}{J_x} y_{\max} = \frac{\max M_x}{J_x} \frac{h}{2} = \frac{\max M_x}{W_x},$$

где h – высота балки;

W_x – осевой момент сопротивления, $W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}$;

y_{\max} – половина высоты балки, $y_{\max} = \frac{h}{2}$.

Условие прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{\max M_x}{W_x} \leq [\sigma].$$

Касательное напряжение:

$$\tau = \frac{QS_x}{bJ_x},$$

где Q – поперечная сила;

S_x – статический момент площади сечения;

b – ширина балки;

J_x – осевой момент инерции.

Условие прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \max S_x}{bJ_x} \leq [\tau].$$

При изгибе под действием нагрузок возникают два вида перемещений: прогиб балки y и угол поворота поперечного сечения θ , т.е. линейные и угловые перемещения.

Совокупность прогибов и углов поворота сечений образует так называемую изогнутую ось, или упругую линию балки.

Величины прогибов и углов поворота балки можно определить различными методами и способами.

Основными из них являются:

- **Метод начальных параметров**

$$\theta_i = \theta_0 + \frac{1}{EJ_x} \left[\sum M_i (z - a_i) + \sum P_i \frac{(z - b_i)^2}{2} + \sum q_i \frac{(z - c_i)^3}{6} - \sum q_i \frac{(z - d_i)^3}{6} \right]$$

$$y_i = \theta_0 \cdot z + y_0 + \frac{1}{EJ_x} \left[\sum M_i \frac{(z - a_i)^2}{2} + \sum P_i \frac{(z - b_i)^3}{3} + \sum q_i \frac{(z - c_i)^4}{24} - \sum q_i \frac{(z - d_i)^4}{24} \right]$$

где θ_0 , y_0 – угол поворота и прогиб в начале координат;

$$\left. \begin{array}{l} M_i \\ P_i, (R_i) \\ q_i \end{array} \right\} \text{ – приложенные внешние нагрузки;}$$

z – координата сечения, в котором определяется перемещение;

a, b, c, d – расстояние от начала координат до точки приложения нагрузки (для q – до начала распределенной нагрузки).

- **Метод Максвелла-Мора**

$$y_z(\theta_z) = \frac{1}{EJ_x} \int M_z M_z^1 dz,$$

где y_z – прогиб;

θ_z – угол поворота сечения;

M_z – уравнение изгибающего момента от заданных сил;

M_z^1 – уравнение изгибающего момента от единичной силы (момента).

- **Способ Верещагина**

$$y_z(\theta_z) = \frac{1}{EJ_x} \sum \Omega M_c^1,$$

где Ω – площадь эпюры M_z от внешней нагрузки;

M_c^1 – ордината эпюры от единичной силы (момента) под центром тяжести эпюры M_z .

Кручением называется такой вид деформации, при котором в любом поперечном сечении бруса возникают только крутящие моменты. Причиной деформации при кручении является внешний вращающий момент, приложенный в плоскости, перпендикулярной оси бруса.

Для наглядного изображения распределения крутящих моментов вдоль оси бруса строится эпюра крутящих моментов. Крутящий момент в любом поперечном сечении численно равен алгебраической сумме внешних моментов, приложенных к брусу справа или слева от сечения.

Крутящий момент считается положительным, если при взгляде со стороны сечения результирующий внешний момент, приложенный к рассматриваемой части бруса, будет направлен против часовой стрелки, и наоборот.

Условие прочности бруса при кручении заключается в том, что наибольшее возникающее в нем касательное напряжение не должно превышать допускаемого:

$$\tau = \frac{M_K}{W_p} \leq [\tau_K],$$

где $[\tau_K]$ – допускаемое напряжение при кручении;

W_p – момент сопротивления кручению, равный для круглого сечения

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3, \text{ м}^3.$$

Деформация при кручении представляет собой поворот поперечного сечения бруса вокруг оси кручения и называется углом закручивания.

Требование жесткости к брусу состоит в том, что угол закручивания 1 м длины бруса не должен превышать определенной величины. Угол закручивания участка бруса длиной l определяется по формуле

$$\varphi = \frac{M_K \cdot l}{G \cdot J_p},$$

где $G \cdot J_p$ – жесткость сечения при кручении.

Лабораторная работа №1 – Исследование статически определимой балки на изгиб

Цель: для балки, закрепленной горизонтально и нагруженной плоскими поперечными силами (рисунок 1.1), построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M . Исходные данные для выполнения работы взять из таблицы 1.1 и рисунка 1.2.

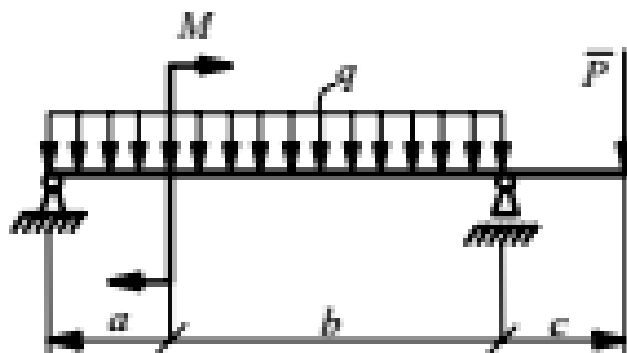


Рисунок 1.1. – Схема балки с нагрузками

Таблица 1.1 – Исходные значения для расчета

	P , кН	M , кН·м	q , кН/м	a	b	c	d
1	20	15	25	1	3	1	-
2	15	10	20	2	4	1,5	-
3	10	5	15	1	5	1	2
4	25	20	30	3	1	0,5	-
5	30	15	10	1	4	1	-
6	20	25	20	4	2	1,5	-
7	10	20	15	2	1,5	4,5	2
8	15	30	20	1,5	6	2	-
9	15	10	5	5	2	1	1
10	10	15	6	1,5	5	2	-
11	25	20	10	1,5	3	2	1
12	30	25	20	2	1,5	4	1,5
13	12	10	8	2,5	4	1,5	-
14	20	16	5	2	3,5	1	2
15	10	5	15	1	1	3	1,5
16	15	8	10	2	2	1	1,5
17	25	15	35	1	1,2	2,5	2
18	20	10	5	3	2,5	1,5	1
19	14	18	10	3	4	2	-
20	10	20	6	1,5	2	3	-

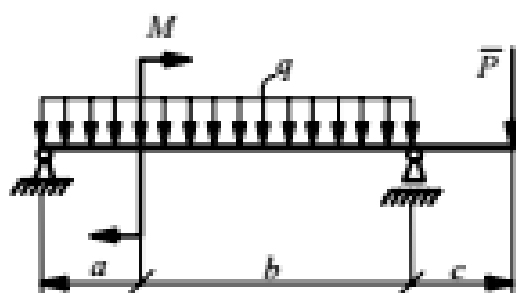


Схема 1

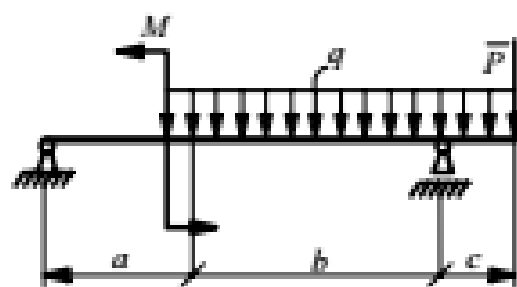


Схема 2

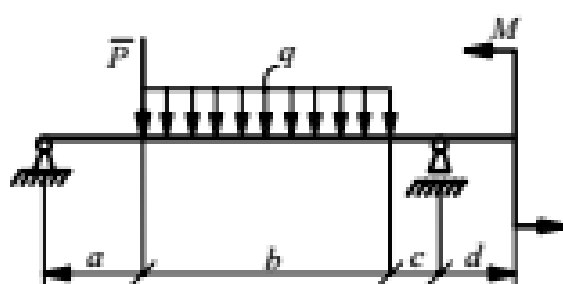


Схема 3

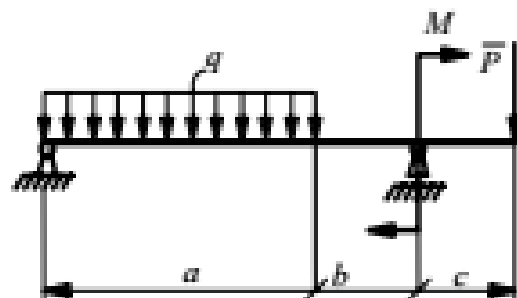


Схема 4

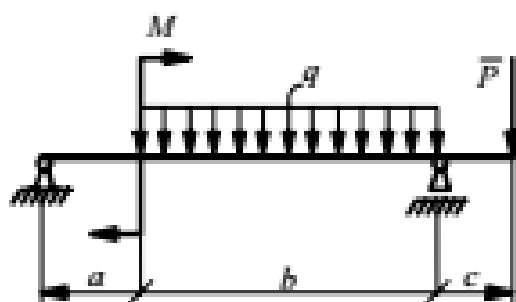


Схема 5

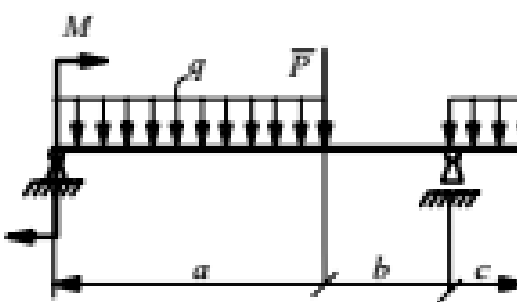


Схема 6

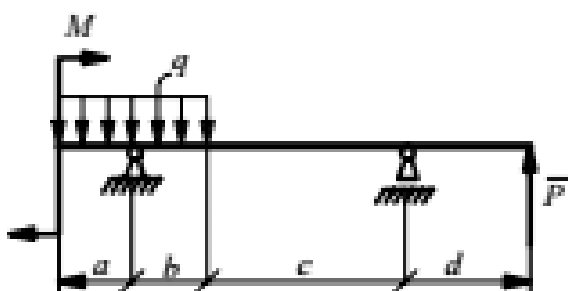


Схема 7

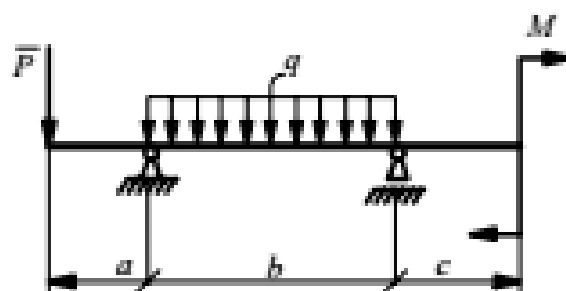


Схема 8

Рисунок 1.2. – Схемы балок с нагрузками

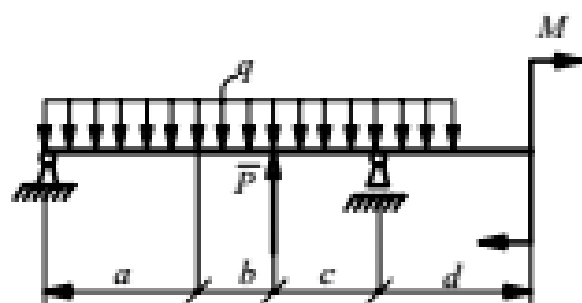


Схема 9

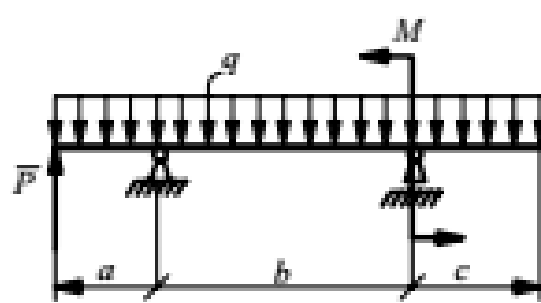


Схема 10

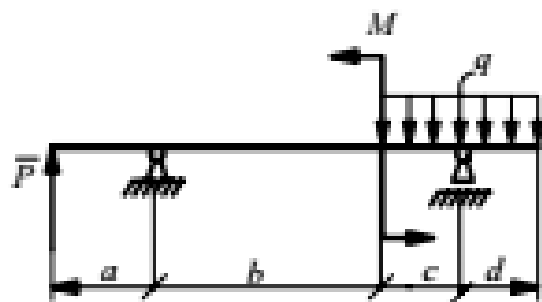


Схема 11

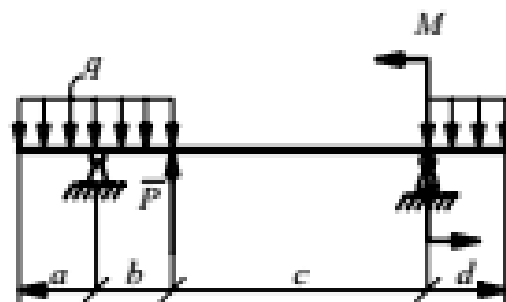


Схема 12

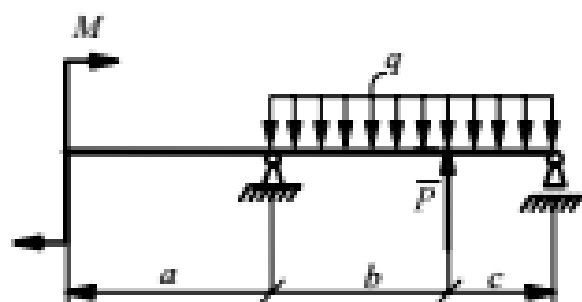


Схема 13

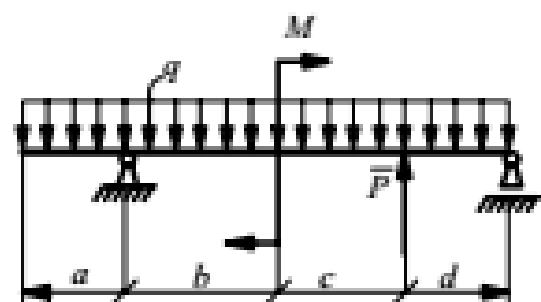


Схема 14

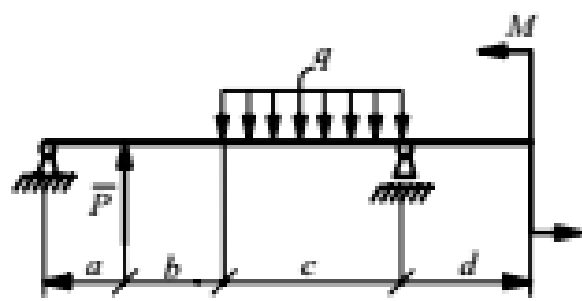


Схема 15

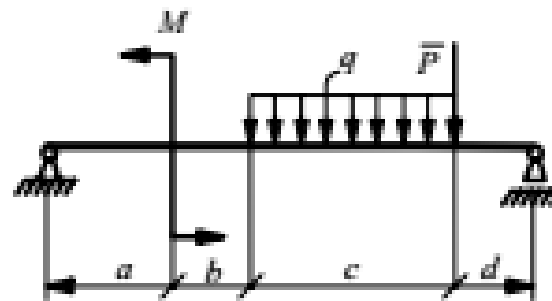


Схема 16

Рисунок 1.2. – Схемы балок с нагрузками (продолжение)

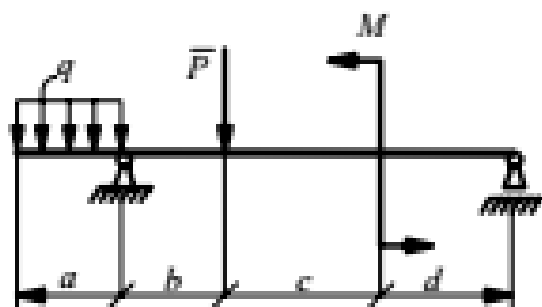


Схема 17

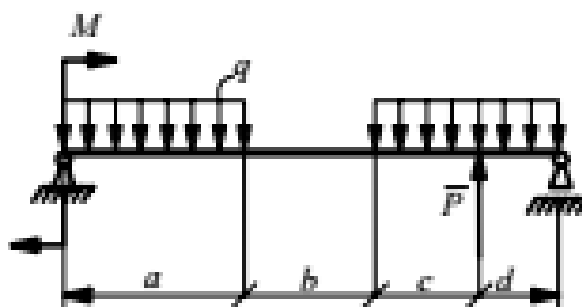


Схема 18

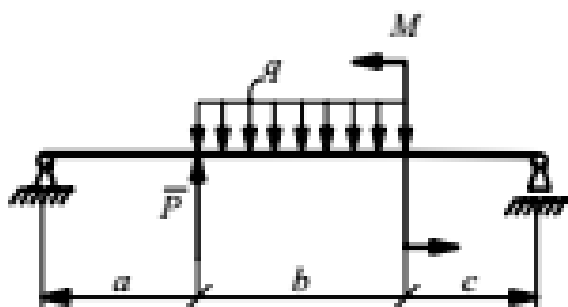


Схема 19

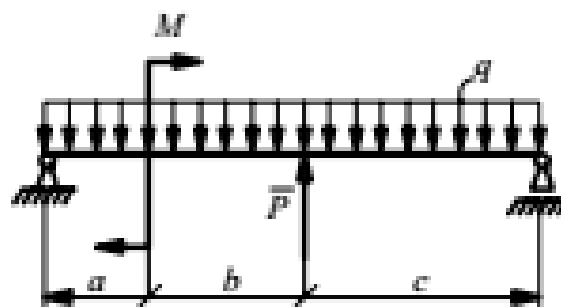


Схема 20

Рисунок 1.2. – Схемы балок с нагрузками (продолжение)

Пример выполнения

Цель:

для балки, загруженной плоскими поперечными силами (рисунок 1.2) построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M .

Исходные данные приняты по номеру варианта _____.

Данные из таблицы 1.1; схема по рисунку 1.2: $P = 15$ кН; $M = 25$ кН·м; $q = 20$ кН/м; $a = 1$ м.

Решение:

1. Определяем реакции балки. Составим уравнения моментов:

$$\sum M_A(F_k) = 0, \quad \sum M_B(F_k) = 0.$$

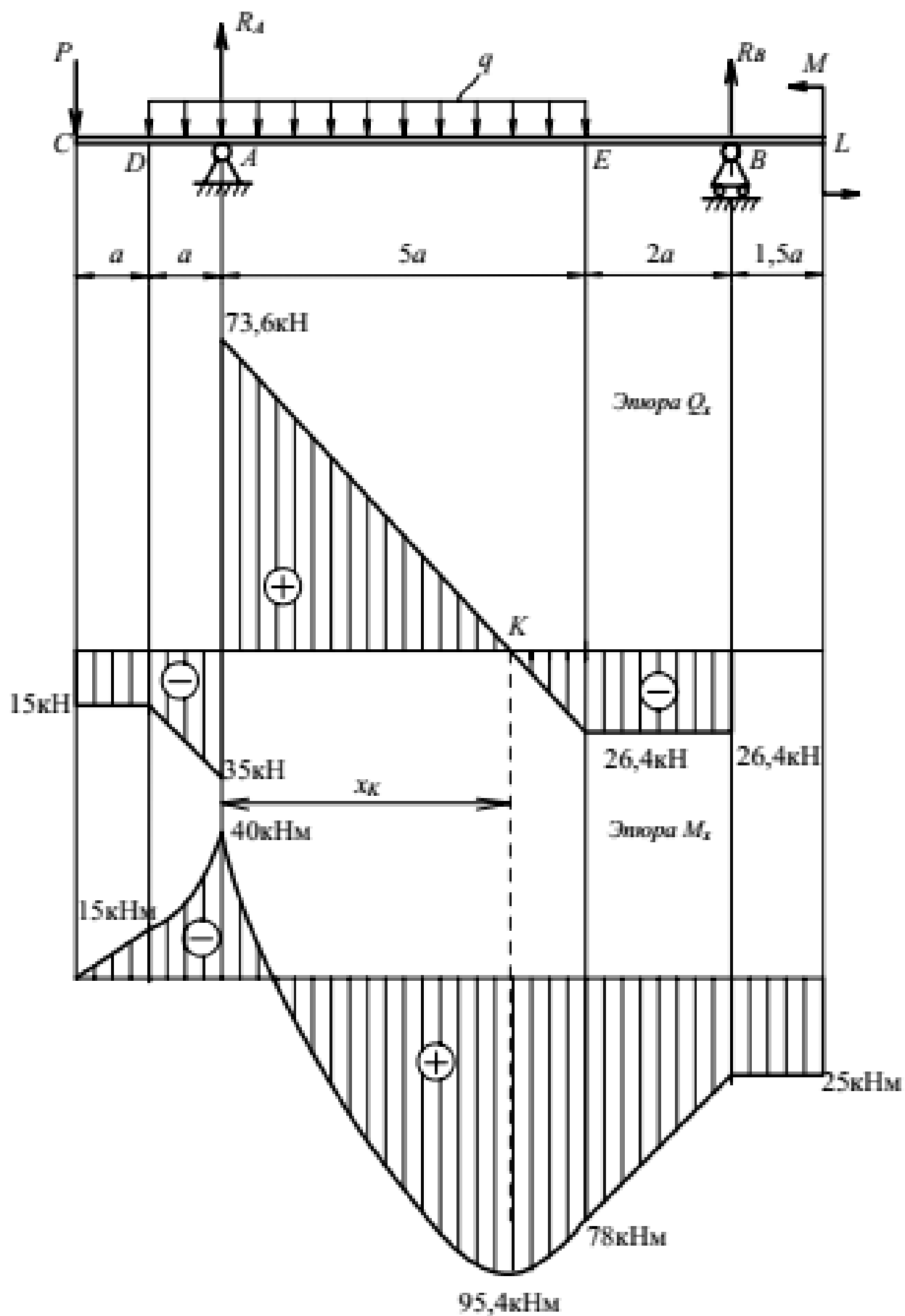


Рисунок 1.3. – Заданная схема балки и эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M

$$P \cdot a - (q \cdot 6a) \cdot 2a + R_B \cdot 7a + M = 0;$$

$$R_B = \frac{12q - P - M}{7} = \frac{12 \cdot 20 - 2 \cdot 15 - 25}{7} = 26,4 \text{ кН};$$

$$P \cdot 9a + (q \cdot 6a) \cdot 5a - R_A \cdot 7a + M = 0;$$

$$R_A = \frac{P \cdot 9 + 30q + M}{7} = \frac{135 + 600 + 20}{7} = 108,6 \text{ кН}.$$

Выполним проверку:

$$\sum F_{ky} = 0; \quad -P + R_A - q \cdot 6a + R_B = -15 + 108,6 - 120 + 26,4 = 0.$$

2. Обозначим характерные сечения балки, которые соответствуют точкам C , D , A , E , B , L .

Строим эпюру поперечных сил Q_x . Определим значения поперечных сил в характерных сечениях:

$$Q_C = -P = -15 \text{ кН};$$

$$Q_D = -P = -15 \text{ кН};$$

$$Q_A^{лев} = -P - qa = -15 - 20 = -35 \text{ кН};$$

$$Q_A^{прав} = -P - qa + R_A = -15 - 20 + 108,6 = 73,6 \text{ кН};$$

$$Q_E = -P - q \cdot 6a + R_A = -15 - 20 \cdot 6 + 108,6 = -24,6 \text{ кН};$$

$$Q_B^{лев} = Q_E = -26,4 \text{ кН};$$

$$Q_B^{прав} = Q_B^{лев} + R_B = -26,4 + 26,4 = 0;$$

$$Q_F = 0.$$

Соединив концы отложенных ординат прямыми линиями, получим эпюру Q_x .

Эпюра Q_x на участке AE пересекает нулевую линию в точке K . Величину отрезка x_K определим используя подобие треугольников:

$$\frac{73,6}{x_K} = \frac{26,4}{5a - x_K}; \quad 73,6 \cdot 5 - 73,6 \cdot x_K = 26,4 \cdot x_K; \quad x_K = 3,68 \text{ м}.$$

Это сечение считается также характерным для эпюры Q_x и M_x .

3. Строим эпюру M_x . Определим изгибающие моменты в характерных сечениях:

$$M_C = 0.$$

$$M_D = -P \cdot a = -15 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$M_A = -P \cdot 2a - qa \cdot \frac{a}{2} = -15 \cdot 2 - 20 \cdot 1 \cdot 0,5 = -40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$M_E = -P \cdot 7a + R_A \cdot 5a - (q \cdot 6a)3a = -15 \cdot 7 + 108,6 \cdot 5 - 20 \cdot 6 \cdot 3 = 78 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$M_K = -P(2a + x_K) + R_A \cdot x_K - q(a + x_K) \frac{a + x_K}{2} =$$

$$= -15 \cdot 5,68 + 108,6 \cdot 3,68 - 20 \cdot 4,68 \cdot 2,34 = 95,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$M_B = M = 25 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ (рассмотрена правая часть балки } BL).$$

$$M_L = M = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Строим эпюру M_x на участках между характерными сечениями:

- участок CD – на участке приложена сосредоточенная сила, поэтому эпюра M_x является прямой линией, соединяющей значения 0 и $-15 \text{ кН} \cdot \text{м}$;
- участок DA – на участке действует распределенная нагрузка, поэтому эпюра M_x изображается параболой между значениями -15 и $-40 \text{ кН} \cdot \text{м}$;
- участок AE – ввиду наличия распределенной нагрузки эпюра M_x является параболой, а так как эпюра Q_x на этом участке пересекает нулевую линию, то парабола имеет экстремальное значение (вершину), поэтому эпюру M_x строим по трем точкам: $M_A = -40 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_K = 95,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_E = 78 \text{ кН} \cdot \text{м}$;
- участок EB – на участке нет распределенной нагрузки, поэтому эпюра M_x изображается прямой линией, соединяющей значения $M_E = 78 \text{ кН} \cdot \text{м}$ и $M_B = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}$;
- участок BL – на участке нет нагрузки, поэтому эпюра M_x является прямой, параллельной нулевой линии.

Лабораторная работа №2 – Исследование на прочность и жесткость статически определимой балки при изгибе

Цель:

для балки, нагруженной плоскими поперечными силами (рисунок 2.1):

- построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M ;
- из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать для балки двутавровое, прямоугольное ($h = 2b$), круглое, кольцевое ($\alpha = d/D = 0,8$) сечения. Сравнить веса балок с подобранными поперечными сечениями.

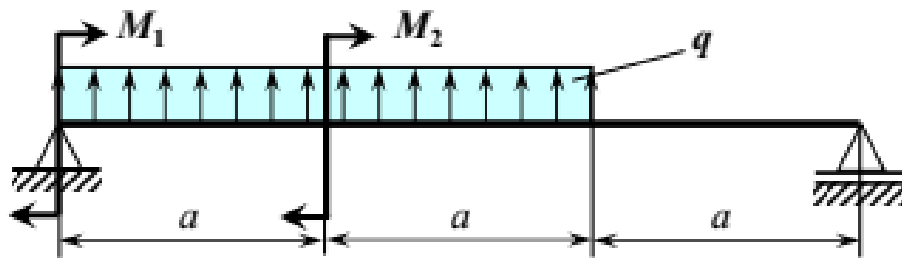


Рисунок 2.1. – Схема балки с поперечными нагрузками

Исходные данные взять из таблицы 2.1 и по рисунку 2.2.

Порядок расчета

1. Составить расчётную схему балки, нагруженной внешними силами.
 2. Определить реакции опор.
 3. Определить внутренние усилия Q и M по участкам и построить их эпюру.
 4. Выполнить расчёт прочности балки по допускаемому нормальному напряжению, определив опасное сечение балки по эпюре изгибающих моментов для двутавра.
 5. Определить безопасные размеры поперечных сечений для заданных вариантов профилей.
 6. Выбрать наиболее экономичный вариант сечения балки (по весу).
- Сделать выводы.

Таблица 2.1 – Значения нагрузок для балок

Код задания		Значения нагрузок: P , кН; q , кН/м; M , кН·м						
1	0	$P_1=40$	$q_1=20$	$P_1=40$	$M_1=60$	$q_1=20$	$P_2=30$	$M_2=80$
	1	$P_1=40$	$q_2=15$	$P_2=30$	$M_1=60$	$q_1=20$	$P_2=30$	$M_1=60$
	2	$P_2=30$	$q_1=20$	$P_1=40$	$M_2=80$	$q_1=20$	$P_1=40$	$M_2=30$
2	0	$P_2=30$	$q_2=15$	$P_1=40$	$M_2=80$	$q_2=15$	$P_1=40$	$M_1=60$
	1	$M_1=60$	$q_1=20$	$P_1=40$	$M_1=60$	$q_2=15$	$M_2=80$	$q_2=15$
	2	$M_1=60$	$q_2=15$	$P_2=30$	$M_2=80$	$q_2=15$	$M_2=80$	$q_1=20$
3	0	$M_2=80$	$q_1=20$	$P_2=30$	$M_2=80$	$q_1=20$	$M_1=60$	$q_2=15$
	1	$M_2=80$	$q_2=15$	$P_2=30$	$M_1=60$	$q_2=15$	$M_1=60$	$q_1=20$
	2	$P_1=40$	$M_1=80$	$P_1=40$	$P_2=30$	$q_1=20$	$P_2=30$	$q_2=15$
4	0	$P_1=40$	$M_2=60$	$P_1=40$	$P_2=30$	$q_2=15$	$P_2=30$	$q_1=20$
	1	$P_2=30$	$M_1=80$	$M_1=60$	$M_2=80$	$q_1=20$	$P_1=40$	$q_2=15$
	2	$P_2=30$	$M_2=60$	$M_1=60$	$M_2=80$	$q_2=15$	$P_1=40$	$q_1=20$
5	0	$P_1=-30$	$q_1=-30$	$P_1=-30$	$M_1=-70$	$q_1=-30$	$P_2=50$	$M_2=60$
	1	$P_1=-30$	$q_2=20$	$P_2=50$	$M_1=-70$	$q_1=-30$	$P_2=50$	$M_1=-70$
	2	$P_2=50$	$q_1=-30$	$P_1=-30$	$M_2=60$	$q_1=-30$	$P_1=-30$	$M_2=60$
6	0	$P_2=50$	$q_2=20$	$P_1=-30$	$M_2=60$	$q_2=20$	$P_1=-30$	$M_1=-70$
	1	$M_1=-70$	$q_1=-30$	$P_1=-30$	$M_1=-70$	$q_2=20$	$M_2=60$	$q_2=20$
	2	$M_1=-70$	$q_2=20$	$P_2=50$	$M_2=60$	$q_2=20$	$M_2=60$	$q_1=-30$
7	0	$M_2=60$	$q_1=-30$	$P_2=50$	$M_2=60$	$q_1=-30$	$M_1=-70$	$q_2=20$
	1	$M_2=60$	$q_2=20$	$P_2=50$	$M_1=-70$	$q_2=20$	$M_1=-70$	$q_1=-30$
	2	$P_1=-30$	$M_1=-70$	$P_1=-30$	$P_2=50$	$q_1=-30$	$P_2=50$	$q_2=20$
8	0	$P_1=-30$	$M_2=60$	$P_1=-30$	$P_2=50$	$q_2=20$	$P_2=50$	$q_1=-30$
	1	$P_2=50$	$M_1=-70$	$M_1=-70$	$M_2=60$	$q_1=-30$	$P_1=-30$	$q_2=20$
	2	$P_2=50$	$M_2=60$	$M_1=-70$	$M_2=60$	$q_2=20$	$P_1=-30$	$q_1=-30$
9	0	$P_1=25$	$q_1=10$	$P_1=25$	$M_1=50$	$q_1=10$	$P_2=-40$	$M_2=-40$
	1	$P_1=25$	$q_2=-30$	$P_2=-40$	$M_1=50$	$q_1=10$	$P_2=-40$	$M_1=50$
	2	$P_2=-40$	$q_1=10$	$P_1=25$	$M_2=-40$	$q_1=10$	$P_1=25$	$M_2=-40$
10	0	$P_2=-40$	$q_2=-30$	$P_1=25$	$M_2=-40$	$q_2=-30$	$P_1=25$	$M_1=50$
	1	$M_1=50$	$q_1=10$	$P_1=25$	$M_1=50$	$q_2=-30$	$M_2=-40$	$q_2=-30$
	2	$M_1=50$	$q_2=-30$	$P_2=-40$	$M_2=-40$	$q_2=-30$	$M_2=-40$	$q_1=10$
11	0	$M_2=-40$	$q_1=10$	$P_2=-40$	$M_2=-40$	$q_1=10$	$M_1=50$	$q_2=-30$
	1	$M_2=-40$	$q_2=-30$	$P_2=-40$	$M_1=50$	$q_2=-30$	$M_1=50$	$q_1=10$
	2	$P_1=25$	$M_1=50$	$P_1=25$	$P_2=-40$	$q_1=10$	$P_2=-40$	$q_2=-30$
12	0	$P_1=25$	$M_2=-40$	$P_1=25$	$P_2=-40$	$q_2=-30$	$P_2=-40$	$q_1=10$
	1	$P_2=-40$	$M_1=50$	$M_1=50$	$M_2=-40$	$q_1=10$	$P_1=25$	$q_2=-30$
	2	$P_2=-40$	$M_2=-40$	$M_1=50$	$M_2=-40$	$q_2=-30$	$P_1=25$	$q_1=10$

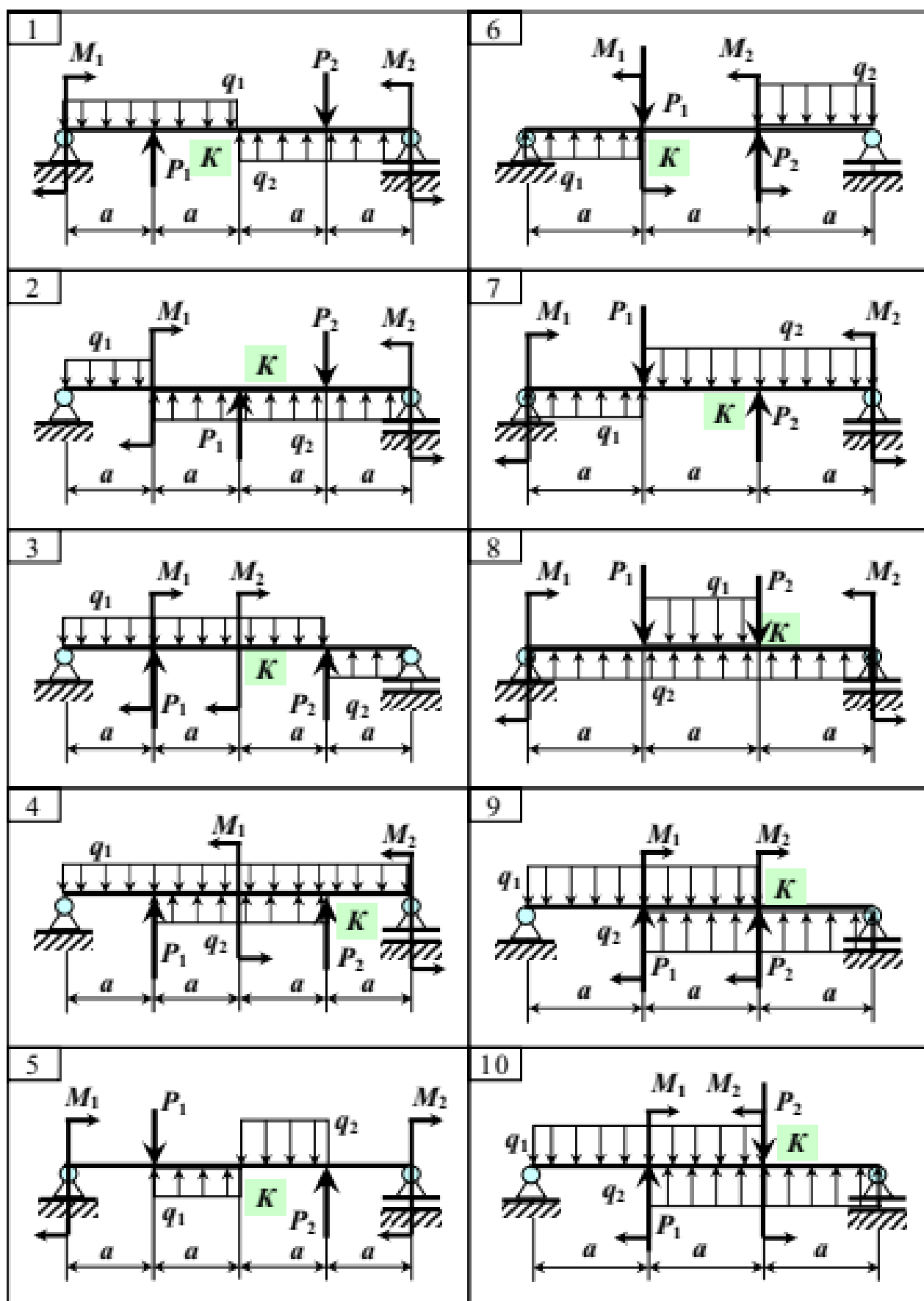


Рисунок 2.2. – Схемы балок с поперечными нагрузками

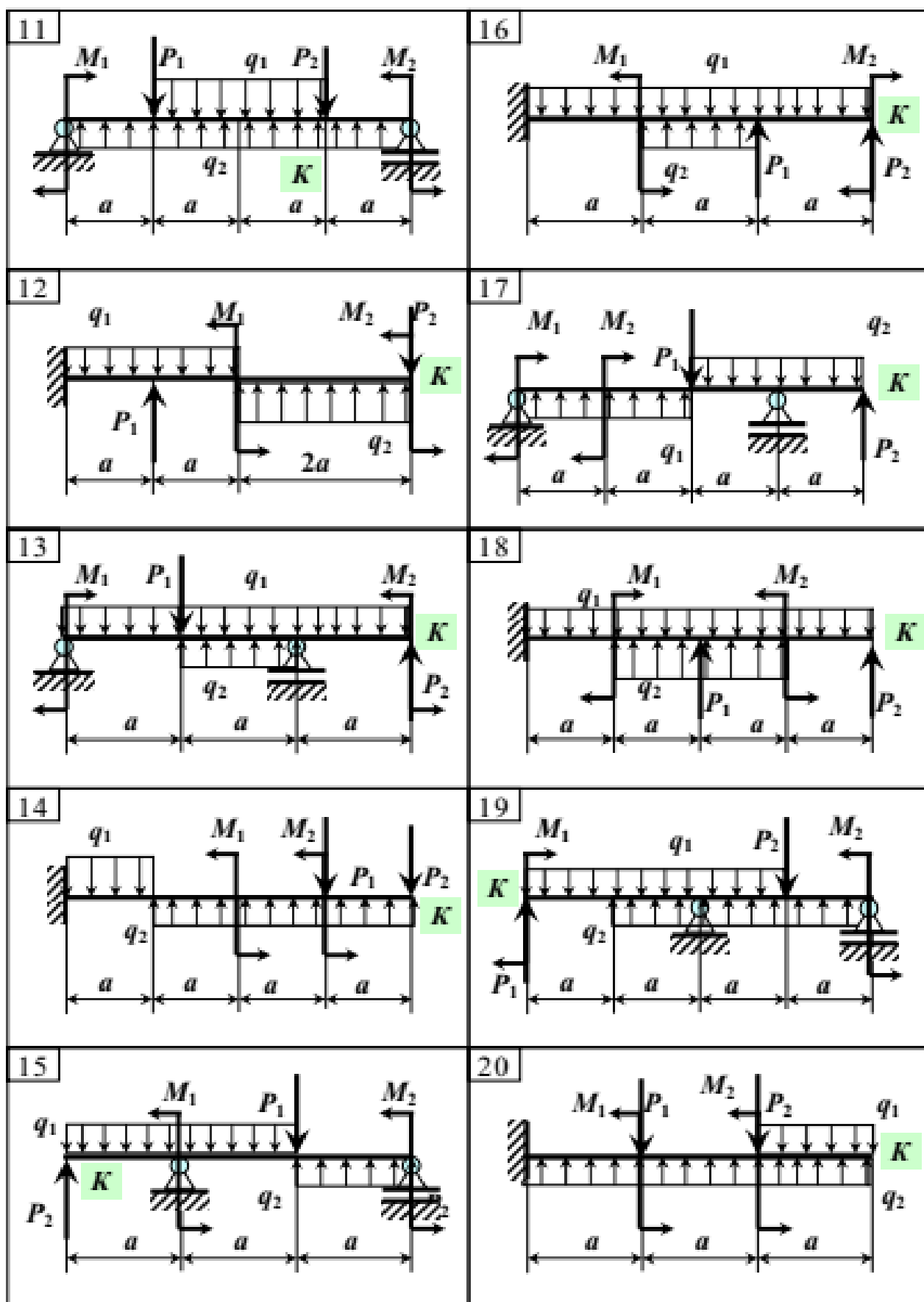


Рисунок 2.2. – Схемы балок с поперечными нагрузками (продолжение)

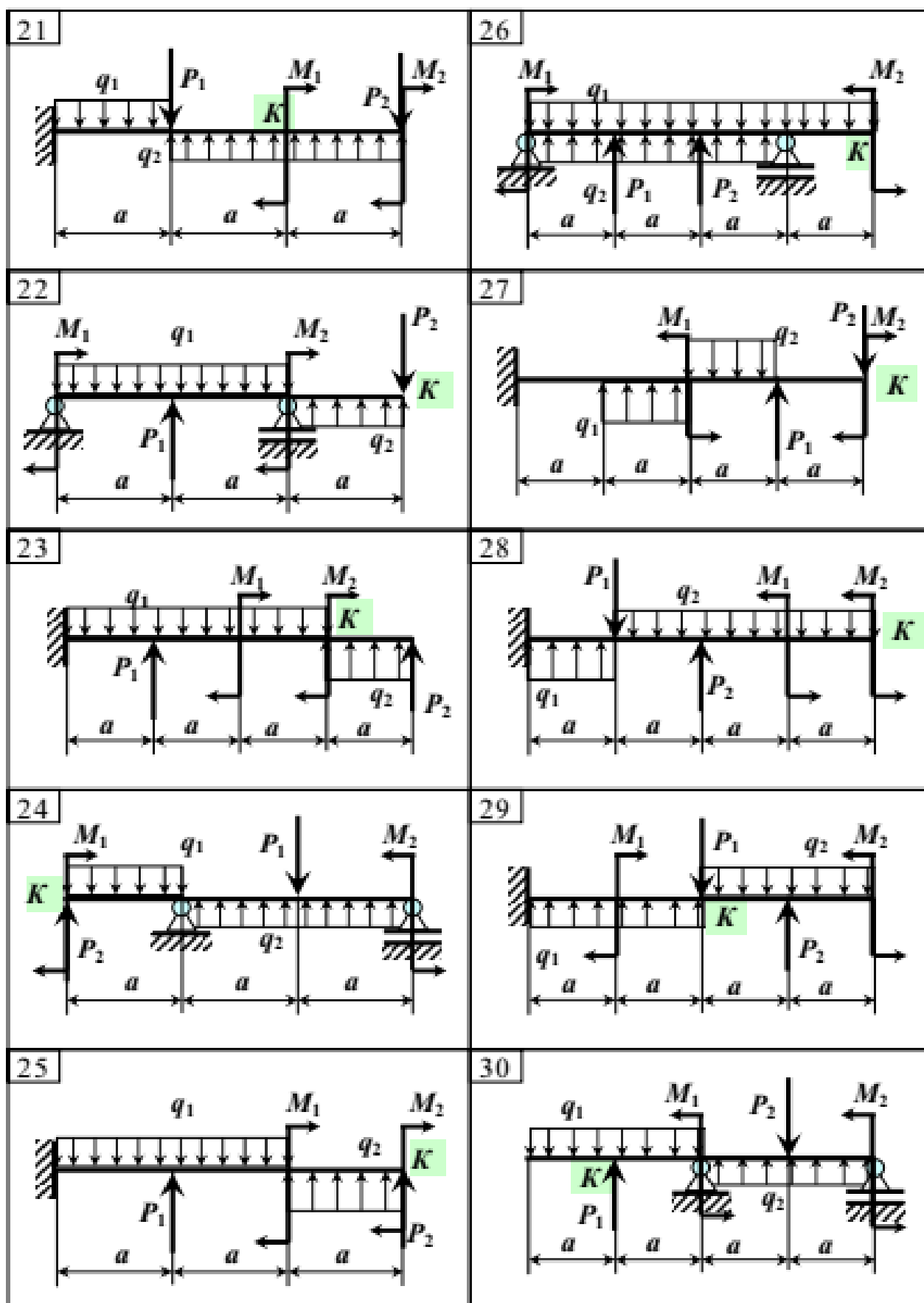


Рисунок 2.2. – Схемы балок с поперечными нагрузками (продолжение)

Пример выполнения

Цель:

для балки, нагруженной плоскими поперечными силами (рисунок 2.3):

- построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M ;
- из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать для балки двутавровое, прямоугольное ($h = 2b$), круглое, кольцевое ($\alpha = d/D = 0,8$) сечения. Сравнить веса балок с подобранными поперечными сечениями.

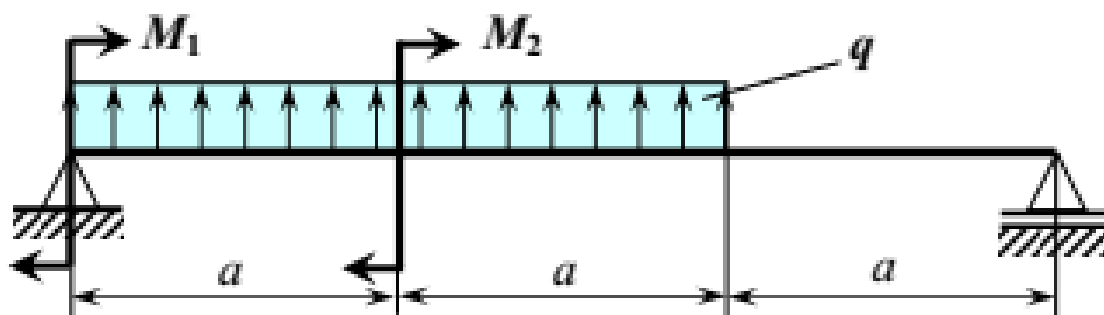


Рисунок 2.3. – Заданная схема балки

Исходные данные приняты по номеру варианта _____.

Данные из таблицы 2.1; схема по рисунку 2.2:

$$M_1 = 60 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$[\sigma] = 160 \text{ МПа};$$

$$M_2 = 80 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$[\tau] = 160 \text{ МПа};$$

$$q = 20 \text{ кН/м};$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$a = 2 \text{ м}.$$

$$G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

Составляем расчётную схему балки, нагруженной активными и реактивными силами (рисунок 2.4).

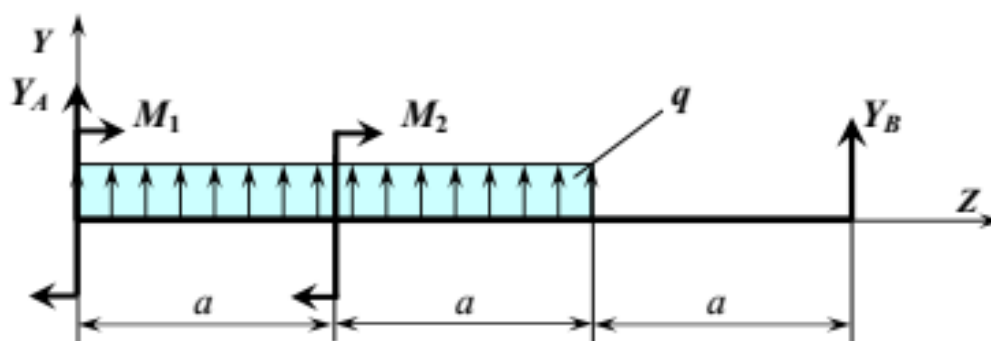


Рисунок 2.4. – Расчетная схема балки

Заменяем действие закреплений концов балки опорными реакциями.

Условия для знаков направлений внешних сил: принимаем положительное направление сосредоточенных и равномерно распределённых сил вертикально вверх со знаком «плюс» (в сторону положительного направления оси Y). Положительное направление вращения заданных внешних моментов принимаем со знаком «плюс» при условии их движения против часовой стрелки.

Произвольно назначаем реакции Y_A и Y_B в положительном направлении.

1. Определяем реакции опор Y_A и Y_B . Составляем моментные уравнения внешних сил относительно опорных концов балки A и B .

$$\sum m_A = 0, \quad -M_1 + (q \cdot 2a)a - M_2 + Y_B \cdot 3a = 0.$$

$$-60 + 20 \cdot 4 \cdot 2 - 80 + Y_B \cdot 6 = 0 \Rightarrow Y_B = -3,3 \text{ кН}.$$

$$\sum m_B = 0, \quad -M_1 - (q \cdot 2a)2a - M_2 - Y_A \cdot 3a = 0.$$

$$-60 - 20 \cdot 4 \cdot 4 - 80 - Y_A \cdot 6 = 0 \Rightarrow Y_A = -76,7 \text{ кН}.$$

Знак «минус» указывает на противоположное действительное направление реакции.

Сделаем проверку:

$$\sum Y = 0, \quad -Y_A + q \cdot 2a - Y_B = 0, \quad -3,3 + 20 \cdot 2 \cdot 2 - 76,7 = 0$$

Сумма проекций всех вертикальных сил на ось Y обратилась в нуль. Этим подтверждена правильность определения реакций.

При построении эпюр внутренних усилий изменяем направление реакций на противоположное и знак значения реакций, полученных в расчёте. Откорректированная расчётная схема на рисунке 2.5.

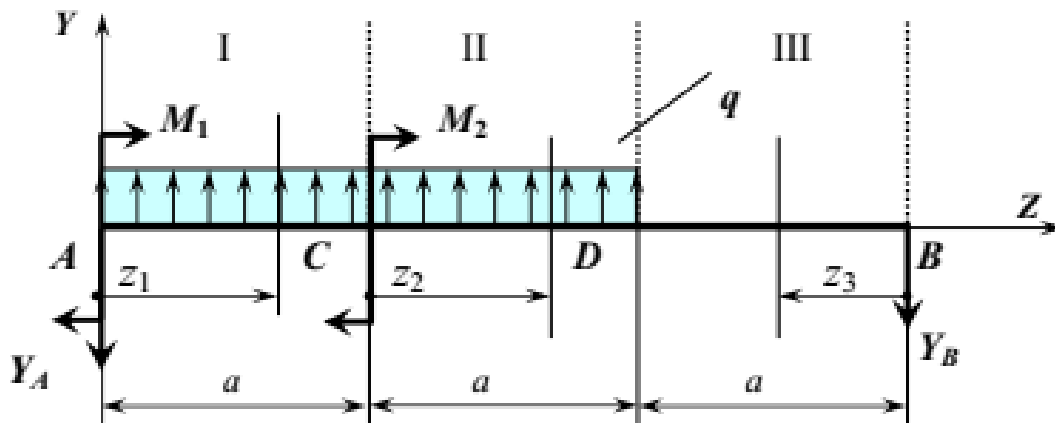


Рисунок 2.5. – Откорректированная расчетная схема балки

2. Устанавливаем границы участков балки и нумеруем их:

I участок $A-C$;

II участок $C-D$;

III участок $D-B$.

3. Определяем внутренние усилия в балке и строим эпюры Q_y и M_x .

Составляем математические выражения функций поперечных сил Q_i для каждого участка балки, используя метод сечений.

Поперечная сила Q_i , возникающая в сечении, уравнивается внешними силами, действующими по одну сторону от сечения.

I участок:

$$Q'_Y = -Y_A + qz_1; \quad 0 \leq z_1 \leq a; \quad a = 2\text{ м.}$$

$$z = 0: Q'_{Y(z=0)} = -Y_A = -76,7 \text{ кН.}$$

$$z = 2: Q'_{Y(z=2)} = -Y_A + qa = -76,7 + 20 \cdot 2 = -36,7 \text{ кН.}$$

II участок:

$$Q''_Y = -Y_A + q(a + z_2); \quad 0 \leq z_2 \leq a; \quad a = 2\text{ м.}$$

$$z = 0: Q''_{Y(z=0)} = -Y_A = -76,7 + 20 \cdot 2 = -36,7 \text{ кН.}$$

$$z = 2: Q''_{Y(z=2)} = -Y_A + qa = -76,7 + 20 \cdot (2 + 2) = 3,3 \text{ кН.}$$

III участок:

$$Q'''_Y = +Y_B; \quad 0 \leq z_3 \leq a; \quad a = 2\text{ м.}$$

$$z = 0: Q'''_{Y(z=0)} = +Y_B = 3,3 \text{ кН.}$$

$$z = 2: Q'''_{Y(z=2)} = Y_B = 3,3 \text{ кН.}$$

Строим эпюру поперечных сил Q_i (рисунок 2.6).

Составляем математические выражения функций изгибающих моментов M_i для каждого участка балки, используя метод сечений.

При наличии равномерно распределённой нагрузки выполняем исследование функции изгибающего момента на максимум для определения величины M_{\max} и его точного положения.

Внешние моменты, действующие в левой отсечённой части балки, вращающие балку относительно центра тяжести произвольного сечения в направлении движения часовой стрелки, принимаются со знаком «плюс», а для правой отсечённой части наоборот.

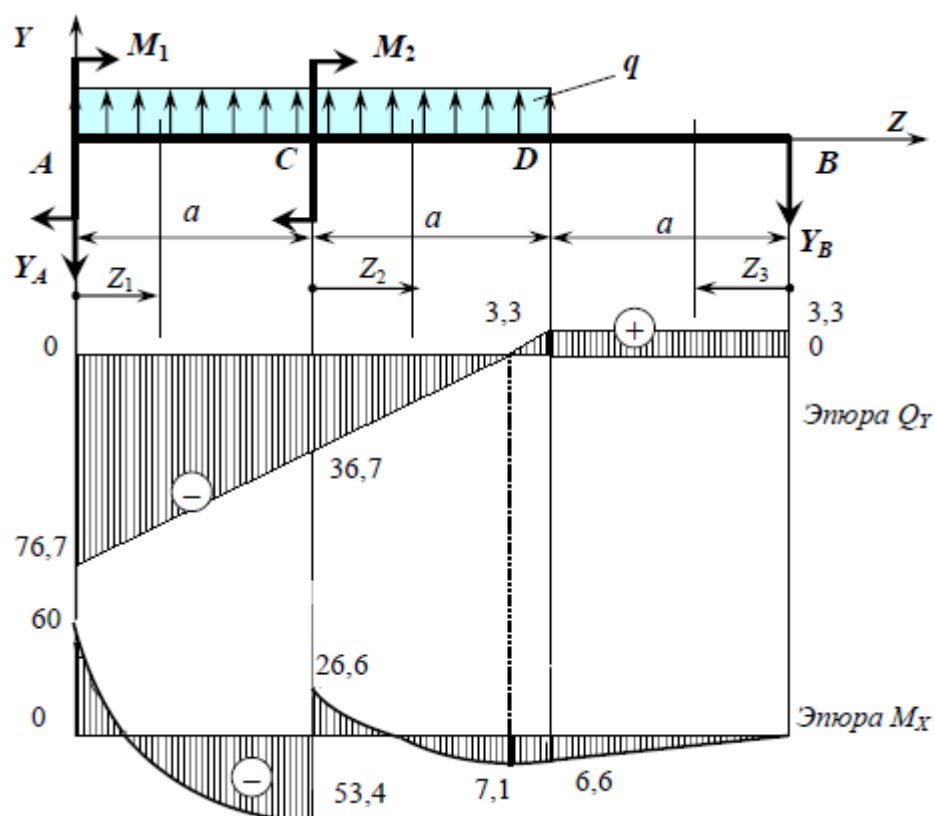


Рисунок 2.6. – Эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x

I участок:

$$0 \leq z_1 \leq a; \quad a = 2\text{м}; \quad M'_{x(z_1)} = M_1 - Y_A z_1 + (q_1 z_1) \frac{z_1}{2}.$$

$$z_1 = 0: M'_{x(z_1=0)} = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$z_1 = 2: M'_{x(z_1=2)} = 60 - 76,7 \cdot 2 + 20 \cdot \frac{2^2}{2} = -53,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Исследуем функцию изгибающего момента на максимум на каждом участке.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM_x}{dz} &= 0, \\ \frac{dM_x}{dz} &= Q_y, \end{aligned} \right\} \rightarrow Q_y = 0, -Y_A + qz_1 = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{Y_A}{q} = \frac{76,7}{20} = 3,85 \text{ м}.$$

Абсцисса z_1 не принадлежит первому участку.

Она показывает положение максимального момента вблизи конца второго участка на продолжении параболической кривой первого участка.

II участок:

$$0 \leq z_2 \leq a; \quad a = 2\text{м}; \quad M''_{x(z_2)} = M_1 + M_2 - Y_A(a + z_2) + q(a + z_2) \frac{(a + z_2)}{2}.$$

$$z_2 = 0: M''_{x(z_2=0)} = 60 + 80 - 76,7 \cdot 2 + 20 \frac{2^2}{2} = 26,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$z_2 = 2: M''_{x(z_2=2)} = 60 + 80 - 76,7 \cdot (2 + 2) + 20 \cdot \frac{(2 + 2)^2}{2} = -6,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определяем значение максимального момента на втором участке.

$$Q_Y'' = -Y_A + q(a + z_2) = 0 \Rightarrow z_2 = 76,7/20 - 2 = 1,835 \text{ м}.$$

Определяем экстремум M_x при $z_2 = 1,835 \text{ м}$.

$$\begin{aligned} M''_{x(z_2=1,835)} &= M_1 + M_2 - Y_A(a + z_2) + q(a + z_2) \frac{(a + z_2)}{2} = \\ &= 60 + 80 - 76,7 \cdot (2 + 1,835) + 20 \cdot \frac{(2 + 1,835)^2}{2} = -7,074 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

III участок:

$$0 \leq z_3 \leq a; \quad a = 2 \text{ м}; \quad M'''_{x(z_3)} = -Y_A \cdot z_3;$$

$$z_3 = 0: M'''_{x(z_3=0)} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$z_3 = 2: M'''_{x(z_3=2)} = -3,3 \cdot 2 = -6,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Вывод: значение максимального изгибающего момента примем по построенной эпюре.

Строим эпюру изгибающих моментов M_x . По эпюре $\max M'_{x(z_1=0)} = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

4. Выполняем расчёт на прочность по допускаемым нормальным и касательным напряжениям для двутавра и строим эпюру σ и τ по высоте опасного сечения A .

В нём одновременно действуют максимальный изгибающий момент $\max M_x$ и максимальная поперечная сила $\max Q_y$.

Условие прочности по допускаемым нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{|\max M_x|}{W_x} \leq [\sigma].$$

Определяем необходимый минимальный момент сопротивления:

$$W_x \geq \frac{|\max M_x|}{[\sigma]} = \frac{60 \cdot 10^6}{160} \cdot 10^3 = 375 \text{ см}^3.$$

Выбор профиля поперечного сечения по моменту сопротивления W_x и построение эпюр нормальных и касательных напряжений по высоте сечения

- Выбираем двутавровое сечение.

По ГОСТ 8239-89 Сталь прокатная. Балки двутавровые.

Двутавр № 27, $W_x = 371 \text{ см}^3$ или двутавр № 27 «а», $W_x = 407 \text{ см}^3$.

Проверяем прочность двутавра № 27 по нормальным напряжениям.

$W_x = 371 \text{ см}^3$, $F = 40,2 \text{ см}^2$, $J_x = 5010 \text{ см}^4$, $S_x = 210 \text{ см}^3$, толщина стенки $d = 6,0 \text{ мм}$, ширина полки $b = 125 \text{ мм}$.

$$\sigma_{\max} = \frac{|\max M_x|}{W_x} = \frac{60 \cdot 10^6}{371 \cdot 10^3} = 161,7 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Превышение напряжений составляет $\delta = \frac{161,7}{160} \cdot 100\% = 1,1\%$ и не выходит за пределы допускаемых 5%.

Двутавр № 27 «а» в этом случае можно не применять.

Проверка прочности по допускаемым касательным напряжениям

Допускаемые касательные напряжения определяются в зависимости от нормальных напряжений $[\sigma]$ по соотношению $[\tau] = 0,6 \cdot [\sigma]$.

$[\tau] = 0,6 \cdot 160 = 96 \text{ МПа}$. Принимаем $[\tau] = 90 \text{ МПа}$.

Условие прочности по касательным напряжениям для стенки

$$\tau_{\max} = \frac{|Q|_{\max} S_x}{J_x d} \leq [\tau]. \text{ Тогда } \tau_{\max} = \frac{76,7 \cdot 10^3 \cdot 210 \cdot 10^3}{5010 \cdot 10^4 \cdot 6} = 53,6 \text{ МПа} < [\tau] = 90 \text{ МПа}.$$

Характеристики двутавра № 27 соответствуют условиям прочности по нормальным и касательным напряжениям.

Имеется превышение допускаемых нормальных напряжений в допустимых пределах $\delta = 1,1\% < 5\%$.

Вычисляем значения напряжений, распределённых по высоте поперечного сечения.

Зависимость нормальных напряжений от координаты y : $\sigma = \frac{M_{\max}}{J_x} \cdot y$.

Из формулы видно, что при $y = 0$ $\sigma = 0$, т.е. вдоль оси Z располагается нейтральный слой, в котором нет нормальных напряжений σ .

Так как в формуле переменная y содержится в первой степени, напряжения σ изменяются по линейному закону.

Поэтому для построения эпюры нормальных напряжений достаточно вычислить напряжения в двух характерных точках:

$$y_{1,2} = \pm \frac{h}{2};$$

$$y = \frac{h}{2} \quad \sigma = \frac{60 \cdot 10^6}{5010 \cdot 10^4} \cdot \frac{270}{2} = 161,7 \text{ МПа};$$

$$y = -\frac{h}{2} \quad \sigma = \frac{60 \cdot 10^6}{5010 \cdot 10^4} \cdot \left(-\frac{270}{2}\right) = -161,7 \text{ МПа};$$

Строим эпюру нормальных напряжений (рисунок 2.7).

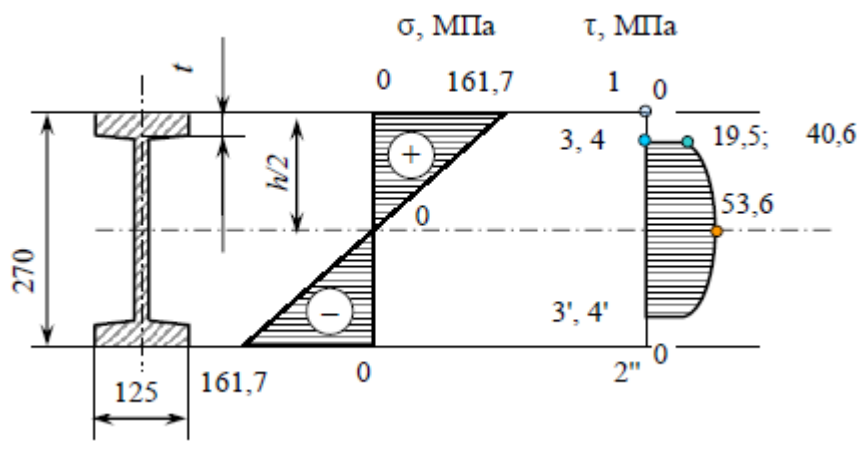


Рисунок 2.7. – Эпюры нормальных и касательных напряжений в сечении двутавра №27

Зависимость касательных напряжений от координаты y : $\tau_{\max} = \frac{|\max Q_y| S_x}{J_x d} \leq [\tau]$.

Из формулы видно, что касательные напряжения по высоте сечения изменяются в зависимости от переменного соотношения S_x/d (т. е. от ширины поперечного сечения в искомом уровне и значения статического момента сопротивления сечения выше искомого уровня).

Изменение касательных напряжений происходит по закону параболической кривой. Ширина сечения y двутавра меняется по высоте и имеет значение для стенки $d = 6$ мм, для полки $b = 125$ мм.

Соотношение $\frac{|\max Q_y|}{J_x}$ для выбранного двутавра остается постоянным:

$$\frac{|\max Q_y|}{J_x} = \frac{76,7 \cdot 10^3}{5010 \cdot 10^4} = 15,3 \cdot 10^{-4}.$$

В стенке двутавра в зависимости от y изменяется величина S_x в пределах $0 \leq S_x \leq \max S_x = 210 \text{ см}^3$.

При $y_0 = 0$ $d = 6 \text{ мм}$, $S_x = S_{\max} = 210 \text{ см}^3$.

$$\tau = 15,3 \cdot 10^{-4} \frac{210 \cdot 10^3}{6} = 53,6 \text{ МПа}, \quad \tau = \tau_{\max} = 53,6 \text{ МПа}.$$

При $y_{1,2} = \pm \frac{h}{2}$ $d = 6 \text{ мм}$, $S_x = 0$, $\tau = 0$.

Для построения параболической кривой эпюры τ необходимо иметь ещё не менее двух значений y .

Назначим ещё два уровня при $y_{3,4}$ с шириной полки $b = 125 \text{ мм}$.

$$\text{При } y_{3,4} = \frac{h}{2} - \frac{t}{2} = \frac{270}{2} - \frac{9,8}{2} = 130,1 \text{ мм и } b = 125 \text{ мм}.$$

$$S_{x(3,4)} = bty_{3,4} = 125 \cdot 9,8 \cdot 130,1 = 15,9 \cdot 10^4 \text{ мм}^3.$$

$$\tau_{(3,4)} = 15,3 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{15,9 \cdot 10^4}{125} = 19,5 \text{ МПа}.$$

При $y_{3,4} = 130,1 \text{ мм}$ $d = 6 \text{ мм}$, $S_{x(3,4)} = 15,9 \cdot 10^4 \text{ мм}^3$.

$$\tau_{(3,4)} = 15,3 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{15,9 \cdot 10^4}{6} = 40,6 \text{ МПа}.$$

Строим эпюру касательных напряжений для характерных уровней поперечного сечения двутавра № 27 (см. рисунок 2.8).

Определяем минимальный необходимый момент сопротивления для других типов сечения.

5. Определяем безопасные размеры поперечных сечений для круга, кольца и прямоугольника.

- *круговое сечение:*

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{32 W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 371}{3,14}} = 15,5 \text{ мм}.$$

$$F_{\text{круг}} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 15,5^2}{4} = 188,6 \text{ мм}^2.$$

- *кольцевое сечение:*

$$W_x = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \Rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{32 W_x}{\pi (1 - \alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 371}{3,14 (1 - 0,8^4)}} = 18,6 \text{ мм}.$$

$$F_{\text{кольца}} = \frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2) = \frac{3,14 \cdot 18,6^2}{4} (1 - 0,8^2) = 160,3 \text{ мм}^2.$$

- *прямоугольное сечение с соотношением сторон $h = 2b$:*

Требуемый момент сопротивления:

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2b^3}{3} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot 371,0} = 8,2 \text{ мм}.$$

$$h = 2b = 16,4 \text{ мм}. F_{\text{прямоуг}} = bh = 8,2 \cdot 16,4 = 134,9 \text{ мм}^2.$$

6. Сравниваем веса балок с подобранными поперечными сечениями.

Сравнение веса балок одинаковой длины аналогично сравнению их площадей поперечных сечений (таблица 2.2).

Таблица 2.2 – Сравнение веса балок разных профилей поперечных сечений

Профиль сечения	Двутавр	Круг	Кольцо	Прямоугольник
$F_i, \text{мм}^2$	40,2	188,6	160,3	134,9
Соотношение площадей $\frac{F_i}{F_1}$	1	4,7	4,0	3,4

Вывод

- Наименьший вес имеет двутавровая балка. Следовательно, по условию прочности балка с таким профилем поперечного сечения является наиболее экономичной.

- Худший вариант представляет балка с круговым сечением. Её вес почти в 5 раз превышает вес балки с двутавровым профилем поперечного сечения.

Лабораторная работа №3 – Исследование трансмиссионного вала на прочность и жесткость при кручении

Цель: для трансмиссионного вала постоянного круглого поперечного сечения требуется определить его диаметр из условий прочности и жесткости (рисунок 3.1).



Рисунок 3.1. – Схема расположения шкивов на валу

Общие данные:

материал вала – сталь;

модуль сдвига $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа;

допускаемое напряжение на сдвиг $[\tau] = 40$ МПа;

допускаемый угол закручивания $[\theta] = 0,4$ град/м.

Исходные данные взять из таблиц 3.1, 3.2, 3.3 и рисунка 3.2.

Порядок расчета

1. Вычертить в масштабе расчётную схему вала.
2. Определить величину мощности, подводимой к ведущему шкиву 1 трансмиссионного вала.
3. Определить величину скручивающих моментов, приложенных к шкивам 1, 2, 3, 4.
4. Определить крутящие моменты по участкам вала и построить их эпюру.
5. Определить положение опасного сечения и найти диаметр вала из условий прочности и жёсткости.
6. Определить касательные напряжения по участкам и построить их эпюру.
7. Определить углы закручивания по участкам и построить их эпюру.
8. Сделать выводы.

Таблица 3.1 – Мощности на ведомых шкивах и длины участков вала

Вариант	N_2	N_3	N_4	n	L_1	L_2	L_3
	кВт	кВт	кВт	об/мин	м	м	м
1	40	20	10	400	1,0	0,5	0,5
2	50	25	15	600	0,5	1,0	0,5
3	35	20	30	200	0,5	0,5	1,0
4	60	30	20	400	0,4	0,4	1,0
5	25	40	20	200	0,5	0,5	1,0
6	40	20	20	600	0,4	1,0	0,4
7	60	30	20	200	0,5	0,5	1,0
8	35	20	30	600	0,4	1,0	0,4
9	40	40	20	300	0,4	0,6	1,0
10	30	20	30	400	1,0	0,4	1,0
11	60	30	20	200	0,6	0,6	0,4
12	35	40	30	600	0,4	1,0	0,4
13	60	40	20	300	0,5	0,6	1,0
14	25	40	20	400	0,4	0,4	1,0
15	40	20	20	200	0,6	0,6	0,4
16	60	30	20	300	0,5	0,6	1,0
17	25	40	20	600	0,4	1,0	0,4
18	30	40	30	200	0,6	0,6	0,4
19	40	20	20	400	0,4	0,4	1,0
20	35	20	30	350	1,0	0,4	0,4
21	60	30	20	300	0,5	0,6	1,0
22	40	20	20	400	0,4	0,4	1,0
23	30	40	30	300	1,0	0,6	1,0
24	25	40	20	600	0,4	1,0	0,4
25	40	20	20	350	1,0	0,4	0,4
26	35	20	30	300	0,4	0,6	0,4
27	60	30	20	400	0,4	0,4	1,0
28	30	40	30	200	0,6	0,6	0,4
29	50	45	35	350	1,0	0,4	0,4
30	25	40	20	200	0,6	0,6	0,4

Таблица 3.2 – Скручивающие моменты M_i и отношение диаметров α_i кольцевого сечения

Вариант	M_1	M_2	M_3	α_1	α_3	α_4
	кН·м			–		
1	3,0	1,0	0,5	1,2	0,5	1,0
2	0,5	0	1,0	1,0	1,5	2,0
3	1,5	–1,0	0,5	1,5	1,0	1,5
4	0,4	–0,8	0,3	1,0	1,0	2,0
5	1,5	0	2,0	2,0	1,0	0,6
6	3,0	–5,0	0	1,2	1,5	2,0
7	1,0	1,0	0,5	1,4	0,6	1,0
8	0,1	–0,5	0,2	0,5	0,5	1,0
9	1,0	2,0	3,0	1,5	1,0	0,5
10	2,5	–1,0	1,5	2,0	1,5	2,0
11	0,5	0	0,5	1,0	0,5	1,0
12	3,0	1,5	–1,5	1,8	1,0	1,0
13	–2,0	3,0	0	0,8	1,0	0,5
14	1,5	–1,0	0,6	1,0	1,0	0,5
15	3,0	–3,0	5,0	1,0	1,5	2,0
16	2,0	–1,0	3,0	0,5	1,0	0,5
17	0	–2,0	1,0	0,8	0,5	0,8
18	5,0	–3,0	1,2	0,7	0,4	0,6
19	1,5	0	2,5	1,0	2,0	0,5
20	0,4	–0,8	1,0	2,0	1,0	1,0
21	0,2	0,4	0	1,0	2,0	1,5
22	2,0	1,0	3,0	1,0	2,0	0,5
23	0	5,0	2,0	0,5	1,0	1,0
24	–3,0	2,0	1,0	1,2	1,8	2,0
25	2,0	4,0	0	1,5	1,5	1,0
26	0,5	0	1,5	0,5	1,0	0,5
27	0	3,0	2,0	0,2	0,5	1,0
28	3,0	–2,0	4,0	1,5	1,0	2,0
29	0	3,0	–2,0	0,5	1,0	0,8
30	1,0	3,0	–1,0	0,5	1,5	1,0

Таблица 3.3 – Длины участков, материал и допускаемый относительный угол закручивания вала

Вариант	l_1	l_2	l_3	l_4	Материал		[θ], град·м ⁻¹
	м						
1	0,35	0,50	0,20	0,35		Ст. 3	2
2	0,55	0,30	0,45	0,25		Ст. 4	1
3	0,40	0,20	0,60	0,30		Ст. 5	4
4	0,25	0,25	0,55	0,55		10	5
5	0,65	0,45	0,25	0,50	Сталь	20	3
6	0,15	0,35	0,10	0,45		30	6
7	0,20	0,30	0,40	0,20		40	1
8	0,35	0,55	0,35	0,15		50	4
9	0,55	0,25	0,55	0,25		40X	2
10	0,70	0,10	0,45	0,15		Ст. 5	3
11	0,15	0,45	0,10	0,70			5
12	0,35	0,35	0,50	0,20			4
13	0,40	0,30	0,20	0,60			5
14	0,25	0,55	0,55	0,25			3
15	0,65	0,50	0,45	0,25	Латунь	ЛС59-1	5
16	0,15	0,45	0,35	0,10			2
17	0,20	0,20	0,30	0,40			5
18	0,35	0,15	0,55	0,35			1
19	0,55	0,25	0,25	0,55			5
20	0,70	0,15	0,10	0,45			4
21	0,25	0,65	0,65	0,25			3
22	0,15	0,65	0,25	0,35			4
23	0,65	0,25	0,25	0,65		АЛ-13	2
24	0,25	0,25	0,65	0,65			3
25	0,65	0,25	0,65	0,25	Алюминие-		1
26	0,25	0,65	0,25	0,65	вые сплавы		6
27	0,65	0,15	0,35	0,25		Д16	5
28	0,35	0,25	0,65	0,15			4
29	0,15	0,25	0,65	0,35			6
30	0,25	0,15	0,35	0,65			5

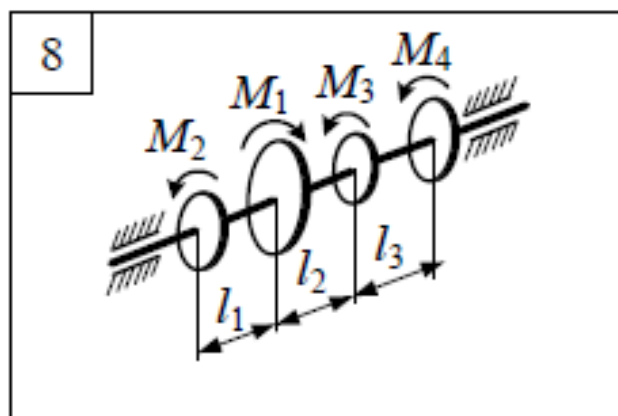
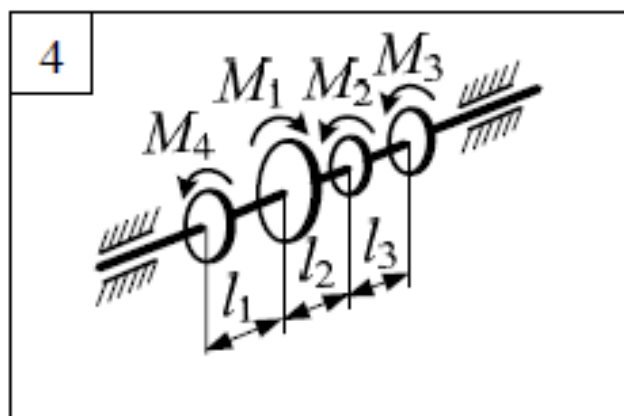
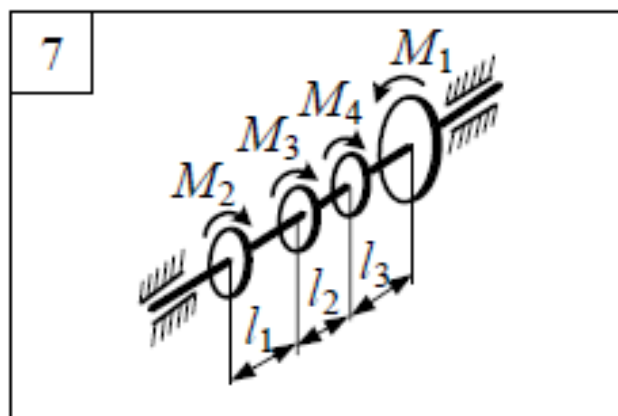
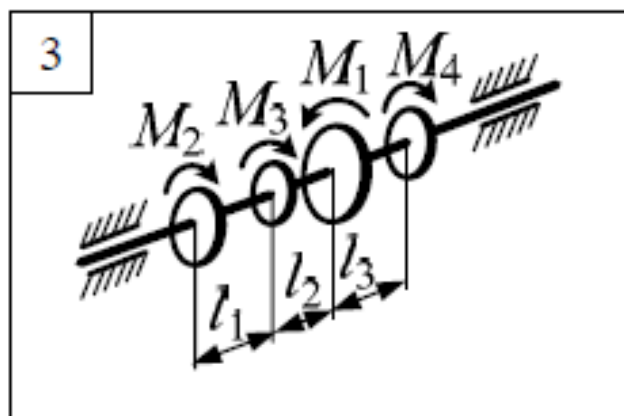
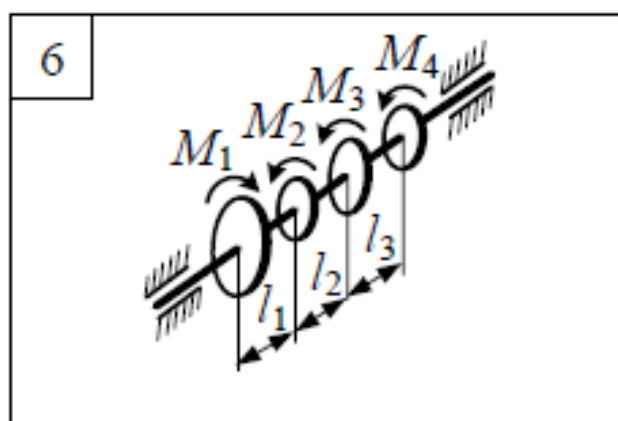
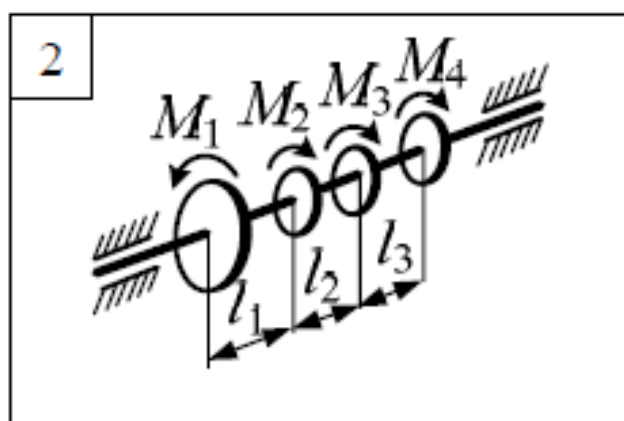
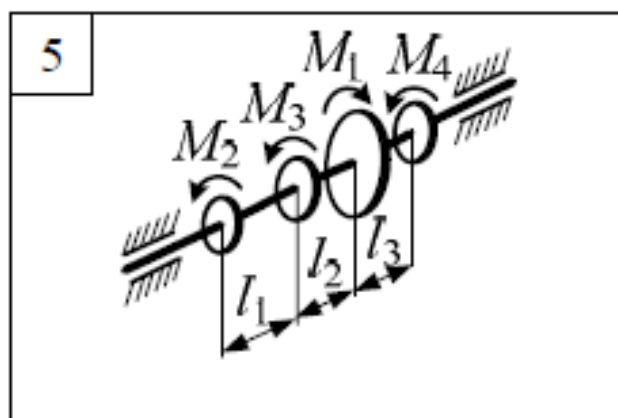
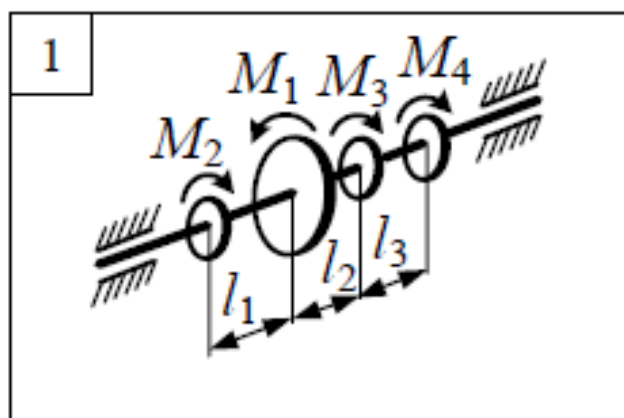


Рисунок 3.2. – Схема расположения шкивов на валу

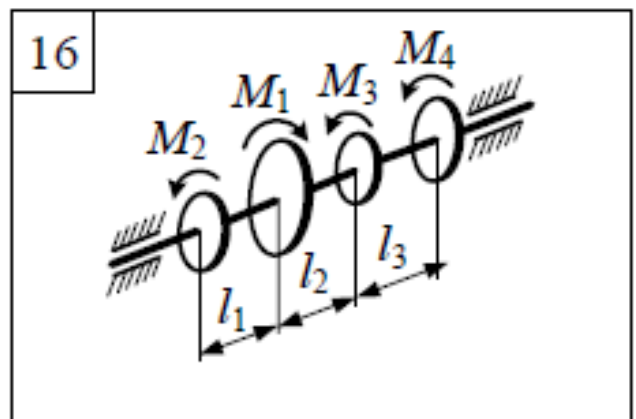
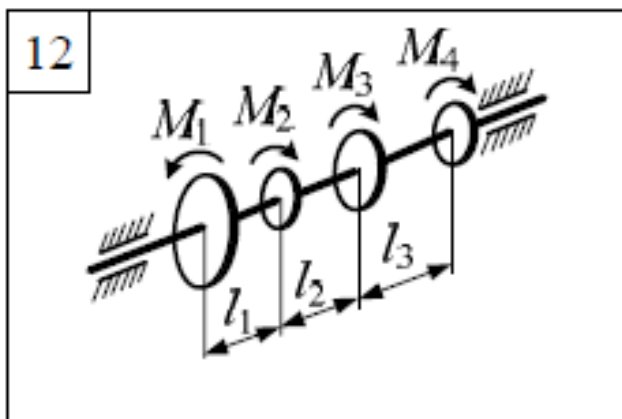
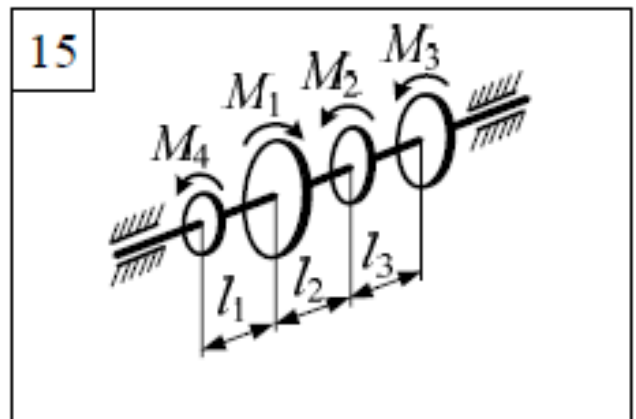
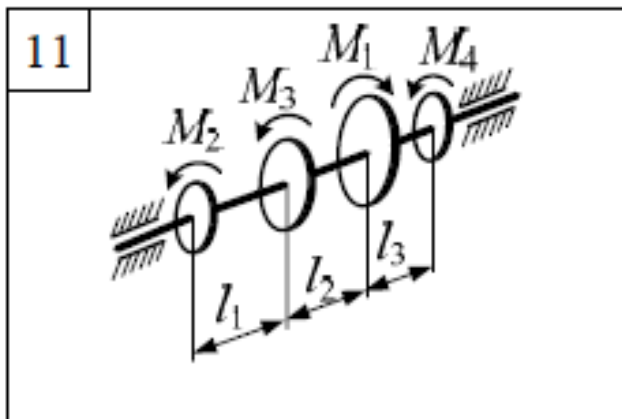
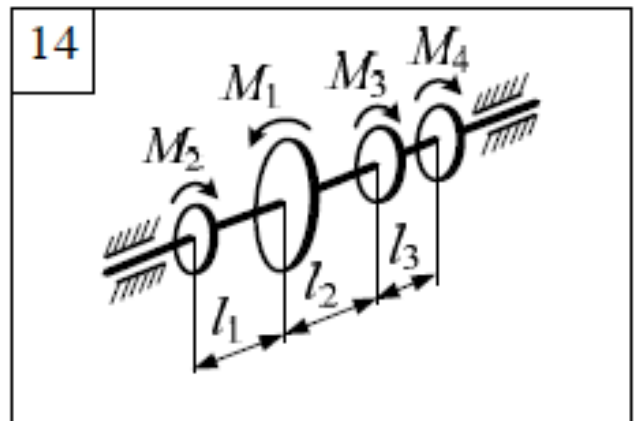
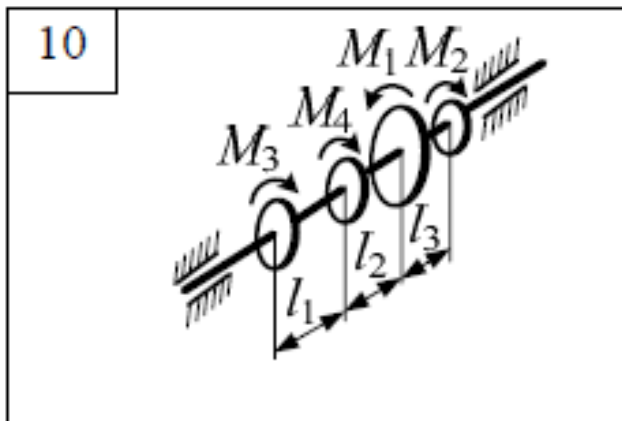
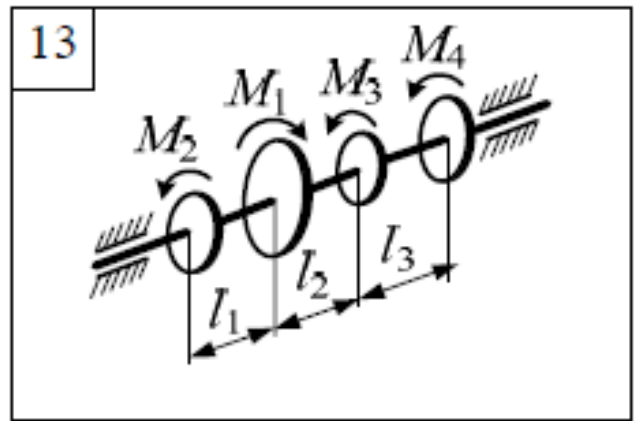
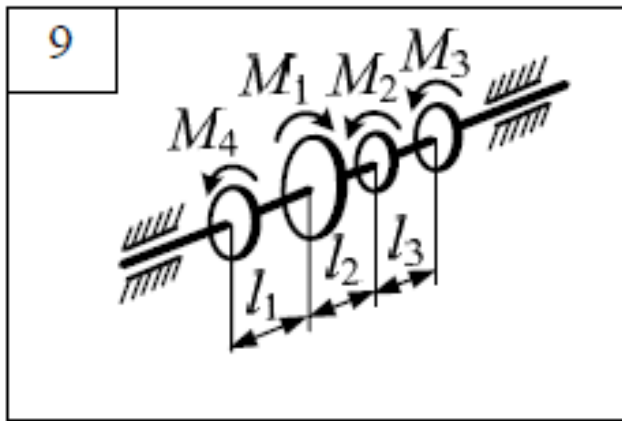


Рисунок 3.2. – Схема расположения шкивов на валу (продолжение)

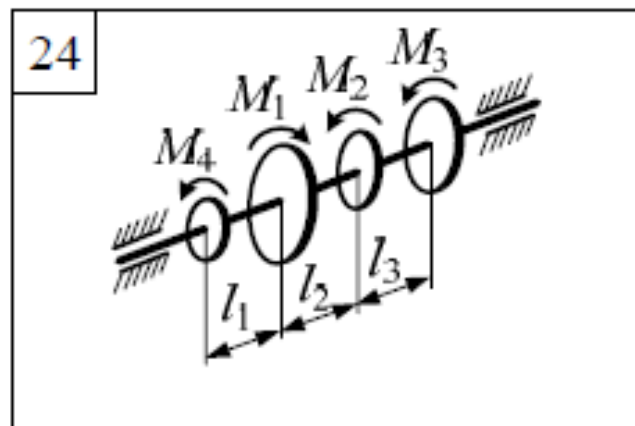
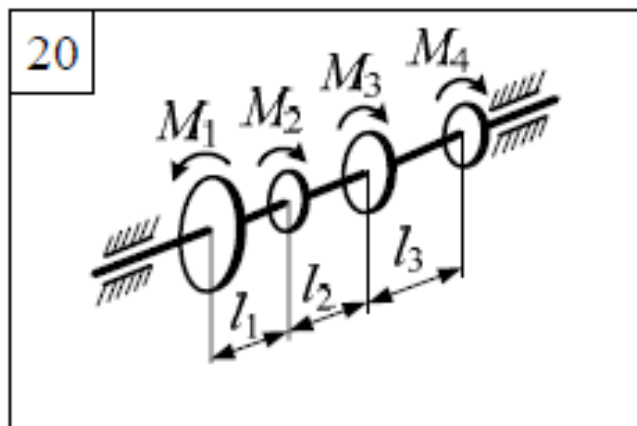
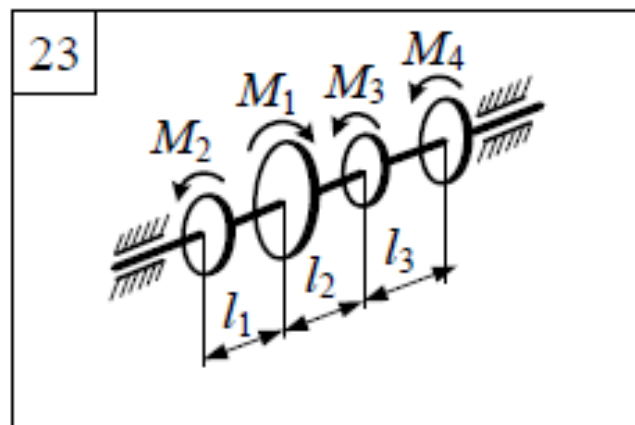
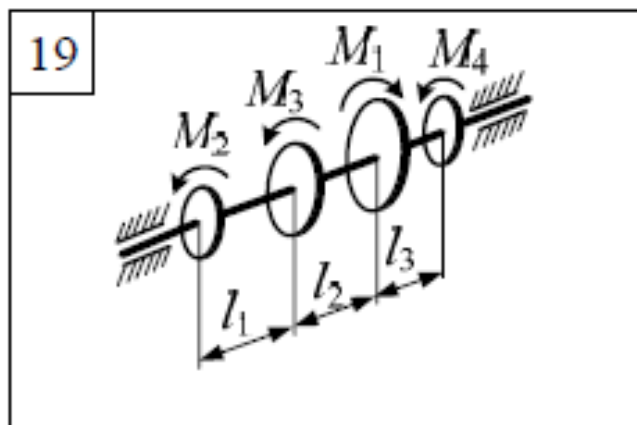
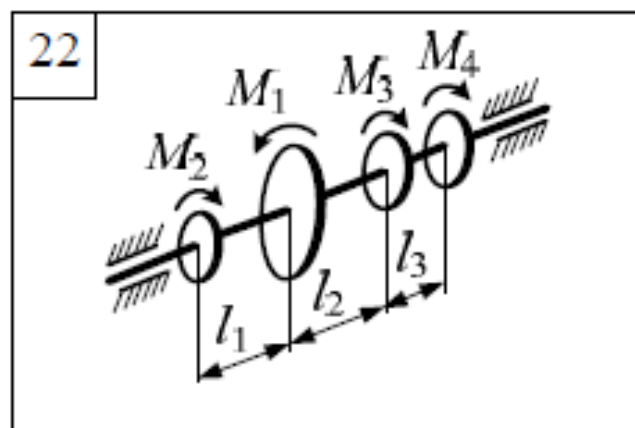
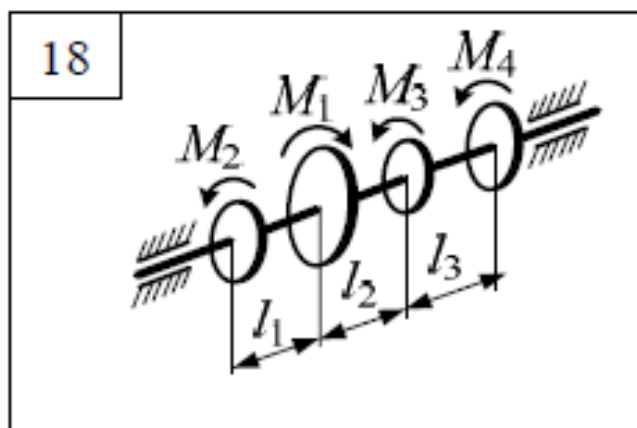
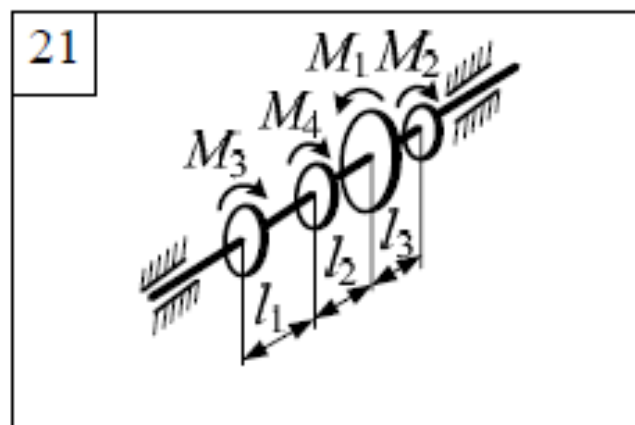
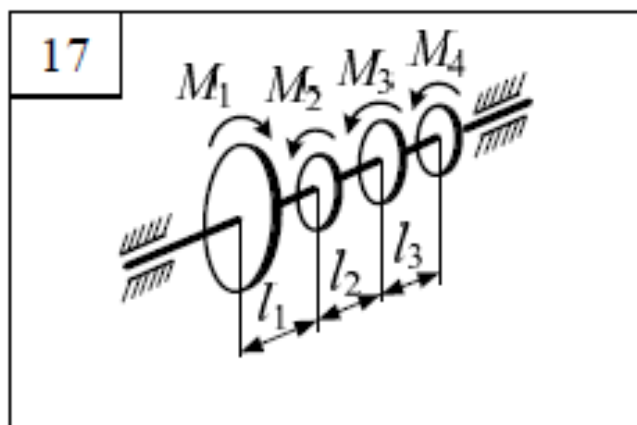


Рисунок 3.2. – Схема расположения шкивов на валу (продолжение)

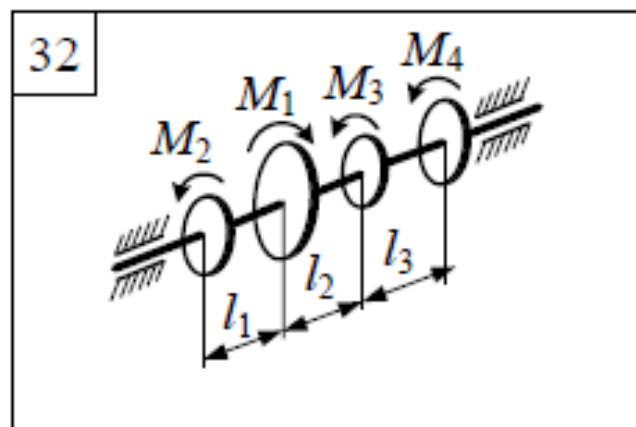
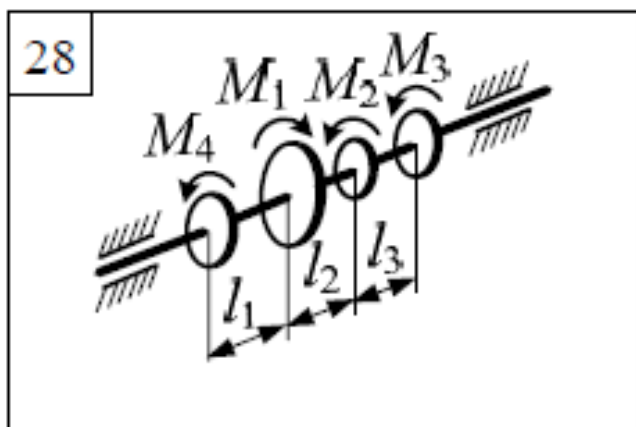
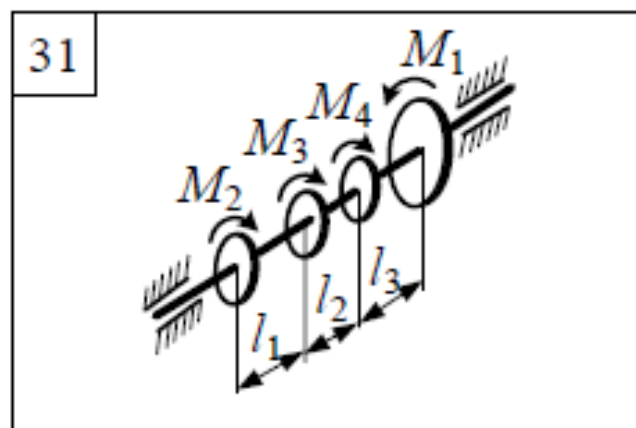
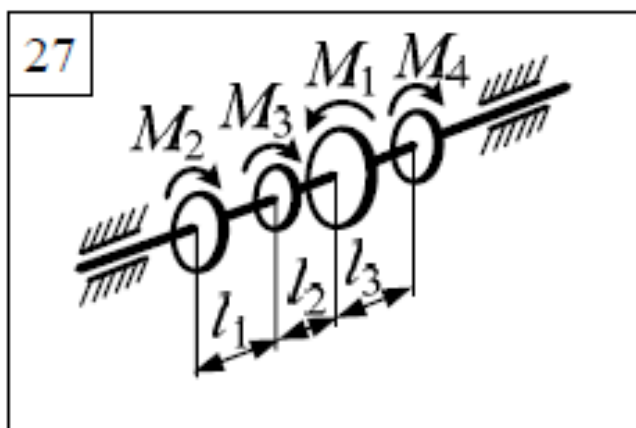
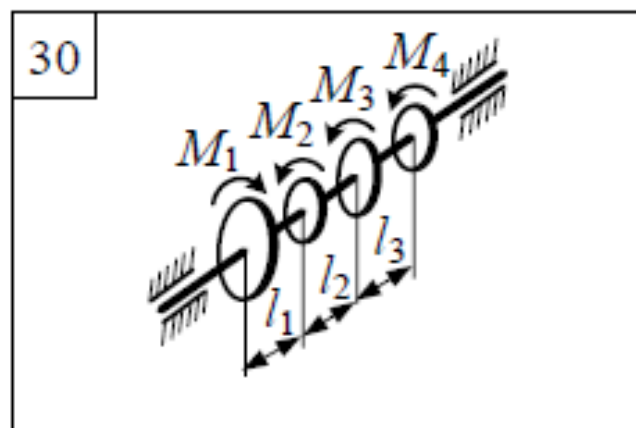
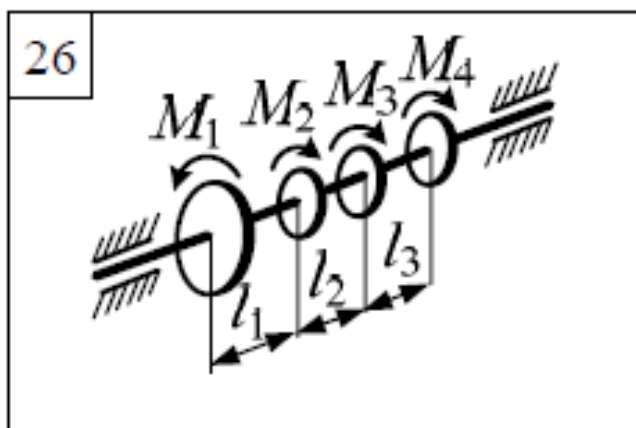
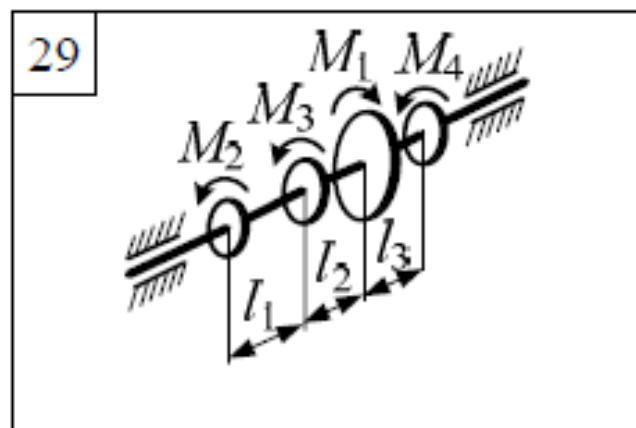
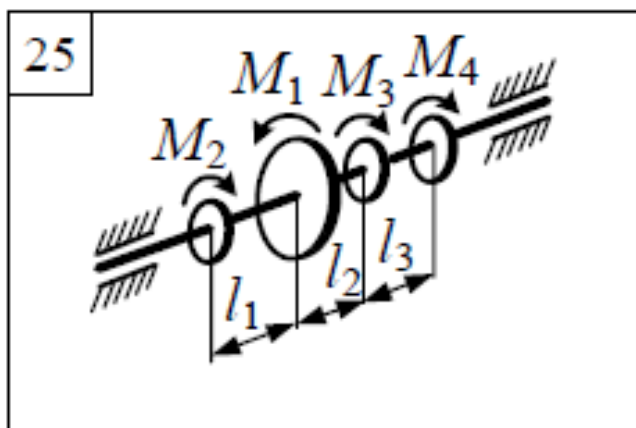


Рисунок 3.2. – Схема расположения шкивов на валу (продолжение)

Пример выполнения

Трансмиссионный вал постоянного круглого поперечного сечения посажен на подшипниковых опорах. К шкиву 1 подводится мощность, которая передаётся через шкивы 2, 3, 4 – N_i (кВт).

Частота вращения вала n об·мин⁻¹.

Положение шкивов с подводимой и отводимой мощностью указано на схеме рисунка 3.3.

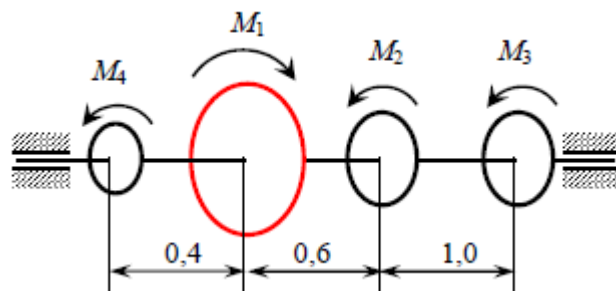


Рисунок 3.3. – Расчетная схема вала

Требуется:

- определить диаметр вала из условия прочности и жёсткости;
- построить эпюры M_k^i , τ , $\Delta\phi$.

Исходные данные для расчёта по варианту _____ взяты из таблицы 3.1 и рисунка 3.2.

Материал вала – сталь;

модуль сдвига $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа;

допускаемое напряжение на сдвиг $[\tau] = 40$ МПа;

допускаемый угол закручивания $[\theta] = 0,4$ град/м;

потребляемая мощность $N_2 = 40$ кВт; $N_3 = 40$ кВт; $N_4 = 20$ кВт;

частота вращения $n = 300$ об/мин;

расстояния между шкивами $l_1 = 0,4$ м; $l_2 = 0,6$ м; $l_3 = 1,0$ м.

1. Составляем и вычерчиваем расчётную схему вала (рисунок 3.3).

Определяем характерные участки I, II, III и их границы A, B, C, D (рисунок 3.4).

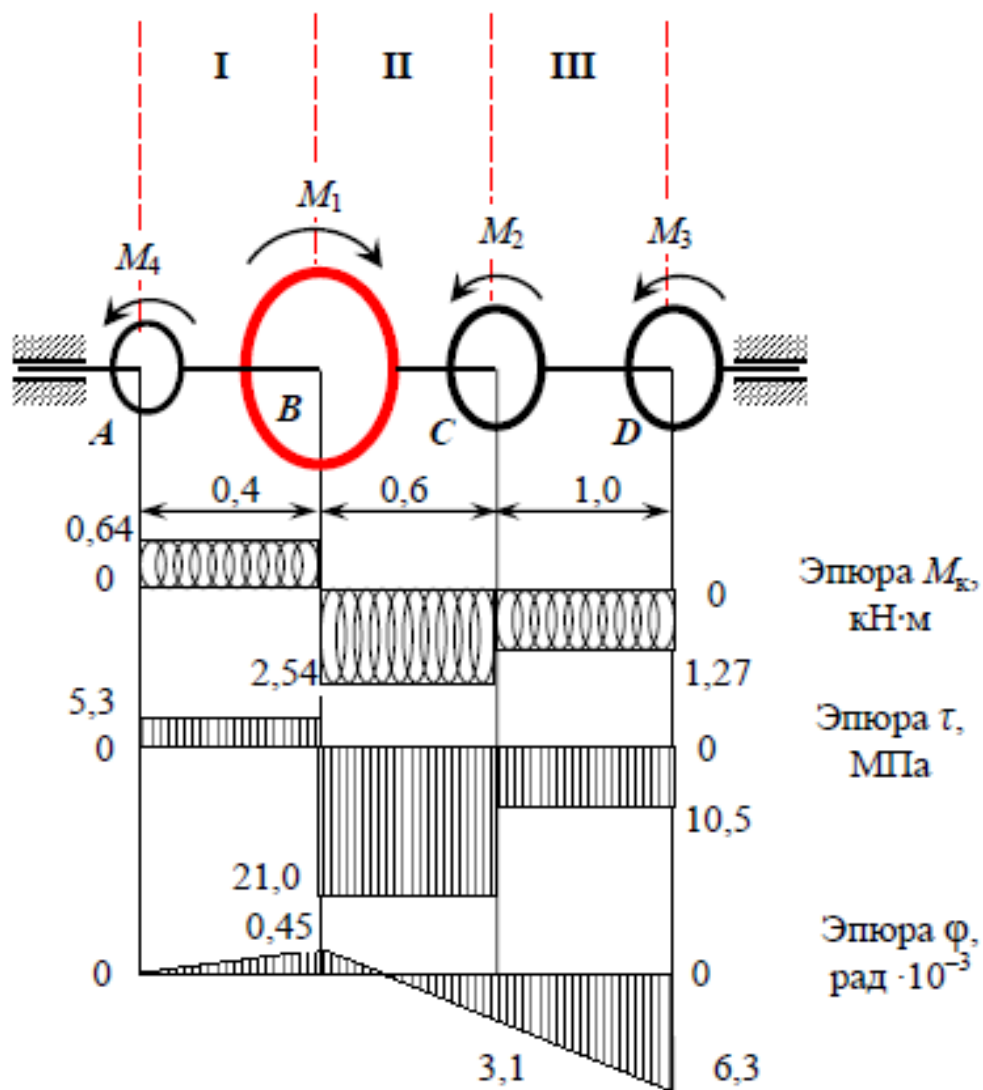


Рисунок 3.4. – Расчетная схема вала. Эпюры M_k , τ , ϕ

2. Определяем величину мощности, подводимой к ведущему шкиву 1 трансмиссионного вала.

Мощность на ведущем шкиве равна сумме потребляемых мощностей:

$$N_1 = \sum N_i, \quad N_1 = N_2 + N_3 + N_4 = 100 \text{ кВт.}$$

3. Вычисляем скручивающие моменты на шкивах:

$$M_1 = 9,55 \frac{N_1}{n} = 9,55 \frac{100}{300} = 3,18 \text{ кН·м,}$$

$$M_2 = 9,55 \frac{N_2}{n} = 1,27 \text{ кН·м,}$$

$$M_3 = 9,55 \frac{N_3}{n} = 1,27 \text{ кН·м,}$$

$$M_4 = 9,55 \frac{N_4}{n} = 0,64 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4. Для определения крутящих моментов используем метод сечений.

Вычисляем крутящие моменты на валу по участкам:

I участок: $M_{k1} = M_4 = 0,64 \text{ кН} \cdot \text{м};$

II участок: $M_{k2} = M_4 - M_1 = 0,64 - 3,18 = -2,54 \text{ кН} \cdot \text{м};$

III участок: $M_{k3} = M_4 - M_1 + M_2 = 0,64 - 3,18 + 1,27 = -1,27 \text{ кН} \cdot \text{м};$

Строим эпюру крутящих моментов (рисунок 3.4). По эпюре крутящих моментов видно, что наиболее нагруженным является второй участок вала.

5. Определяем опасное сечение.

Из эпюры M_k видно, что опасным сечением будет сечение, где посажен ведущий шкив 1, так как в этом сечении M_{k2} имеет максимальное значение $\max M_{k2} = 2,54 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

Определяем наименьшую величину диаметра вала по условию прочности.

$$\text{Условие прочности } \tau_{\max} = \frac{\max M_k}{W_p} \leq [\tau].$$

Требуемый полярный момент сопротивления поперечного сечения из условия прочности $W_p = \frac{\max M_k}{[\tau]}.$

Полярный момент как геометрическая характеристика вычисляется по формуле $W_p = \frac{\pi d^3}{16}.$

$$\text{Приравняв правые части, получим } \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\max M_k}{[\tau]}.$$

$$\text{Откуда } d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot |M_{k2}|}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2,54 \cdot 10^3}{\pi \cdot 40 \cdot 10^6}} = 0,068 \text{ м}, d = 68 \text{ мм}.$$

Определяем наименьшую величину диаметра по условию жёсткости.

Условие жёсткости по углу закручивания в градусах:

$$\max \theta^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{\max M_k}{GJ_p} \leq [\theta^\circ], \quad J_p = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{\max M_k}{G \cdot [\theta^\circ]}, \quad J_p = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Приравнивая правые части, получаем $\frac{\pi d^4}{32} = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{\max M_k}{G \cdot [\theta^\circ]}$.

Откуда находим необходимый диаметр по условию жёсткости:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot |M_{k2}|}{\pi \cdot G \cdot [\theta^\circ]} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 2,54 \cdot 10^3 \cdot 180^\circ}{\pi \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot 0,4^\circ}} = 0,082 \text{ м}, d = 82 \text{ мм}.$$

Из найденных диаметров по условиям прочности и жёсткости выбираем бóльшее значение $d = 82$ мм, которое округляем до большего из ряда нормальных размеров (см. приложение В) $d = 85$ мм.

Для $d = 85$ мм момент сопротивления $W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi \cdot 0,085^3}{16} = 1,21 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$, а

момент инерции $J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 0,085^4}{32} = 5,1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$.

6. Определяем касательные напряжения по участкам и строим их эпюру.

Касательные напряжения в любом сечении вала выражаются зависимостью

$$\tau_i = \frac{M_{ki}}{W_p}.$$

Вычисляем касательные напряжения по участкам вала:

$$\tau_1 = \frac{M_{k1}}{W_p} = \frac{0,64 \cdot 10^3}{1,21 \cdot 10^{-4}} = 5,3 \text{ МПа};$$

$$\tau_2 = \frac{M_{k2}}{W_p} = \frac{-2,54 \cdot 10^3}{1,21 \cdot 10^{-4}} = -21,0 \text{ МПа};$$

$$\tau_3 = \frac{M_{k3}}{W_p} = \frac{-1,27 \cdot 10^3}{1,21 \cdot 10^{-4}} = -10,5 \text{ МПа}.$$

Эпюра касательных напряжений показана на рисунке 3.4.

7. Определяем углы закручивания по участкам и строим эпюру φ_i .

$$\varphi_A = 0;$$

$$\varphi_B = \varphi_A + \frac{M_{k1} l_1}{GJ_p} = 0 + \frac{0,64 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{8 \cdot 10^8 \cdot 5,1 \cdot 10^{-6}} = 0,45 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \frac{M_{k2} l_2}{GJ_p} = 0,45 \cdot 10^{-3} - \frac{2,54 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{8 \cdot 10^8 \cdot 5,1 \cdot 10^{-6}} = -3,1 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_D = \varphi_C + \frac{M_{k3} l_3}{GJ_p} = -3,1 \cdot 10^{-3} - \frac{1,27 \cdot 10^3 \cdot 1,0}{8 \cdot 10^8 \cdot 5,1 \cdot 10^{-6}} = -6,3 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

Вывод

- Поскольку окончательно диаметр вала принят по условию жёсткости больше, чем требовался по условию прочности, эпюра касательных напряжений показывает довольно значительную недогруженность вала.
- Максимальные касательные напряжения составляют около 50 % от допускаемого напряжения: $\max \tau = 21,0 \text{ МПа} < [\tau] = 40 \text{ МПа}$.

Общие положения и указания по выполнению лабораторной работы

Перед выполнением лабораторной работы необходимо записать полностью её название, условие (цель), все исходные данные и вычертить заданную схему. На заданной схеме должны быть указаны условными обозначениями все внешние нагрузки, соответствующие варианту задания. Решение должно сопровождаться краткими последовательными, без сокращения слов, объяснениями и чертежами, на которых все входящие в расчёт величины должны быть показаны только в условных обозначениях. При использовании формул и данных, отсутствующих в рекомендуемой литературе, необходимо кратко и точно указать использованный источник. Подстановка цифр должна выполняться полностью, без сокращений. Вычисления должны вестись с точностью до трёхзначных цифр с обязательным указанием размерности полученного результата. Порядок и последовательность выполнения лабораторной работы приведены в примерах выполнения каждой работы.

Количество работ, объем каждой и сроки выполнения определяются кафедрой в соответствии с программой по учебной дисциплине и учебным графиком.

Студент должен взять для каждой работы из таблицы и рисунка данные в соответствии с номером своего шифра. Последняя цифра шифра соответствует схеме, предпоследняя – данным к задаче.

Работы, выполненные с нарушением этих указаний, рассматриваться не будут.

В чертежах должны быть проставлены числовые данные соответствующего варианта (не буквенные значения!). Расчеты производить только с числовыми значениями. Чертеж должен быть аккуратным и наглядным. Решение задачи необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т.п.) и подробно излагать весь ход расчетов. Чертежи и схемы в текстовой части выполняются в карандаше в соответствии с требованиями Единой системы конструкторской документации (ЕСКД). Все графики и эпюры должны содержать числовые величины в характерных точках и размерность.

Необходимо указывать размерность всех величин и подчеркивать окончательные результаты. Решения производить в международной системе единиц (СИ). Основные единицы приведены в приложении.

Список рекомендуемой литературы

1. Сопротивление материалов: учебник: В 2 ч. Ч. 1 / А.Г. Схиртладзе, А.В. Чеканин, В.В. Волков. М.: КУРС: ИНФРА-М, 2018. 272 с. Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/933939>.
2. Сопротивление материалов: учебник: в 2 ч. Ч. 2: / А.Г. Схиртладзе, А.В. Чеканин, В.В. Волков. М.: КУРС: ИНФРА-М, 2018. 192 с. Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/933947>.
3. Атапин, В.Г. Сопротивление материалов: Краткий теоретический курс: учебное пособие / В.Г. Атапин. Новосибирск: НГТУ, 2011. 204 с. [Электронный ресурс]. URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=228576>.
4. Сопротивление материалов в примерах и задачах: Учебное пособие / Н.М. Атаров. М.: ИНФРА-М, 2010. 407 с. Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/191566>.
5. Сопротивление материалов: Сборник задач с решениями: Учебное пособие / С.И. Евтушенко, Т.А. Дукмасова, Н.А. Вильбицкая. М.: ИЦ РИОР: НИЦ ИНФРА-М, 2014. 210 с. Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/390026>.
6. ГОСТ 8.417-2002 Государственная система обеспечения единства измерений (ГСИ). Единицы величин (с Поправкой).

Приложение А. Единицы измерений

Наименование, обозначение и правила применения основных единиц измерения физических величин установлены ГОСТ 8.417-2002 [6].

Международная система единиц (СИ)

- м, кг, с — метр, килограмм, секунда; единицы длины, массы, времени
(основные единицы)
- см, мм — дольные единицы длины (сантиметр, миллиметр)
- Н — ньютон, единица силы ($1 \text{ Н} \approx 1/9,81 \text{ кГ} = 0,102 \text{ кГ}$)
- кН, МН — дольные единицы силы: килоньютон, меганьютон
($1 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н}$; $1 \text{ МН} = 10^6 \text{ Н}$)
- Н/м^2 — единица напряжения и давления ($1 \text{ Н/м}^2 \approx 1,02 \cdot 10^5 \text{ кГ/см}^2$)
- МН/м^2 — дольная единица напряжения и давления
($1 \text{ МН/м}^2 = 10^6 \text{ Н/м}^2 \approx 10,2 \text{ кГ/см}^2$)
- Дж — джоуль, единица работы ($1 \text{ Дж} \approx 1/9,81 \text{ кГ} \cdot \text{м} \approx 0,102 \text{ кГ} \cdot \text{м}$)
- Вт, кВт — ватт; киловатт — единицы мощности
($1 \text{ кВт} \approx 102 \text{ кГ} \cdot \text{м/с} \approx 1,36 \text{ л.с.}$)

Техническая система единиц (МКГСС)

- м, кГ, с — метр, килограмм-сила, секунда ($1 \text{ кГ} \approx 9,81 \text{ Н}$)
- Т — тонна-сила ($1 \text{ Т} = 10^3 \text{ кГ} \approx 9,81 \cdot 10^3 \text{ Н} = 9,81 \text{ кН}$)
- кГ/см^2 — единица напряжения и давления
($1 \text{ кГ/см}^2 \approx 9,81 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2 \approx 0,0981 \text{ МН/м}^2$)
- $\text{кГ} \cdot \text{м}$ — единица работы ($1 \text{ кГ} \cdot \text{м} \approx 9,81 \text{ Дж}$)
- л.с. — внесистемная единица лошадиная сила
($1 \text{ л.с.} = 75 \text{ кГ} \cdot \text{м/с} \approx 0,736 \text{ кВт}$)

Приложение В. Ряды нормальных линейных размеров

Ряды нормальных линейных размеров (диаметров, длин, высот, глубин) по ГОСТ 8032-84.

<i>Ra 5</i>	1,0				1,6				2,5				4,0				6,3			
<i>Ra 10</i>	1,0		1,2		1,6		2,0		2,5		3,2		4,0		5,0		6,3		8,0	
<i>Ra 20</i>	1,0	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,5	2,8	3,2	3,6	4,0	4,5	5,0	5,6	6,3	7,1	8,0	9,0
<i>Ra 40</i>	1,0	1,05	1,1	1,15	1,6	1,7	1,8	1,9	2,5	2,6	2,8	3,0	4,0	4,2	4,5	4,8	6,3	6,7	7,1	7,5
	1,2	1,3	1,4	1,5	2,0	2,1	2,2	2,4	3,2	3,4	3,6	3,8	5,0	5,3	5,6	6,0	8,0	8,5	9,0	9,5
<i>Ra 5</i>	10				16				25				40				63			
<i>Ra 10</i>	10		12		16		20		25		32		40		50		63		80	
<i>Ra 20</i>	10	11	12	14	16	18	20	22	25	28	32	36	40	45	50	56	63	71	80	90
<i>Ra 40</i>	10	10,5	11	11,5	16	17	18	19	25	26	28	30	40	42	45	48	63	67	71	75
	12	13	14	15	20	21	22	24	32	34	36	38	50	53	56	60	80	85	90	95
<i>Ra 5</i>	100				160				250				400				630			
<i>Ra 10</i>	100		125		160		200		250		320		400		500		630		800	
<i>Ra 20</i>	100	110	125	140	160	180	200	220	250	280	320	360	400	450	500	560	630	710	800	900
<i>Ra 40</i>	100	105	110	11,5	160	170	180	190	250	260	280	300	400	420	450	480	630	670	710	750
	125	130	140	150	200	210	220	240	320	340	360	380	500	530	56	600	800	850	900	950