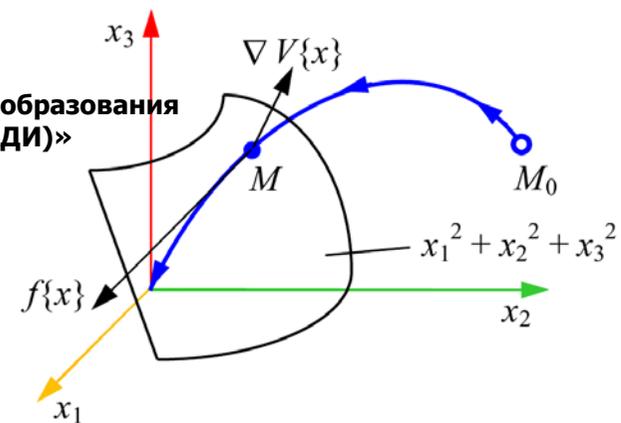


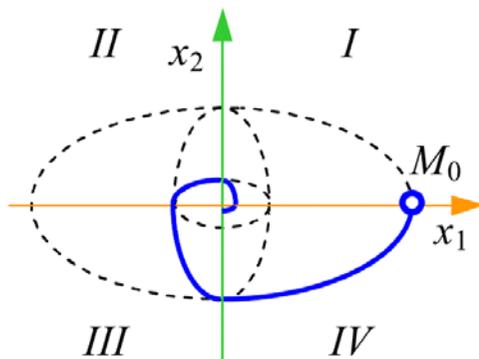
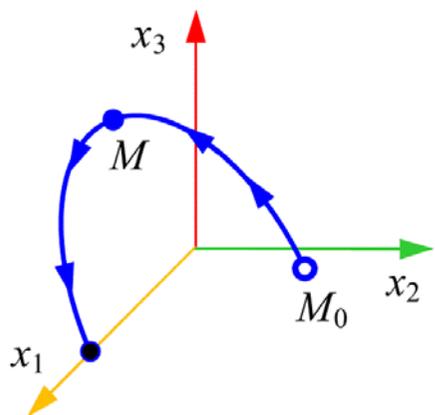
Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Сибирский государственный автомобильно-дорожный университет (СибАДИ)»

И.В. Лазута, В.С. Щербаков



ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Учебное пособие



Омск – 2017

УДК 681.5
ББК 32.965
Л17

Согласно 436-ФЗ от 29.12.2010 «О защите детей от информации, причиняющей вред их здоровью и развитию» данная продукция маркировке не подлежит.

Рецензенты:

д-р техн. наук, проф. Н.С. Галдин (СибАДИ);
д-р техн. наук, проф. В.Г. Хомченко (ОмГТУ)

Работа утверждена редакционно-издательским советом СибАДИ в качестве учебного пособия.

Лазуга, Иван Васильевич.

Л17 Теория автоматического управления. Нелинейные системы [Электронный ресурс] : учебное пособие / И.В. Лазуга, В.С. Щербаков ; кафедра «Автоматизация производственных процессов и электротехника». – Электрон. дан. – Омск : СибАДИ, 2017. – Режим доступа : свободный после авторизации. – Загл. с экрана.
ISBN 978-5-93204-890-0.

Рассмотрены основные теоретические сведения о понятиях, структуре и методах анализа, коррекции нелинейных автоматических систем управления. Изложенный материал позволит студентам освоить основы математического моделирования нелинейных автоматических систем, методы анализа устойчивости и определения автоколебаний в системах, способы коррекции нелинейных систем, приобрести навыки практического решения задач.

Имеет интерактивное оглавление в виде закладок. Содержит ссылки на видеоматериалы обучающего и демонстрационного характера, которые воспроизводятся с помощью проигрывателя Windows Media, и программные файлы для работы в приложении Simulink программного комплекса MATLAB.

Предназначено для обучающихся всех форм обучения направлений бакалавриата и магистратуры «Автоматизация технологических процессов и производств» и «Управление в технических системах».

Мультимедийное издание (2,6 МБ)

Системные требования : Intel, 3,4 GHz ; 150 МБ ; Windows XP/Vista/7 ;
1 Гб свободного места на жестком диске ; программа для чтения pdf-файлов
Adobe Acrobat Reader; Google Chrome ; Windows Media Player, колонки

Редактор Н.В. Павлова

Издание первое. Дата подписания к использованию 10.04.2017

Издательско-полиграфический комплекс СибАДИ. 644080, г. Омск, пр. Мира, 5
РИО ИПК СибАДИ. 644080, г. Омск, ул. 2-я Поселковая, 1

© ФГБОУ ВО «СибАДИ», 2017

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебное пособие содержит материал по курсу нелинейных систем теории автоматического управления, а также приложения в виде практических работ, позволяющих приобрести навыки решения задач по основным разделам дисциплины. Материал пособия приводится кратко и может служить дополнением к учебному материалу, изложенному в учебниках для высших учебных заведений, а также использоваться на практических и лабораторных занятиях.

ВВЕДЕНИЕ

Линейные автоматические системы управления (АСУ), известные из классической теории управления, по существу, являются идеализированными упрощенными вариантами нелинейных систем, полученных путем принятия определенных допущений или с помощью замены нелинейностей приближенными линейными функциями, т.е. *линеаризации*. Характеристики практически всех реальных устройств являются нелинейными и некоторые из них не могут быть линеаризованы, так как имеют разрывы второго рода. В таком случае говорят о наличии в системе нелинейности.

Нелинейности могут быть *естественными* и *искусственными* (преднамеренно вводимые) и оказывать как вредное, так и полезное влияние на динамические свойства системы. Естественные нелинейности присущи системам в силу нелинейного проявления физических процессов и свойств у отдельных устройств. Например, механическая характеристика асинхронного двигателя, кривая намагничивания ферромагнитного материала, люфты в шарнирах, смещения под действием сил сухого трения и т.д. Искусственные нелинейности вводятся в системы, чтобы обеспечить требуемый режим работы. Например, автоматические системы с релейным управлением, релейный гидропривод, нелинейные регуляторы, наличие нелинейных законов в поисковых и беспойсковых экстремальных системах, системы с переменной структурой и т.д.

Задачи курса нелинейных систем «Теории автоматического управления» состоят в изучении основных типов нелинейностей, присутствующих в системах управления, различных характеристик нелинейных систем, способов линеаризации и в овладении студентами методами исследования, анализа динамических свойств и коррекции нелинейных систем.

1. НЕЛИНЕЙНЫЕ АВТОМАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

1.1. Основные сведения о нелинейных системах

Нелинейной системой называется такая система, в состав которой входит хотя бы один элемент, линеаризация которого невозможна без потери существенных свойств системы управления в целом.

Существенным признаком нелинейных систем является наличие характеристик, в которых координаты или их производные по времени входят в уравнение в виде произведений или степени, отличной от первой, или коэффициенты уравнения являются функциями некоторых координат или их производных.

Если при составлении модели системы нелинейность, с учетом допущений, можно линеаризовать, то такая нелинейность называется *несущественной*. Так, например, можно пренебречь зоной нечувствительности какого-либо звена, если она мала по сравнению с установившимися отклонениями в системе, определяемыми без её учета, или можно не учитывать петлю гистерезиса магнитного материала, если она достаточно узка. В противном случае нелинейность называется *существенной*. Существенными нелинейностями обладают всякого рода релейные элементы. Даже в тех случаях, когда была проведена линеаризация несущественной нелинейности в системе, часто на конечном этапе исследования может потребоваться рассмотрение исходной нелинейной модели.

Различают *статические* и *динамические нелинейности*. Первые описываются нелинейными алгебраическими уравнениями, а вторые представляются в виде нелинейных дифференциальных уравнений, что существенно усложняет их анализ.

Главные особенности существенно нелинейных систем заключаются в следующем:

- отсутствие принципа суперпозиции сигналов, т.е. результирующий выходной сигнал при нескольких входных воздействиях на систему не равен сумме сигналов при их отдельном воздействии;
- величина выходного сигнала не пропорциональна величине входного воздействия;
- форма переходного процесса и показатели качества регулирования зависят от величины и формы входного воздействия;
- наличие нескольких состояний устойчивого и неустойчивого равновесия.

В особый класс нелинейных систем выделяют релейные нелинейные АСУ. Автоматическая система называется *релейной*, если она содержит хотя бы один *релейный элемент*. В релейном элементе при плавном изменении входного сигнала выходной сигнал изменяется скачкообразно и имеет два или более стационарных состояний, при которых выходной сигнал постоянен в некотором диапазоне входного воздействия.

Релейная аппаратура обладает рядом преимуществ, благодаря которым широко используется в системах автоматического управления, например, в современных программируемых логических контроллерах имеются релейные дискретные коммутационные выходы на базе электромеханических или электронных реле:

- простота устройства и надежность в работе;
- высокое быстродействие или практическое отсутствие инерционности;
- стабильность выходного параметра при широком диапазоне изменения входного воздействия;
- возможность реализовать сложный логический алгоритм работы.

По особенностям режима работы релейные автоматические системы можно разделить на две группы:

- к первой относятся системы, где реле работает по алгоритму «открыто-закрыто». При этом регулирующий орган может занимать конечное число состояний. Обычно два (в двухпозиционном реле) или три (в трехпозиционном реле). Особенность режима работы в том, что при отсутствии внешнего периодического воздействия их рабочий режим может быть колебательный.

- ко второй группе относятся системы, где реле обеспечивает постоянную скорость исполнительного устройства или, точнее говоря, со скоростью, которая не зависит от управляющего сигнала. Обычно это системы с исполнительным двигателем и гибкой обратной связью.

По характеристике линейной части релейные автоматические системы подразделяются на системы с устойчивой, нейтральной и неустойчивой линейной частью. Использование релейных элементов в главной цепи таких систем или в виде корректирующего звена в обратной цепи позволяет обеспечить не только устойчивость системы с нейтральной и неустойчивой линейной частью, но и заданные динамические свойства системы.

Специфические особенности релейных автоматических систем в том, что форма выходной величины не зависит от формы входного сигнала. Это позволяет проводить математический анализ релейных систем сравнительно простыми средствами. Более того, эта особенность даёт возможность использовать методы расчёта, которые в некотором смысле аналогичны методам расчёта линейных систем. Такая аналогия позволяет сохранить привычные понятия и терминологию линейной теории управления. Например, понятие передаточной функции, частотной и временной характеристик.

1.2. Структура нелинейной системы

При описании нелинейных АСУ сначала составляют дифференциальные уравнения для каждого звена системы. При этом характеристики звеньев, не являющихся существенно нелинейными, линеаризуются. В результате получают систему дифференциальных уравнений, в которой одно или несколько уравнений нелинейные. Устройства, допускающие линеаризацию, образуют *линейную часть (ЛЧ)* АСУ, а устройства, которые не могут быть линеаризованы, составляют *нелинейную часть (НЧ)*.

В простейшем случае структурная схема нелинейной автоматической системы представляет собой последовательное соединение безынерционного нелинейного элемента и линейной части, охваченное обратной связью (рис. 1.1).

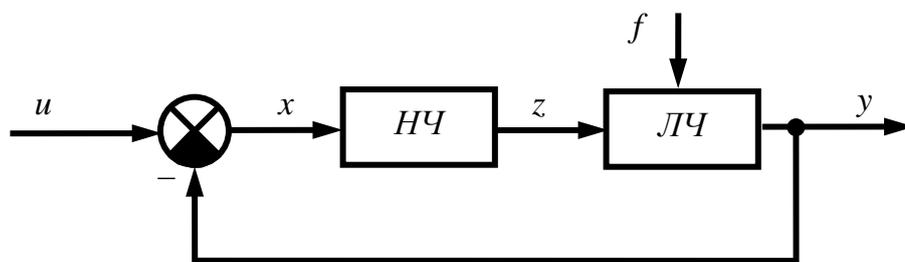


Рис. 1.1. Простейшая структурная схема нелинейной АСУ

В данном случае удастся выделить нелинейность так, чтобы она описывалась непосредственной зависимостью между выходной z и входной x величинами нелинейного элемента, которая может иметь любую нелинейную функцию (релейного, кусочно-линейного или криволинейного типа):

$$z = F(x). \quad (1.1)$$

В более сложных случаях (рис. 1.2), когда нелинейная автоматическая система включает любое число нелинейных звеньев, объединяющих различные переменные, связанные между собой линейной передаточной функцией (т.е. связанные линейные части и нелинейные звенья), можно выделить функцию некоторой части системы, например, внешней части относительно звена *ЛЧ1*:

$$z = z_1 - y_2 = F_1(x) - F_2(x) \cdot W_2(p), \quad (1.2)$$

где $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – нелинейные функции *НЧ1* и *НЧ2*; $W_2(p)$ – линейная передаточная функция второй линейной части системы.

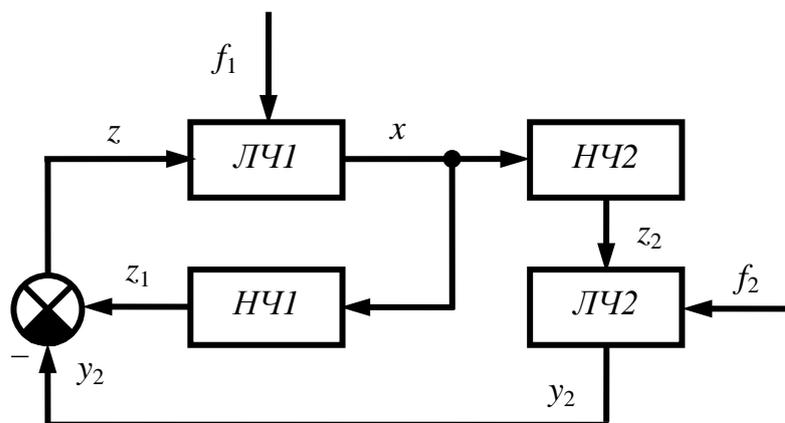


Рис. 1.2. Сложная структурная схема нелинейной АСУ

Примером сложных нелинейных систем являются системы с логическими устройствами.

1.3. Классификация характеристик нелинейных элементов

Нелинейные характеристики можно классифицировать по определенности значений выходной величины z в статическом стационарном режиме:

- **однозначные;**
- **неоднозначные (многозначные).**

Если каждому значению входной величины x соответствует одно определенное значение выходной величины z , то такую характеристику называют **однозначной**. Если одному значению x соответствует несколько значений выходной величины z , то такую характеристику называют **многозначной**. При этом число всевозможных значений выходной величины z при заданном значении входной величины x чаще всего два. Например, люфт в механической передаче (табл. 1.1, п. 5) или петля гистерезиса в электромагнитной системе (см. табл. 1.1, п. 8).

Нелинейные характеристики могут иметь различные типы симметрии:

- **чётно-симметричная характеристика;**
- **нечётно-симметричная характеристика;**
- **несимметричная характеристика.**

Если нелинейная характеристика удовлетворяет условию $F(x) = F(-x)$, то такую характеристику называют симметричной относительно оси ординат или чётно-симметричной (рис. 1.3, а).

Если нелинейная характеристика удовлетворяет условию $F(x) = -F(-x)$, то такую характеристику называют симметричной относительно начала координат или нечётно-симметричной (рис. 1.3, б).

Если нелинейная характеристика не удовлетворяет ни одному из приведённых условий, то такую характеристику называют несимметричной (рис. 1.3, в). Например, вольт-амперная характеристика выпрямительного диода.

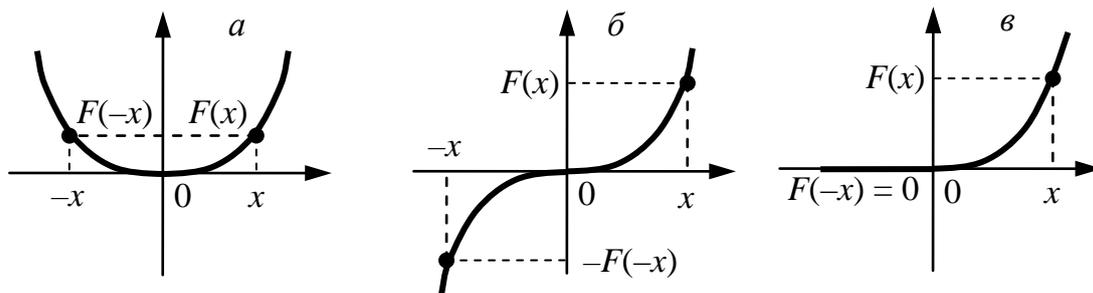


Рис. 1.3. Нелинейные симметричные и несимметричные характеристики

По характеру зависимости выходной величины z от входной величины x нелинейные характеристики разделяются на:

- **гладкие;**
- **ломаные;**
- **кусочно-линейные.**

Если в любой точке характеристики существует производная dz/dx , то такая характеристика считается **гладкой** (см. табл. 1.1, п. 10 – 12).

Если гладкая характеристика $z = F(x)$ имеет изломы, в которых производная dz/dx однозначно не определяется, то такая характеристика считается ломаной.

Если ломаная характеристика между точками излома имеет прямолинейную зависимость, то такая характеристика считается кусочно-линейной.

В ряде случаев для упрощения расчёта гладкую характеристику приближенно заменяют кусочно-линейной, которая разделяется на **непрерывную и разрывную**.

Если в точке излома характеристика имеет однозначное значение, то такая характеристика считается непрерывной (см. табл. 1.1, п. 1 – 3).

Если в точке излома характеристика имеет неоднозначное значение, то такая характеристика считается разрывной (см. табл. 1.1, п. 6 – 9).

Типичным примером разрывной характеристики является релейная характеристика, в которой при значении входной величины, соответствующей срабатыванию реле, выходная величина имеет два значения: «реле ещё не сработало» и «реле уже сработало». При этом выходная величина, образно говоря, разрывается в точке излома на две части, разделённые на величину срабатывания реле.

1.4. Типовые нелинейные звенья

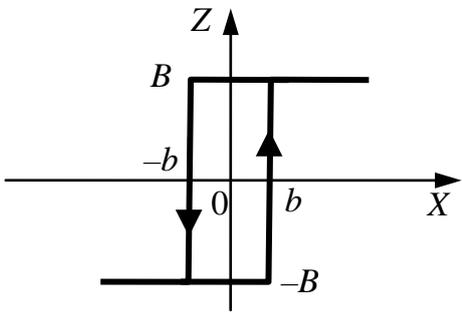
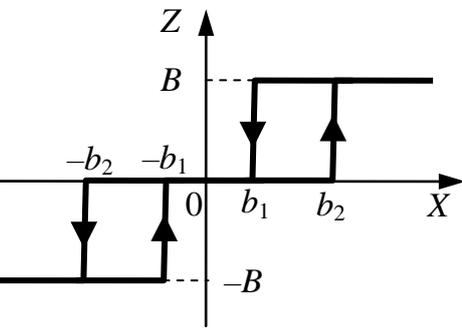
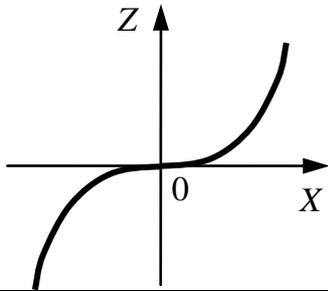
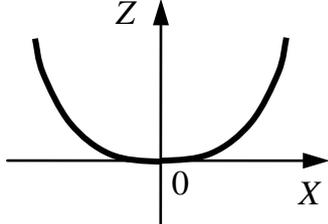
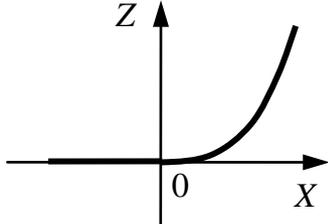
В табл. 1.1 представлены статические характеристики и уравнения типовых нелинейностей, аппроксимированных кусочно-линейной или гладкой зависимостью.

Таблица 1.1

Статические характеристики типовых нелинейностей

№ п/п	Внешний вид характеристики	Название и уравнение звена
1	2	3
Кусочно-линейные однозначные непрерывные нелинейности		
1		<p>Зона нечувствительности</p> $Z = \begin{cases} k(X - b) & \text{при } X > b; \\ 0 & \text{при } X \leq b; \\ k(X + b) & \text{при } X < -b \end{cases}$
2		<p>Насыщение (ограничение)</p> $Z = \begin{cases} B & \text{при } X > b; \\ kX & \text{при } X \leq b; \\ -B & \text{при } X < -b \end{cases}$

1	2	3
3		<p>Зона нечувствительности с насыщением</p> $Z = \begin{cases} B & \text{при } X > b_2; \\ k(X - b_1) & \text{при } b_1 < X \leq b_2; \\ 0 & \text{при } X \leq b_1; \\ k(X + b_1) & \text{при } -b_1 > X \geq -b_2; \\ -B & \text{при } X < -b_2 \end{cases}$
Неоднозначные ломаные нелинейности		
4		<p>Упор</p> $Z = \begin{cases} B & \text{при } \dot{X} > 0; \\ -B & \text{при } \dot{X} < 0 \end{cases}$
5		<p>Люфт (Мертвый ход)</p> $Z = \begin{cases} k(X - b) & \text{при } \dot{X} > 0; \\ k(X + b) & \text{при } \dot{X} < 0; \\ \text{const} & \text{при } X - Z < b \end{cases}$
Кусочно-линейные однозначные нелинейности (релейные)		
6		<p>Идеальное двухпозиционное реле</p> $Z = \begin{cases} B & \text{при } X > 0; \\ -B & \text{при } X < 0 \end{cases}$
7		<p>Идеальное трехпозиционное реле</p> $Z = \begin{cases} B & \text{при } X > b; \\ 0 & \text{при } X \leq b; \\ -B & \text{при } X < -b \end{cases}$

1	2	3
Кусочно-линейные неоднозначные нелинейности (релейные)		
8		<p>Двухпозиционное реле с гистерезисом</p> $Z = \begin{cases} B \text{ при } X > b; \\ -B \text{ при } X < -b; \end{cases} \text{ при } \dot{X} > 0; \\ \begin{cases} B \text{ при } X > -b; \\ -B \text{ при } X < -b \end{cases} \text{ при } \dot{X} < 0$
9		<p>Трехпозиционное реле с гистерезисом</p> $Z = \begin{cases} B \text{ при } X > b_2; \\ 0 \text{ при } -b_1 \leq X \leq b_2; \\ -B \text{ при } X < -b_1; \end{cases} \text{ при } \dot{X} > 0; \\ \begin{cases} B \text{ при } X > b_1; \\ 0 \text{ при } -b_2 \leq X \leq b_1; \\ -B \text{ при } X < -b_2 \end{cases} \text{ при } \dot{X} < 0$
Однозначные гладкие нелинейности		
10		<p>Вязкое трение $Z = kX^2 \text{ sign}(X)$</p>
11		<p>Квадратичная функция $Z = kX^2$</p>
12		<p>Идеальная характеристика диода $Z = \begin{cases} kX^2 \text{ при } X \geq 0; \\ 0 \text{ при } X < 0 \end{cases}$</p>

1.5. Статические и переходные характеристики нелинейных систем

Для нелинейных систем справедливы все положения точности линейных АСУ в стационарных режимах, в частности, положения о влиянии на точность АСУ величины коэффициента передачи системы, порядка астатизма, компенсирующих воздействий по внешним возмущениям. Вместе с тем наличие нелинейностей в системе создает определенные особенности в стационарных режимах.

Статический режим АСУ определяется зависимостью статического значения выходной величины Y системы от входной величины X или внешнего возмущающего воздействия F . В нелинейных системах наличие нелинейных статических характеристик у отдельных звеньев приводит к тому, что зависимость $Y(X)$ получается также нелинейной, т.е. статизм системы δ_x также является нелинейной функцией.

Для приближенной оценки нелинейной системы можно оперировать максимальным отклонением выходной величины Y_{\max} , соответствующим максимально возможному изменению входного воздействия X_{\max} , а также диапазоном изменения крутизны статической характеристики системы, т.е. изменением величины статизма δ_x .

Статическая характеристика нелинейной системы строится по статическим характеристикам составляющих её звеньев, исходя из их соединения, определяемого структурной схемой. Вначале по характеристикам отдельных звеньев строят характеристики групп последовательно и параллельно соединенных звеньев, а также звеньев, охваченных местными обратными связями.

Для последовательного соединения звеньев задаются рядом дискретных значений входной величины X . Для каждого из этих значений определяется соответствующее значение выходной величины каждого звена, являющегося входной величиной для следующего звена, и так до получения значения выходной величины всей цепочки Y .

Например, при последовательном соединении типового нелинейного элемента ($HЭ$) «Идеальное трехпозиционное реле» и линейного элемента ($LЭ$), описываемого апериодическим звеном первого порядка, нахождение результирующей статической характеристики $Y(X)$ выглядит следующим образом (рис. 1.4). Статическая характеристика «Идеальное трехпозиционное реле» приведена в табл. 1.1, а статическая характеристика апериодического звена представляет собой прямую линию, угол наклона которой относительно оси абсцисс зависит от коэффициента передачи $K_{LЭ}$. Зная характер изменения выхода нелинейной части системы $Z(X)$ и подставляя значения Z в характери-

стику линейного элемента, получим результирующую статическую характеристику соединения $Y(X)$.

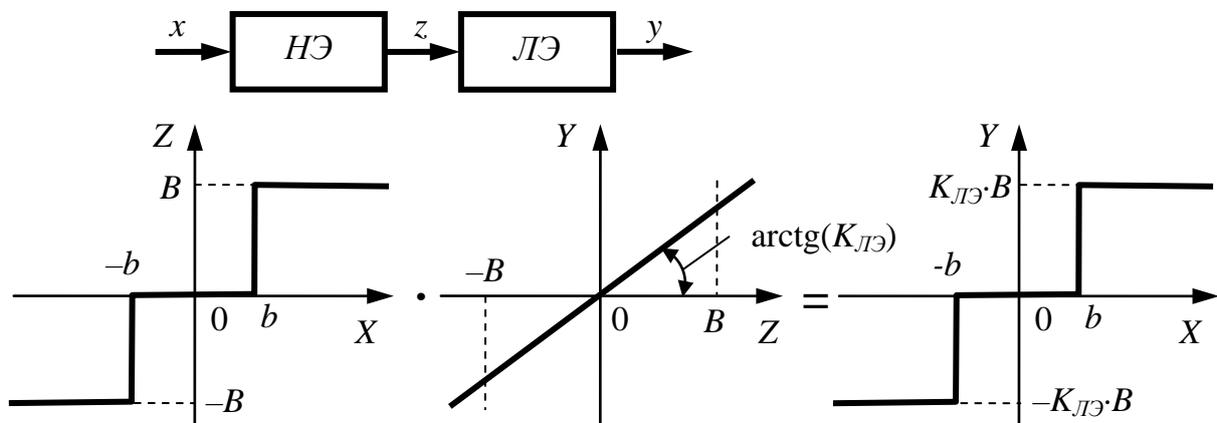


Рис. 1.4. Построение статической характеристики последовательного соединения нелинейного и линейного звеньев

Рассмотрим пример последовательного соединения двух нелинейных элементов «Идеальное двухпозиционное реле» и «Зона нечувствительности», статические характеристики которых представлены в табл. 1.1. В данном случае результирующая статическая характеристика $Z_2(X)$ может иметь два вида в зависимости от того, будет ли выходной сигнал первого нелинейного элемента – уровень срабатывания реле B больше порога зоны нечувствительности b (рис. 1.5).

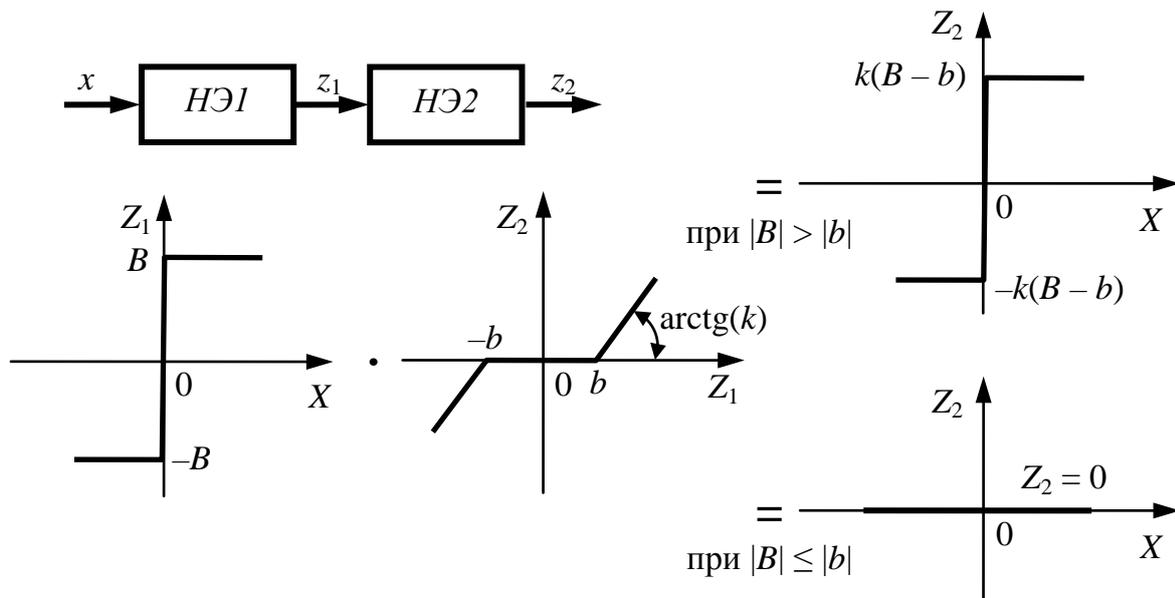


Рис. 1.5. Построение статической характеристики последовательного соединения нелинейных звеньев

При параллельном соединении звеньев ордината искомой зависимости Y определяются как сумма ординат статических характеристик отдельных звеньев.

Например, при параллельном соединении того же $HЭ$ «Идеальное трехпозиционное реле» и $ЛЭ$, что и в примере на рис. 1.4, нахождение результирующей статической характеристики $Y(X)$ выглядит следующим образом. Результирующая ордината $Y(X)$ находится путем сложения ординат звеньев $HЭ$ и $ЛЭ$ при ряде дискретных значений входной величины X (рис. 1.6).

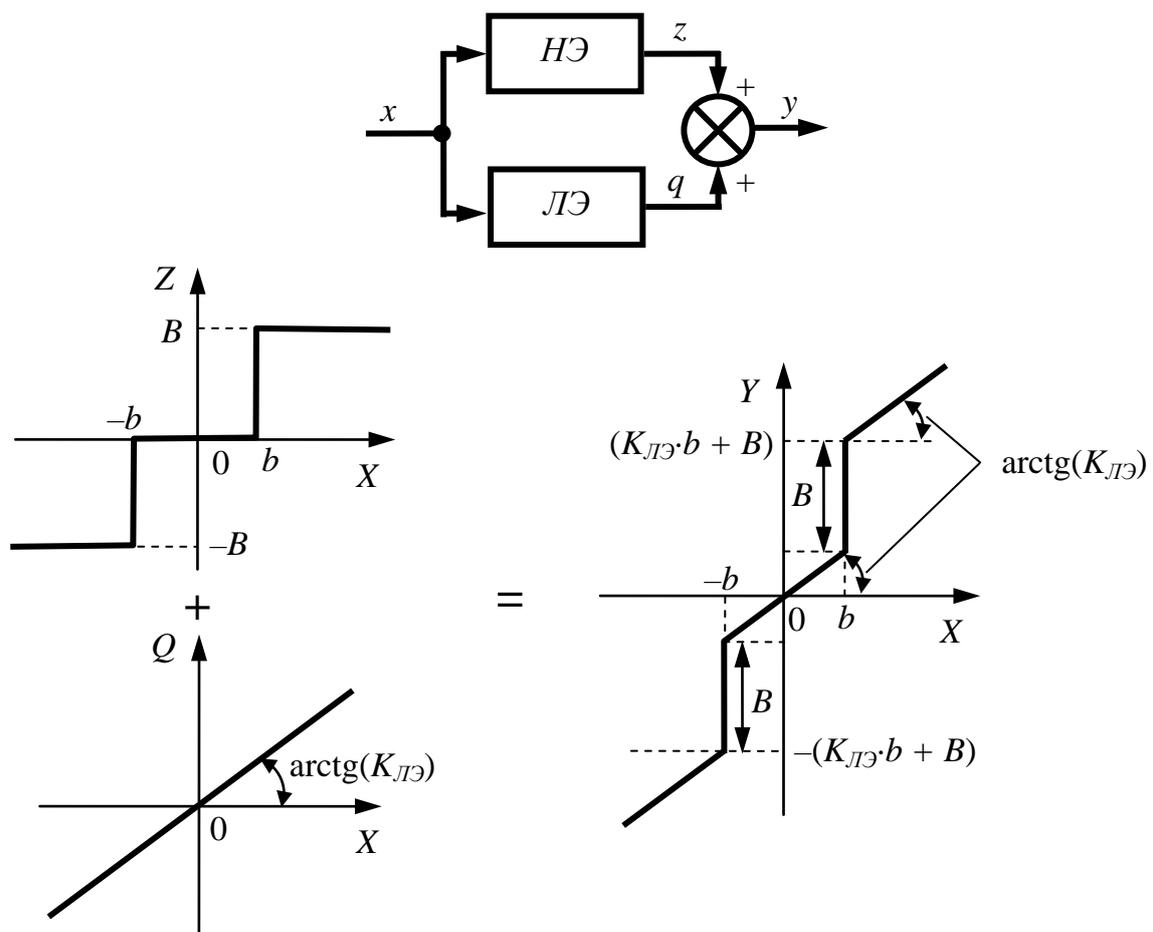


Рис. 1.6. Построение статической характеристики параллельного соединения нелинейного и линейного звеньев

Рассмотрим пример параллельного соединения двух $HЭ$ «Идеальное двухпозиционное реле» и «Зона нечувствительности», статические характеристики звеньев те же, что и в примере на рис. 1.5. В данном случае результирующая статическая характеристика $Y(X)$ находится путем сложения ординат звеньев $HЭ1$ и $HЭ2$ при ряде дискретных значений входной величины X (рис. 1.7).

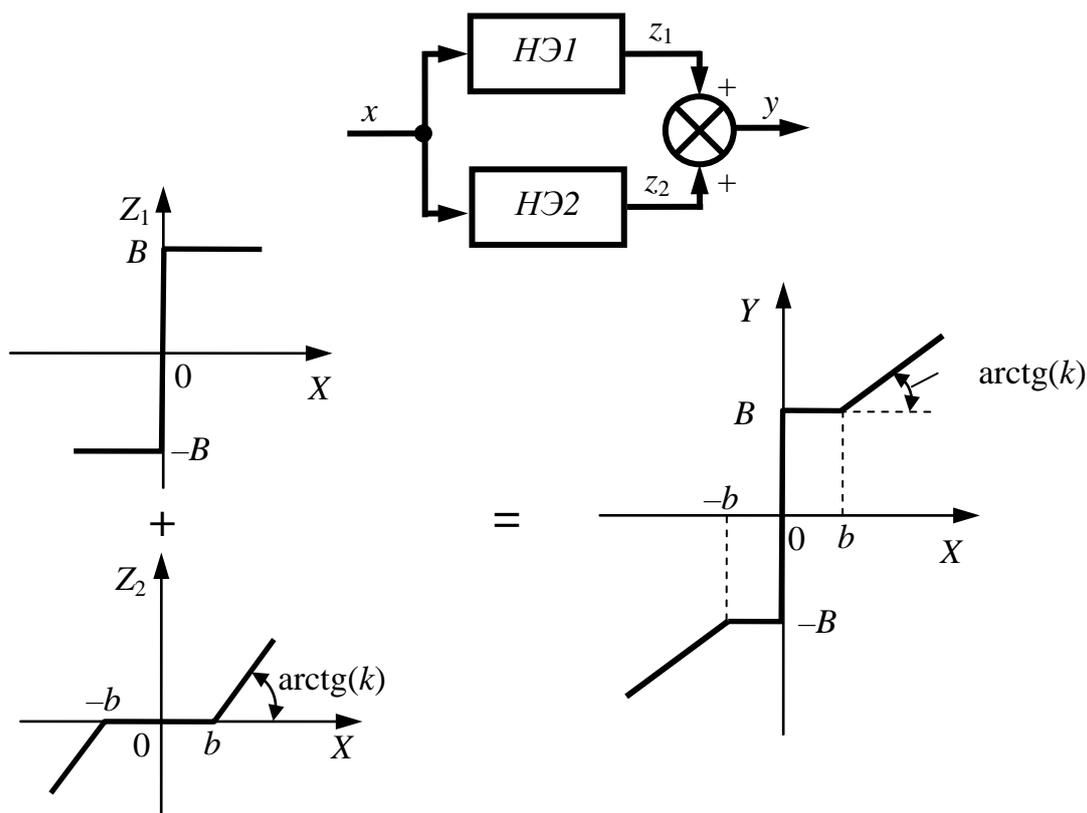


Рис. 1.7. Построение статической характеристики параллельного соединения нелинейных звеньев

Для коррекции статических характеристик нелинейных звеньев иногда необходимо составить соединение со сложной смешанной структурой, содержащей и последовательное, и параллельное соединения звеньев. Рассмотрим пример такого сложного параллельного соединения *НЭ1* «Идеальное двухпозиционное реле» и *ЛЭ*, что и в ранее рассмотренных примерах, и последовательно соединенным с ним *НЭ2* «Зона нечувствительности». В данном случае результирующая статическая характеристика $Y(X)$ может иметь три вида в зависимости от соотношения выходной величины *НЭ1* – уровня срабатывания реле B и порога зоны нечувствительности *НЭ2* – b (рис. 1.8). При условии $|B| = |b|$ результирующая статическая характеристика $Y(X)$ является прямой линией, проходящей через начало координат, т.е. *НЭ1* совместно с *ЛЭ* компенсировали «Зону нечувствительности» *НЭ2* и превратили все сложное соединение в линейный элемент.

Составление сложных соединений линейных и нелинейных характеристик может использоваться на этапе синтеза нелинейных АСУ для разработки модели нелинейного регулятора, управляющего технологическим объектом с нелинейной внутренней характеристикой.

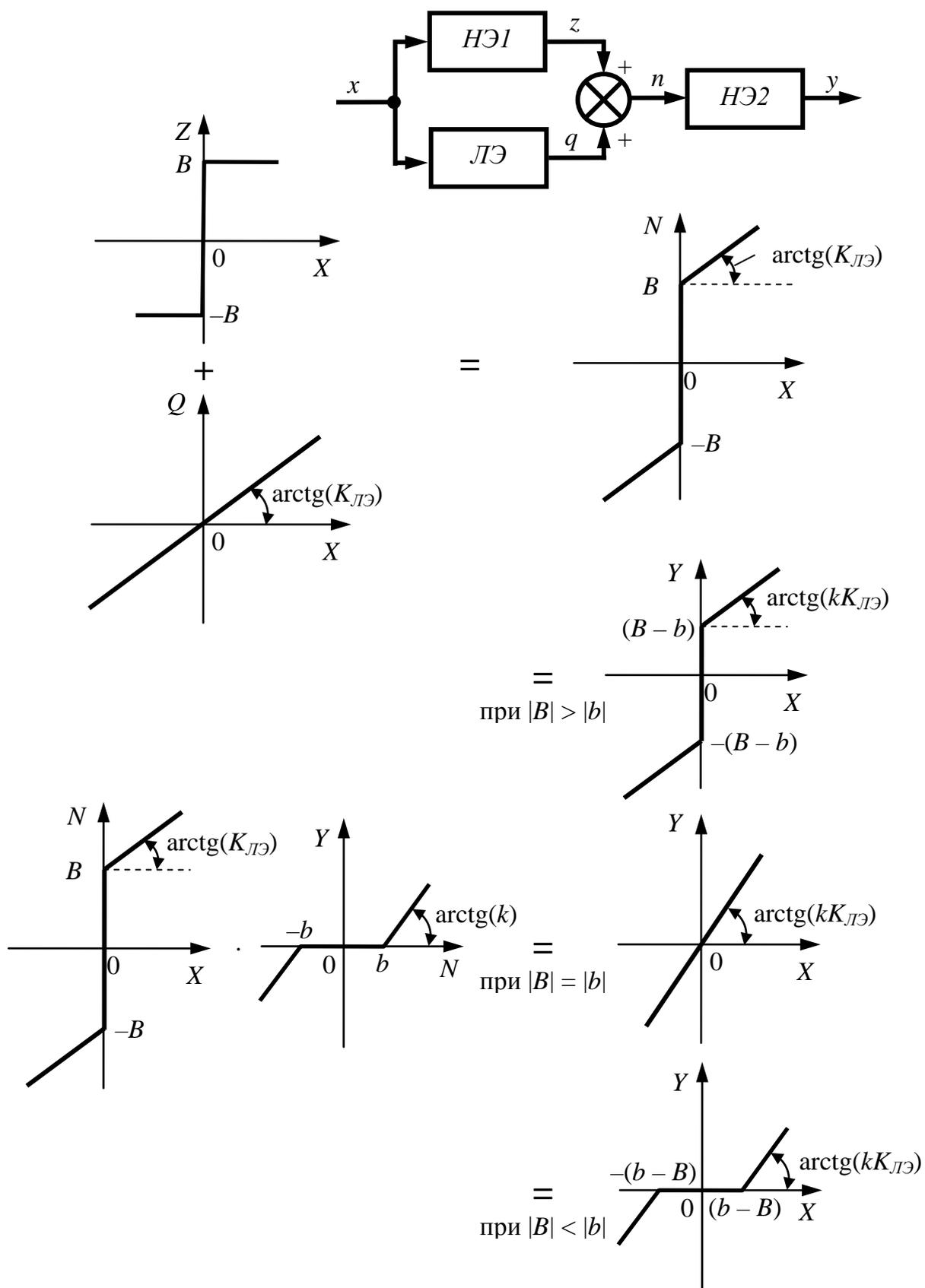


Рис. 1.8. Построение статической характеристики сложного соединения нелинейных звеньев

С помощью указанных построений многоконтурная АСУ может быть приведена к одноконтурной схеме, состоящей из объекта управления и управляющего устройства (автоматического регулятора).

Построение статической характеристики звена, охваченного обратной связью, показано на рис. 1.9. Здесь кривая 1 – статическая характеристика НЭ в прямой ветви соединения $Y(\Delta X)$, а кривая 2 – статическая характеристика ЛЭ в цепи обратной связи $X_{oc}(Y)$. Все характеристики строятся на одной координатной плоскости.

Из уравнения статической ошибки ΔX при отрицательной обратной связи получаем выражение для входного сигнала:

$$X = \Delta X + X_{oc}, \quad (1.3)$$

где знак «плюс» соответствует отрицательной обратной связи.

Задаваясь рядом дискретных значений выходной величины Y , находим соответствующее ей значение входной величины X как сумму координат ΔX и X_{oc} . Таким образом, получена часть результирующей статической характеристики $Y(X)$ 3 в первом квадранте системы координат, оставшаяся часть в третьем квадранте строится аналогично.

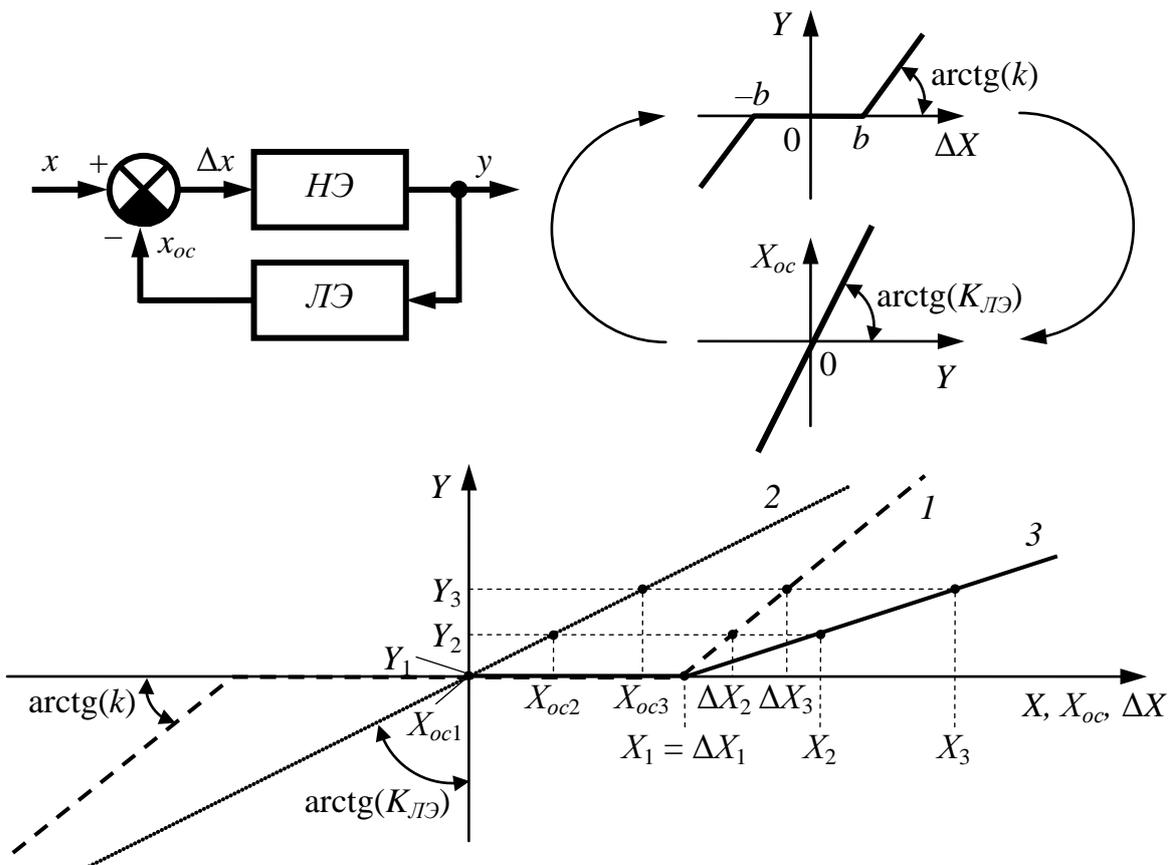


Рис. 1.9. Построение статической характеристики нелинейного звена, охваченного обратной связью

Описанные методики построения статических характеристик нелинейных АСУ позволяют оценивать влияние нелинейности отдельных звеньев на характеристику всей системы, а также взаимно согласовывать характеристики звеньев с целью получения желаемой результирующей характеристики системы.

В отличие от линейных систем точность нелинейных систем зависит от величины внешних воздействий. Такая же зависимость существует и в отношении устойчивости и качества переходных процессов в нелинейных системах. Причиной этого является при больших отклонениях от установившегося режима ослабление действия корректирующего звена с насыщением или при малых отклонениях относительно установившегося режима отсутствие коррекции из-за наличия зоны нечувствительности.

Нелинейная система в переходном режиме может иметь несколько состояний устойчивого или неустойчивого равновесия, т.е. может находиться не только в равновесно-сходящемся процессе, но и в устойчивом установившемся периодическом режиме, так называемом **автоколебательном режиме**.

Устойчивые собственные незатухающие колебания в нелинейной системе с определенной амплитудой A' и частотой ω' , определяемыми нелинейностью и внутренними параметрами системы, называются **автоколебаниями** (рис. 1.10).

Автоколебания являются устойчивым режимом, характерным только для нелинейных систем, потому что малые изменения параметров системы не выводят её из этого режима. Амплитуда автоколебаний A' не зависит от начальных условий и уровня внешних воздействий. При этом в переходном колебательном процессе может изменяться не только амплитуда, но и частота колебаний. Причиной автоколебаний, помимо внутренних параметров системы, является наличие зоны нечувствительности, релейной функции или гистерезиса с порогом b .

Если при изменении начальных условий система может попасть в область с колебательным переходным процессом, а для её работы необходим монотонный переходной процесс, то с помощью отрицательной дифференцирующей обратной связи в нелинейном звене можно создать так называемый **скользящий режим работы**. При этом режиме работы колебания регулируемого параметра переходят, образно говоря, в микроколебания относительно экспоненты, частота которых в установившемся режиме стремится к бесконечности. Таким образом, из области автоколебаний система переводится в область монотонного переходного процесса.

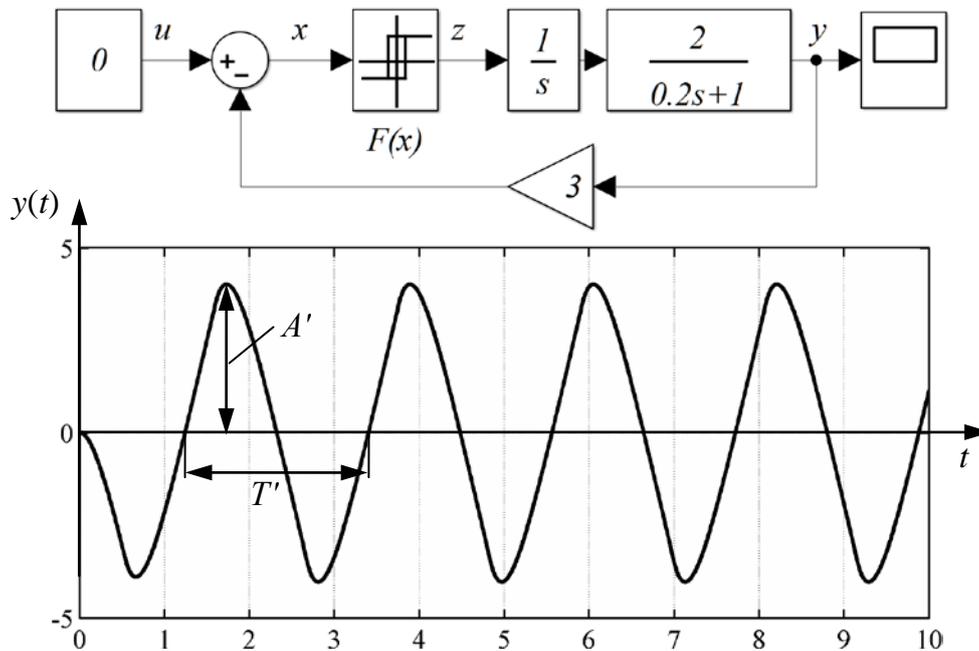


Рис. 1.10. Переходная характеристика устойчивого автоколебательного процесса

Если на систему подавать сигнал, частота которого может совпадать с частотой собственных колебаний системы, то в системе могут возникать резонансные явления, может произойти скачок амплитуды. В общем случае при приложении внешних периодических воздействий возникает наложение собственных и внешних колебаний. При увеличении амплитуды внешних воздействий может произойти срыв автоколебаний собственной частоты, и система переходит на частоту внешних колебаний. Такой режим работы нелинейной системы называется **синхронный**. Важна также скорость приложения внешнего воздействия. При скачкообразном воздействии может быть такое перерегулирование, что выводит систему в совершенно другую область притяжения и с другим режимом, по сравнению с тем случаем, когда такое же по величине воздействие было бы подано плавно.

1.6. Примеры нелинейных автоматических систем

Рассмотрим в качестве примера нелинейной системы автоматическую систему стабилизации напряжения с нелинейным управляющим устройством (рис. 1.11). Регулируемой величиной является стабилизированное напряжение U_H на сопротивлении R_H . Для сглаживания пульсаций напряжения U_0 , создаваемых регулирующим транзистором T , работающим в ключевом режиме, между транзистором T и нагрузкой R_H включен LC -фильтр с нулевым диодом D .

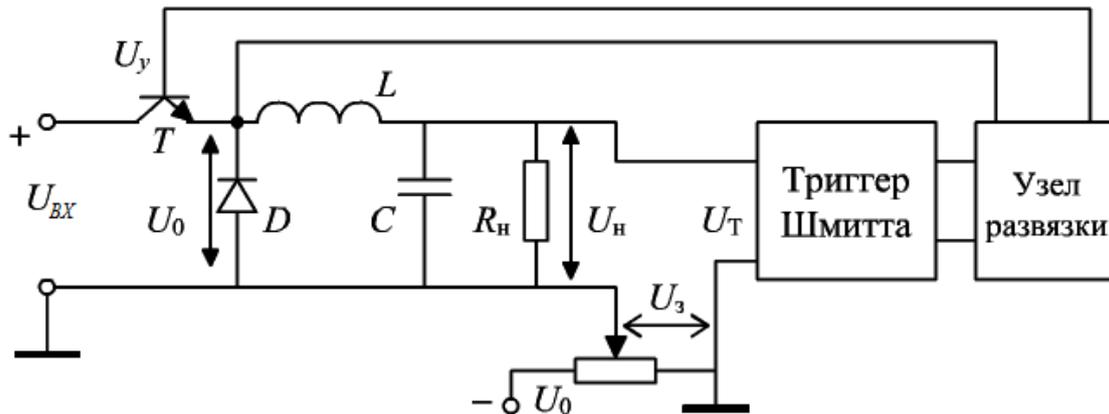


Рис. 1.11. Релейная автоматическая система стабилизации напряжения

Управляющим устройством является триггер Шмитта, реализуемый на операционном усилителе, статическая характеристика которого имеет форму петли гистерезиса (рис. 1.12, а). На вход триггера Шмитта поступает разность задающего напряжения U_3 и регулируемой величины U_H . При достижении разности этих напряжений пороговых значений переключения триггера U_2 и U_1 последний изменяет состояние на своем выходе, переключает регулирующий транзистор поочередно в режимы отсечки и насыщения. Форма выходного напряжения системы стабилизации показана на рис. 1.12, б. Размах пульсаций ΔU выходного напряжения определяется шириной зоны гистерезиса релейного элемента – триггера Шмитта.

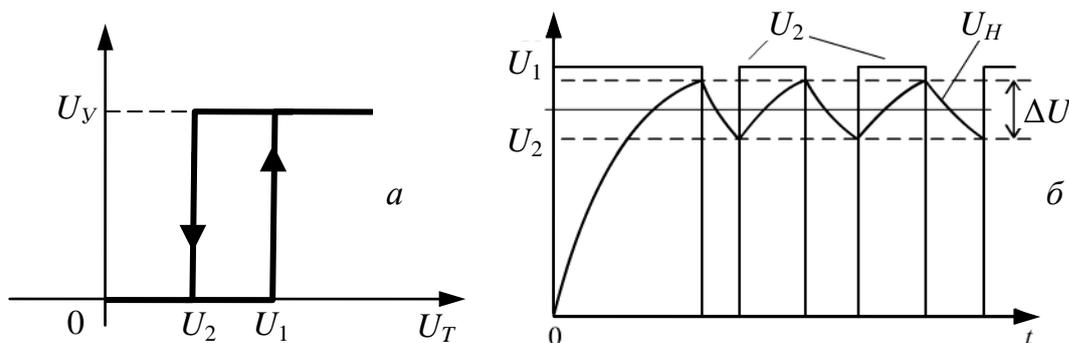


Рис. 1.12. Характеристики системы стабилизации напряжения

Еще одним примером нелинейной автоматической системы является следящий гидропривод – это регулируемый гидропривод, в котором закон движения выходного звена (вала гидромотора или штока гидроцилиндра) изменяется в зависимости от управляющего воздействия. На рис. 1.13 представлена упрощенная принципиальная схема следящего гидропривода одноковшового экскаватора, представляющего собой автоматическую систему, работающую по отклонению.

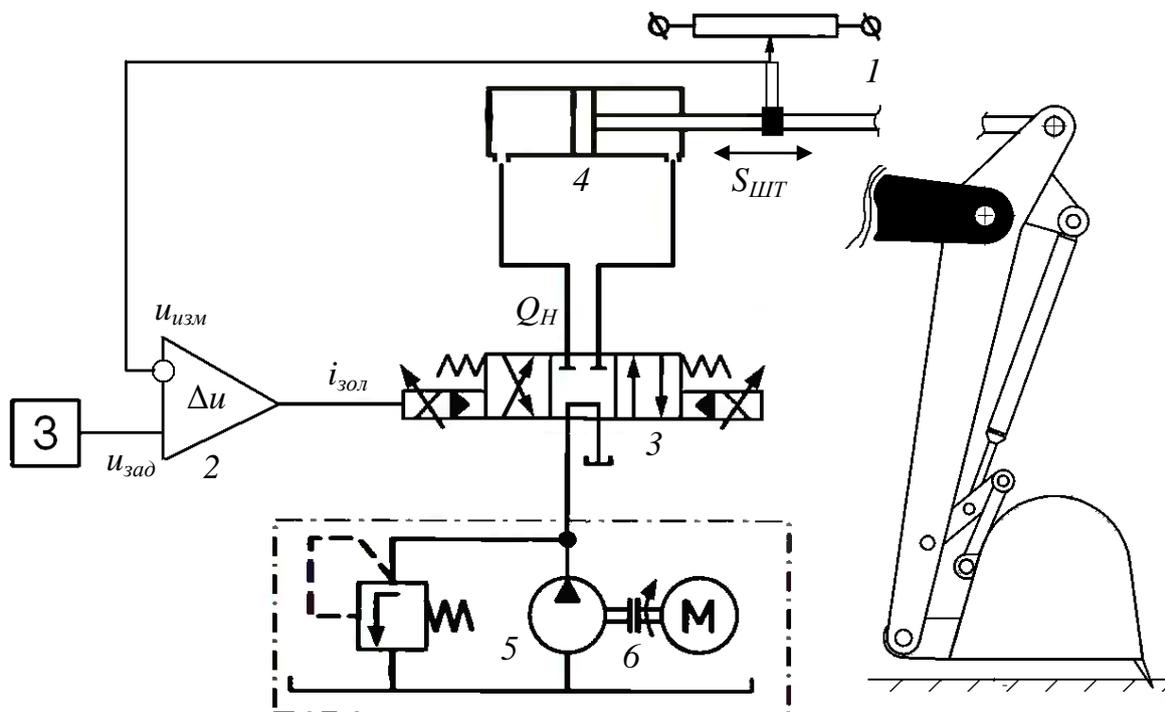


Рис. 1.13. Принципиальная схема следящего гидропривода

Для достижения заданного положения штока исполнительного гидроцилиндра 4, перемещающего рукоять стрелы экскаватора, вводится отрицательная обратная связь с датчиком положения. Текущее положение штока гидроцилиндра $S_{шт}$ измеряется потенциометрическим датчиком положения 1. Сигнал $u_{изм}$, пропорциональный измеренному значению перемещения, передается на электронный усилитель ЭУ 2, где сравнивается с заданным значением $u_{зад}$. Далее ошибка регулирования Δu усиливается, и управляющий ток $i_{зол}$ подается на обмотку электрогидрораспределителя ЭГР 3. Посредством электромагнита золотник распределителя перемещается в нужное положение, направляя поток рабочей жидкости в нужную полость гидроцилиндра 4. Скорость перемещения штока исполнительного гидроцилиндра пропорциональна номинальной подаче рабочей жидкости Q_H от гидронасоса 5, приводимого валом отбора мощности 6 от двигателя внутреннего сгорания экскаватора. В качестве задатчика 3 может использоваться джойстик, преобразующий перемещение управляющего рычага в сигнал $u_{зад}$, пропорциональный требуемому перемещению штока гидроцилиндра.

Нелинейность в системе возникает из-за электрогидрораспределителя, золотник которого имеет три положения: $+x_{зол}$ – жидкость поступает в штоковую полость гидроцилиндра, $-x_{зол}$ – жидкость посту-

пает в поршневую полость гидроцилиндра и 0 – сечения распределителя закрыты – шток неподвижен (рис. 1.14). Из-за различия площадей внутренних полостей гидроцилиндра $S_{шт}$ и $S_{п}$ скорость перемещения штока гидроцилиндра $V_{шт}$ при втягивании/выдвигении будет различной в зависимости от направления рабочей жидкости, этой конструктивной особенностью обуславливается другая нелинейность следящего гидропривода – переменная структура.

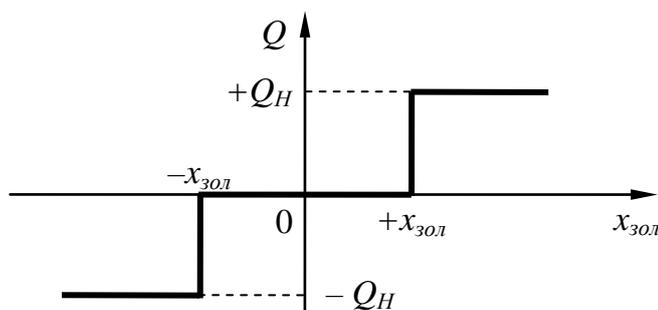


Рис. 1.14. Релейная характеристика распределителя

Основываясь на принципиальной схеме и приведенном описании гидропривода, можно представить структурную схему следящего гидропривода (рис. 1.15).

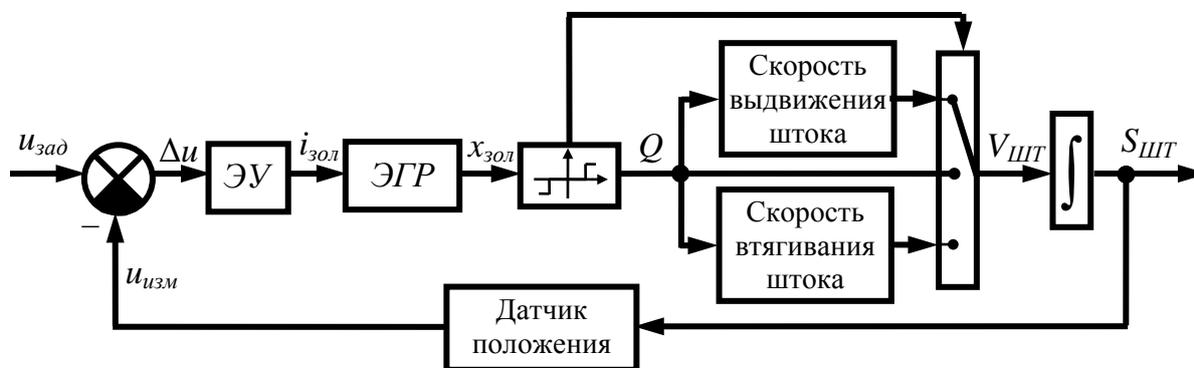


Рис. 1.15. Структурная схема автоматизированного следящего гидропривода

Ярким примером существенно нелинейных систем могут быть автоматические системы с релейным исполнительным механизмом, системы, в которых учитываются зазоры, люфты и конструктивные ограничения величин.

Контрольные вопросы и задания

1. Какая система называется нелинейной?
2. Что называют естественными и искусственными нелинейностями?
3. Приведите примеры нелинейностей в реальных технических устройствах.
4. Какая нелинейность называется существенной?
5. Каковы особенности существенно нелинейных систем?
6. Что представляют собой релейный элемент и релейная автоматическая система?
7. Приведите преимущества релейной аппаратуры.
8. Приведите простейшую структурную схему нелинейной автоматической системы.
9. Приведите классификацию нелинейных характеристик.
10. Какие типы симметрии могут иметь нелинейные характеристики?
11. Какую нелинейную характеристику называют однозначной, а какую многозначной?
12. По указанию преподавателя нарисуйте статическую характеристику и приведите уравнение типового нелинейного звена.
13. Поясните методику построения результирующей статической характеристики нелинейной системы.
14. Что называют автоколебаниями в нелинейной системе?
15. В каком случае возможно возникновение автоколебаний в нелинейной системе?
16. Приведите методику определения амплитуды A' , периода T' и частоты ω' автоколебаний.
17. Приведите примеры автоколебательных режимов в реальных нелинейных системах.
18. Поясните принцип работы релейной автоматической системы стабилизации напряжения на рис. 1.11.

2. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

2.1. Основы анализа нелинейных систем

Для решения задач анализа нелинейной системы прежде всего необходимо построить её математическую модель, которая характеризует связь выходных сигналов системы с сигналами, отражающими приложенные к системе воздействия. В результате может быть получено одно или несколько нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка, иногда с рядом логических соотношений, что делает анализ математической модели чрезвычайно трудоёмким. Поэтому для решения задач анализа нелинейной системы нужны такие методы расчета, которые позволяют в достаточно простом виде определять математические связи параметров нелинейной системы с динамическими показателями процесса управления.

Все инженерные методы исследования нелинейных систем разделяются на две основные группы: *точные* и *приближенные*. К точным методам относится метод А.М. Ляпунова, метод фазовой плоскости, метод припасовывания и точечных преобразований, частотный метод В.М. Попова. Приближенные методы основаны на линеаризации нелинейных уравнений системы с применением гармонической или статистической линеаризации: метод гармонического баланса Л.С. Гольдфарба, метод гармонической линеаризации Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова, метод Д.А. Башкирова и т.д.

Основными параметрами, характеризующими динамику работы существенно нелинейных АСУ, являются:

- 1) наличие или отсутствие автоколебаний. Если автоколебания имеются, то необходимо определить их амплитуду и частоту;
- 2) время выхода регулируемого параметра в режим стабилизации (быстродействие);
- 3) наличие или отсутствие скользящего режима;
- 4) определение особых точек и особых траекторий движения.

Важной особенностью динамики существенно нелинейных систем является зависимость условий устойчивости от величины внешнего воздействия. В связи с этим для нелинейных систем применяют понятия «*устойчивость в малом*», «*устойчивость в большом*», «*устойчивость в целом*».

Система устойчива «в малом», если она устойчива только при малых начальных отклонениях. Система устойчива «в большом», если она устойчива при больших начальных отклонениях. Система устойчива «в целом», если она устойчива при любых отклонениях.

2.2. Фазовое пространство

Метод исследования динамики нелинейных АСУ с помощью фазового пространства относится к наиболее ранним точным аналитическим методам теории нелинейных систем.

Фазовое пространство – n -мерное пространство, образованное системой координат, состоящей из регулируемой величины x_1 и её производных (рис. 2.1, а).

Состояние системы в таком фазовом пространстве представляется **изображающей точкой** M . Процесс изменения состояния системы представляет собой некоторое движение изображающей точки M в фазовом пространстве $[x_1, x_2, x_3]$, который описывается **фазовой траекторией** движения системы.

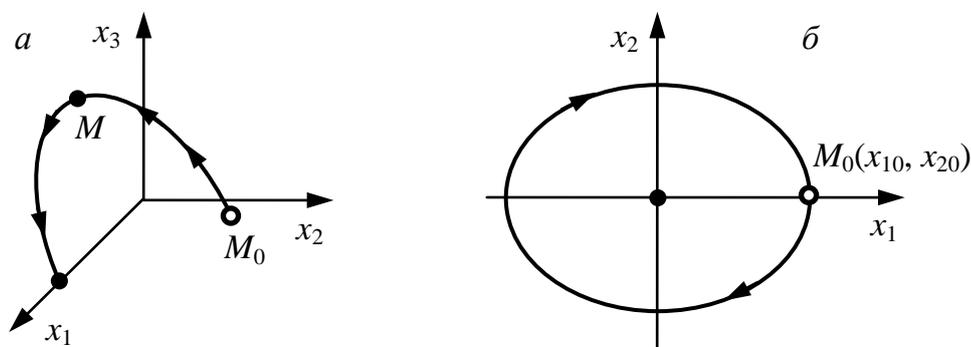


Рис. 2.1. Фазовое пространство и траектории

Фазовая траектория в фазовом пространстве даёт геометрическое представление о динамике исследуемого процесса. Но при этом координата времени отсутствует. Время отображается в неявном виде, поэтому фазовая траектория не даёт временную динамическую характеристику системы, но полностью раскрывает динамические свойства системы, показывая не только значения производных (x_2, x_3) в каждый момент времени, но и закон изменения каждой производной, что по временной динамической характеристике не всегда можно определить. Кроме этого, временную переходную характеристику можно построить по фазовой траектории различными способами.

Фазовая траектория показывает динамику движения системы при ненулевых начальных условиях. Эти начальные условия изображаются **начальной точкой** фазовой траектории M_0 . При равновесии в системе, когда изменения регулируемой величины нет и все производные по регулируемой величине равны нулю, то это состояние системы изображается конечной точкой фазовой траектории, которая называется **особой точкой**.

При изменении начальных условий или начального состояния системы соответственно изменится фазовая траектория. Совокупность фазовых траекторий для определенных начальных условий и состояний называется **фазовым портретом** системы.

Графически изобразить фазовый портрет в n -мерном пространстве невозможно, поэтому при анализе нелинейных систем ограничиваются двумерной фазовой плоскостью, которая практически позволяет изучить все особенности поведения нелинейной системы.

Фазовая плоскость – это двумерная координатная плоскость, в которой по осям координат откладываются две переменные (фазовые координаты): регулируемая величина x_1 и её первая производная x_2 (рис. 2.1, б).

2.3. Фазовые траектории систем

Рассмотрим математическое представление фазовых траекторий линейной динамической системы, переходный процесс которой описывается дифференциальным уравнением 2-го порядка:

$$a_0 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = 0, \quad (2.1)$$

где y – выходной сигнал, a_i – постоянные коэффициенты модели.

Запишем уравнение (2.1) в виде системы дифференциальных уравнений 1-го порядка (системы в нормальной форме Коши). Эти уравнения получаются путём введения в исходное уравнение системы новых переменных состояния $x_i(t)$ вместо $(i - 1)$ производных выходной величины $y(t)$:

$$x_i(t) = y^{(i-1)}(t). \quad (2.2)$$

Применительно к рассматриваемой системе

$$x_1 = y; \quad x_2 = \dot{y}; \quad \dot{x}_2 = \ddot{y}. \quad (2.3)$$

Тогда модель системы в форме Коши будет иметь вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -(a_2 x_1 + a_1 x_2) / a_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Уравнения (2.4) являются **параметрическими уравнениями фазовой траектории** системы, параметром которых является время. Исключим из уравнения время, разделив второе уравнение на первое:

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = -\frac{a_2x_1 + a_1x_2}{a_0x_2} = \frac{N(x_1; x_2)}{D(x_1; x_2)}. \quad (2.5)$$

Это уравнение называется (непараметрическим) **дифференциальным уравнением фазовых траекторий**.

Решение уравнения (2.5) $x_2 = f(x_1)$ изображается на фазовой плоскости $[x_1; x_2]$. По оси абсцисс откладывается сама координата x_1 , а по оси ординат откладывается её первая производная x_2 . Каждой совокупности начальных условий (x_{10}, x_{20}) соответствуют свое решение и своя фазовая траектория. Семейство фазовых траекторий характеризует все возможные переходные процессы в данной системе при любых начальных условиях и образует её фазовый портрет.

Основные свойства фазовых траекторий:

1) если $x_2 = f(x_1)$ определена и непрерывна в некоторой области и имеет непрерывные частные производные по своим аргументам, то через каждую точку фазовой плоскости, за исключением особых точек, проходит единственная фазовая траектория. Это означает, что фазовые траектории при различных начальных условиях не пересекаются между собой;

2) при $x_2 > 0$ координата x_1 должна возрастать, поэтому в верхней фазовой полуплоскости изображающая точка движется слева направо, а в нижней полуплоскости движение происходит справа налево. Направление движения на траекториях показывают стрелками;

3) согласно (2.5), если $x_2 = 0$ и $N(x_1; x_2) \neq 0$, то $dx_2/dx_1 = \infty$, это значит, что фазовые траектории пересекают ось абсцисс под прямым углом, за исключением особой точки, где $dx_2/dx_1 = 0/0$. Ось ординат фазовые траектории могут пересекать под любым углом;

4) затухающему (устойчивому) переходному процессу соответствует фазовая траектория, сходящаяся к началу координат или отрезку покоя;

5) неустойчивому процессу соответствует фазовая траектория, удаляющаяся от начала координат.

2.4. Метод изоклин

В большинстве своем решение уравнения (2.5) может быть получено простым интегрированием, но если переменные x_1 и x_2 не разделяются, то фазовые траектории можно построить приближенным графоаналитическим методом, например, **методом изоклин**.

Изоклиной называется такая линия, во всех точках пересечения которой с фазовыми траекториями касательные к ним наклонены под одним и тем же углом α_i к оси абсцисс, т.е. при дифференциальном уравнении фазовых траекторий (2.5)

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = C_i = \operatorname{tg}(\alpha_i) = \operatorname{const}, \quad (2.6)$$

где C_i – определенная постоянная величина, представляющая собой тангенс угла наклона касательной к фазовой траектории в точке пересечения её с изоклиной, и может принимать значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Подставив из уравнения (2.6) в (2.5), получим

$$C_i = \frac{N(x_1, x_2)}{D(x_1, x_2)}. \quad (2.7)$$

Из (2.7) можно выразить **уравнение изоклины**

$$x_2 = \varphi(x_1, C_i). \quad (2.8)$$

Задавая различные значения C_i , строят семейство изоклин, которые используются для построения фазовых траекторий. В качестве примера на рис. 2.2 на изоклинах стрелочками отмечены наклоны фазовых траекторий к оси абсцисс и построена фазовая траектория, исходящая из точки M_0 . В начале построения из точки M_0 проводятся два луча до пересечения со следующей изоклиной. Один луч имеет наклон, соответствующий данной изоклине α_0 , а другой – следующей изоклине α_1 . Точка M_1 данной фазовой траектории на следующей изоклине определится посередине отрезка между точками пересечения лучей с этой изоклиной. Также находится следующая точка M_2 и т. д.

Уравнение (2.8) определяет в каждой точке плоскости единственную касательную к соответствующей интегральной кривой за исключением точки, где $dx_2/dx_1 = 0/0$ или $N(x_1; x_2) = 0$, $D(x_1; x_2) = 0$, в которой направление касательной становится неопределенным, так как при этом становится неопределенным значение производной.

Эта точка является точкой пересечения всех изоклин – особой точкой. В ней одновременно обращаются в нуль производные по времени переменных x_1 и x_2 . Следовательно, особая точка дифференциальных уравнений фазовых траекторий (2.5) соответствует **стационарному состоянию** системы, а ее координаты – стационарные значения переменных x_1 и x_2 .

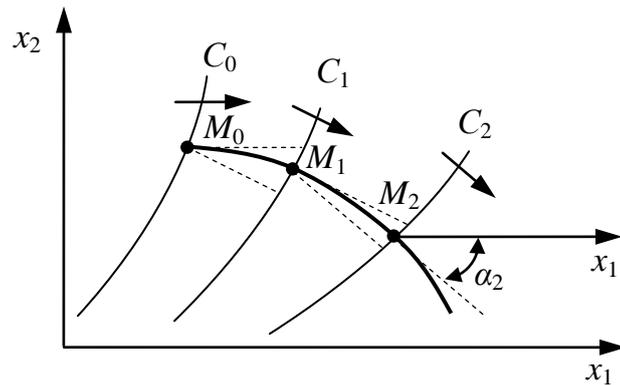


Рис. 2.2. Построение фазовой траектории методом изоклин

Особая точка дифференциальных уравнений представляет собой *пересечение главных изоклин* фазовых траекторий системы:

$$\begin{cases} N(x_1, x_2) = 0 \text{ при } C_i = 0; \\ D(x_1, x_2) = 0 \text{ при } C_i = \infty. \end{cases} \quad (2.9)$$

Динамическая система будет обладать столькими стационарными состояниями, сколько точек пересечения главных изоклин будет иметься на фазовой плоскости.

2.5. Особые точки фазовых траекторий линейных и нелинейных систем

Фазовые портреты нелинейных систем характеризуются большим разнообразием, чем фазовые портреты линейных систем. Однако типы особых точек линейных и нелинейных систем совпадают. Здесь имеются в виду те особые точки, в окрестностях которых уравнения нелинейных систем допускают линеаризацию.

Для линейных систем вид переходной и фазовой характеристик зависит от свободной составляющей уравнения системы. Согласно теории линейных систем, корни характеристического уравнения задают динамику протекания процессов в системе.

В табл. 2.1 представлены основные типы переходных характеристик, фазовых траекторий и особых точек линейных систем в зависимости от типа корней p_i характеристического уравнения системы (2.1). Данные таблицы показывают, что по характеру фазовых траекторий можно непосредственно судить о переходной характеристике системы и об её устойчивости.

Между собой фазовые траектории пересекаются только в особых точках, соответствующих состоянию равновесия. Особые точки бывают четырех видов: *центр*, *фокус*, *узел* и *седло*.

Центр – это особая точка в начале координат (см. табл. 2.1, п. 1). *Фокус* может быть устойчивым (см. табл. 2.1, п. 2) или неустойчивым (см. табл. 2.1, п. 3), траектория с фокусом соответствует сходящемуся или расходящемуся колебательному процессу. Если фазовые траектории будут входить в начало координат, что соответствует устойчивой системе, начало координат будет называться *устойчивым узлом* (см. табл. 2.1, п. 4). Если фазовые траектории вблизи узла асимптотически стягиваются к нему, то для линейной или нелинейной системы используют понятие асимптотической устойчивости.

Седло – это особая точка в виде начала координат (см. табл. 2.1, п. 6). Седло всегда неустойчиво, т. е. соответствует неустойчивому состоянию равновесия.

Особые точки, прямые линии и кривые, к которым притягиваются фазовые траектории, называются *аттракторами*.

Особыми траекториями называют такие фазовые траектории, которые разделяют плоскость на различные качественные процессы или траектории. К ним относятся:

1) *сепаратрисы* (*C*) – траектории, стремящиеся к седловому состоянию равновесия;

2) *предельные циклы* (*Ц*) – изолированные замкнутые траектории.

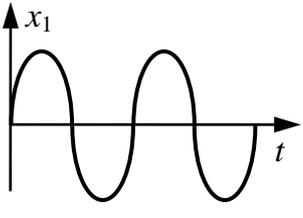
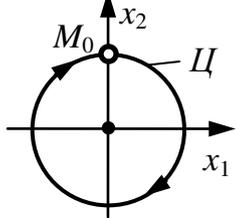
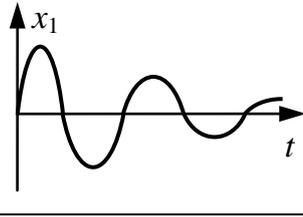
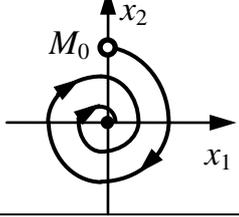
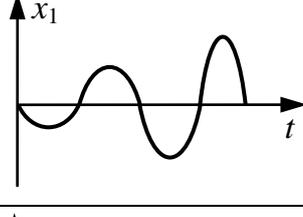
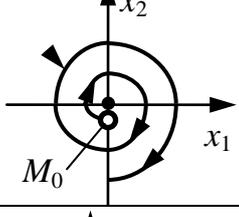
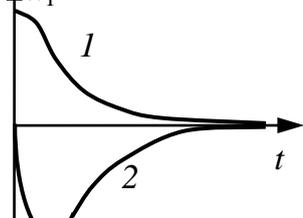
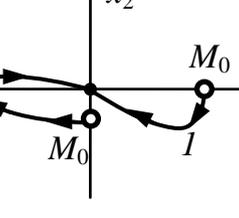
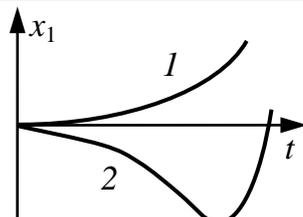
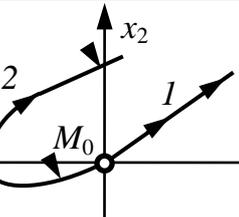
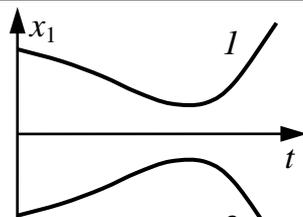
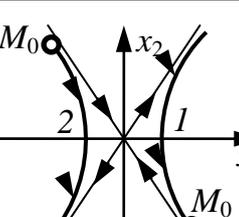
Особой точкой предельного цикла является *центр*. Если изнутри и снаружи фазовые траектории сходятся к предельному циклу (рис. 2.8), то такой предельный цикл называется *устойчивым предельным циклом*. Если система попала на устойчивый предельный цикл, то она обладает устойчивыми автоколебаниями.

Несмотря на схожесть фазовых характеристик линейных и нелинейных систем, нелинейные элементы существенно искажают характер фазовых траекторий, но в принципе они имеют такой же вид, название и зависимость от корней характеристического уравнения линейной части системы.

При наличии в системе нелинейного элемента, обладающего кусочно-линейной характеристикой, фазовая плоскость разбивается на ряд областей *линией переключения* (рис. 2.6), где работа нелинейной системы описывается обыкновенными линейными уравнениями, на основании которых строятся фазовые траектории.

Особые точки и линии переключения, разделяющие фазовое пространство на области с качественно различными фазовыми траекториями, называются *бифуркационными* (см. ниже). Непрерывность движения изображающей точки на фазовом пространстве (переход из одной области в другую) обеспечивается припасовыванием или «сшиванием» по линиям переключения в соответствии с видом нелинейности.

Типы фазовых траекторий и особых точек линейных систем

№ п/п	Тип корней	Внешний вид переходной характеристики	Внешний вид фазовой траектории	Название особой точки
1	Чисто мнимые сопряженные $p_{1,2} = \pm j\beta_i$			Центр
2	Комплексные с отрицательной действительной частью $p_{1,2} = -\alpha_i \pm j\beta_i$			Устойчивый фокус
3	Комплексные с положительной действительной частью $p_{1,2} = +\alpha_i \pm j\beta_i$			Неустойчивый фокус
4	Действительные отрицательные $p_{1,2} = -\alpha_i$			Устойчивый узел
5	Действительные положительные $p_{1,2} = +\alpha_i$			Неустойчивый узел
6	Действительные разных знаков $p_{1,2} = \pm\alpha_i$			Седло

Бифуркация – приобретение нового качества в движениях динамической системы при малом изменении её параметров. Иначе говоря, это изменение фазового портрета динамической системы при изменении входящего в уравнение параметра.

Проводить анализ влияния постоянных параметров модели системы на вид фазовой траектории можно по **бифуркационной диаграмме**. Рассмотрим её построение на примере дифференциального уравнения 2-го порядка (2.1), описывающего свободную составляющую системы.

Корни данного уравнения p_1 и p_2 определяются через дискриминант по выражению

$$p_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0} = -\frac{a_1}{2a_0} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_0^2} - \frac{a_2}{a_0}}. \quad (2.10)$$

Введем следующие обозначения:

$$\sigma = \frac{a_1}{a_0}; \quad \Delta = \frac{a_2}{a_0}. \quad (2.11)$$

Тогда выражение (2.10) будет иметь вид

$$p_{1,2} = \frac{-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2}. \quad (2.12)$$

Судя по выражению (2.12), тип корней характеристического уравнения системы будет зависеть от знака коэффициента σ и подкоренного выражения ($\sigma^2 - 4\Delta$). Рассмотрим плоскость с прямоугольными координатами $[\sigma ; \Delta]$ и отметим на ней области, соответствующие тому или иному состоянию системы, которое определяется типом корней характеристического уравнения (рис. 2.3).

Условием устойчивости состояния равновесия будет наличие отрицательной действительной части у корней p_1 и p_2 , т.е. $\alpha_i < 0$. Необходимое и достаточное условие этого – выполнение неравенств $\sigma > 0$ и $\Delta > 0$. На диаграмме этому условию соответствуют точки, расположенные в первой четверти плоскости параметров (области I и II).

Особая точка будет фокусом, если p_1 и p_2 комплексны. Этому условию соответствуют те точки плоскости, для которых $(\sigma^2 - 4\Delta) < 0$, т.е. точки между двумя ветвями параболы $\sigma^2 = 4\Delta$ (области II и III). Точки полуоси $\sigma = 0, \Delta > 0$ соответствуют состояниям равновесия типа *центр* на оси абсцисс. Если p_1 и p_2 – действительны, но разных

знаков при $\Delta < 0$ (область V), то особая точка будет *седлом* и т.д. В итоге мы получим диаграмму разбиения плоскости параметров σ , Δ на области, соответствующие различным типам состояния равновесия.

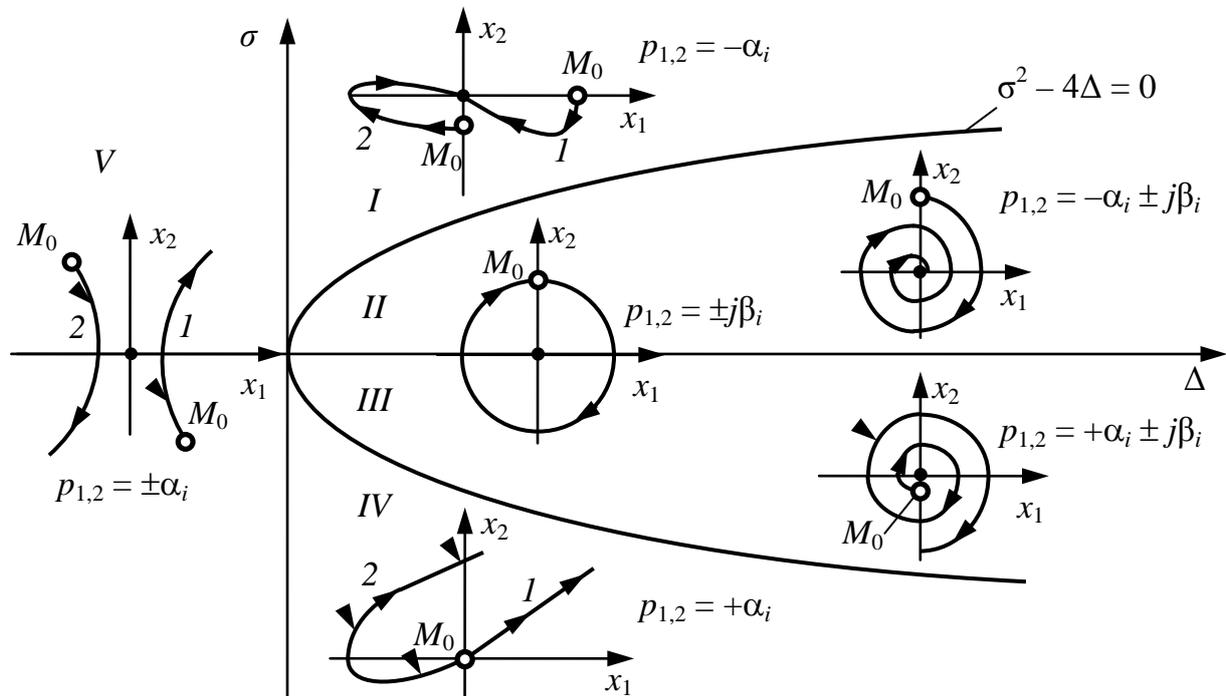


Рис. 2.3. Бифуркационная диаграмма

Если коэффициенты a_0 , a_1 , a_2 зависят от некоторого параметра системы, то при изменении этого параметра будут меняться и величины σ , Δ . При переходе через границы характер фазового портрета качественно меняется. На диаграмме видно, как могут проходить такие изменения. Если исключить особые случаи – начало координат, – то легко видеть, что *седло* может переходить в *узел*, устойчивый или неустойчивый при пересечении оси ординат. *Устойчивый узел* может перейти либо в *седло*, либо в *устойчивый фокус* и т.д. Отметим, что переходы *устойчивый узел – устойчивый фокус* и *неустойчивый узел – неустойчивый фокус* не являются бифуркационными, так как топология фазового пространства при этом не меняется.

При бифуркационных переходах меняется характер устойчивости особой точки. Например, *устойчивый фокус* через центр может переходить в *неустойчивый фокус*. Эта бифуркация называется бифуркацией Андронова-Хопфа, по именам исследовавших её ученых. При этой бифуркации в нелинейных системах происходит рождение предельного цикла и система становится автоколебательной.

2.6. Построение переходной характеристики по фазовой траектории системы

В любой точке фазового пространства координаты фазовой траектории однозначно связаны со временем, т.е. $x_1 = f(t)$ и $x_2 = f(t)$. Поскольку фазовая траектория системы является графиком $x_2 = f(x_1)$, то задачу построения переходной характеристики по фазовой траектории системы можно решить графически.

Рассмотрим начальный участок фазовой траектории (рис. 2.4). Допустим, что в окрестностях каждой изображающей точки $M_i(x_{1i}; x_{2i})$ фазовая траектория линейна и имеет постоянный наклон dx_2/dx_1 . Тогда время изменения выходной величины Δt в окрестностях точки M можно определить аналитически как отношения интервала приращения величины к скорости её изменения или в графической интерпретации как котангенс угла α (рис. 2.4):

$$2\Delta t_i = \frac{|x_{1i} \pm \Delta x_i|}{x_{2i}} = 2 \operatorname{ctg} \alpha_i. \quad (2.13)$$

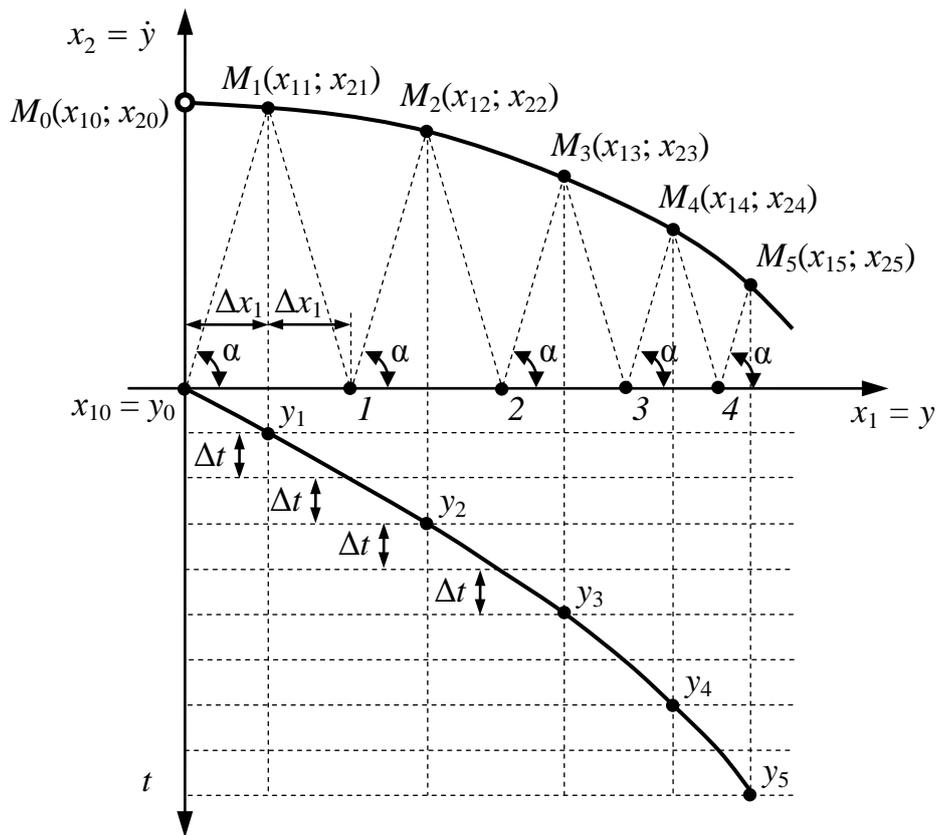


Рис. 2.4. Построение переходной характеристики по фазовой траектории системы

Для построения переходной характеристики строится специальная диаграмма на фазовой траектории. Суть методики построения состоит в графическом нахождении приращения выходной величины системы на фазовой траектории за одинаковые промежутки времени Δt . Перед построением необходимо задать желаемый шаг дискретизации времени Δt и вычислить соответствующий ему угол α на диаграмме. Построение начинается из точки $M_0(x_{10}; x_{20})$. Из точки x_{10} на оси абсцисс проводится луч под углом α до пересечения с фазовой траекторией, полученная точка будет $M_1(x_{11}; x_{21})$. Далее с неё опускается симметричный луч на ось абсцисс. Основание полученного равнобедренного треугольника $2\Delta x_1$ равно приращению выходной величины системы y за время $2\Delta t$, а координата x_{11} – приращению y за время Δt . Теперь можно построить две точки переходной характеристики y_0 и y_1 в момент времени 0 и Δt соответственно. Затем из получившейся точки I на оси абсцисс проводится луч под углом α до пересечения с фазовой траекторией в точке $M_2(x_{12}; x_{22})$, с неё опускается симметричный луч на ось абсцисс. Получаем следующее приращение выходной величины системы y за время Δt , строим точку y_2 и т.д.

2.7. Метод фазовой плоскости

Метод анализа и синтеза системы управления, основанный на построении фазового портрета, называют **методом фазовой плоскости**. Метод фазовой плоскости используется для исследования нелинейных систем, линейная часть которых описывается дифференциальным уравнением не выше второго порядка, а нелинейный элемент может быть любым. Метод анализа по фазовой плоскости достаточно прост и отличается большой наглядностью. Оценка устойчивости в методе фазовой плоскости опирается на одну из формулировок устойчивости А.М. Ляпунова.

Формулировка устойчивости системы по Ляпунову: невозмущенное движение называется устойчивым по Ляпунову, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое положительное число δ , что в любой момент времени $t \geq t_0$ расстояние от изображающей точки фазовой траектории до начала координат фазовой плоскости $x(t)$ меньше ε , при конечном начальном отклонении, т.е. при $|x_0(t_0)| < \delta$.

$$|x(t)| < \varepsilon \text{ при } t \geq t_0, \text{ если } |x_0(t_0)| < \delta. \quad (2.14)$$

Невозмущенное движение системы называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову*, если при конечном начальном отклонении $|x_0(t_0)| < \delta$ фазовая траектория стремится к началу координат при стремлении времени к бесконечности.

$$x(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty, \text{ если } |x_0(t_0)| < \delta. \quad (2.15)$$

Приведенным определениям устойчивости можно дать следующую геометрическую интерпретацию. Пусть на фазовой плоскости $[x_1; x_2]$ $M_0(x_{10}; x_{20})$ – отклонение системы от заданного установившегося значения при $t = 0$ (рис. 2.5).

Это отклонение находится в пределах прямоугольника со сторонами $2\delta_1$ и $2\delta_2$. На плоскости показаны области, в которых может находиться система, в виде трёх окружностей. Окружность радиуса $r \rightarrow 0$ соответствует области асимптотической устойчивости, где отклонение движения $x(t) \rightarrow 0$. Окружность радиуса ε соответствует области устойчивости с допустимым отклонением $|x(t)| < \varepsilon$. Окружность радиуса ρ соответствует недопустимому увеличению отклонения движения, при котором система становится неустойчивой. Три фазовых траектории демонстрируют три режима работы систем при определенном начальном отклонении $|x_0(t_0)|$. Первая траектория 1 соответствует асимптотически устойчивой системе, траектория 2 – устойчивой с допустимым отклонением и траектория 3 – неустойчивой системе.

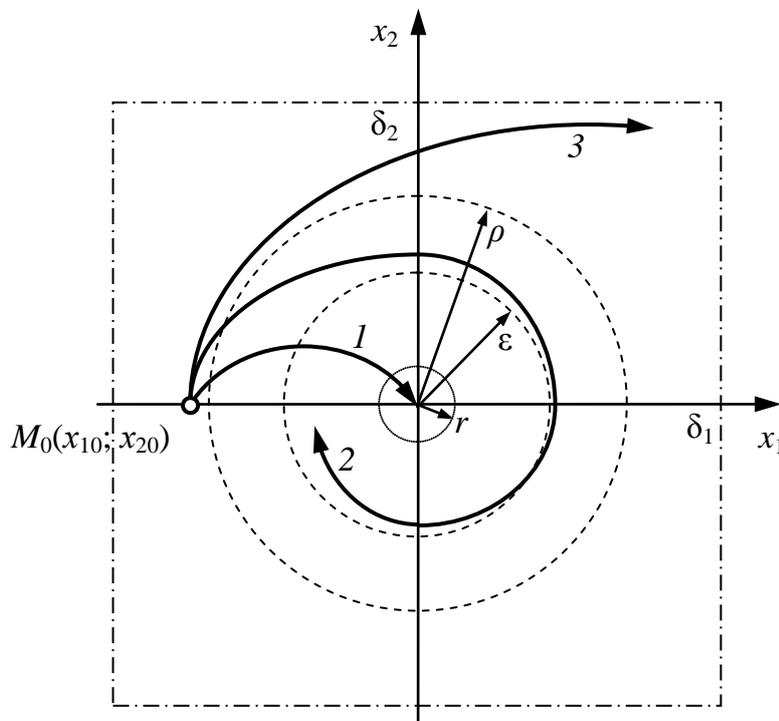


Рис. 2.5. Фазовые траектории устойчивых и неустойчивых систем

В качестве примера рассмотрим метод фазовой плоскости для нелинейной системы (см. рис. 2.6) с релейной характеристикой $F(x)$ общего вида «Трехпозиционное реле с гистерезисом» (см. табл. 1.1, п. 9).

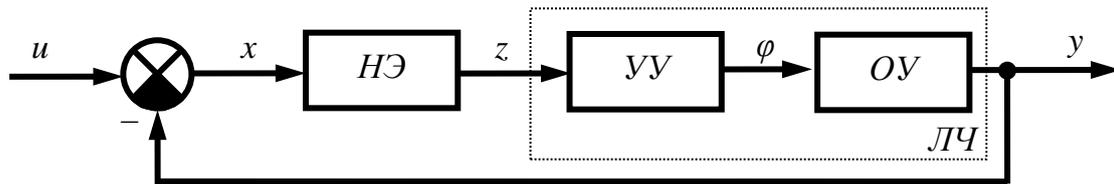


Рис. 2.6. Структурная схема нелинейной АСУ

Уравнение динамики объекта управления $ОУ$ совместно с устройством управления $УУ$ в операторной форме имеет вид

$$(T_1 p + 1)y = \frac{Kz}{p}, \quad (2.16)$$

а уравнение релейного регулятора – нелинейного элемента $НЭ$ при входном воздействии $u(t) = 0$ описывается нелинейной функцией

$$z = F(x) = -F(y), \quad (2.17)$$

где $x = -y$ и $F(-y) = -F(y)$, т.к. нелинейная релейная характеристика нечётно-симметричная (см. рис. 2.6).

Уравнение динамики релейного регулятора с характеристикой «Трехпозиционное реле с гистерезисом» приведено в табл. 1.1, п. 9.

Общее нелинейное дифференциальное уравнение динамики системы найдем, подставив (2.17) в (2.16). В результате получим

$$T_1 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = -K \cdot F(y). \quad (2.18)$$

Запишем уравнение (2.18) в виде системы дифференциальных уравнений 1-го порядка, введя новые переменные состояния $x_i(t)$:

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad \dot{x}_2 = \ddot{y}. \quad (2.19)$$

Тогда модель системы в форме Коши будет иметь вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -\frac{x_2}{T_1} - \frac{K}{T_1} \cdot F(x_1). \end{cases} \quad (2.20)$$

Отсюда получим дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = -\frac{1}{T_1} - \frac{K}{T_1} \cdot \frac{F(x_1)}{x_2}. \quad (2.21)$$

Проинтегрируем уравнение (2.21) и получим уравнение фазовой траектории системы

$$x_1 = KF(x_1)T_1 \ln[x_2 + KF(x_1)] - T_1 x_2 + C. \quad (2.22)$$

В связи с релейной функцией регулятора на фазовой плоскости $[x_1; x_2]$ можно выделить три области: (1) $F(x_1) = -B$; (2) $F(x_1) = 0$; (3) $F(x_1) = +B$. Эти три области разделены и показаны штриховыми линиями переключения на рис. 2.7.

В области (1) $F(x_1) = -B$ уравнение (2.21) принимает вид

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = -\frac{1}{T_1} + \frac{K}{T_1} \cdot \frac{B}{x_2}. \quad (2.23)$$

Проинтегрировав его, получим уравнение фазовых траекторий в области (1)

$$x_1 = -KBT_1 \ln[x_2 - KB] - T_1 x_2 + C_1, \quad (2.24)$$

где C_1 – коэффициент, зависящий от начальных условий x_{10} и x_{20} .

$$C_1 = KBT_1 \ln|x_{20} - KB| + T_1 x_{20} + x_{10}. \quad (2.25)$$

В области (2) $F(x_1) = 0$ уравнение (2.21) принимает вид

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = -\frac{1}{T_1}. \quad (2.26)$$

Проинтегрировав его, получим уравнение фазовых траекторий в области (2)

$$x_1 = -T_1 x_2 + C_2, \quad (2.27)$$

где C_2 – коэффициент, зависящий от начальных условий x_{10} и x_{20} .

$$C_2 = x_{10} + T_1 x_{20}. \quad (2.28)$$

В области (3) $F(x_1) = +B$ уравнение (2.21) принимает вид

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = -\frac{1}{T_1} - \frac{K}{T_1} \cdot \frac{B}{x_2}. \quad (2.29)$$

Проинтегрировав его, получим уравнение фазовых траекторий в области (3)

$$x_1 = KBT_1 \ln[x_2 + KB] - T_1 x_2 + C_3, \quad (2.30)$$

где C_3 – коэффициент, зависящий от начальных условий x_{10} и x_{20} .

$$C_3 = -KBT_1 \ln|x_{20} + KB| + T_1 x_{20} + x_{10}. \quad (2.31)$$

Фазовые траектории в области (1) имеют асимптоту $x_2 = KB$, к которой они стремятся при увеличении x_1 . В области (3) фазовые траектории имеют асимптоту $x_2 = -KB$, к которой они стремятся при уменьшении x_1 . Величина KB определяет максимальную скорость изменения выходной величины x_1 при свободном движении системы.

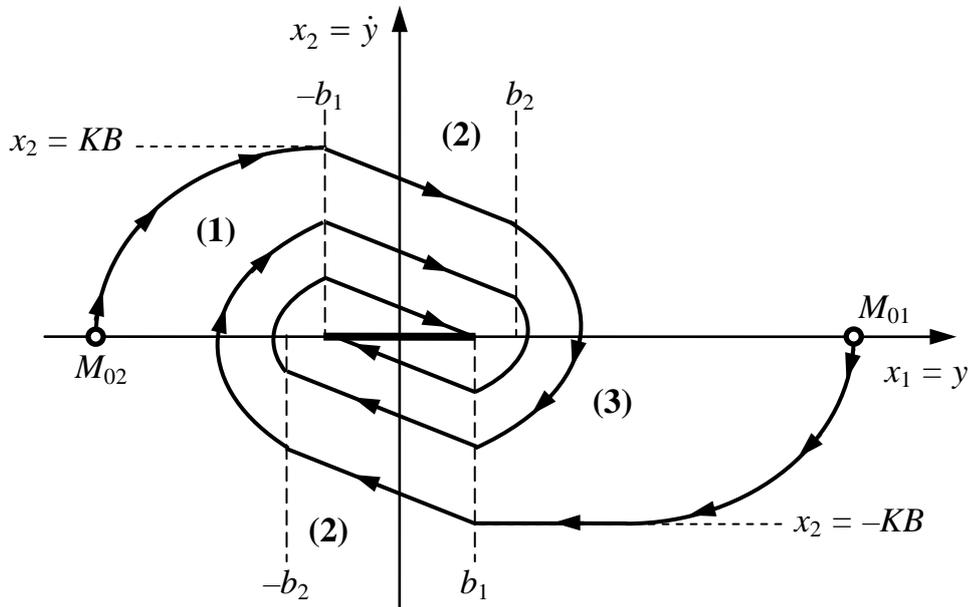


Рис. 2.7. Фазовый портрет нелинейной АСУ

В целом фазовые траектории принимают спиралевидную форму. Это соответствует затухающим колебательным процессам. Однако колебательный процесс затухает не до нуля, а до некоторого произвольного значения в интервале $-b_1 \leq x_1 \leq b_1$, $x_2 = 0$, т.е. внутри зоны нечувствительности реле. Таким образом, вместо особой точки здесь получается особый **отрезок равновесных состояний (отрезок покоя)**, показанный утолщенной линией на рис. 2.7.

В случае релейной характеристики «Идеальное трехпозиционное реле» (см. табл. 1.1, п. 7) картина фазовых траекторий будет аналогична изображенной на рис. 2.7, но теперь $b_1 = b_2 = b$, т.е. линии переключения будут совмещены по оси x_1 .

В случае релейной характеристики «Двухпозиционное реле с гистерезисом» (см. табл. 1.1, п. 8) будет отсутствовать область (2). Таким образом, остается по одной линии переключения в верхней и нижней полуплоскостях фазовой плоскости (рис. 2.8).

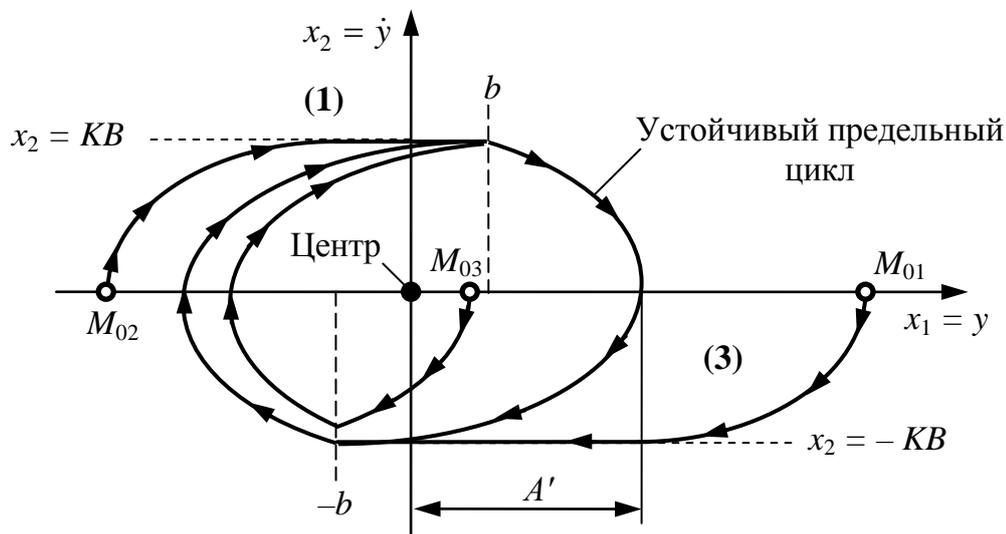


Рис. 2.8. Фазовый портрет нелинейной АСУ с предельным циклом

Слева от них строим фазовые траектории по уравнению (2.24), а справа – по уравнению (2.30). Из фазового портрета видно, что снаружи фазовые траектории образуют сходящиеся спирали, а изнутри – расходящиеся, и где-то среди них должен быть предельный цикл, к которому они все сходятся. Это устойчивый предельный цикл, отвечающий автоколебаниям. Амплитуда автоколебаний A' определяется точкой пересечения предельного цикла с осью x_1 . Физически автоколебания обусловлены нелинейной характеристикой «Двухпозиционное реле», не имеющей равновесного состояния. Автоколебания происходят около петли реле с амплитудой, превышающей половину ширины петли b . В автоколебательном режиме работают, например, импульсные регуляторы напряжения сети постоянного тока.

2.8. Метод точечных преобразований

Метод точечных преобразований, разработанный А.А. Андроновым, позволяет определить существование автоколебаний в нелинейной системе, устойчивость или неустойчивость предельного цикла без построения фазовых траекторий. В основе метода лежит не по-

строение фазовой траектории, а рассмотрение изменения фазовой траектории того участка, описание которого можно сделать по приближенному линейному дифференциальному уравнению без особых затруднений. По данному отдельному участку можно судить о возможности или невозможности возникновения автоколебаний.

Пусть начальное положение изображающей точки системы M_0 на положительной полуоси $+x_1$ соответствует координате x_{10} (рис. 2.9, а). Изображающая точка движется по соответствующим траекториям и снова приходит на ось $+x_1$ в точку M_1 , где $x_{11} < x_{10}$. Если при любых значениях x_{10} оказывается, что x_{11} всегда меньше x_{10} , то система имеет затухающий и поэтому устойчивый переходный процесс. Но если $x_{11} > x_{10}$, то это свидетельствует о расходящемся и поэтому неустойчивом процессе. Когда получаем равенство $x_{11} = x_{10}$, то система снова вернулась в исходное состояние. Это значит, что система имеет предельный цикл (автоколебания). Тогда значение x_{11} может быть выражено как функция x_{10} через уравнение фазовых траекторий. Функция $x_{11} = f(x_{10})$ наглядно иллюстрируется *диаграммой точечных преобразований* (рис. 2.9, б).

В результате обхода изображающей точкой начала координат точка M_0 преобразуется в точку M_1 . **Функция преобразования** $x_{11} = f(x_{10})$ определяет точечное преобразование всех точек положительной полуоси $+x_1$ в соответствующие другие точки этой же полуоси, т. е. описывает точечное преобразование положительной полуоси $+x_1$ в саму себя, происходящее при обходе изображающей точкой начала координат.

Проведем на рис. 2.9, б биссектрису координатного угла, которая соответствует уравнению $x_{11} = x_{10}$. Тогда значения x_{10} , соответствующие затухающим процессам, определяются участками зависимости $f(x_{10})$, лежащими ниже биссектрисы, а расходящимся процессам будут соответствовать участки зависимости $f(x_{10})$ выше биссектрисы. Точка пересечения зависимости $f(x_{10})$ с биссектрисой определяет амплитуду A' возможных автоколебаний в системе. При этом, если кривая $f(x_{10})$ пересекает биссектрису сверху вниз (точка 2), то колебания устойчивы, а если снизу вверх (точка 1) – неустойчивы. Отсюда условия устойчивости предельного цикла в аналитической форме:

$$\frac{dx_{11}}{dx_{10}} < 1 \text{ при } x_{11} = x_{10}. \quad (2.32)$$

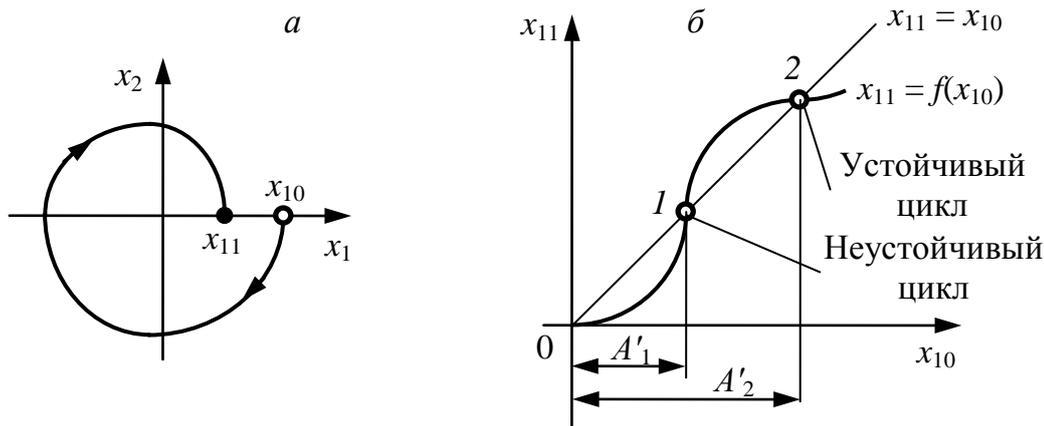


Рис. 2.9. Метод точечных преобразований

Основным в методе является нахождение функции преобразования $x_{11} = f(x_{10})$ на основе решения уравнений динамики системы. Найти эту функцию в явной форме не всегда легко. В большинстве случаев бывает легче представить **функцию преобразования в параметрической форме**, представив координаты движения изображающей точки x_{10} и x_{11} через параметр времени t .

$$\begin{cases} x_{10} = f(t); \\ x_{11} = f(t). \end{cases} \quad (2.33)$$

Ход точечного преобразования на такой параметрической диаграмме прослеживается следующим образом. Строятся графики функций $x_{10} = f(t)$ и $x_{11} = f(t)$ (рис. 2.10). Берется некоторая исходная точка на кривой $x_{10} = f(t)$ при $t = t_0$. Перемещаемся по вертикали до кривой $x_{11} = f(t)$, находя тем самым последующую точку при $t = t_0$. Затем найденную последующую точку принимаем за новую исходную, для чего по горизонтали переносим ее на кривую $x_{10} = f(t)$ уже при новом значении $t = t_1$. После этого переходим снова на кривую $x_{11} = f(t)$ и т.д.

Точка пересечения их дает координату $x_{11} = x_{10}$ замкнутой фазовой траектории (предельного цикла), причем абсцисса этой точки определяет период T соответствующих колебаний системы. Условие устойчивости предельного цикла сохраняется в виде (2.32), но с дифференцированием x_{10} и x_{11} по времени t . Изображенный на рис. 2.10 случай соответствует устойчивому предельному циклу.

Точечное преобразование можно осуществлять необязательно для действительной полуоси $+x_1$. Иногда проще строить диаграмму

точечного преобразования для полуоси $+x_2$. В тех случаях, когда фазовый портрет симметричен относительно одной из координатных осей, достаточно находить точечное преобразование для половины оборота изображающей точки вокруг начала координат, т. е. точечное преобразование положительной полуоси в отрицательную. Если на фазовом портрете есть линии переключения, то обычно вместо координатных полуосей удобнее находить точечное преобразование для этих линий.

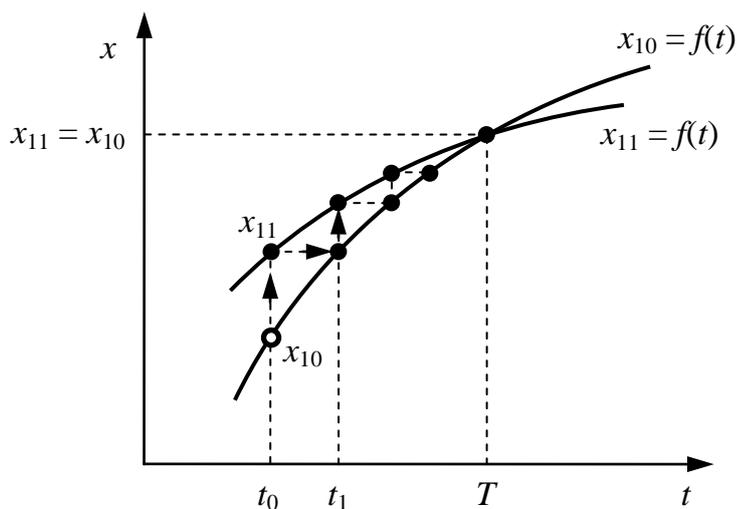


Рис. 2.10. Диаграмма точечных преобразований в параметрической форме

В качестве примера метода точечных преобразований рассмотрим ту же систему, что и при разборе метода фазовой плоскости. Система описывается выражениями (2.16) – (2.31). Так же, как и в предыдущем примере, релейный регулятор описывается характеристикой «Трехпозиционное реле с гистерезисом» (см. табл. 1.1, п. 9). Фазовая траектория этой системы показана на рис. 2.7.

Чтобы исследовать динамику системы по этому методу, необходимо выяснить, как в зависимости от начальных условий перемещается точка M_0 по оси абсцисс. Для этого вся фазовая траектория системы разделяется на отдельные участки:

I участок, соответствующий области (1). От значения $x_1 < -b_2$, когда реле включено в положение $-B$, до отключения реле при $x_1 = -b_1$ (см. рис. 2.7);

II участок, соответствующий области (2). Реле отключено; движение системы за счёт инерционности системы при $x_2 < 0$;

III участок, соответствующий области (3). От значения $x_1 > b_2$, когда реле включено в положение $+B$, до отключения реле при $x_1 = b_1$ (см. рис. 2.7);

IV участок, соответствующий области (2). Реле отключено; движение системы за счёт инерционности системы при $x_2 > 0$.

Здесь на фазовой плоскости (рис. 2.11) части фазовой траектории M_1M_2 и M_3M_4 будут прямолинейными и описываться уравнениями (2.27), (2.28), на участке фазовой траектории M_0M_1 и M_4M_5 области (3) имеем уравнения (2.30), (2.31), на участке фазовой траектории M_2M_3 области (1) имеем уравнения (2.24), (2.25).

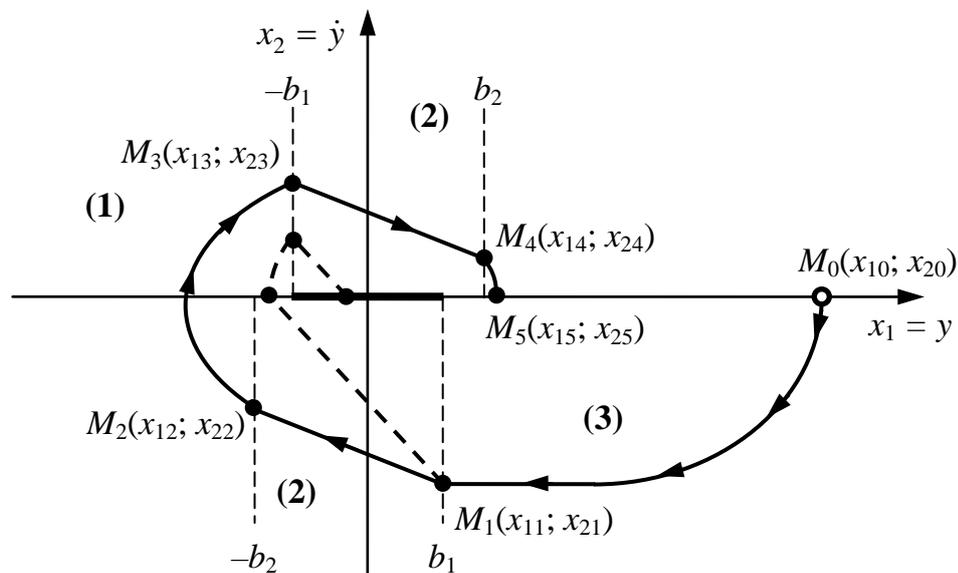


Рис. 2.11. Фазовая траектория нелинейной АСУ

На участке M_0M_1 , где $F(x_1) = +B$ области (3), из уравнений (2.30), (2.31) получаем уравнение с начальными условиями $(x_{10}; x_{20})$:

$$x_1 = KBT_1 \ln \left[\frac{x_2 + KB}{x_{20} + KB} \right] - T_1(x_2 - x_{20}) + x_{10}. \quad (2.34)$$

В точке M_1 происходит переключение реле в область (2), соответственно уравнение траектории участка M_1M_2 имеет вид

$$x_1 = -T_1(x_2 - x_{21}) + x_{11}, \quad (2.35)$$

где начальные условия x_{11} и x_{21} определяются положением точки M_1 .

$$x_{11} = b_1, \quad (2.36)$$

а x_{21} определяется по траектории (2.34) совместно с условием (2.36) и начальным условием $x_{20} = 0$:

$$b_1 = KBT_1 \ln \left[\frac{x_{21} + KB}{KB} \right] - T_1 x_{21} + x_{10}. \quad (2.37)$$

Далее на участке M_2M_3 , где $F(x_1) = -B$ области (1), из уравнений (2.24), (2.25) получаем уравнение

$$x_1 = -KBT_1 \ln \left[\frac{x_2 - KB}{x_{22} - KB} \right] - T_1 (x_2 - x_{22}) + x_{12}. \quad (2.38)$$

где начальные условия x_{12} и x_{22} определяются положением точки M_2 .

$$x_{12} = -b_2, \quad (2.39)$$

а x_{22} определяется по траектории (2.35) совместно с условием (2.36) и выражением (2.39):

$$-b_2 = -T_1 (x_{22} - x_{21}) + b_1. \quad (2.40)$$

Если при $x_{12} = -b_2$ координата x_{22} получается ≥ 0 , то фазовая траектория участка M_1M_2 пришла на ось абсцисс фазовой плоскости (штриховая линия на рис. 2.11), и необходимо вычислить координату x_{12} точки M_2 , лежащей на оси x_1 по траектории (2.35) при $x_{22} = 0$. Данные координаты будут исходными для участка M_2M_3 области (1). В случае попадания траектории на отрезок равновесных состояний, т.е. при $-b_1 \leq x_{1i} \leq b_1$ и $x_{2i} = 0$ движение системы ограничивается зоной нечувствительности реле, соответственно можно говорить о завершении переходного процесса. Эти же заключения касаются и конечных координат участка M_3M_4 .

В точке M_3 снова происходит переключение реле в область (2) и уравнение траектории участка M_3M_4 имеет вид

$$x_1 = -T_1 (x_2 - x_{23}) + x_{13}, \quad (2.41)$$

где начальные условия x_{13} и x_{23} определяются положением точки M_3 .

$$x_{13} = -b_1, \quad (2.42)$$

а x_{23} определяется по траектории (2.38) совместно с условием (2.42) и выражением (2.39):

$$-b_1 = -KBT_1 \ln \left[\frac{x_{23} - KB}{x_{22} - KB} \right] - T_1 (x_{23} - x_{22}) - b_2. \quad (2.43)$$

Последний участок M_4M_5 , опять попадающий в область (3), имеет уравнение

$$x_1 = KBT_1 \ln \left[\frac{x_2 + KB}{x_{24} + KB} \right] - T_1(x_2 - x_{24}) + x_{14}, \quad (2.44)$$

где начальные условия x_{14} и x_{24} определяются положением точки M_4 .

$$x_{14} = b_2, \quad (2.45)$$

а x_{24} определяется по траектории (2.41) совместно с условием (2.42) и выражением (2.45):

$$b_2 = -T_1(x_{24} - x_{23}) - b_1. \quad (2.46)$$

Искомая точка последовательности M_5 определяется по траектории (2.44) при пересечении оси абсцисс, т.е. при $x_2 = x_{25} = 0$.

$$x_{15} = KBT_1 \ln \left[\frac{KB}{x_{24} + KB} \right] - T_1 x_{24} + b_2. \quad (2.47)$$

Таким образом, система уравнений (2.37), (2.40), (2.43), (2.46) и (2.47) дает искомую функцию преобразования $x_{15} = f(x_{10})$.

2.9. Гармоническая линеаризация нелинейностей

Гармоническая линеаризация нелинейностей основана на методе гармонического баланса Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова. Гармоническая линеаризация является приближенным методом исследования нелинейных систем и применяется только в случае, когда линейная часть системы является фильтром низких частот. Управляемые системы, как правило, обладают свойством фильтра низких частот, т.е. при возникновении периодических несинусоидальных режимов они не пропускают или пропускают с большим ослаблением вторые и более высокие гармоники. При этом линейная часть может быть описана дифференциальным уравнением любого порядка, а нелинейный элемент может быть как однозначным, так и многозначным.

Суть гармонической линеаризации состоит в описании нелинейного звена линейным уравнением, которое получается при пренебрежении (отбрасывании) высшими гармониками в разложении нелинейной функции в ряд Фурье. Другими словами нелинейный элемент заменяется линейным звеном, параметры которого определяются при гармоническом входном воздействии из условия равенства амплитуд первых гармоник на выходе нелинейного элемента и эквивалентного ему линейного звена.

Согласно данному способу выбирается некоторая расчетная структурная схема, в которой нелинейный элемент $HЭ$ выделен в качестве входного звена, а вся остальная линейная часть $ЛЧ$ системы объединена в одну общую передаточную функцию, которая располагается после нелинейного элемента (рис. 2.12).

Прохождение синусоидального сигнала через нелинейную систему при входном воздействии $u(t) = 0$ показано на расчетно-структурной схеме (см. рис. 2.12).

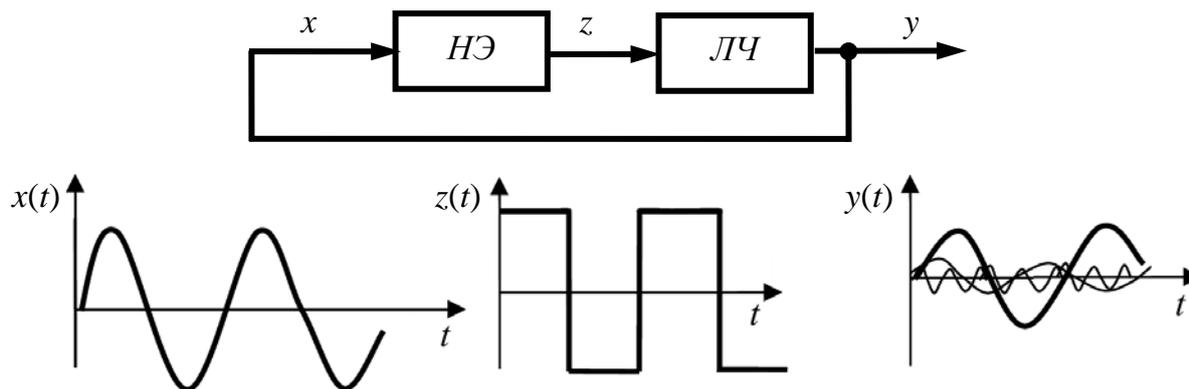


Рис. 2.12. Прохождение синусоидального сигнала через нелинейную систему

Пусть нелинейный элемент имеет нелинейную функцию $z = F(x)$. Подадим на вход этого элемента гармонический сигнал $x = A \sin \omega t$. На выходе получим $z = F(A \sin \omega t)$. Этот периодический выходной сигнал нелинейного звена можно разложить в ряд Фурье:

$$z = F(A \sin \omega t) = \frac{A_0}{2} + \sum (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t), \quad (2.48)$$

где первая и последующие гармоники имеют выражение

$$A_0 = \frac{\Omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F(A \sin \omega t) dt; \quad (2.49)$$

$$A_n = \frac{\Omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F(A \sin \omega t) \cos n\omega t dt; \quad (2.50)$$

$$B_n = \frac{\Omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F(A \sin \omega t) \sin n\omega t dt. \quad (2.51)$$

Следовательно, на линейную часть системы действует сигнал, содержащий весь спектр частот (после разложения их в ряд Фурье), которые возникли в нелинейном элементе. В силу принципа суперпо-

зиции в линейной части системы каждая гармоника действует независимо от остальных. Амплитуда каждой гармоники на выходе линейной части системы $y(t)$ будет зависеть от динамических свойств этой линейной части. Предположим, что наша система обладает тем свойством, что величина амплитудной характеристики на частотах высших гармоник значительно меньше, чем первой:

$$|W_{лч}(j\omega n)| \ll |W_{лч}(j\omega)|. \quad (2.52)$$

Это свойство называется **свойством фильтра низких частот** линейной части системы. При наличии свойства фильтра линейная часть системы будет хорошо пропускать первую гармонику нелинейных колебаний $y(t)$ и ослаблять все высшие гармоники. Поэтому на выходе системы рассматривается только первая гармоника. На рис. 2.12 эта первая гармоника на графике $y(t)$ показана жирной линией. Данный сигнал по обратной связи приходит на вход нелинейного элемента, поэтому переменная x на входе нелинейного звена окажется близкой к синусоиде $x = A \sin \omega t$.

Согласно формуле (2.48) запишем уравнение первой гармоники

$$z = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t. \quad (2.53)$$

При симметричных гармонических колебаниях относительно оси абсцисс составляющая уравнения (2.53) $A_0 = 0$. Тогда уравнение (2.50) можно записать в виде

$$z = q(A)A \sin \omega t + q'(A)A \cos \omega t, \quad (2.54)$$

где коэффициенты

$$q(A) = \frac{B_1}{A}; \quad (2.55)$$

$$q'(A) = \frac{A_1}{A}. \quad (2.56)$$

Подставив $x = A \sin \omega t$ и $x' = A \omega \cos \omega t$ в уравнение (2.54), получим выражение в операторной форме

$$z = q(A)x + q'(A) \frac{px}{\omega}. \quad (2.57)$$

Данное уравнение называют **уравнением гармонической линеаризации**, а коэффициенты $q(A)$ и $q'(A)$ – **коэффициентами гармонической линеаризации**, определяемыми выражениями:

$$q(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi; \quad (2.58)$$

$$q'(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi; \quad (2.59)$$

$$\varphi = \omega t. \quad (2.60)$$

Правая часть выражения (2.57) линейна при постоянной амплитуде сигнала $A = \text{const}$, т.е. справедлива только для конкретного периодического решения. Но в целом она сохраняет нелинейные свойства, так как коэффициенты данного периодического решения $q(A)$ и $q'(A)$ от величины амплитуды колебаний $x(t)$. Эта особенность гармонической линейзации позволит исследовать основные свойства и особенности процессов в нелинейных автоматических системах.

Гармонической передаточной функцией (ГПФ) нелинейного элемента называется отношение амплитуды первой гармоники выходного сигнала к амплитуде входного сигнала. ГПФ нелинейного звена имеет общий вид

$$W_{HЭ}(p) = \frac{z(p)}{x(p)} = q(A) + q'(A) \frac{p}{\omega}. \quad (2.61)$$

Частотная ГПФ (**комплексный коэффициент передачи**) линейризованного нелинейного звена при подстановке $p = j\omega$ имеет вид

$$W_{HЭ}(jA) = q(A) + jq'(A). \quad (2.62)$$

Следовательно, амплитудно-фазовая частотная характеристика нелинейности $F(x)$ зависит только от амплитуды A и не зависит от частоты сигнала ω , в отличие от характеристик линейных звеньев.

Гармоническую линейризацию еще называют амплитудной интерполяцией, так как она характеризует зависимость амплитуды выходного сигнала от амплитуды входного сигнала и не зависит от изменения частоты входного сигнала. Для большинства инженерных расчетов способ дает достаточно адекватный результат.

Следует иметь в виду, что гармоническая линейризация является приближенным описанием нелинейной характеристики, полученной по изменению первой гармоники ряда Фурье. При этом количественно не оцениваются погрешности в результате отбрасывания высших гармоник. Но можно утверждать, чем выше порядок линейной части системы, тем более строго выполняется гипотеза фильтра низких частот и тем большую адекватность имеют методы исследования, использующие гармоническую линейризацию.

Вычисление коэффициентов гармонической линеаризации. Если характеристика нелинейного элемента является однозначной и симметричной относительно начала координат, то функция $F(A\sin\omega t)$ будет нечётной. В этом случае, согласно формуле (2.59), мнимый коэффициент гармонической линеаризации $q'(A) = 0$, т.е. при отсутствии гистерезиса в характеристике нелинейного элемента (однозначная характеристика), она заменяется коэффициентом передачи, зависящим от амплитуды входного сигнала $q(A)$.

Гистерезисная же петля вводит, согласно (2.54), производную входной величины нелинейного элемента. Так как $q'(A) < 0$, то эквивалентное линейное звено, полученное после линеаризации гистерезисной релейной характеристики, дает отставание сигнала по фазе. Однако можно спроектировать специальное нелинейное звено с опережающей петлей, что будет эквивалентно линейному опережению фазы при введении производной, но с тем отличием, что величина опережения фазы будет зависеть от амплитуды колебаний, чего нет в линейных системах.

В случаях, когда нелинейное звено описывается сложным уравнением, включающим сумму различных линейных и нелинейных выражений, каждый из нелинейных членов подвергается гармонической линеаризации по отдельности. Произведение же нелинейностей рассматривается обязательно в целом, как одна сложная нелинейность. При этом могут встретиться иного характера нелинейные функции.

В качестве примера рассмотрим линеаризацию нелинейного элемента с характеристикой «Идеальное трехпозиционное реле» (см. табл. 1.1, п. 7). Пусть на вход нелинейного звена (рис. 2.13, а) подан синусоидальный сигнал (рис. 2.13, б). На выходе релейного элемента возникает последовательность прямоугольных импульсов (рис. 2.13, в). Высота импульсов соответствует выходной величине реле. Частота следования импульсов полностью совпадает с частотой входного синусоидального сигнала. Ширина импульса зависит от амплитуды входного сигнала A . С увеличением амплитуды A ширина импульсов увеличивается.

Учитывая, что петли гистерезиса в характеристике нет, то коэффициент гармонической линеаризации $q'(A) = 0$. Тогда уравнение гармонической линеаризации имеет вид

$$z = q(A)x = x \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi. \quad (2.63)$$

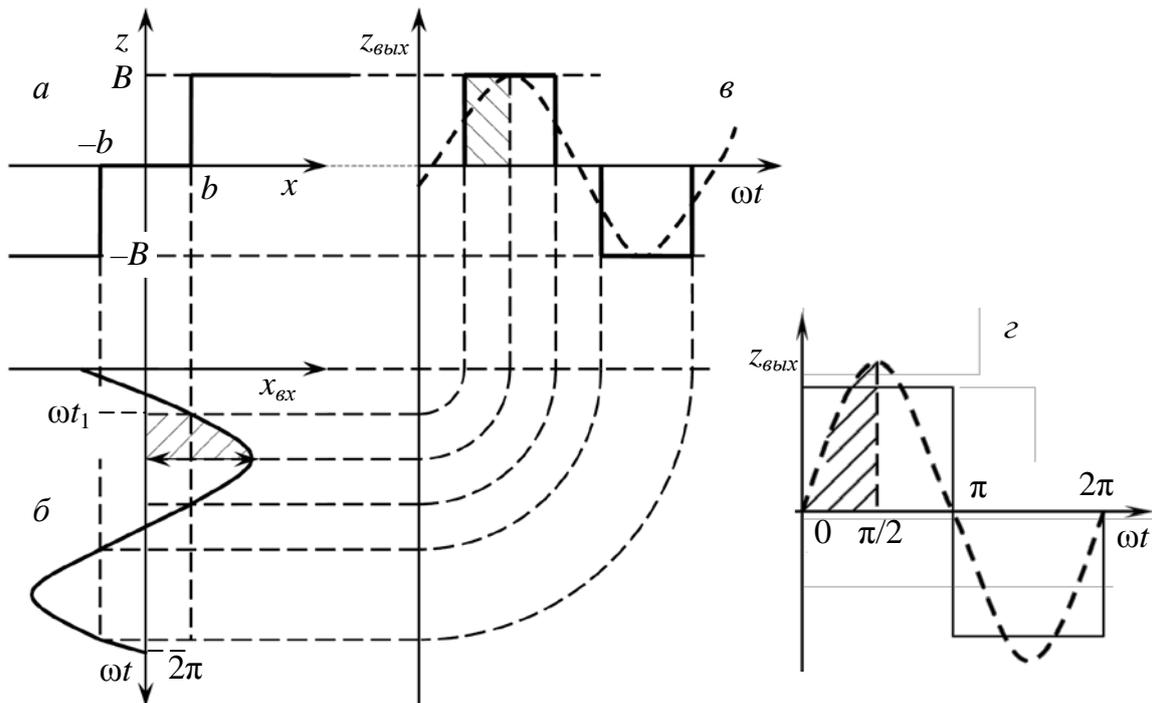


Рис. 2.13. Определение коэффициентов гармонической линеаризации

На рис. 2.13, б видно, что реле срабатывает при входном сигнале больше зоны нечувствительности $A \sin \omega t_1 \geq b$. На участке от 0 до ωt_1 выходного сигнала нет. Следовательно, интегрирование надо осуществлять с момента ωt_1 . Поскольку выходной сигнал с реле симметричен, то можно изменить пределы интегрирования для упрощения взятия интеграла.

Интегрирование будет выполняться в пределах от ωt_1 до $\pi/2$. Эта часть входного и выходного сигналов на рис. 2.13, б и в заштрихована. Затем результат надо умножить на четыре, чтобы получить значение импульсов от всей синусоиды от $\omega t = 0$ до $\omega t = 2\pi$. Определяем коэффициент $q(A)$:

$$q(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{4}{\pi A} \int_{\omega t_1}^{\pi/2} B \sin \omega t d\omega t; \quad (2.64)$$

$$q(A) = -\frac{4B}{\pi A} [-\cos \omega t]_{\omega t_1}^{\pi/2} = \frac{4B}{\pi A} \cos \omega t_1. \quad (2.65)$$

В полученном уравнении выразим $\cos \omega t_1$ через $\sin \omega t_1$:

$$q(A) = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \sin^2 \omega t_1}. \quad (2.66)$$

Значение $\sin \omega t_1$ связано с амплитудой входного сигнала A и зоной нечувствительности реле b следующим соотношением:

$$\sin \omega t_1 = \frac{b}{A}. \quad (2.67)$$

Таким образом, с учетом (2.67) коэффициент гармонической линеаризации

$$q(A) = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} = \frac{4B}{\pi A^2} \sqrt{A^2 - b^2}. \quad (2.68)$$

ГПФ нелинейного звена «Идеальное трехпозиционное реле» представляет собой идеальное усилительное звено, коэффициент которого зависит от амплитуды колебаний:

$$W_{HЭ}(p) = \frac{z(p)}{x(p)} = \frac{4B}{\pi A^2} \sqrt{A^2 - b^2}. \quad (2.69)$$

Рассмотрим получение гармонической передаточной функции нелинейного элемента с характеристикой «Идеальное двухпозиционное реле» (см. табл. 1.1, п. б). Выходной сигнал будет иметь вид, показанный на рис. 2.13, г. После аппроксимации выходного сигнала первым членом ряда Фурье в виде амплитуды выходного сигнала получаем пределы измерения четверти выходной синусоиды от $\omega t = 0$ до $\omega t = \pi/2$. Эта часть синусоиды заштрихована. Тогда коэффициент гармонической линеаризации $q(A)$ определяется как

$$q(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{4}{\pi A} \int_0^{\pi/2} B \sin \omega t d\omega t; \quad (2.70)$$

$$q(A) = -\frac{4B}{\pi A} [-\cos \omega t]_0^{\pi/2} = \frac{4B}{\pi A}. \quad (2.71)$$

ГПФ «Идеального двухпозиционного реле» имеет вид

$$W_{HЭ}(p) = \frac{z(p)}{x(p)} = \frac{4B}{\pi A}. \quad (2.72)$$

В качестве примера рассмотрим линеаризацию нелинейного элемента с релейной характеристикой «Двухпозиционное реле с гистерезисом» (см. табл. 1.1, п. 8) (рис. 2.14). При гистерезисной характеристике релейного элемента ГПФ зависит от изменения выходного сигнала по возрастающей и по спадающей ветви характеристики.

Переключение реле происходит при равенстве входной величины реле порогу его срабатывания $x = b$. Поэтому в момент переключения величина $\sin\varphi_1$ определяется выражением $A\sin\varphi_1 = b$. Очевидно, что для срабатывания реле необходимо, чтобы $A\sin\varphi_1 \geq b$.

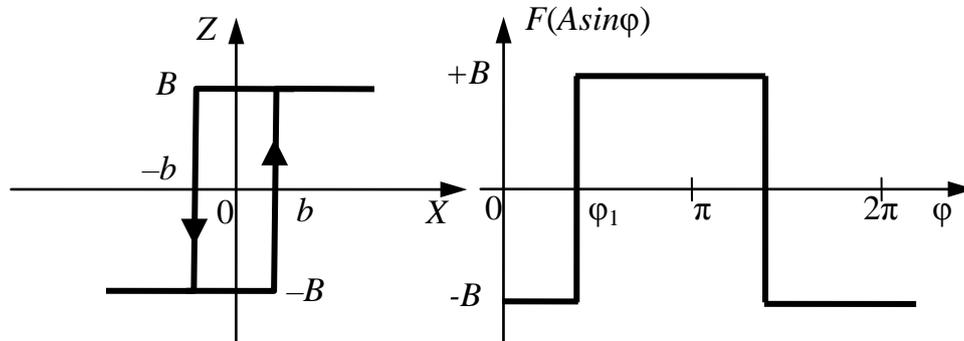


Рис. 2.14. Определение коэффициента гармонической линейзации

Коэффициент $q(A)$ определяется по формуле (2.58), как и (2.64), только интегрирование будет выполняться в пределах от 0 до π с удвоением результата:

$$q(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{2B}{\pi A} \left[\int_0^{\omega t_1} -\sin \omega t d\omega t + \int_{\omega t_1}^{\pi} \sin \omega t d\omega t \right]; \quad (2.73)$$

$$q(A) = \frac{2B}{\pi A} \left[\cos \omega t \Big|_0^{\omega t_1} - \cos \omega t \Big|_{\omega t_1}^{\pi} \right] = \frac{4B}{\pi A} \cos \omega t_1. \quad (2.74)$$

В полученном уравнении выразим $\cos \omega t_1$ через $\sin \omega t_1$ и с учетом $\sin \omega t_1 = b/A$, как и в формулах (2.66) – (2.68), запишем

$$q(A) = \frac{4B}{\pi A^2} \sqrt{A^2 - b^2}. \quad (2.75)$$

Коэффициент $q'(A)$ определяется по формуле (2.59):

$$q'(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi = \frac{2B}{\pi A} \left[\int_0^{\omega t_1} -\cos \omega t d\omega t + \int_{\omega t_1}^{\pi} \cos \omega t d\omega t \right]; \quad (2.76)$$

$$q'(A) = \frac{2B}{\pi A} \left[-\sin \omega t \Big|_0^{\omega t_1} + \sin \omega t \Big|_{\omega t_1}^{\pi} \right] = -\frac{4B}{\pi A} \sin \omega t_1. \quad (2.77)$$

Полученное уравнение с учетом $\sin \omega t_1 = b/A$ запишем как

$$q'(A) = -\frac{4Bb}{\pi A^2}. \quad (2.78)$$

Частотная передаточная функция «Двухпозиционного реле с гистерезисом» имеет вид

$$W_{HЭ}(jA) = \frac{4B}{\pi A^2} \sqrt{A^2 - b^2} - j \frac{4Bb}{\pi A^2}. \quad (2.79)$$

Модуль ГПФ «Двухпозиционное реле с гистерезисом» совпадает с соответствующим выражением для идеального реле:

$$|W_{HЭ}(jA)| = \sqrt{[q(A)]^2 + [q'(A)]^2} = \frac{4B}{\pi A}. \quad (2.80)$$

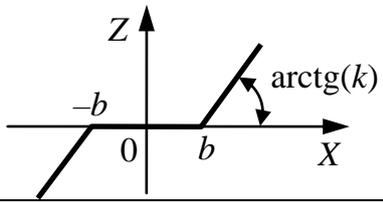
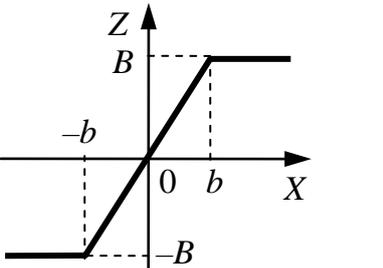
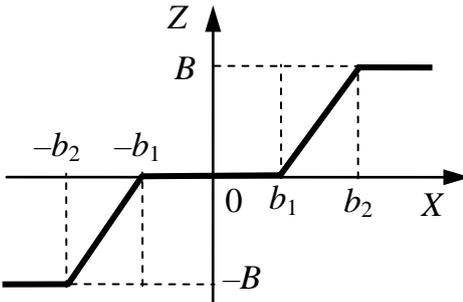
Фазовый сдвиг для петлевой релейной характеристики определяется как

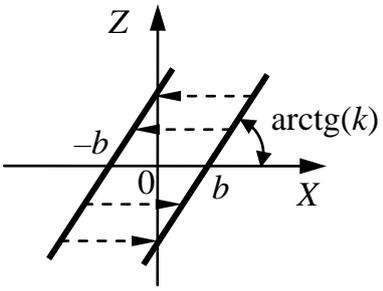
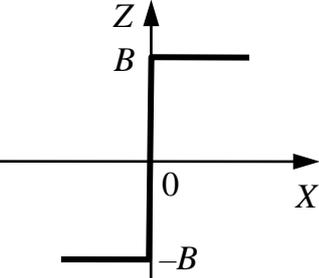
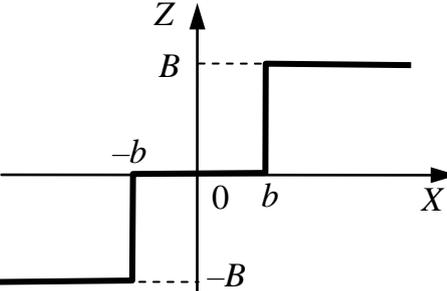
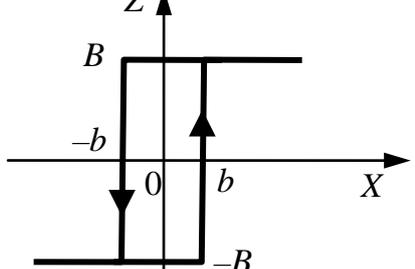
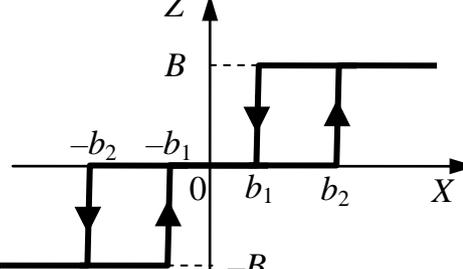
$$\varphi_{HЭ}(A) = \arctg \frac{q'(A)}{q(A)} = -\arctg \frac{b}{\sqrt{A^2 - b^2}}. \quad (2.81)$$

В табл. 2.2 представлены коэффициенты гармонической линеаризации для типовых нелинейностей.

Таблица 2.2

Коэффициенты гармонической линеаризации типовых нелинейностей

№ п/п	Внешний вид характеристики	Название и коэффициенты звена
1		<p>Зона нечувствительности</p> $q(A) = \frac{2k}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{b}{A} - \frac{b}{A^2} \sqrt{A^2 - b^2} \right];$ $q'(A) = 0 \text{ при } A \geq b$
2		<p>Насыщение (ограничение)</p> $q(A) = \frac{2B}{\pi b} \left[\arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A^2} \sqrt{A^2 - b^2} \right];$ $q'(A) = 0 \text{ при } A \geq b$
3		<p>Зона нечувствительности с насыщением</p> $q(A) = \frac{2B}{\pi(b_2 - b_1)} \left[\arcsin \frac{b_2}{A} - \arcsin \frac{b_1}{A} + \frac{b_2}{A^2} \sqrt{A^2 - b_2^2} - \frac{b_1}{A^2} \sqrt{A^2 - b_1^2} \right];$ $q'(A) = 0 \text{ при } A \geq b_2$

1	2	3
4		<p>Люфт (Мертвый ход)</p> $q(A) = \frac{k}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2b}{A} \right) + 2 \left(1 - \frac{2b}{A} \right) \sqrt{\frac{b}{A} - \left(\frac{b}{A} \right)^2} \right];$ $q'(A) = -\frac{4kb}{\pi A} \left(1 - \frac{b}{A} \right) \text{ при } A \geq b$
5		<p>Идеальное двухпозиционное реле</p> $q(A) = \frac{4B}{\pi A};$ $q'(A) = 0$
6		<p>Идеальное трехпозиционное реле</p> $q(A) = \frac{4B}{\pi A^2} \sqrt{A^2 - b^2};$ $q'(A) = 0 \text{ при } A \geq b$
7		<p>Двухпозиционное реле с гистерезисом</p> $q(A) = \frac{4B}{\pi A^2} \sqrt{A^2 - b^2};$ $q'(A) = -\frac{4Bb}{\pi A^2} \text{ при } A \geq b$
8		<p>Трехпозиционное реле с гистерезисом</p> $q(A) = \frac{2B}{\pi A^2} \left[\sqrt{A^2 - b_2^2} + \sqrt{A^2 - b_1^2} \right];$ $q'(A) = -\frac{2B(b_2 - b_1)}{\pi A^2} \text{ при } A \geq b_2$

2.10. Алгебраический метод определения автоколебаний в нелинейных системах

Данный метод предложил советский ученый Е.П. Попов. Рассмотрим определение симметричных автоколебаний алгебраическим методом на основе гармонической линейризации нелинейности. Пусть автоматическая система (см. рис. 2.6) с одной нелинейностью $F(x)$ имеет передаточную функцию линейной части, обладающую свойством фильтра низких частот:

$$W_{ЛЧ}(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}. \quad (2.82)$$

Уравнения линейной части системы и нелинейного звена при входном воздействии $u(t) = 0$ в операторной форме:

$$\begin{cases} Q(p)y = R(p)z; \\ z = F(x) = -F(y). \end{cases} \quad (2.83)$$

Тогда уравнение замкнутой системы в операторной форме примет вид

$$Q(p)y = -R(p)F(y). \quad (2.84)$$

Возможные автоколебания выходной величины с частотой ω' и амплитудой A' запишем как

$$y = A' \sin \omega' t. \quad (2.85)$$

После гармонической линейризации нелинейного элемента его уравнение в операторной форме имеет вид

$$z = -\left(q(A) + q'(A) \frac{p}{\omega} \right) y, \quad (2.86)$$

где коэффициенты гармонической линейризации $q(A)$ и $q'(A)$ определяются согласно формулам (2.75) и (2.78).

Тогда уравнение замкнутой системы (2.84) с учетом уравнения (2.86) в операторной форме примет вид

$$\left[Q(p) + R(p) \left(q(A) + q'(A) \frac{p}{\omega} \right) \right] y = 0. \quad (2.87)$$

Поскольку в искомом решении уравнения (2.85) $A' = \text{const}$ и $\omega' = \text{const}$, то гармонически линейризованное уравнение замкнутой системы (2.87) можно рассматривать как обыкновенное линейное

уравнение с постоянными коэффициентами. Специфика его состоит лишь в том, что имеются неизвестные постоянные коэффициенты, зависящие от искомого решения, что и позволит нам получить решение со специфическими свойствами, присущими нелинейной системе.

Запишем характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы

$$Q(p) + R(p) \left(q(A) + q'(A) \frac{p}{\omega} \right) = 0. \quad (2.88)$$

Периодическое решение (2.85) уравнения (2.87) соответствует паре чисто мнимых корней $p_{1,2} = \pm j\omega$ характеристического уравнения (2.88). Поэтому для отыскания этого решения перейдем в частотную область, заменив оператор $p = j\omega$. Получим

$$Q(j\omega) + R(j\omega)(q(A) + jq'(A)) = 0. \quad (2.89)$$

Выделим в этом выражении вещественную и мнимую части в виде

$$U(A, \omega) + jV(A, \omega) = 0. \quad (2.90)$$

В результате получим два алгебраических уравнения, из которых и определяются искомые амплитуда A' и частота ω' периодического решения (2.85).

$$\begin{cases} U(A, \omega) = 0; \\ V(A, \omega) = 0. \end{cases} \quad (2.91)$$

Заметим, что решение задачи упрощается в случае однозначной нелинейности $F(x)$ ($q'(A) = 0$), вместо уравнения (2.88) здесь имеем

$$Q(p) + R(p)q(A) = 0. \quad (2.92)$$

При подстановке $p = j\omega$ выделим вещественные и мнимые части многочленов $Q(p)$ и $R(p)$ в виде

$$\begin{cases} Q(j\omega) = U_Q(\omega) + jV_Q(\omega); \\ R(j\omega) = U_R(\omega) + jV_R(\omega). \end{cases} \quad (2.93)$$

Тогда вместо (2.91) получим

$$\begin{cases} U_Q(\omega) + U_R(\omega)q(A) = 0; \\ V_Q(\omega) + V_R(\omega)q(A) = 0. \end{cases} \quad (2.94)$$

Эти два уравнения можно преобразовать к виду

$$\begin{cases} q(A) = -\frac{U_Q(\omega)}{U_R(\omega)}; \\ U_R(\omega)V_Q(\omega) - U_Q(\omega)V_R(\omega) = 0. \end{cases} \quad (2.95)$$

Сначала из второго уравнения определяется частота ω' периодического решения, а затем из первого уравнения определяется амплитуда A' . Видно, что частота зависит от параметров линейной части и не зависит от формы однозначной нелинейности. В случае гистерезисной нелинейности это свойство нарушается, и будет иметь место общий случай уравнений (2.91).

Определение устойчивости или неустойчивости найденного периодического решения будет рассматриваться в пункте 2.11 данного раздела. Если периодическое решение устойчиво, то в нелинейной АСУ имеется устойчивый автоколебательный процесс.

В качестве примера рассмотрим алгебраический метод для нелинейной системы (см. рис. 2.6) с типовой нелинейной характеристикой «Насыщение» (см. табл. 1.1, п. 2) и «Двухпозиционное реле с гистерезисом» (см. табл. 1.1, п. 8).

Пусть уравнение динамики устройства управления УУ

$$(T_1 p + 1)\varphi = K_1 z, \quad (2.96)$$

а уравнение динамики объекта управления ОУ будет

$$(T_2 p + 1)y = \frac{K_2 \varphi}{p}. \quad (2.97)$$

Уравнение нелинейного элемента НЭ при $u(t) = 0$ описывается нелинейной функцией «Насыщение» (см. табл. 1.1, п. 2).

Уравнение замкнутой системы в операторной форме при $u(t) = 0$ с учетом формулы (2.17) будет иметь вид

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)py = -K_1 K_2 F(y). \quad (2.98)$$

После гармонической линейризации нелинейного элемента «Насыщение» его уравнение в операторной форме имеет вид

$$z = -q(A)y, \quad (2.99)$$

где коэффициент гармонической линейризации $q(A)$ определяется согласно табл. 2.1, а коэффициент $q'(A) = 0$.

Запишем характеристическое уравнение гармонически линейризованной системы

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + K_1 K_2 q(A) = 0. \quad (2.100)$$

При подстановке $p = j\omega$ выделим согласно выражению (2.90) вещественные и мнимые части характеристического уравнения гармонически линеаризованной системы и получим по формулам (2.91) и (2.94)

$$\begin{cases} U(A, \omega) = K_1 K_2 q(A) - (T_1 + T_2) \omega^2 = 0; \\ V(A, \omega) = \omega - T_1 T_2 \omega^3 = 0. \end{cases} \quad (2.101)$$

Из второго уравнения (2.101) определяем частоту периодического решения

$$\omega' = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}, \quad (2.102)$$

подставляем полученное выражение в первое уравнение (2.101) и получаем

$$q(A') = \frac{T_1 + T_2}{K_1 K_2 T_1 T_2}. \quad (2.103)$$

Амплитуда автоколебаний A' определяется расчетным путем по формуле коэффициента гармонической линеаризации нелинейного элемента «Насыщение» (см. табл. 2.1) или графически (рис. 2.15).

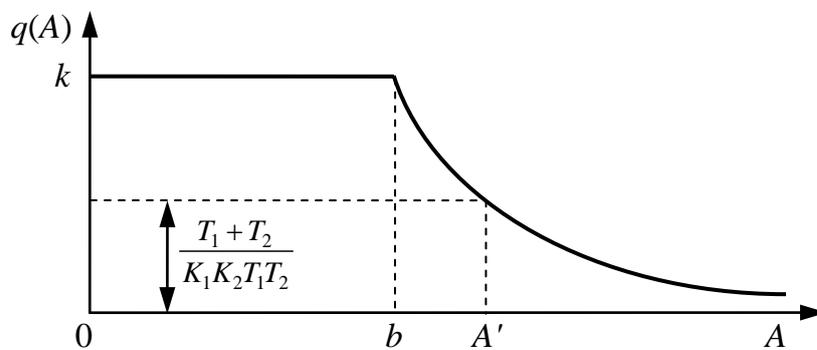


Рис. 2.15. Определение амплитуды автоколебаний A'

Если учесть, что коэффициент усиления «Насыщения» $k \geq q(A)$ (см. рис. 2.15), из уравнения (2.103) вытекают условия существования автоколебаний в системе:

$$k K_1 K_2 > \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}; \quad (2.104)$$

$$K_{PA3} = k K_1 K_2; \quad (2.105)$$

$$k = \frac{B}{b}, \quad (2.106)$$

где K_{PA3} – общий коэффициент усиления разомкнутой цепи данной системы в линейном плане.

Легко видеть, что формула (2.104) представляет собой условие неустойчивости этой системы как линейной согласно критерию Гурвица, где граница устойчивости

$$K_{PA3} = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \quad (2.107)$$

является в то же время границей области автоколебаний.

Эта граница нанесена штрихпунктирной линией на плоскости параметров $[K_{PA3}; T_1]$ при $T_2 = \text{const}$ (рис. 2.16). Ниже этой границы имеет место область устойчивости равновесного состояния системы, а выше – область автоколебаний, где согласно выражениям (2.102) и (2.103) имеется бесконечное множество значений A' и ω' .

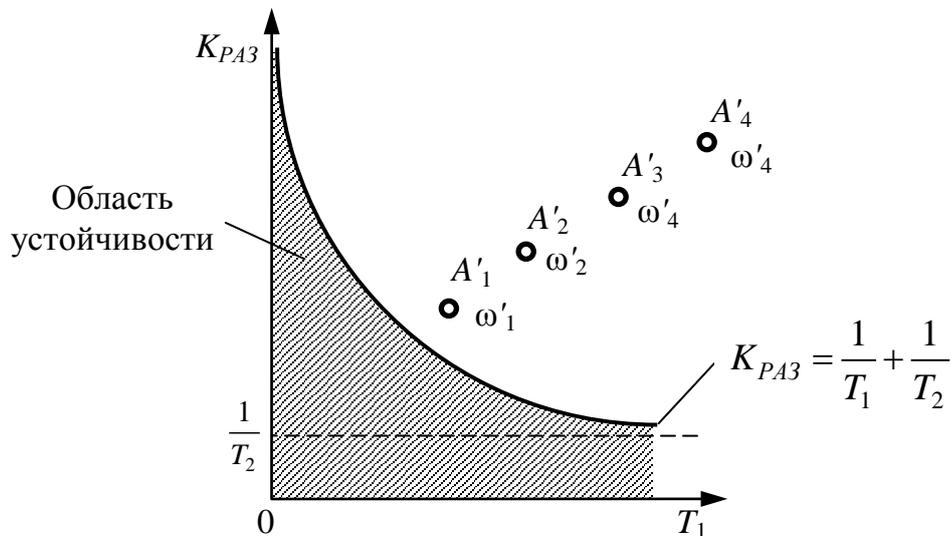


Рис. 2.16. Область устойчивости и автоколебаний

Для той же нелинейной системы (см. рис. 2.6) после гармонической линеаризации нелинейного элемента «Двухпозиционное реле с гистерезисом» его уравнение в операторной форме имеет вид

$$z = - \left(q(A) + q'(A) \frac{p}{\omega} \right) y, \quad (2.108)$$

где коэффициенты гармонической линеаризации $q(A)$ и $q'(A)$ определяются согласно формулам (2.75) и (2.78).

Запишем характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы с «Двухпозиционным реле с гистерезисом»

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + K_1 K_2 \left(q(A) + q'(A) \frac{P}{\omega} \right) = 0. \quad (2.109)$$

При подстановке $p = j\omega$ выделим согласно выражению (2.90) вещественные и мнимые части характеристического уравнения гармонически линеаризованной системы и получим по формуле (2.91)

$$\begin{cases} U(A, \omega) = K_1 K_2 q(A) - (T_1 + T_2) \omega^2 = 0; \\ V(A, \omega) = K_1 K_2 q'(A) + \omega - T_1 T_2 \omega^3 = 0. \end{cases} \quad (2.110)$$

Поделив первое уравнение системы на второе с учетом выражений (2.75) и (2.78), получим связь амплитуды A' и частоты периодического решения ω' :

$$\frac{q(A)}{q'(A)} = - \frac{(T_1 + T_2) \omega'^2}{\omega' - T_1 T_2 \omega'^3}; \quad (2.111)$$

$$\frac{\sqrt{A'^2 - b^2}}{b} = \frac{(T_1 + T_2) \omega'}{1 - T_1 T_2 \omega'^2}. \quad (2.112)$$

Данное уравнение накладывает ограничение на частоту периодического решения:

$$\omega' < \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}. \quad (2.113)$$

Выразим амплитуду A' через частоту ω' :

$$A'^2 = \left(\left(\frac{(T_1 + T_2) \omega'}{(1 - T_1 T_2 \omega'^2)} \right)^2 + 1 \right) b^2. \quad (2.114)$$

Из второго уравнения системы с учетом формулы (2.78) получим связь коэффициента усиления линейной части системы $K_1 K_2$ с амплитудой A' и частотой периодического решения ω' :

$$K_1 K_2 = \frac{\pi A'^2}{4 B b} (\omega' - T_1 T_2 \omega'^3). \quad (2.115)$$

Решив уравнение (2.115) с учетом формул (2.114) и (2.113) при $T_1 = T_2 = 0,1$; $B = 25$; $b = 0,5$ построим зависимость $K_1 K_2(A'; \omega')$, изображенную на рис. 2.17.

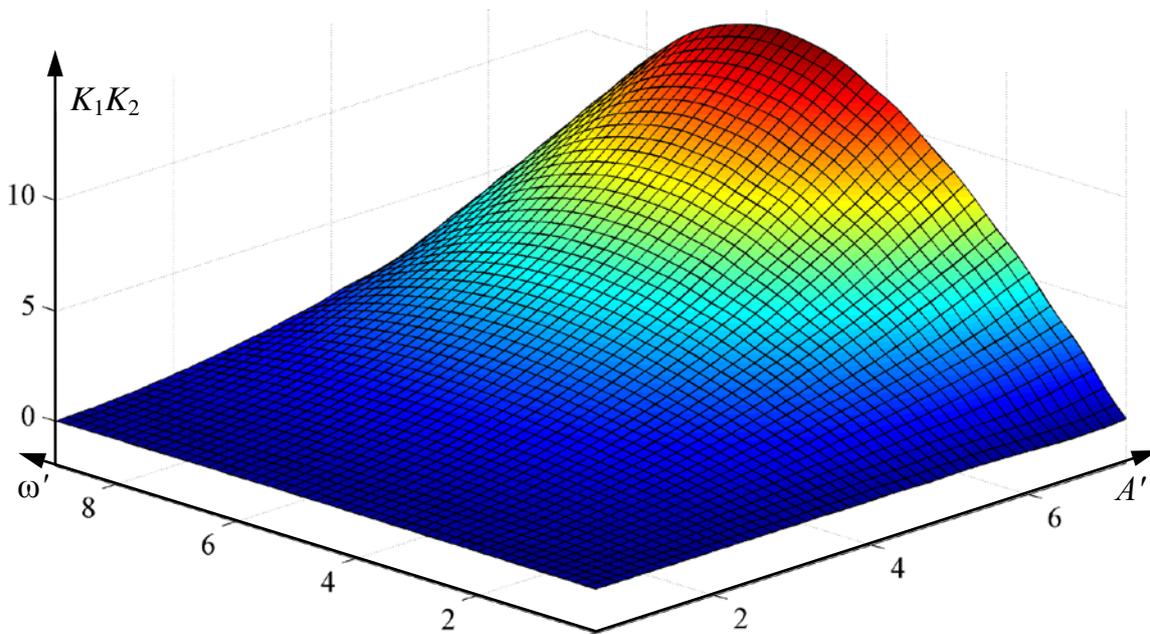


Рис. 2.17. Зависимость $K_1K_2(A'; \omega')$

Данная зависимость характеризует множество автоколебательных режимов $(A'; \omega')$, возникающих в АСУ с нелинейным элементом «Двухпозиционное реле с гистерезисом» при различных коэффициентах усиления линейной части системы K_1K_2 .

2.11. Метод гармонического баланса

Особенности релейных систем в том, что они наиболее склонны к возникновению устойчивого автоколебательного режима работы. Поэтому одна из задач анализа релейных систем состоит в определении возможности возникновения автоколебательного режима работы. Если такой режим работы системы может возникнуть, то определить амплитуду и частоту этих колебаний.

Для решения поставленных задач используют метод фазовой плоскости и по полученной траектории движения судят о динамических свойствах системы. Но этот метод пригоден только для системы второго порядка. Для системы более высокого порядка используют *метод гармонического баланса Л.С. Гольдфарба*. Это графоаналитический способ определения амплитуды и частоты автоколебаний, основанный на критерии устойчивости Г. Найквиста.

Для реализации метода Гольдфарба структурную схему нелинейной системы представляют в виде последовательного соединения нелинейной части *НЧ* и линейной части системы *ЛЧ* (см. рис. 1.1).

Линейная часть включает в себя все элементы системы, за исключением нелинейного элемента, и описывается передаточной функцией $W_{ЛЧ}(p)$. Нелинейная часть имеет нелинейный элемент $HЭ$, который после линеаризации описывается ГПФ $W_{HЭ}(p)$.

Тогда общая частотная передаточная функция системы в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W_{РАЗ}(j\omega; jA) = W_{HЭ}(jA)W_{ЛЧ}(j\omega). \quad (2.116)$$

Предположим, что замкнутая нелинейная система находится на границе устойчивости и в ней возникли незатухающие колебания (автоколебания). Тогда, согласно критерию Найквиста, амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы $W_{РАЗ}(j\omega; jA)$ должна проходить через точку с координатами $(-1; j0)$. Отсюда условие существования автоколебаний в замкнутой системе

$$W_{HЭ}(jA)W_{ЛЧ}(j\omega) = -1. \quad (2.117)$$

Непосредственно построить эту АФЧХ на комплексной плоскости трудно. В этом уравнении две переменные величины: частота ω , которую изменяем от 0 до ∞ , и амплитуда сигнала на входе нелинейного элемента A . Поэтому уравнение представляется в виде

$$W_{ЛЧ}(j\omega) = -\frac{1}{W_{HЭ}(jA)}. \quad (2.118)$$

Согласно Л.С. Гольдфарбу, автоколебания в системе возможны, если выполняются два условия гармонического баланса.

Первое условие. Отдельно построенная левая часть уравнения при изменении частоты и отдельно построенная правая часть уравнения при изменении амплитуды имеют общую точку пересечения B (в некоторых случаях несколько точек пересечения).

Второе условие. Точки пересечения соответствуют суммарному фазовому сдвигу разомкнутой системы на угол $-\pi$ радиан или -180° .

$$\begin{cases} |W_{ЛЧ}(j\omega)| = \left| \frac{1}{W_{HЭ}(jA)} \right|; \\ \varphi_{ЛЧ}(\omega) + \varphi_{HЭ}(A) = -\pi. \end{cases} \quad (2.119)$$

Уравнение (2.118) решается графически следующим образом. На комплексной плоскости $[+1; j]$ вычерчивается амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части $W_{ЛЧ}(j\omega)$, а также обратная ам-

плитудно-фазовая характеристика нелинейности с обратным знаком $-1/W_{HЭ}(jA)$. Точка пересечения АФЧХ линейной части системы и гармонически линеаризованной передаточной функции определяет амплитуду A и частоту автоколебаний ω , причем значение A отсчитывается по кривой $-1/W_{HЭ}(jA)$, а значение ω – по кривой $W_{ЛЧ}(j\omega)$ (рис. 2.18).

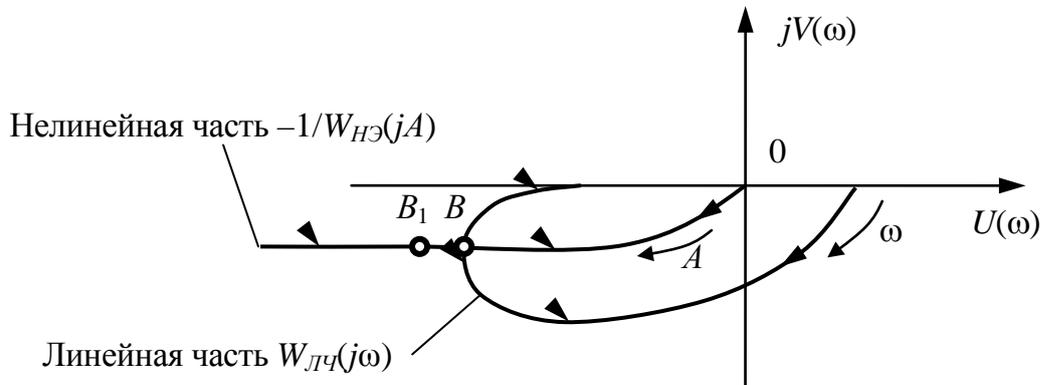


Рис. 2.18. Годографы АФЧХ линейной части и нелинейного элемента

Искомые амплитуду A' и частоту ω' периодического решения можно также получить при помощи системы уравнений, вытекающих из условий гармонического баланса и системы уравнений (2.119):

$$\begin{cases} |W_{ЛЧ}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{[q(A)]^2 + [q'(A)]^2}}; \\ \Phi_{ЛЧ}(\omega) = -\pi - \arctg \frac{q'(A)}{q(A)}. \end{cases} \quad (2.120)$$

Об устойчивости или неустойчивости автоколебательного процесса судят следующим образом. Пусть точке B соответствует частота ω'_B и амплитуда A'_B (см. рис. 2.18). Тогда при некотором приращении амплитуды ΔA (точка B_1) система будет возвращаться к периодическому решению, если при $\Delta A > 0$ колебания будут становиться затухающими, а при $\Delta A < 0$ – расходящимися. Если при $(A'_B + \Delta A)$ амплитуда начала возрастать, а при $(A'_B - \Delta A)$ она стала убывать, то возникший предельный цикл неустойчивый.

Вышесказанное аналитически можно представить в виде

$$\begin{cases} |W_{HЭ}(A'_B + \Delta A)W_{ЛЧ}(j\omega)| < 1; \\ |W_{HЭ}(A'_B - \Delta A)W_{ЛЧ}(j\omega)| > 1 \end{cases} \quad (2.121)$$

или графически: автоколебательный процесс будет устойчив, когда точка на годографе $-1/W_{HЭ}(jA)$, соответствующая амплитуде $(A_B + \Delta A)$ при $(\Delta A > 0)$, находится слева от АФЧХ линейной части системы при движении по ней в сторону возрастания частоты. Или по-другому: положительный отсчет амплитуды A вдоль кривой $-1/W_{HЭ}(jA)$ должен быть направлен изнутри наружу через кривую $W_{ЛЧ}(j\omega)$, как показано на рис. 2.18 стрелкой. В противном случае периодическое решение неустойчиво.

Уравнениями (2.120) удобнее пользоваться в логарифмическом масштабе, изображая логарифмические частотные характеристики линейной части. Тогда вместо выражения (2.120) будем иметь следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} L_{ЛЧ}(\omega) = -20 \lg \sqrt{[q(A)]^2 + [q'(A)]^2}; \\ \varphi_{ЛЧ}(\omega) = -\pi - \operatorname{arctg} \frac{q'(A)}{q(A)}. \end{cases} \quad (2.122)$$

На рис. 2.19 слева изображены графики левых частей системы уравнений (2.122), а справа – правых частей этих уравнений. При этом по оси абсцисс слева частота ω откладывается, как обычно, в логарифмическом масштабе, а справа – амплитуда в натуральном масштабе. Решением этих уравнений будут такие значения A' и ω' , чтобы при них одновременно соблюдались оба равенства (2.122). Такое решение показано на рис. 2.19 тонкими линиями в виде прямоугольника.

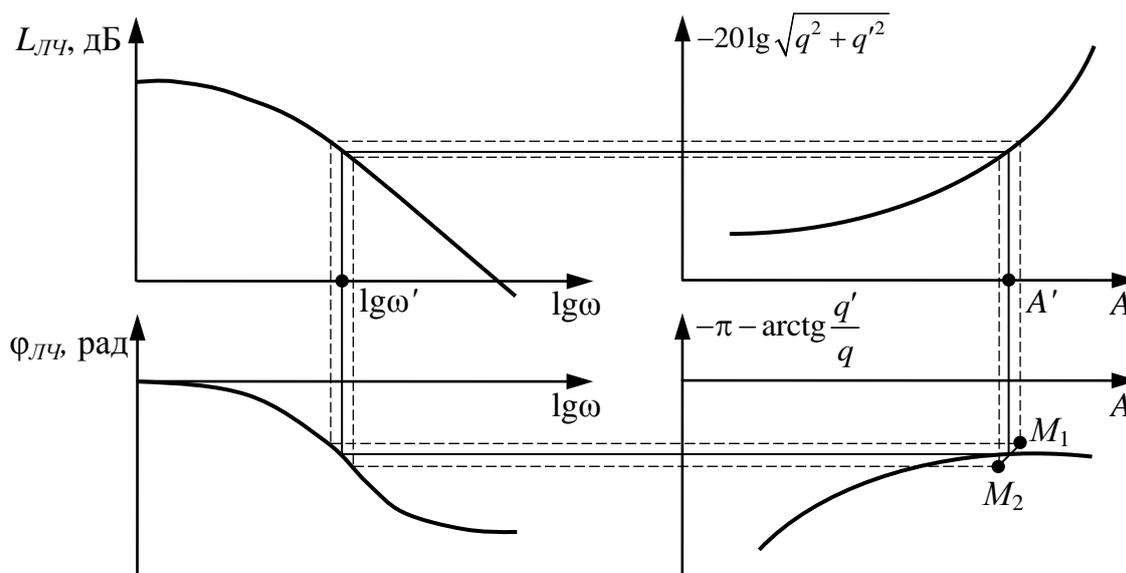


Рис. 2.19. Метод гармонического баланса в логарифмическом масштабе

Очевидно, что сразу угадать это решение графически не удастся. Поэтому делаются попытки, показанные штриховыми линиями. Последние точки этих пробных прямоугольников M_1 и M_2 не попадают на фазовую характеристику нелинейности. Но если они расположены по обе стороны характеристики, как на рис. 2.19, то решение находится интерполяцией – путем проведения прямой M_1M_2 .

Нахождение периодического решения упрощается в случае однозначной нелинейности $F(x)$. Тогда $q'(A) = 0$ и уравнения (2.122) принимают вид

$$\begin{cases} L_{ЛЧ}(\omega) = -20 \lg q(A); \\ \varphi_{ЛЧ}(\omega) = -\pi. \end{cases} \quad (2.123)$$

Графическое решение уравнения (2.123) показано на рис. 2.20.

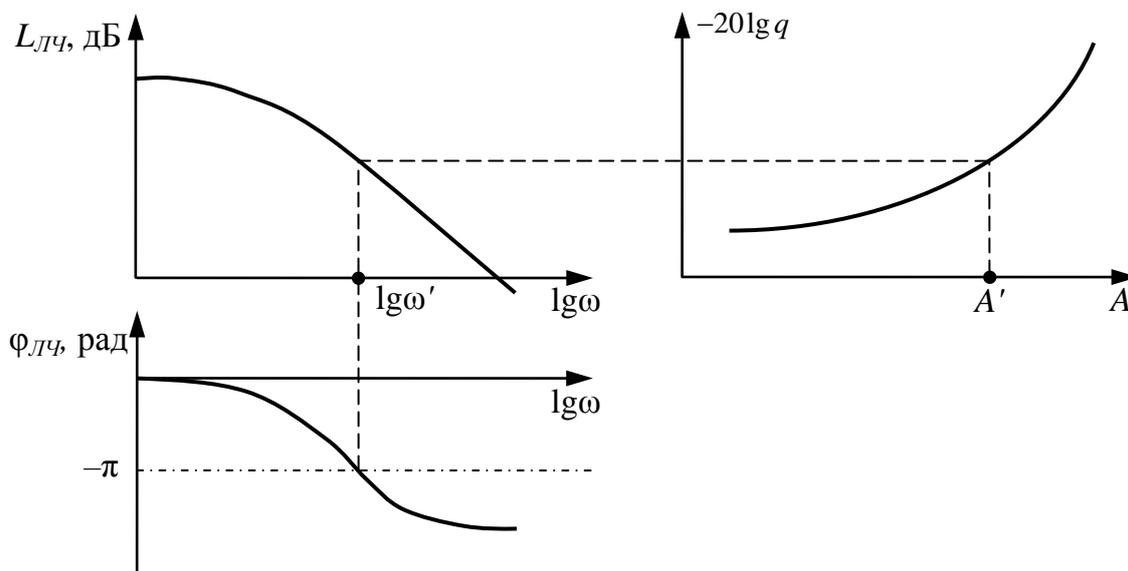


Рис. 2.20. Метод гармонического баланса в логарифмическом масштабе в случае однозначной нелинейности

В качестве примера рассмотрим метод гармонического баланса для системы с различными нелинейностями. Структурная схема нелинейной системы представлена на рис. 1.1. Линейная часть описывается передаточной функцией $W_{ЛЧ}(p)$, нелинейная часть имеет нелинейный элемент с ГПФ $W_{НЭ}(p)$.

Передаточная функция линейной части системы

$$W_{ЛЧ}(p) = \frac{2}{p(0,05p + 1)(0,02p + 1)}. \quad (2.124)$$

Нелинейный элемент будет иметь три различных характеристики: «Идеальное двухпозиционное реле» (см. табл. 1.1, п. 6), «Идеальное трехпозиционное реле» (см. табл. 1.1, п. 7) и «Двухпозиционное реле с гистерезисом» (см. табл. 1.1, п. 8). Выходная величина реле $B = 110$, порог срабатывания у двух последних реле $b = 0,25$.

Определим амплитудно-частотную и фазово-частотную характеристики линейной части системы по её частотной передаточной функции:

$$W_{ЛЧ}(j\omega) = \frac{2}{j\omega(0,05j\omega + 1)(0,02j\omega + 1)}; \quad (2.125)$$

$$A_{ЛЧ}(\omega) = \frac{2}{\omega\sqrt{(0,05\omega)^2 + 1}\sqrt{(0,02\omega)^2 + 1}}; \quad (2.126)$$

$$\varphi_{ЛЧ}(\omega) = -90^\circ - \arctg(0,05\omega) - \arctg(0,02\omega). \quad (2.127)$$

Согласно уравнению (2.72) частотная ГПФ характеристики «Идеальное двухпозиционное реле»

$$W_{НЭ1}(jA) = \frac{4 \cdot 110}{\pi A}; \quad (2.128)$$

$$-\frac{1}{W_{НЭ1}(jA)} = -\frac{\pi A}{440}. \quad (2.129)$$

Согласно уравнению (2.69) частотная ГПФ характеристики «Идеальное трехпозиционное реле»

$$W_{НЭ2}(jA) = \frac{4 \cdot 110}{\pi A^2} \sqrt{A^2 - 0,25^2}; \quad (2.130)$$

$$-\frac{1}{W_{НЭ2}(jA)} = -\frac{\pi A^2}{440 \sqrt{A^2 - 0,25^2}}. \quad (2.131)$$

Согласно уравнению (2.79) частотная ГПФ характеристики «Двухпозиционное реле с гистерезисом»

$$W_{НЭ3}(jA) = \frac{4 \cdot 110}{\pi A^2} \sqrt{A^2 - 0,25^2} - j \frac{4 \cdot 110 \cdot 0,25}{\pi A^2}; \quad (2.132)$$

$$-\frac{1}{W_{НЭ3}(jA)} = -\frac{\pi \sqrt{A^2 - 0,25^2}}{440} - j \frac{\pi 0,25}{440}. \quad (2.133)$$

Задаваясь значением частоты ω от 0 до ∞ , определяем амплитуду и фазу характеристики линейной части и строим АФЧХ $W_{ЛЧ}(j\omega)$. Задаваясь значением A от 0 до ∞ , строим на комплексной плоскости характеристику нелинейностей $-1/W_{НЭ1}(jA)$ (рис. 2.21).

Годографы $W_{ЛЧ}(j\omega)$ и $-1/W_{НЭ1}(jA)$ пересекаются в одной точке B_1 . Значит, автоколебательный режим в исходной системе с нелинейной характеристикой «Идеальное двухпозиционное реле» возможен с частотой $\omega' = 32$ рад/с и амплитудой $A' = 3,92$.

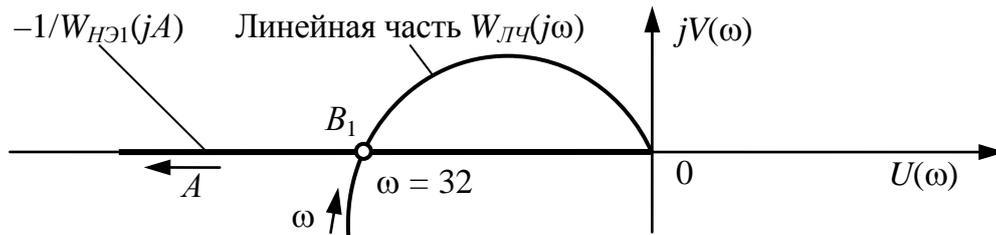


Рис. 2.21. Годографы АФЧХ линейной части и нелинейного элемента

Устойчивость полученного периодического решения проверим по условию (2.121):

$$\begin{cases} |W_{НЭ} (3,92 + 0,1)W_{ЛЧ} (j32)| = |34,75 \cdot 0,028| < 1; \\ |W_{НЭ} (3,92 - 0,1)W_{ЛЧ} (j32)| = |36,66 \cdot 0,028| > 1. \end{cases} \quad (2.134)$$

Таким образом, переходная характеристика $h(t)$ нелинейной АСУ может иметь устойчивый автоколебательный режим, переменная составляющая которого описывается выражением $h(t) = 3,92\sin 32t$.

Задаваясь значением A от 0,25 до ∞ (по условию гармонической линеаризации $A \geq b$), строим на комплексной плоскости характеристики нелинейностей $-1/W_{НЭ2}(jA)$ и $-1/W_{НЭ3}(jA)$ (рис. 2.22).

Годографы $W_{ЛЧ}(j\omega)$ и $-1/W_{НЭ2}(jA)$ пересекаются в точке B_2 . Значит, автоколебательный режим в исходной системе с нелинейной характеристикой «Идеальное трехпозиционное реле» возможен с частотой $\omega' = 32$ рад/с и амплитудой $A_1' = 0,2505$ или $A_2' = 3,85$, так как значение функции $-1/W_{НЭ2}(jA) = -0,028$ может быть получено при двух величинах $A' = 0,2505$ и $3,85$. Причем при положительном отсчете амплитуды в промежутке $b \leq A \leq b\sqrt{2}$ годограф $-1/W_{НЭ2}(jA)$ проходит снаружи вовнутрь кривой $W_{ЛЧ}(j\omega)$, а в промежутке $A > b\sqrt{2}$ – изнутри наружу через кривую $W_{ЛЧ}(j\omega)$.

Устойчивость полученных периодических решений проверим аналитически по условию (2.121):

$$A_1' = 0,2505: \begin{cases} |W_{HЭ}(0,2505 + 0,0003)W_{ЛЧ}(j32)| = |44,567 \cdot 0,028| > 1; \\ |W_{HЭ}(0,2505 - 0,0003)W_{ЛЧ}(j32)| = |22,377 \cdot 0,028| < 1. \end{cases} \quad (2.135)$$

$$A_2' = 3,85: \begin{cases} |W_{HЭ}(3,85 + 0,1)W_{ЛЧ}(j32)| = |35,386 \cdot 0,028| < 1; \\ |W_{HЭ}(3,85 - 0,1)W_{ЛЧ}(j32)| = |37,264 \cdot 0,028| > 1. \end{cases} \quad (2.136)$$

Таким образом, переходная характеристика $h(t)$ нелинейной АСУ может иметь два автоколебательных режима – устойчивый $h(t) = 3,85\sin 32t$ и неустойчивый $0,2505\sin 32t$.

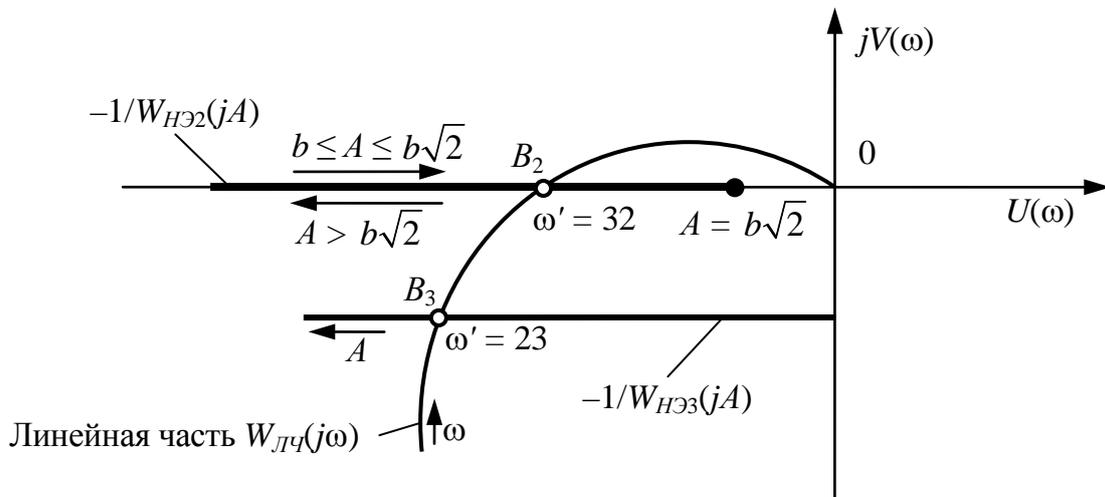


Рис. 2.22. Годографы АФЧХ линейной части и нелинейного элемента

Годографы $W_{ЛЧ}(j\omega)$ и $-1/W_{HЭ3}(jA)$ пересекаются в точке B_3 . Значит, автоколебательный режим в исходной системе с нелинейной характеристикой «Двухпозиционное реле с гистерезисом» возможен с частотой $\omega' = 23$ рад/с и амплитудой $A' = 7,25$.

Гистерезисная релейная характеристика вносит отставание по выходному сигналу из реле, поэтому проверим выполнение второго условия гармонического баланса в данной системе

$$\begin{aligned} \varphi_{ЛЧ}(\omega) + \varphi_{HЭ}(A) &= \\ &= -90^\circ - \arctg(0,05 \cdot 23) - \arctg(0,02 \cdot 23) - \arctg\left(\frac{q'(7,25)}{q(7,25)}\right) = \\ &= -90^\circ - 48,99^\circ - 24,7^\circ - 16,2^\circ \approx -180^\circ. \end{aligned} \quad (2.137)$$

Таким образом, переходная характеристика $h(t)$ нелинейной АСУ может иметь устойчивый автоколебательный режим с переменной составляющей $h(t) = 7,25\sin 23t$.

2.12. Запаздывание гистерезисного реле

В предыдущем пункте рассматривался приближенный метод анализа нелинейной АСУ с нелинейным элементом «Двухпозиционное реле с гистерезисом» (см. табл. 1.1, п. 8). Также гистерезисом обладает и «Трехпозиционное реле с гистерезисом» (см. табл. 1.1, п. 9). Если характеристика реле симметрична относительно начала координат, то с некоторой степенью приближения можно заменить характеристику гистерезисного реле на два элемента: идеальное реле и звено чистого запаздывания (рис. 2.23).

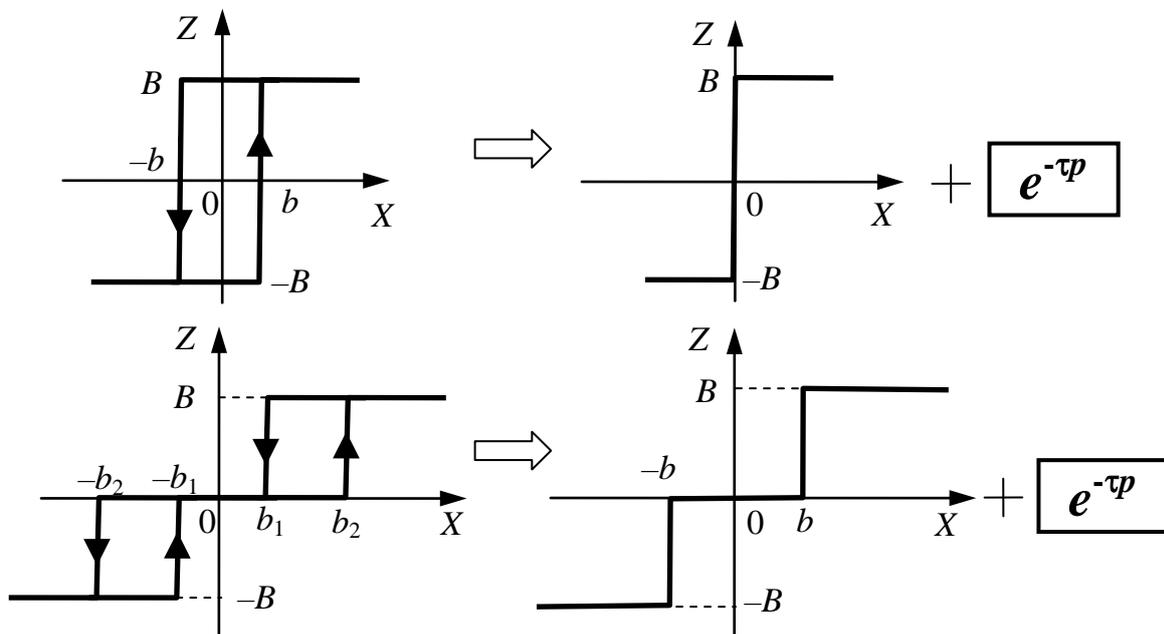


Рис. 2.23. Преобразование гистерезисного реле

Звено запаздывания описывается операторным уравнением

$$y = x \cdot e^{-\tau p}, \quad (2.138)$$

где τ – время запаздывания.

Звено запаздывания можно рассматривать как составляющую линейной части системы $W_{ЛЧ}(j\omega)$, тогда совместная частотная передаточная функция (АФЧХ системы) будет иметь вид

$$W_{ЛЧ}^*(j\omega) = W_{ЛЧ}(j\omega)e^{-j\tau\omega}. \quad (2.139)$$

В случае преобразования трехпозиционного реле с гистерезисом в «Идеальное трехпозиционное реле» в АСУ с жесткой отрицательной обратной связью (рис. 1.1), согласно методу Гольдфарба, получим годографы $W_{ЛЧ}^*(j\omega)$ и $-1/W_{НЭ}(jA)$ (рис. 2.24).

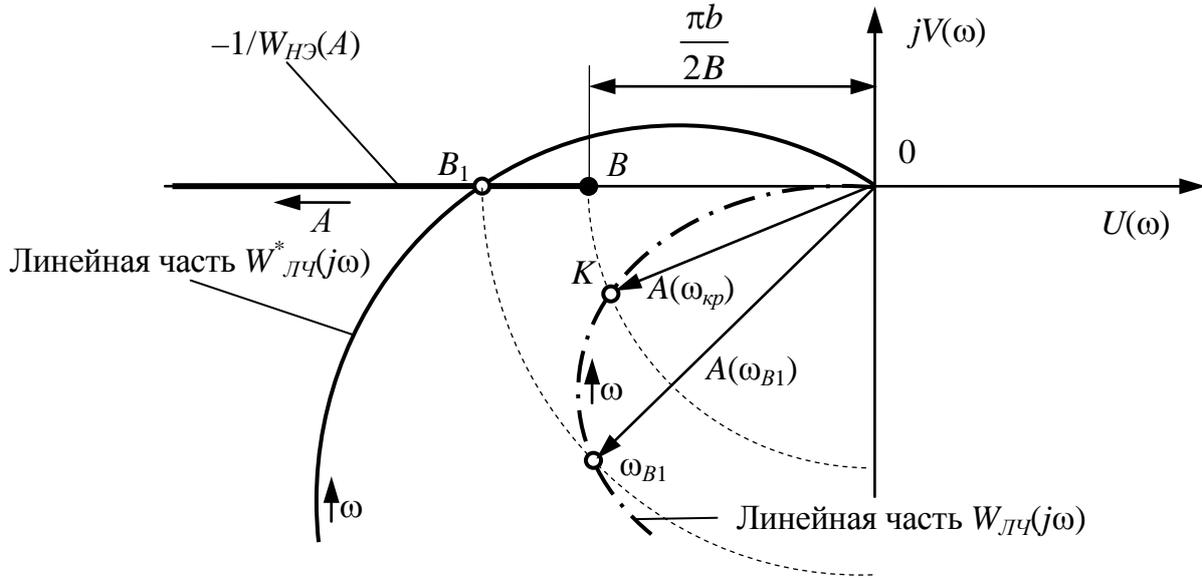


Рис. 2.24. Годографы АФЧХ линейной части и нелинейного элемента

При достаточно малых запаздываниях указанные кривые $W_{ЛЧ}^*(j\omega)$ и $-1/W_{НЭ}(jA)$ могут не пересекаться, т.е. автоколебаний в системе не будет. Здесь, как и в линейных системах, можно определить критическое время запаздывания $\tau_{кр}$, до которого автоколебания отсутствуют, без построения кривой $W_{ЛЧ}^*(j\omega)$, только по кривым $W_{ЛЧ}(j\omega)$ и $-1/W_{НЭ}(jA)$.

В критическом случае некоторая точка кривой $W_{ЛЧ}^*(j\omega)$ попадет в крайнюю точку годографа $-1/W_{НЭ}(jA)$ B ($A = b\sqrt{2}$). Как видно из рис. 2.24, это соответствует такой точке K кривой $W_{ЛЧ}(j\omega)$, в которой выполняются следующие условия гармонического баланса (2.119):

$$\begin{cases} A(\omega_{кр}) = \frac{\pi b}{2B}; \\ \varphi(\omega_{кр}) - \tau_{кр} \omega_{кр} = -\pi \text{ при } -\pi \leq \varphi(\omega_{кр}) \leq 0. \end{cases} \quad (2.140)$$

Из первого условия определяется величина $\omega_{кр}$, а из второго – критическое время запаздывания $\tau_{кр}$, при котором возникнут автоколебания.

$$\tau_{кр} = \frac{\varphi(\omega_{кр}) + \pi}{\omega_{кр}} \text{ при } -\pi \leq \varphi(\omega_{кр}) \leq 0. \quad (2.141)$$

Если же реле не имеет зоны нечувствительности («Идеальное двухпозиционное реле»), т. е. $b = 0$, то точка B попадет в начало коор-

динат и автоколебания будут при любом значении времени запаздывания в срабатывании реле ($\tau_{кр} = 0$). Поэтому выгодно, чтобы временное запаздывание в реле, рассматриваемое здесь, было бы сравнительно малым, а зона нечувствительности имела бы большую величину (но не превышала допустимых значений, полученных из статического расчета точности регулирования).

Амплитуда и частота автоколебаний при наличии запаздывания определяются следующим образом. Точка пересечения B_1 (см. рис. 2.24) дает два периодических решения, так как в ней на прямой $-1/W_{HЭ}(jA)$ имеются два значения A . Из формулы (2.69) имеем

$$\frac{1}{W_{HЭ}(jA)} = \frac{\pi A^2}{4B\sqrt{A^2 - b^2}}. \quad (2.142)$$

Данная зависимость представлена графиком на рис. 2.25.

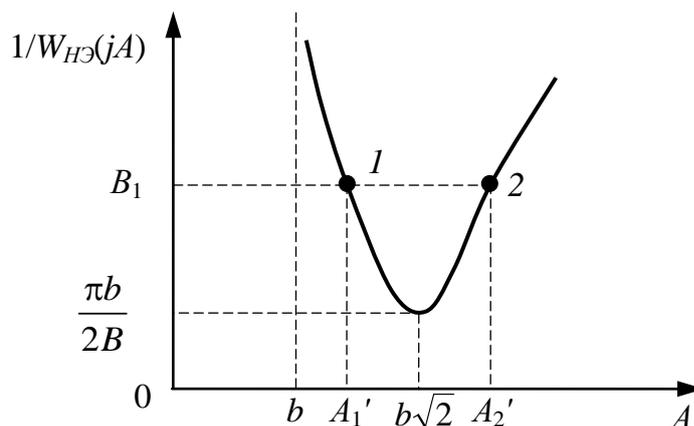


Рис. 2.25. Годографы АФЧХ линейной части и нелинейного элемента

Точке пересечения B_1 на рис. 2.24 соответствуют две точки графика 1 и 2 на рис. 2.25, которые дают два значения амплитуды автоколебаний: A_1' и A_2' . Частота ω' обоих периодических решений одинакова и определяется точкой B_1 на кривой $W_{лч}^*(j\omega)$.

При этом периодическое решение с меньшей амплитудой A_1' будет неустойчивым, а с большей амплитудой A_2' – устойчивым, так как в первом случае точка с положительным приращением ΔA на линии $-1/W_{HЭ}(jA)$ охватывается кривой $W_{лч}^*(j\omega)$, а во втором случае – не охватывается. Следовательно, могут иметь место устойчивость системы в малом (до амплитуд A_1') и автоколебательный процесс с большой амплитудой A_2' , к которому стремится система при начальных амплитудах переходного процесса, превышающих значение A_1' .

Заметим, что точку пересечения B_1 кривой $W_{ЛЧ}^*(j\omega)$ с линией $-1/W_{НЭ}(jA)$ можно найти без построения кривой $W_{ЛЧ}^*(j\omega)$ непосредственно по амплитудно-фазовой характеристике $W_{ЛЧ}(j\omega)$ линейной части системы без элемента запаздывания. Для этого нужно на кривой $W_{ЛЧ}(j\omega)$ найти такую точку с частотой ω_{B1} , которая бы при повороте вектора $A(\omega_{B1})$ на угол $\omega_{B1}\tau_{B1}$ попала на линию $-1/W_{НЭ}(jA)$, что и даст нам точку B_1 (величина запаздывания τ_{B1} задана, ω_{B1} неизвестна). Условие для определения ω_{B1} будет

$$\tau_{B1}\omega_{B1} + |\varphi(\omega_{B1})| = +\pi, \quad (2.143)$$

после чего находится по амплитудно-фазовой характеристике $W_{ЛЧ}(j\omega_{B1})$ координата точки B_1 , а затем по графику на рис. 2.25 и амплитуда автоколебаний A_2' .

2.13. Частотный метод Попова

Данный точный метод, предложенный румынским ученым В.М. Поповым, как и метод гармонического баланса, основан на частотном критерии Найквиста, только применяется без линеаризации нелинейности. При использовании метода определяется абсолютная устойчивость системы с одной однозначной нечётно-симметричной нелинейностью.

Абсолютная устойчивость – это устойчивость в целом (при любых начальных условиях) нелинейной системы при нелинейной характеристике, принадлежащей к определенному классу.

Если в системе автоматического управления (рис. 2.26) имеется лишь одна однозначная нечётно-симметричная нелинейность, то

$$z = F(x). \quad (2.144)$$

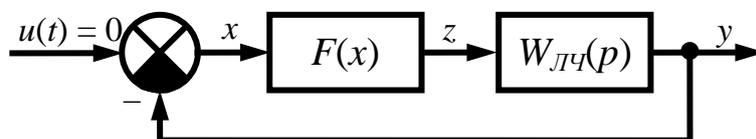


Рис. 2.26. Структурная схема системы с нелинейным элементом

При этом конкретная форма однозначной нечётно-симметричной характеристики нелинейного элемента может быть любая, в том числе нестабильная с изменяющимися параметрами, но заданная в пределах угла от 0 до α_f (рис. 2.27). В методе Попова используется параметр k_f – тангенс угла наклона линии, ограничивающей угол α_f , к оси абсцисс.

Линейная часть системы описывается частотной передаточной функцией $W_{ЛЧ}(j\omega)$, которую можно представить в дробно-рациональном виде с комплексной переменной:

$$W_{ЛЧ}(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + b_2 p^{m-2} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n}, \quad (2.145)$$

где $B(p)$ – полином числителя; $A(p)$ – полином знаменателя при $m < n$.

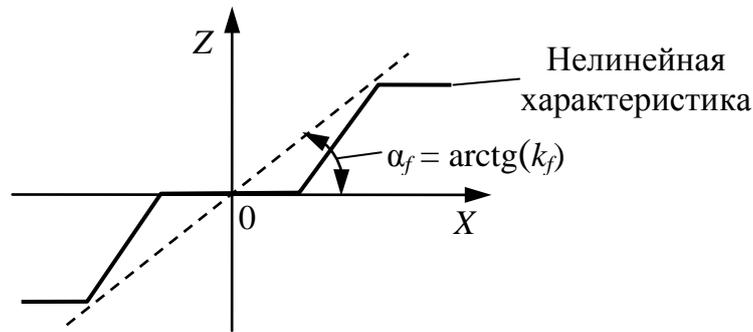


Рис. 2.27. Однозначная характеристика нелинейного элемента

При этом характеристическое уравнение линейной части системы $A(p) = 0$ имеет все корни с отрицательными вещественными частями или же кроме них имеется еще не более двух нулевых корней, что является условием применимости критерия Попова.

Формулировка теоремы Попова: для установления абсолютной устойчивости нелинейной системы достаточно подобрать такое конечное действительное число h , при котором при всех значениях частоты входного сигнала $\omega \geq 0$ будет справедливо неравенство

$$\left[\operatorname{Re}(1 + j\omega h)W_{ЛЧ}(j\omega) \right] + \frac{1}{k_f} > 0 \quad (2.146)$$

$$\text{при } 0 \leq F(x) < k_f x. \quad (2.147)$$

При наличии одного нулевого корня $p_i = 0$ или $a_n = 0$ требуется еще выполнение условия

$$\operatorname{Im}W_{ЛЧ}(j\omega) \rightarrow -\infty \text{ при } \omega \rightarrow 0, \quad (2.148)$$

а при двух нулевых корнях $p_i = p_{i+1} = 0$ или $a_n = a_{n-1} = 0$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}W_{ЛЧ}(j\omega) \rightarrow -\infty \\ \operatorname{Im}W_{ЛЧ}(j\omega) < 0 \end{cases} \text{ при } \omega \rightarrow 0. \quad (2.149)$$

Преобразовав левую часть неравенства (2.146), получим

$$\left[\operatorname{Re}(1 + j\omega h)W_{\text{ЛЧ}}(j\omega) \right] + \frac{1}{k_f} = U_{\text{ЛЧ}}(\omega) - \omega h V_{\text{ЛЧ}}(\omega) + \frac{1}{k_f}, \quad (2.150)$$

где $U_{\text{ЛЧ}}(\omega)$ и $V_{\text{ЛЧ}}(\omega)$ – действительная и мнимая части $W_{\text{ЛЧ}}(j\omega)$.

Приравняв правую часть выражения (2.150) к нулю, получим уравнение прямой, проходящей через точку $(-1/k_f; j0)$ с наклоном $1/h$, называемой **линией Попова**:

$$U_{\text{ЛЧ}}(\omega) - \omega h V_{\text{ЛЧ}}(\omega) + \frac{1}{k_f} = 0. \quad (2.151)$$

Из выражения (2.151) можно выделить модифицированную частотную характеристику линейной части системы $W_{\text{ЛЧ}}^*(j\omega)$ путем умножения мнимой части исходной частотной передаточной функции $W_{\text{ЛЧ}}(j\omega)$ на частоту ω :

$$W_{\text{ЛЧ}}^*(j\omega) = U_{\text{ЛЧ}}(\omega) + j\omega V_{\text{ЛЧ}}(\omega). \quad (2.152)$$

Модифицированная частотная характеристика линейной части системы $W_{\text{ЛЧ}}^*(j\omega)$ обладает следующими свойствами:

1. Если в исходной частотной передаточной функции $W_{\text{ЛЧ}}(j\omega)$ порядок полинома числителя не выше порядка полинома знаменателя, то $W_{\text{ЛЧ}}^*(j\omega)$ будет всегда лежать в конечной части плоскости. Это означает, что при $\omega \rightarrow \infty$ $U_{\text{ЛЧ}}(\omega)$ и $\omega V_{\text{ЛЧ}}(\omega)$ стремятся либо к нулю, либо к конечному пределу.

2. Мнимая часть модифицированной частотной характеристики $\omega V_{\text{ЛЧ}}(\omega)$ в отличие от исходной $V_{\text{ЛЧ}}(\omega)$ является чётной функцией, следовательно, модифицированная частотная характеристика $W_{\text{ЛЧ}}^*(j\omega)$ не будет симметричной относительно вещественной оси.

Графическая интерпретация теоремы Попова: для абсолютной устойчивости нелинейной системы достаточно подобрать на комплексной плоскости $[+1; j]$ такую прямую, проходящую через точку $(-1/k_f; j0)$, где k_f – угловой коэффициент нелинейной характеристики, чтобы вся кривая модифицированной частотной характеристики линейной части системы $W_{\text{ЛЧ}}^*(j\omega)$ лежала справа от этой прямой.

На рис. 2.28, а показаны модифицированный годограф Найквиста и линия Попова абсолютно устойчивой системы. Там же пунктирной линией показан немодифицированный годограф Найквиста. Эти годографы имеют одинаковые действительные части и, следовательно, пересекают действительную ось в одних и тех же точках. Мнимая часть этих годографов разная, и модифицированный годограф пересекает мнимую ось при большем значении частоты, поэтому при меньшем абсолютном значении.

На рис. 2.28, б показан случай, когда условия абсолютной устойчивости В.М. Попова не выполняется. Через точку $(-1/k_f; j0)$ нельзя провести линию Попова так, чтобы она не пересекала модифицированный годограф Найквиста. Однако через точку $(-1/k_f^*; j0)$ можно провести нужную прямую Попова (пунктирная линия). Система с такой нелинейной характеристикой, ограниченной углом $\alpha_f^* = \arctg(k_f^*)$, будет устойчивой.

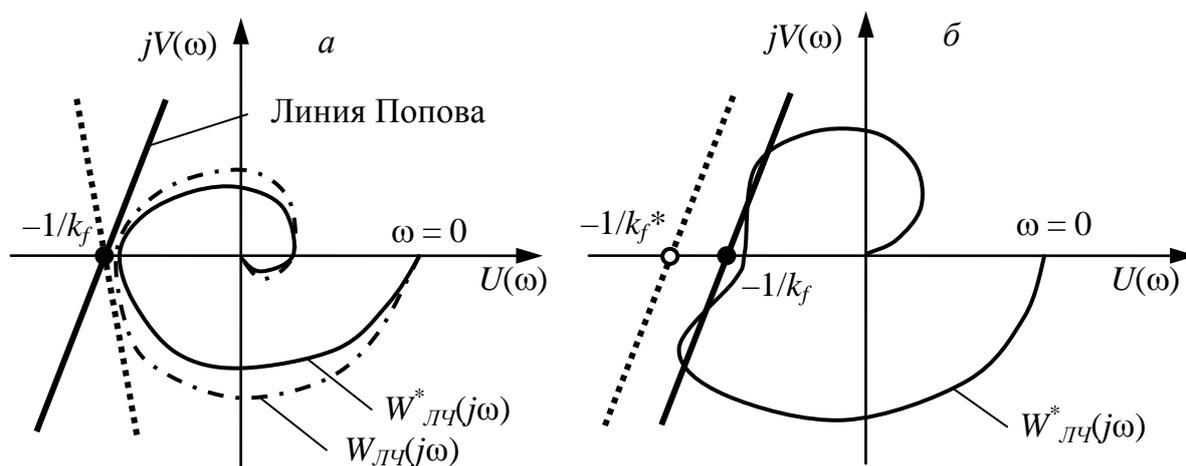


Рис. 2.28. Графическая интерпретация теоремы Попова

Сравним условие абсолютной устойчивости В.М. Попова с условием устойчивости линейной системы по критерию Найквиста. Если для нелинейности, лежащей в секторе $(0; \alpha_f)$ произведем линейризацию в виде $y = hx$, то введя такое звено в частотную характеристику Попова, получим точный аналог критерия Найквиста. Только критической точкой, которую не должна охватывать частотная характеристика Попова, будет точка с координатами $(-1/k_f; j0)$.

Условия абсолютной устойчивости нелинейной системы с модифицированным выпуклым годографом и условия линейной системы по критерию Найквиста совпадают. Пересечение оси абсцисс происходит в одних и тех же точках. Через точку пересечения $(-1/k_f; j0)$ всегда можно провести прямую Попова так, чтобы годограф был справа от неё (рис. 2.28, а). Условия абсолютной устойчивости нелинейной системы с модифицированным вогнутым годографом и условия устойчивости линейной системы по критерию Найквиста не совпадают. Точка $(-1/k_f; j0)$ может находиться внутри вогнутости и годограф Найквиста её не охватывает. Линейная замкнутая система устойчива (рис. 2.28, б), но через неё нельзя провести прямую Попова так, чтобы она не пересекла годограф, вследствие чего нелинейная система может быть неустойчива.

Дело в том, что критерий устойчивости Попова **является достаточным**, но он **не является необходимым** условием устойчивости. При его невыполнении (когда линия Попова не проводится) ещё нельзя окончательно утверждать, что нелинейная система действительно неустойчива. Для такого утверждения нужны дополнительные исследования. Но очевидно, что если точка $(-1/k_f; j0)$ находится внутри модифицированного годографа $W_{ЛЧ}^*(j\omega)$, то замкнутая система при устойчивой разомкнутой системе однозначно неустойчива.

Рассмотрим случай, когда нелинейность расположена в секторе, ограниченном углами α_0 и α_f , которым соответствуют тангенсы k_0 и k_f (рис. 2.29).

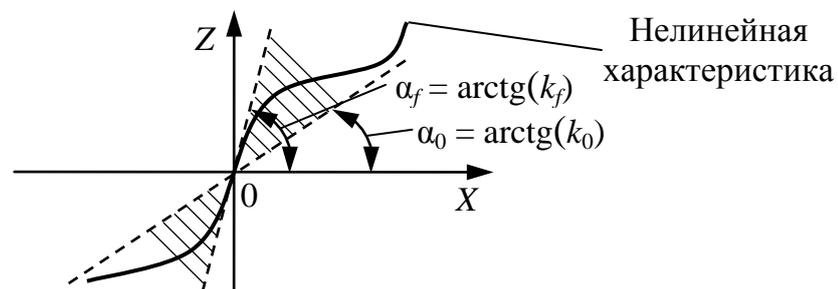


Рис. 2.29. Однозначная характеристика нелинейного элемента в секторе

Данный случай также применяется для систем с неустойчивой (нейтральной) линейной частью $W_{ЛЧ}(j\omega)$, которая при охвате жесткой отрицательной обратной связью становится устойчивой. Линейная часть системы называется нейтральной, если хотя бы один корень характеристического уравнения является нулевым, а все остальные корни – левыми. Система будет неустойчивой, если хотя бы один корень правый.

Если линейная часть системы неустойчива (нейтральна), нелинейная характеристика $F(x)$ не может уже принадлежать сектору $(0; k_f)$, так как при $k_f = 0$ система размыкается, следовательно, будет неустойчива заведомо. Очевидно, она будет неустойчива и при малых k_f . Преобразуем исходную систему, охватив нелинейный элемент прямой, а линейную часть обратной отрицательными связями с коэффициентом k_0 (рис. 2.30). Очевидно, что преобразованная схема будет эквивалентна исходной схеме, так как введенные связи взаимно компенсируются.

Тогда неравенства (2.146) по теореме Попова будет иметь вид

$$\left[\operatorname{Re} \left(1 + j\omega h \right) \frac{W_{ЛЧ}(j\omega)}{1 + k_0 W_{ЛЧ}(j\omega)} \right] + \frac{1}{k_f - k_0} > 0 \quad (2.153)$$

$$\text{при } k_0 x < F(x) < k_f x. \quad (2.154)$$

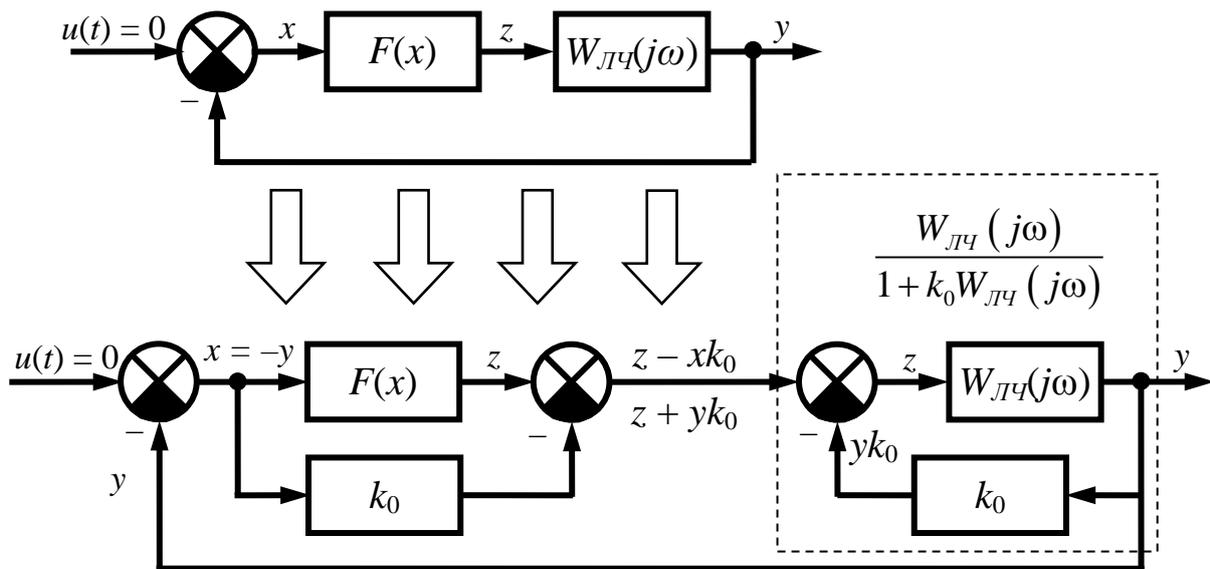


Рис. 2.30. Преобразование структурной схемы системы с нелинейным элементом

Преобразовав левую часть неравенства (2.153), получим

$$\begin{aligned}
 & [U_{ЛЧ}(\omega)]^2 + \left(\frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_f} \right) U_{ЛЧ}(\omega) - \\
 & - \left(\frac{1}{k_0} - \frac{1}{k_f} \right) \omega h V_{ЛЧ}(\omega) + [V_{ЛЧ}(\omega)]^2 + \frac{1}{k_0 k_f} > 0. \quad (2.155)
 \end{aligned}$$

Левая часть выражения (2.155), приравненная к нулю, является уравнением параболы, проходящей через точки $(-1/k_0; j0)$ и $(-1/k_f; j0)$ с наклоном касательных в данных точках $-1/h$ и $+1/h$ соответственно.

$$\begin{aligned}
 & [U_{ЛЧ}(\omega)]^2 + \left(\frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_f} \right) U_{ЛЧ}(\omega) - \\
 & - \left(\frac{1}{k_0} - \frac{1}{k_f} \right) \omega h V_{ЛЧ}(\omega) + [V_{ЛЧ}(\omega)]^2 + \frac{1}{k_0 k_f} = 0. \quad (2.156)
 \end{aligned}$$

Графическая интерпретация теоремы Попова: для абсолютной устойчивости нелинейной системы с однозначной нелинейностью, ограниченной сектором $(\alpha_0$ и $\alpha_f)$, достаточно подобрать на комплексной плоскости $[+1; j]$ такую параболу с вертикальной осью, проходящую через точки $(-1/k_0; j0)$ и $(-1/k_f; j0)$, чтобы вся кривая модифицированной частотной характеристики линейной части системы $W_{ЛЧ}^*(j\omega)$ лежала вне этой параболы (рис. 2.31).

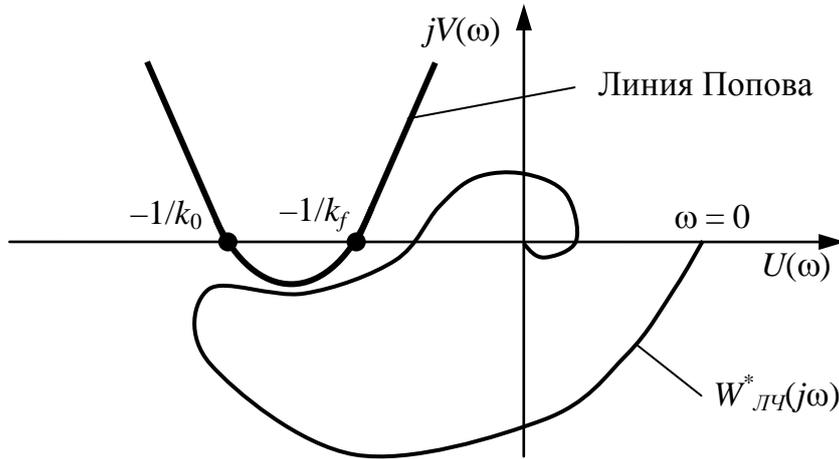


Рис. 2.31. Графическая интерпретация теоремы Попова

В качестве примера рассмотрим метод Попова для нелинейной АСУ с нелинейной характеристикой «Идеальное трехпозиционное реле» (см. табл. 1.1, п. 7). Выходная величина реле $B = 0,33$; порог срабатывания $b = 1$. Структурная схема нелинейной системы представлена на рис. 1.1. Линейная часть описывается передаточной функцией $W_{ЛЧ}(p)$.

$$W_{ЛЧ}(p) = \frac{6}{(0,5p+1)} \frac{1}{p} e^{-0,5p}. \quad (2.157)$$

Определим частотную характеристику линейной части системы

$$W_{ЛЧ}(j\omega) = \frac{6}{(0,5j\omega+1)} \frac{1}{j\omega} e^{-0,5j\omega}. \quad (2.158)$$

Определим действительную $U_{ЛЧ}(\omega)$ и мнимую $V_{ЛЧ}(\omega)$ части исходной частотной характеристики линейной части системы $W_{ЛЧ}(j\omega)$.

$$\begin{aligned} W_{ЛЧ}(j\omega) &= \frac{6}{(0,5j\omega+1)} \frac{1}{j\omega} e^{-0,5j\omega} = \frac{6(0,5j\omega-1)}{((0,5j\omega)^2-1^2)} \frac{-j}{\omega} e^{-0,5j\omega} = \\ &= \frac{6(0,5j\omega-1)}{(0,25\omega^2+1)} \frac{j}{\omega} e^{-0,5j\omega} = \frac{-3\omega-6j}{(0,25\omega^2+1)\omega} (\cos(0,5\omega) - j\sin(0,5\omega)) = \\ &= \frac{-3\omega\cos(0,5\omega) - j6\cos(0,5\omega) + j3\omega\sin(0,5\omega) - 6\sin(0,5\omega)}{(0,25\omega^2+1)\omega} = \\ &= -\frac{3\omega\cos(0,5\omega) + 6\sin(0,5\omega)}{(0,25\omega^2+1)\omega} + j \frac{3\omega\sin(0,5\omega) - 6\cos(0,5\omega)}{(0,25\omega^2+1)\omega}. \end{aligned}$$

Так как характеристическое уравнение линейной части системы имеет один нулевой корень, то требуется выполнение условия (2.148):

$$\operatorname{Im} W_{\text{ЛЧ}}(0) = \frac{3 \cdot 0 \cdot \sin(0,5 \cdot 0) - 6 \cos(0,5 \cdot 0)}{(0,25 \cdot 0^2 + 1)0} = \frac{-6}{0} \rightarrow -\infty.$$

Модифицированная частотная характеристика линейной части системы

$$W_{\text{ЛЧ}}^*(j\omega) = -\frac{3\omega \cos(0,5\omega) + 6 \sin(0,5\omega)}{(0,25\omega^2 + 1)\omega} + j \frac{3\omega \sin(0,5\omega) - 6 \cos(0,5\omega)}{(0,25\omega^2 + 1)}.$$

Определим параметр k_f – тангенс угла наклона линии, ограничивающей нелинейную характеристику, $k_f = 0,33/1 = 0,33$ (рис. 2.32).

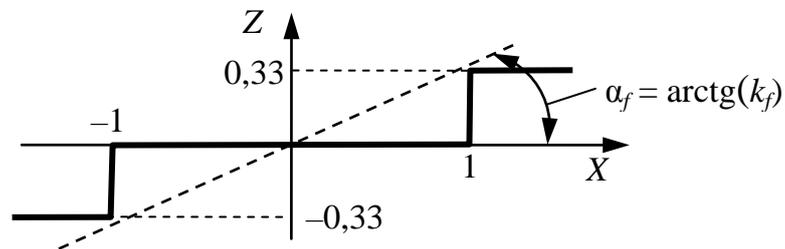


Рис. 2.32. Определение углового коэффициента нелинейной характеристики

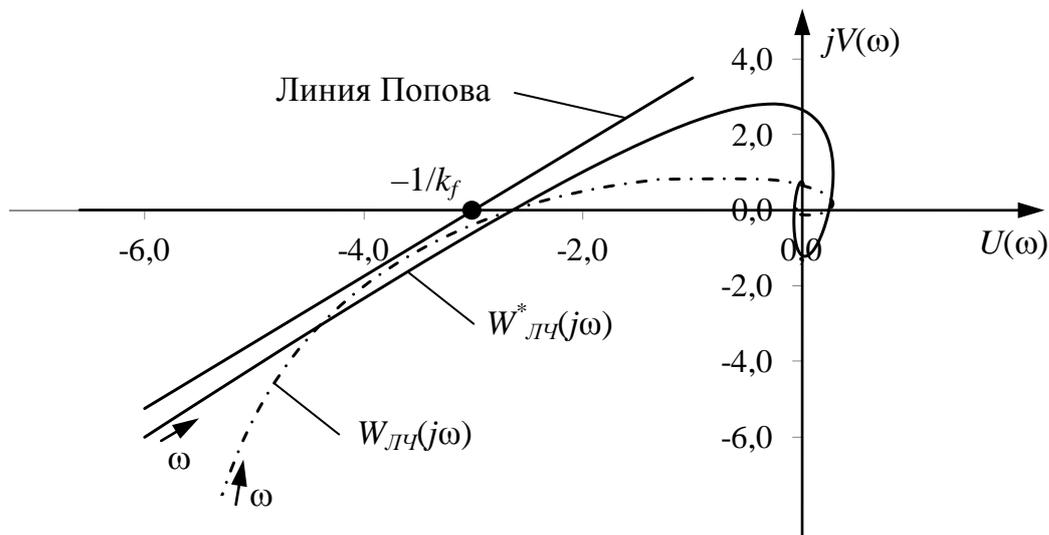


Рис. 2.33. Графическое решение метода Попова

После определения всех необходимых параметров и характеристик можно построить на комплексной плоскости $[+1; j]$ исходную и модифицированную частотные характеристики линейной части системы $W_{\text{ЛЧ}}(j\omega)$ и $W_{\text{ЛЧ}}^*(j\omega)$, а также линию Попова, проходящую через точку $(-3; j0)$ (рис. 2.33), что определяет абсолютную устойчивость нелинейной системы.

2.14. Прямой метод Ляпунова

Данный метод А.М. Ляпунова, являющийся также вторым методом, основан на построении специальных функций (функций Ляпунова) по исходным нелинейным дифференциальным уравнениям, описывающим поведение системы. Данные скалярные функции, характеризуют динамические свойства нелинейной системы и позволяют сделать вывод о её устойчивости.

В общем случае свободное движение нелинейной динамической системы описывается системой дифференциальных уравнений состояния 1-го порядка в форме Коши. Напомним, что данные уравнения получаются путём введения в исходное уравнение системы новых переменных состояния $x_i(t)$ вместо $(i - 1)$ производных выходной величины $y(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1; x_2; \dots; x_n); \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1; x_2; \dots; x_n); \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1; x_2; \dots; x_n), \end{cases} \quad (2.159)$$

где f_i – нелинейные функции координат состояния, совокупность которых определяет направление движения изображающей точки M в фазовом пространстве, т.е. вектор фазовой скорости $f\{x\} = \{f_1; f_2; \dots; f_n\}$.

При этом f_i определены и непрерывны в области $|x_i(t)| \leq H$, где H – некоторая положительная постоянная, и обращаются в начале координат в нуль:

$$f_i(0; 0; \dots; 0) = 0. \quad (2.160)$$

Функцией Ляпунова называется некоторая скалярная функция координат состояния $V(x_1; x_2; \dots; x_n)$, которая принимает вещественные значения и удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) функция однозначная;
- 2) $V\{0\} = 0$;
- 3) непрерывная вместе со своими частными производными в области $|x_i(t)| \leq H$, где H – некоторая положительная постоянная.

Функция Ляпунова $V\{x\}$ называется **знакоопределенной** (определенно-положительной или определенно-отрицательной), если в области $|x_i(t)| \leq H$ она принимает значение только одного знака и обращается в нуль только в начале координат. Например,

- определенно-положительная функция $V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$;
- определенно-отрицательная функция $V = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$.

Данные функции равны нулю только при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Функция Ляпунова $V\{x\}$ называется **знакопостоянной** (положительной или отрицательной), если в области $|x_i(t)| \leq H$ она принимает значения только одного знака и обращается в нуль в конечном числе точек заданной области фазового пространства. Например:

- $V = (x_1 - x_2)^2$, $V\{x\} = 0$ при $x_1 = x_2$, в том числе и при $x_1 = x_2 = 0$;
- $V = (x_1 - x_2)^2 + x_3^2$. $V\{x\} = 0$ при $x_1 = x_2$ и при $x_3 = 0$.

Функция Ляпунова $V\{x\}$ называется **знакопеременной**, если в области $|x_i(t)| \leq H$ она принимает значения разного знака и обращается в нуль в конечном числе точек заданной области фазового пространства. Например:

- $V = x_1 + x_2 + x_3^2$. $V\{x\} = 0$ при $x_1 = x_2$ и при $x_3 = 0$.

Такая функция для определения устойчивости системы по прямому методу Ляпунова не используется.

Наибольшее распространение для анализа широкого класса линейных и нелинейных систем получила функция Ляпунова в виде квадратичной формы (квадратичная функция)

$$V\{x\} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{ij} x_i x_j, \quad (2.161)$$

где P_{ij} – постоянные коэффициенты.

Также квадратичную функцию Ляпунова можно представить в векторно-матричном виде

$$V\{x\} = x^T P x; \quad (2.162)$$

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.163)$$

Используемая при записи квадратичной формы матрица является **симметричной**, в ней элементы симметричны относительно главной диагонали, т.е.

$$P_{ij} = P_{ji}. \quad (2.164)$$

Квадратичная форма функции Ляпунова (2.162) по **критерию Сильвестра** будет определено-положительной, если каждый из ее главных диагональных миноров будет положительным:

$$\Delta_1 = P_{11} > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{vmatrix} > 0 \text{ и т.д.} \quad (2.165)$$

В фазовом пространстве постоянному значению простейшей квадратичной функции Ляпунова ($V\{x\} = \text{const}$) соответствует поверхность при $n = 3$ или плоскость при $n = 2$ (рис. 2.34).

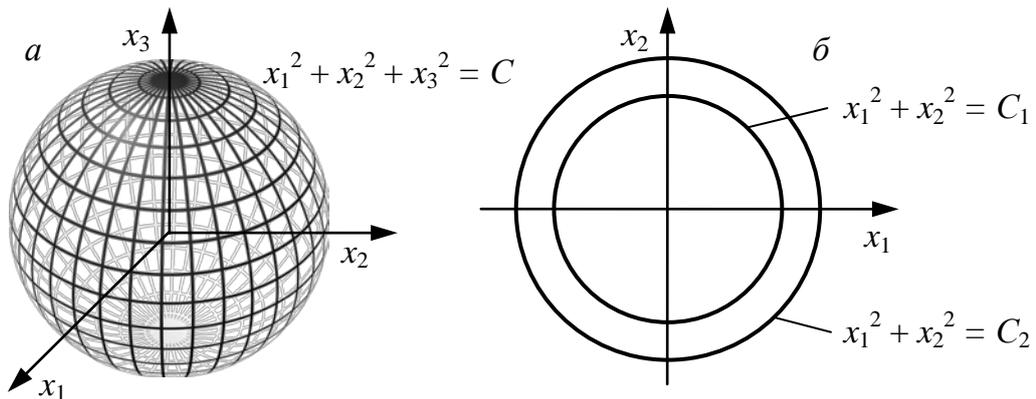


Рис. 2.33. Графическое представление функции Ляпунова:
 а – поверхность в трехмерном пространстве; б – плоскость в двухмерном пространстве

Для систем, имеющих однозначную, непрерывную, нечётно-симметричную нелинейность $F(x)$, А.И. Лурье и В.М. Постниковым была предложена функция Ляпунова как квадратичная форма от координат состояния линейной части системы плюс интеграл от нелинейности:

$$V\{x\} = x^T P x + \int_0^x F(x) dx. \quad (2.166)$$

Для аналитического решения задачи установления устойчивости составим **производную функции Ляпунова** по времени

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}. \quad (2.167)$$

Используя равенства (2.159), можно записать **полную производную функции Ляпунова по времени**, являющуюся общей функцией для системы и функции Ляпунова $V\{x\}$:

$$\frac{dV}{dt} = W\{x\} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n. \quad (2.168)$$

Очевидно, что совокупность частных производных функции Ляпунова составляет **градиент функции** $V\{x\}$, т.е. вектор, определяемый проекциями $\partial V/\partial x_i$ на оси координат фазового пространства

$$\nabla V = \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_1}; \frac{\partial V}{\partial x_2}; \dots \frac{\partial V}{\partial x_n} \right\}. \quad (2.169)$$

Тогда в результате произведения градиента функции Ляпунова $\nabla V\{x\}$ и **вектора фазовой скорости** $f\{x\} = \{f_1; f_2 \dots f_n\}$ получается тоже некоторая скалярная функция координат состояния системы

$$\frac{dV}{dt} = W\{x\} = \nabla V\{x\} \cdot f\{x\}, \quad (2.170)$$

где x – вектор координат состояния системы $x = (x_1; x_2 \dots x_n)$.

Вектор $\nabla V\{x\}$ перпендикулярен к поверхности $V = \text{const}$ в каждой её точке $x = (x_1; x_2 \dots x_n)$ и направлен в сторону возрастания значения функции Ляпунова $V\{x\}$ (рис. 2.34).

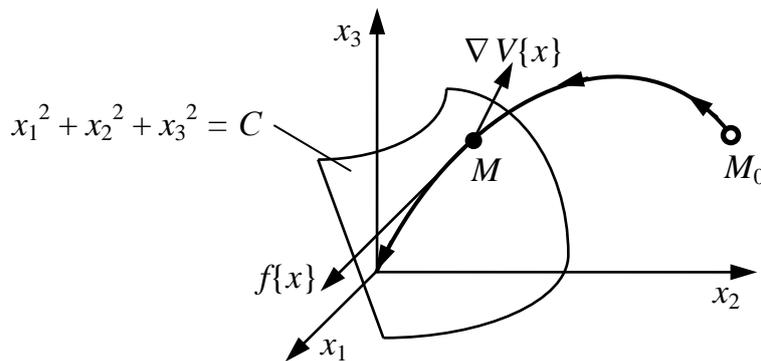


Рис. 2.34. Графическое представление градиента функции Ляпунова

Если полная производная функции Ляпунова $W\{x\} > 0$, то, согласно формуле (2.170), вектор фазовой скорости $f\{x\}$ составляет с вектором $\nabla V\{x\}$ острый угол, фазовая траектория пересекает поверхность $V\{x\} = \text{const}$ в сторону увеличения значений $V\{x\}$. Если же $W\{x\} < 0$, то угол между $f\{x\}$ и $\nabla V\{x\}$ тупой и фазовая траектория идет в сторону уменьшения значений $V\{x\}$. Уменьшение значений функции Ляпунова $V\{x\}$ при пересечении её фазовой траекторией означает приближение последней к началу координат, в случае знакоопределенной $V\{x\}$, или к некоему стационарному состоянию, в случае знакопостоянной $V\{x\}$, т.е. стремление устойчивой системы к состоянию равновесия.

На основании вышеприведенных аналитических и графических заключений А.М. Ляпуновым были сформулированы следующие теоремы об устойчивости и неустойчивости нелинейных систем.

Теорема Ляпунова об устойчивости: если для системы, свободное движение которой описывается уравнениями (2.159), существует знакоопределенная функция $V\{x\}$, полная производная которой $W\{x\}$ является знакопостоянной функцией противоположного знака, то система устойчива.

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости: если для системы, свободное движение которой описывается уравнениями (2.159), существует знакоопределенная функция $V\{x\}$, полная производная которой $W\{x\}$ является тоже знакоопределенной функцией противоположного знака, то система устойчива асимптотически.

Теорема Ляпунова о неустойчивости: если для системы, свободное движение которой описывается уравнениями (2.159), существует какая-нибудь функция $V\{x\}$, полная производная которой $W\{x\}$ является тоже знакоопределенной функцией и в любой сколь угодно малой области вокруг начала координат имеет знак, совпадающий со знаком $V\{x\}$, то система неустойчива.

Рассмотрим пример исследования функции Ляпунова на знакоопределенность. Пусть дана квадратичная форма

$$V = x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3, \{x\} \in R. \quad (2.171)$$

Если записать данную квадратичную форму в матричной форме, то элементами соответствующей матрицы будут: $P_{11} = 1$; $P_{12} = P_{21} = 2$; $P_{13} = P_{31} = 0$; $P_{22} = 5$; $P_{23} = P_{32} = -1$; $P_{33} = 3$.

Тогда главные диагональные миноры матрицы P :

$$\Delta_1 = P_{11} = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2.$$

Так как все положительны, то по критерию Сильвестра данная квадратичная форма является определено-положительной функцией.

Рассмотрим пример определения устойчивости нелинейной АСУ, свободное движение которой задано системой дифференциальных уравнений состояния 1-го порядка в форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(x_1 - \beta x_2)(1 - ax_1^2 - bx_2^2); \\ \dot{x}_2 = -(x_2 - \alpha x_1)(1 - ax_1^2 - bx_2^2), \end{cases} \quad (2.172)$$

где α, β, a, b – положительные постоянные числа; x_1, x_2 – фазовые координаты состояния системы.

Для анализа устойчивости системы выбираем положительно-определенную функцию Ляпунова в виде квадратичной формы

$$V\{x\} = \alpha x_1^2 + \beta x_2^2. \quad (2.173)$$

Находим производную от функции Ляпунова по времени:

$$\frac{dV}{dt} = 2\alpha x_1 \frac{dx_1}{dt} + 2\beta x_2 \frac{dx_2}{dt}. \quad (2.174)$$

Используя равенства (2.172), можно записать полную производную функции Ляпунова по времени:

$$\begin{aligned} W\{x\} &= \frac{dV}{dt} = -2\alpha x_1 (x_1 - \beta x_2)(1 - ax_1^2 - bx_2^2) - \\ &\quad - 2\beta x_2 (x_2 - \alpha x_1)(1 - ax_1^2 - bx_2^2) = \\ &= -2(1 - ax_1^2 - bx_2^2)(\alpha x_1^2 + \beta x_2^2). \end{aligned} \quad (2.175)$$

Тогда полная производная функции Ляпунова $W\{x\} < 0$, соответственно устойчивость системы имеется в случае, когда

$$(1 - ax_1^2 - bx_2^2) > 0 \quad (2.176)$$

или же

$$ax_1^2 + bx_2^2 < 1. \quad (2.177)$$

Границей устойчивости данной системы на плоскости её координат является эллипс (рис. 2.35).

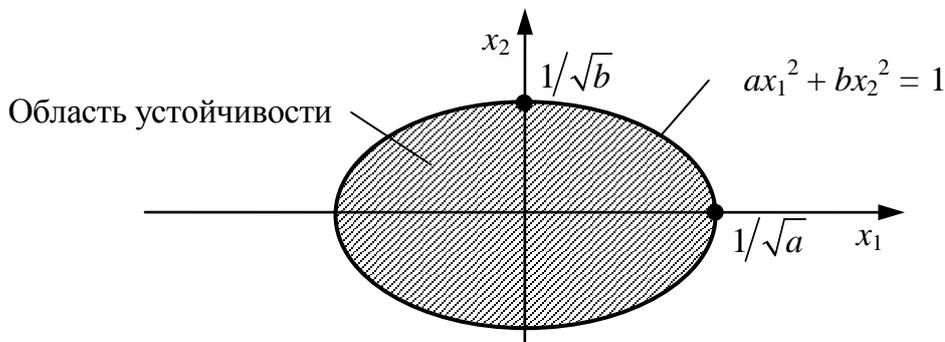


Рис. 2.35. Граница устойчивости системы

Для примера анализа устойчивости методом Ляпунова нелинейной системы, имеющей однозначную нечётно-симметричную нелинейность $F(x_3)$, например, нелинейная характеристика «Зона нечувствительности» (см. табл. 1.1, п. 1), рассмотрим свободное движение нелинейной АСУ, заданное системой дифференциальных уравнений состояния 1-го порядка в форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + F(x_3); \\ \dot{x}_2 = -F(x_3); \\ \dot{x}_3 = (\gamma - 1)x_1 + \gamma x_2 - rF(x_3), \end{cases} \quad (2.178)$$

где x_1, x_2, x_3 – фазовые координаты состояния системы; γ и r – положительные постоянные коэффициенты; $F(x_3)$ – нелинейная характеристика «Зона нечувствительности».

По рекомендациям А.И. Лурье и В.М. Постникова возьмем функцию Ляпунова как квадратичную форму от координат состояния линейной части системы плюс интеграл от нелинейности:

$$V\{x\} = (\gamma - 1)\frac{x_1^2}{2} + \gamma\frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_3} F(x_3) dx_3. \quad (2.179)$$

Данная функция $V\{x\}$ является определено-положительной, так как при условии $(\gamma - 1 > 0)$ она положительна с любыми значениями x_1, x_2, x_3 и обращается в нуль только в начале координат.

Находим производную от функции Ляпунова по времени:

$$\frac{dV}{dt} = (\gamma - 1)x_1^2 \frac{dx_1}{dt} + \gamma x_2^2 \frac{dx_2}{dt} + F(x_3) \frac{dx_3}{dt}. \quad (2.180)$$

Используя равенства (2.178), можно записать полную производную функции Ляпунова по времени:

$$\begin{aligned} W\{x\} &= \frac{dV}{dt} = (\gamma - 1)x_1^2 (-x_1 + F(x_3)) + \\ &+ \gamma x_2^2 (-F(x_3)) + F(x_3)((\gamma - 1)x_1 + \gamma x_2 - rF(x_3)) = \\ &= -(\gamma - 1)(F(x_3) - x_1)^2 - (r + 1 - \gamma)(F(x_3))^2. \end{aligned} \quad (2.181)$$

Тогда полная производная функции Ляпунова $W\{x\} < 0$ в случае

$$r > \gamma - 1 > 0. \quad (2.182)$$

Так как полная производная $W\{x\}$ является знакопостоянной функцией противоположного $V\{x\}$ знака, то система устойчива.

В случае $\gamma - 1 < 0$ функцию Ляпунова берем в виде

$$V\{x\} = (1-\gamma)\frac{x_1^2}{2} + \gamma\frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_3} F(x_3)dx_3. \quad (2.183)$$

Находим производную от функции Ляпунова по времени:

$$\frac{dV}{dt} = (1-\gamma)x_1^2 \frac{dx_1}{dt} + \gamma x_2^2 \frac{dx_2}{dt} + F(x_3) \frac{dx_3}{dt}. \quad (2.184)$$

Используя равенства (2.178), можно записать полную производную функции Ляпунова по времени:

$$\begin{aligned} W\{x\} &= \frac{dV}{dt} = (1-\gamma)x_1^2(-x_1 + F(x_3)) + \\ &+ \gamma x_2^2(-F(x_3)) + F(x_3)((\gamma-1)x_1 + \gamma x_2 - rF(x_3)) = \\ &= -(1-\gamma)x_1^2 - r(F(x_3))^2. \end{aligned} \quad (2.185)$$

Отсюда условие устойчивости системы, как условие отрицательного знакопостоянства функции $W\{x\}$, принимает вид

$$\begin{cases} r > 0; \\ 0 < \gamma < 1. \end{cases} \quad (2.186)$$

Таким образом, проведенный анализ системы методом Ляпунова позволяет оценивать влияние коэффициентов системы на её устойчивость и выявлять допустимые диапазоны значений коэффициентов для обеспечения устойчивости на этапе синтеза системы.

2.15. Определение границ абсолютной устойчивости нелинейной системы

В нелинейной АСУ может существовать такая область параметров линейной части, которая обеспечивает абсолютную устойчивость в независимости от конкретной формы нелинейной характеристики.

Для нелинейных систем с одной однозначной нечётно-симметричной нелинейностью, у которых передаточная функция линейной части обладает свойством фильтра низких частот, можно определять устойчивость как свойство затухания переходных процессов. Граница устойчивости может быть определена как граница области существования периодических собственных колебаний в системе, т.е. как граница появления пары чисто мнимых корней в характеристическом уравнении гармонически линеаризованной системы.

Пусть автоматическая система (см. рис. 2.6) с одной однозначной нечётно-симметричной нелинейностью $F(x)$ имеет передаточную функцию линейной части

$$W_{ЛЧ}(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}. \quad (2.187)$$

Заметим, что характеристическое уравнение системы при гармонической линеаризации нелинейной зависимости, в случае однозначной нелинейности $F(x)$ ($q'(A) = 0$), имеет вид

$$Q(p) + R(p)q(A) = 0. \quad (2.188)$$

Наличие пары чисто мнимых корней в характеристическом уравнении гармонически линеаризованной системы можно определить по критерию Гурвица. При их наличии последний определитель Гурвица $\Delta_{n-1} = 0$, а остальные определители положительные при любых возможных значениях $q(A)$ (для систем третьего и четвертого порядка это означает просто положительность коэффициентов характеристического уравнения).

Таким образом, условие абсолютной устойчивости системы:

$$\Delta_{n-1}(q) > 0 \quad (2.189)$$

$$\text{при } 0 \leq q(A) \leq \infty, \quad (2.190)$$

где $q(A)$ – коэффициент гармонической линеаризации нелинейного элемента.

Граница этой области устойчивости определяется как совокупность параметров линейной части системы, при которой в нуль обращается значение определителя $\Delta_{n-1}(q)$, а его наименьшее значение имеет характер минимума функции. В результате получаем два уравнения:

$$\begin{cases} \Delta_{n-1}(q) = 0; \\ \frac{\partial \Delta_{n-1}(q)}{\partial q} = 0. \end{cases} \quad (2.191)$$

Исключив из этих двух уравнений величину $q(A)$, можно найти границу области абсолютной устойчивости, которая будет зависеть только от параметров линейной части системы.

Рассмотрим метод определения абсолютной устойчивости на конкретном примере. Дана структурная схема системы (рис. 2.36). Определим взаимосвязь параметров линейной части системы, обеспечиваю-

щую абсолютную устойчивость системы с нелинейным элементом $F(x)$, обладающим однозначной нечётно-симметричной нелинейностью.

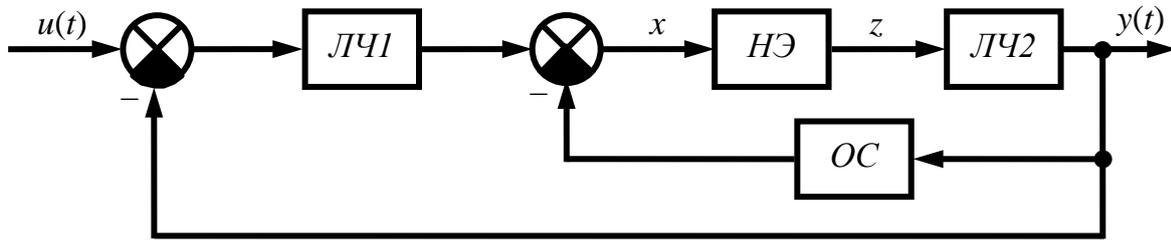


Рис. 2.36. Структурная схема нелинейной АСУ

Система задана передаточными функциями:

$$W_{ЛЧ1} = \frac{K_1}{(T_1 p + 1)}; \quad (2.192)$$

$$W_{ЛЧ2} = \frac{K_2}{(T_2 p + 1)p}; \quad (2.193)$$

$$W_{ОС}(p) = K_{ОС}. \quad (2.194)$$

Определим передаточную функцию части системы, замкнутой местной отрицательной обратной связью с коэффициентом $K_{ОС}$:

$$W_{МОС}(p) = \frac{\frac{K_2}{(T_2 p + 1)p} F(x)}{1 + \frac{K_2 K_{ОС}}{(T_2 p + 1)p} F(x)} = \frac{K_2 F(x)}{(T_2 p + 1)p + K_2 K_{ОС} F(x)}. \quad (2.195)$$

Определим передаточную функцию всей замкнутой системы:

$$\begin{aligned} W_{ЗАМ}(p) &= \frac{\frac{K_1}{(T_1 p + 1)} W_{МОС}(p)}{1 + \frac{K_1}{(T_1 p + 1)} W_{МОС}(p)} = \\ &= \frac{K_1 K_2 F(x)}{(T_1 p + 1)(T_2 p^2 + p + K_2 K_{ОС} F(x)) + K_1 K_2 F(x)}. \end{aligned} \quad (2.196)$$

Запишем характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы, т.е. при $F(x) = q(A)x$

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + (1 + q(A) T_1 K_2 K_{ОС}) p + K_2 q(A) (K_{ОС} + K_1) = 0. \quad (2.197)$$

На границе устойчивости согласно формуле (2.191), имеем

$$\begin{cases} \Delta_{n-1}(q) = T_1 + T_2 + q(A)T_1K_2(T_1K_{oc} - T_2K_1) = 0; \\ \frac{\partial \Delta_{n-1}(q)}{\partial q} = T_1K_2(T_1K_{oc} - T_2K_1) = 0. \end{cases} \quad (2.198)$$

Параметр, характеризующий нелинейную зависимость $q(A)$, не вошёл в последнее уравнение. Границу абсолютной устойчивости определяем по параметрам линейной части системы (рис. 2.37)

$$T_1K_{oc} = T_2K_1. \quad (2.199)$$

Дополнительно необходимо проверить положительность остальных определителей Гурвица. Для системы третьего порядка положительность остальных определителей (Δ_1 и Δ_2) сводится к положительности коэффициентов характеристического уравнения.

$$\begin{cases} T_1 + T_2 > 0; \\ K_{oc} > -K_1. \end{cases} \quad (2.200)$$

Таким образом, нелинейная АСУ с одной однозначной нечётно-симметричной нелинейностью $F(x)$ будет абсолютно устойчивой при следующем соотношении параметров линейной части системы:

$$\begin{cases} K_{oc} > \frac{T_2K_1}{T_1}; \\ K_{oc} > -K_1. \end{cases} \quad (2.201)$$

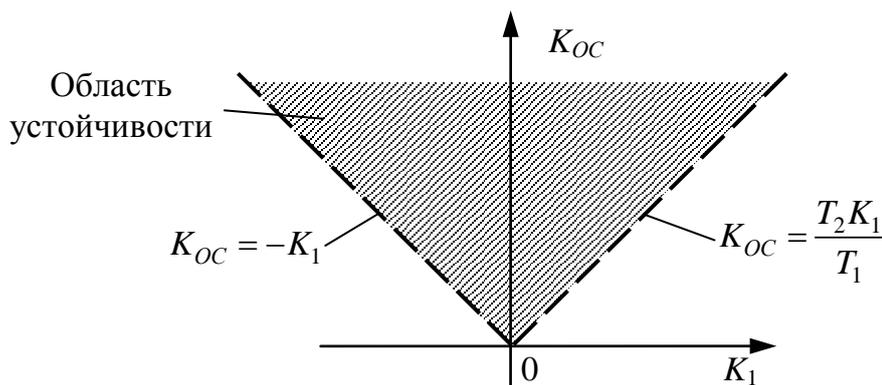


Рис. 2.37. Граница и область абсолютной устойчивости

Рассмотрим случай, когда возможные значения $F(x)$ при нечётно-симметричной нелинейной характеристике могут содержаться в интервале угла, ограниченного прямыми k_0x и $k_f x$ (см. рис. 2.29).

При гармонической линеаризации интервал значений $0 \leq q(A) \leq \infty$ в действительности имеет место только для идеального реле. Для нелинейной характеристики, лежащей в интервале угла, значение $q(A)$ заключено в пределах

$$q(A)_{\min} \leq q(A) \leq q(A)_{\max}. \quad (2.202)$$

В таком случае дополнительную область устойчивости определяют в зависимости от максимального и минимального значений коэффициента гармонической линеаризации для каждого вида нелинейной характеристики.

Вначале границу области абсолютной устойчивости определяют при $0 \leq q(A) \leq \infty$ согласно (2.191). Это решение дает достаточные условия устойчивости при любой форме однозначной нелинейной характеристики и при любом интервале изменения коэффициента гармонической линеаризации. Затем получают дополнительную область устойчивости за счёт ограничения интервала фактически возможного изменения коэффициента гармонической линеаризации (учет границ нелинейности). Для этого в уравнения (2.191) надо подставить значения $q(A)_{\min}$ и $q(A)_{\max}$. Чем более узкий сектор, где разместилась вся нелинейная характеристика, тем больше будет область дополнительной границы абсолютной устойчивости. Такое решение дает необходимые и достаточные условия устойчивости при заданной форме однозначной нелинейной характеристики. Кроме этого, по условию (2.189) при различных варьируемых параметрах линейной части можно определить область устойчивого автоколебательного режима (см. рис. 2.16).

2.16. Анализ одночастотных вынужденных колебаний

Исследование вынужденных колебаний нелинейных систем представляет собой в общем сложную задачу в связи с отсутствием суперпозиции отдельных решений, а также существенным изменением поведения системы в зависимости от размера амплитуды колебаний, с наличием не единственного установившегося режима и возможностью перескоков с одного режима на другой, с особенностями высших гармоник, субгармоник, комбинационных частот и с многими другими факторами.

Рассмотрим случай одночастотных вынужденных колебаний, т.е. колебаний нелинейной системы с частотой внешнего периодического воздействия, и найдем условия их существования.

Форма колебаний, как и прежде, на основании свойства фильтра линейной части системы будет считаться близкой к синусоидальной для переменной x , стоящей под знаком нелинейной функции. При рассмотрении вынужденных колебаний во многих случаях возникают ограничения, накладываемые на амплитуду и частоту внешнего периодического воздействия (зависящие также и от параметров системы) и обуславливающие существование одночастотных вынужденных колебаний в нелинейной системе. Будем их кратко называть **условиями захватывания** (в указанном широком смысле). Особое значение эти условия приобретают для автоколебательных систем при частотах, близких к частоте автоколебаний и выше.

Пусть нелинейная АСУ (см. рис. 1.1) с одной нелинейностью $F(x)$ имеет передаточную функцию линейной части, обладающую свойством фильтра низких частот.

Рассмотрим влияние на систему внешнего возмущающего гармонического воздействия f с известной амплитудой B' и частотой ω' :

$$f(t) = B' \sin \omega' t. \quad (2.203)$$

Уравнения линейной части системы и нелинейного элемента в операторной форме:

$$\begin{cases} Q(p)y = R(p)z + S(p)f; \\ z = F(x) = -F(y). \end{cases} \quad (2.204)$$

Уравнение динамики замкнутой системы в операторной форме при $u(t) = 0$ имеет вид

$$Q(p)y = -R(p)F(y) + S(p)f. \quad (2.205)$$

Возможные вынужденные колебания выходной величины с частотой ω' , амплитудой A' и фазой φ' запишем как

$$y = A' \sin(\omega' t + \varphi'). \quad (2.206)$$

После гармонической линеаризации нелинейного элемента его уравнение в операторной форме имеет вид

$$z = -\left(q(A) + q'(A) \frac{p}{\omega'} \right) y, \quad (2.207)$$

где коэффициенты гармонической линеаризации $q(A)$ и $q'(A)$ определяются согласно формулам (2.75) и (2.78).

Тогда уравнение замкнутой системы (2.205) с учетом формул (2.203), (2.206) и (2.207) примет вид:

$$\left[Q(p) + R(p) \left(q(A) + q'(A) \frac{p}{\omega'} \right) \right] A' \sin(\omega't + \varphi') = S(p) B' \sin \omega't. \quad (2.208)$$

Для отыскания периодического решения вынужденных колебаний выходной величины используем символический метод определения, перейдя в частотную область и заменив $p = j\omega'$, а вместо $\sin \omega't$ подставив выражение $e^{j\omega't}$. Тогда получим

$$\left[Q(j\omega') + R(j\omega')(q(A) + jq'(A)) \right] A' e^{j(\omega't + \varphi')} = S(j\omega') B' e^{j\omega't}; \quad (2.209)$$

$$\frac{\left[Q(j\omega') + R(j\omega')(q(A) + jq'(A)) \right]}{S(j\omega')} A' = B' \frac{e^{j\omega't}}{e^{j(\omega't + \varphi')}}; \quad (2.210)$$

$$\frac{\left[Q(j\omega') + R(j\omega')(q(A) + jq'(A)) \right]}{S(j\omega')} A' = B' e^{-j\varphi'}. \quad (2.211)$$

Левая часть (2.211) обозначается $Z(A)$ и представляет собой комплексный годограф замкнутой системы с переменным параметром амплитуды A , определяемый при постоянной частоте внешнего гармонического воздействия ω' .

Выражение (2.211) остается справедливым и для нелинейных систем с временным запаздыванием τ и принимает вид

$$\frac{\left[Q(j\omega') + e^{-j\omega'\tau} R(j\omega')(q(A) + jq'(A)) \right]}{S(j\omega')} A' = B' e^{-j\varphi'}. \quad (2.212)$$

Уравнение (2.211) с двумя неизвестными A' и φ' можно решить графически, как показано на рис. 2.38. Правая часть (2.211) изображается на комплексной плоскости $[+1; j]$ в виде окружности радиуса B , а левая часть $Z(A)$ строится как кривая по точкам при постоянной частоте ω' и различных значениях амплитуды A . Точки пересечения окружности с кривой $Z(A)$ дают периодическое решение, причем величина амплитуды вынужденных колебаний определяется в точке пересечения по кривой $Z(A)$, а фаза – по величине угла φ' (см. рис. 2.38).

На рис. 2.38 окружность пересекает кривую $Z(A)$ только при радиусе, большем некоторого порогового значения $B > B_{кр}$. Следовательно, в этом случае одночастотные вынужденные колебания (2.206) возможны только при достаточно большой амплитуде B , а при меньшей амплитуде B внешнего воздействия будет иметь место сложное движение, включающее в себя и собственную частоту системы.

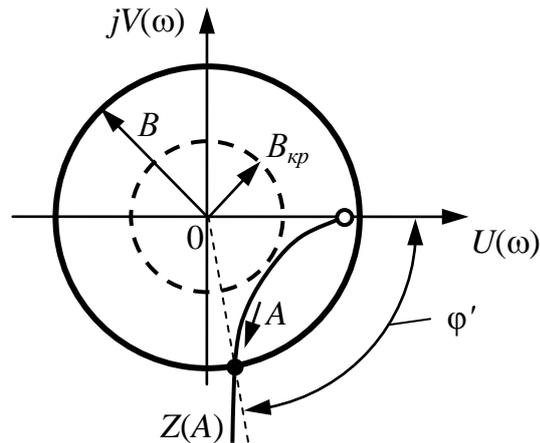


Рис. 2.38. Графическое определение параметров вынужденных колебаний

Построив серию кривых $Z(A)$ по формуле (2.211) для разных значений частоты внешнего гармонического воздействия ω' (рис. 2.39, а), можно определить зависимость порогового значения $B_{кр}$ от ω' (рис. 2.39, б), где ω_a – частота автоколебаний данной системы. Тогда мы получим область значений B и ω' , в которой существуют одночастотные вынужденные колебания, т.е. **область захватывания**.

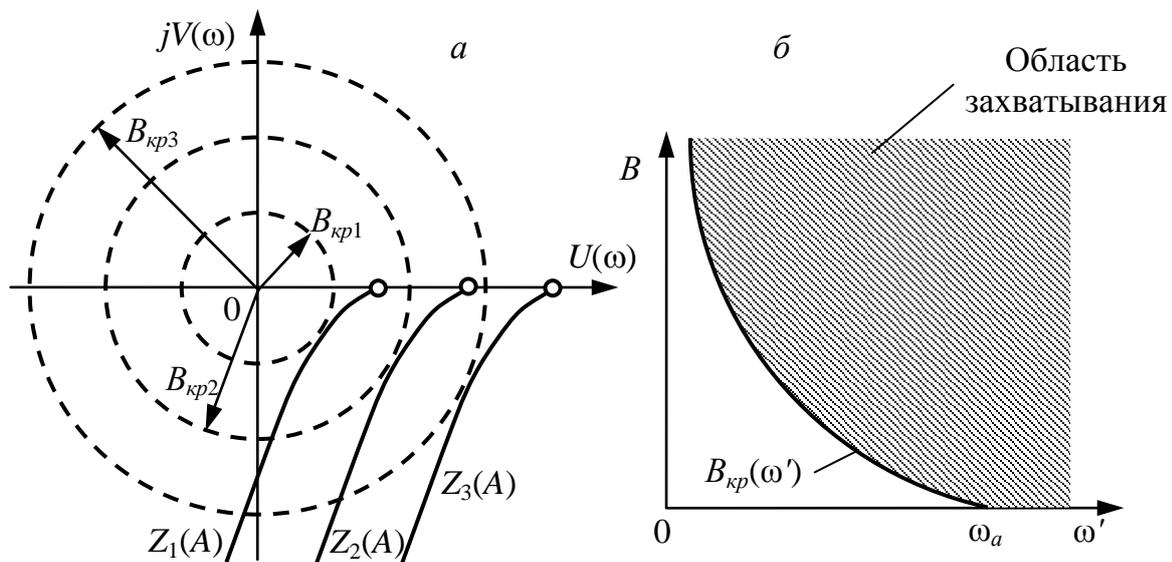


Рис. 2.39. Определение области захватывания

Явление захватывания состоит в том, что при $B > B_{кр}$ собственные колебания (автоколебания) срываются и система переходит целиком на одночастотные вынужденные колебания с частотой внешнего воздействия ω' . Данные одночастотные вынужденные колебания в соответствии со свойством фильтра низких частот линейной части системы для переменной x будут только близки к синусоидальным.

Рассмотрим анализ одночастотных вынужденных колебаний на примере нелинейной АСУ (см. рис. 1.1) с нелинейной частью, обладающей типовой нелинейной характеристикой $F(x)$ «Двухпозиционное реле с гистерезисом» (см. табл. 1.1, п. 8) с параметрами B_p и b_p .

Уравнения линейной части системы и нелинейного элемента в операторной форме:

$$\begin{cases} (T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p y = K z + (T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p f; \\ z = F(x) = -F(y). \end{cases} \quad (2.213)$$

Уравнение динамики замкнутой системы в операторной форме при $u(t) = 0$ имеет вид

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p y = -K F(y) + (T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p f. \quad (2.214)$$

Пусть внешнее возмущающее гармоническое воздействие f на систему является гармоническим с амплитудой B' и частотой ω' :

$$f(t) = B' \sin \omega' t. \quad (2.215)$$

Тогда, согласно формуле (2.211), получим

$$\left[1 - \frac{K(q(A) + jq'(A))}{(T_1 + T_2)\omega' - j\omega'(1 - T_1 T_2 \omega'^2)} \right] A' = B' e^{-j\varphi'}. \quad (2.216)$$

Для заданной частоты $\omega' = 10$ рад/с и заданных параметров линейной части системы $K = 10$; $T_1 = 0,01$; $T_2 = 0,02$ и реле $B_p = 10$; $b_p = 4$ кривая $Z(A)$ изображена на рис. 2.40, а. Проведя окружности разных радиусов B , по точкам пересечения определим зависимости $A'(B')$ и $\varphi'(B')$ (рис. 2.40, б) для вынужденных колебаний при частоте ω' .

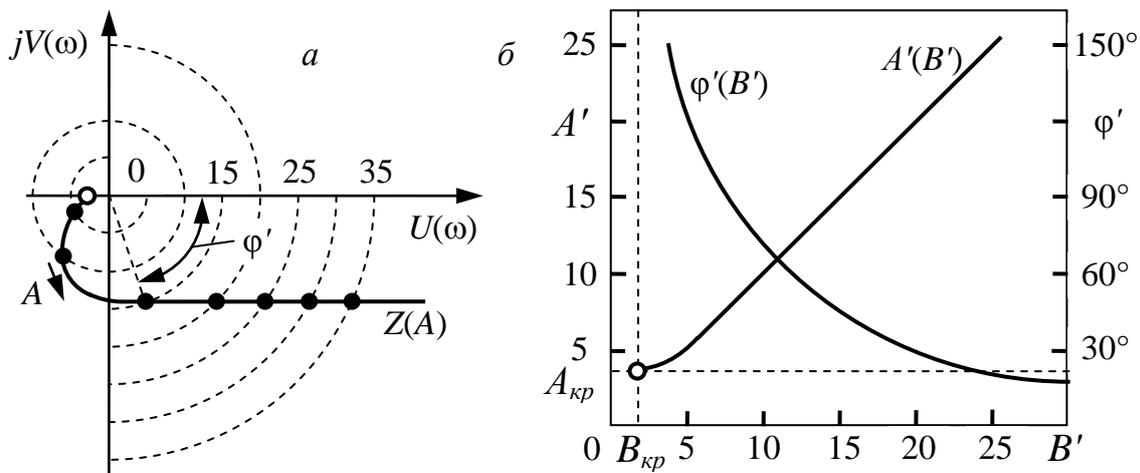


Рис. 2.40. Определение области захватывания

Контрольные вопросы и задания

1. Перечислите основные параметры, характеризующие динамику работы существенно нелинейных систем.
2. Что такое фазовое пространство, изображающая точка, фазовая траектория и фазовый портрет?
3. Какие существуют типовые фазовые траектории и какие особые точки им соответствуют?
4. Как связаны переходная и импульсная характеристики с фазовой траекторией системы?
5. Поясните процесс получения параметрического и дифференциального уравнений фазовых траекторий системы.
6. Перечислите основные свойства фазовых траекторий.
7. Что такое изоклина и какие изоклины называют главными?
8. В чем суть гармонической линеаризации и в каком случае её можно применять?
9. Что называется гармонической передаточной функцией нелинейного элемента?
10. В чем состоит свойство фильтра низких частот линейной части системы?
11. В чем суть алгебраического метода определения автоколебаний в нелинейной системе?
12. В чем суть метода гармонического баланса?
13. Назовите два условия гармонического баланса.
14. От чего зависит и как строится обратная амплитудно-фазовая характеристика нелинейности с обратным знаком?
15. Что такое абсолютная устойчивость системы?
16. Сформулируйте теорему Попова и её графическую интерпретацию для нелинейности, ограниченной сектором $(0$ и $\alpha_f)$ и $(\alpha_0$ и $\alpha_f)$.
17. Что называется линией Попова и как её построить?
18. Как получить модифицированную частотную характеристику линейной части системы?
19. Что является функцией Ляпунова?
20. Что значит знакоопределенность, знакопостоянство и знакопеременность функции Ляпунова?
21. Как проверить знакоопределенность функции Ляпунова в виде квадратичной формы?
22. Что такое полная производная функции Ляпунова по времени?
23. Сформулируйте теоремы Ляпунова об устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости.

3. КАЧЕСТВО РЕГУЛИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Оценка качества регулирования в нелинейной автоматической системе является такой же важной задачей, как и в линейной. Основными показателями качества регулирования являются: время регулирования t_p , перерегулирования σ , колебательность μ , а также амплитуда A' и частота ω' автоколебаний. Определить эти показатели качества наиболее точными методами можно по кривой переходного процесса.

Метод припасовывания позволяет провести построение переходной характеристики по отдельным линеаризованным участкам нелинейной зависимости и затем проводить их совмещение. Оценка качества регулирования системы по фазовому портрету является достаточно простым и наглядным методом, но получить фазовый портрет можно только для системы с линейной частью не выше второго порядка. Для анализа качества переходного процесса с любым видом нелинейности и высоким порядком линейной части системы наиболее эффективным является использование гармонической линеаризации.

3.1. Построение переходной характеристики нелинейной системы методом припасовывания

Часто нелинейные системы представляются как кусочно-линейные, т.е. их динамические свойства описываются линейными дифференциальными уравнениями, разными для разных участков процесса управления. **Метод припасовывания** состоит в том, что линейные дифференциальные уравнения решаются в общем виде отдельно для каждого участка процесса, на котором они справедливы. Затем на каждом участке в полученных решениях произвольные постоянные определяются таким образом, чтобы все соседние участки правильно состыковывались друг с другом. Это делается следующим образом: по заданным начальным условиям процесса определяются произвольные постоянные в общем решении для первого участка. Значения координат выходной величины в конце первого участка служат начальными условиями для второго участка и т.д.

Вообще говоря, описанная схема метода припасовывания может быть применена и тогда, когда какой-либо участок описывается нелинейным дифференциальным уравнением при условии, когда известно его общее решение.

Рассмотрим использование метода припасовывания для определения переходного процесса и для устойчивого периодического решения (автоколебаний) на примере нелинейной системы (см. рис. 2.6) с типовой нелинейной характеристикой $F(x)$ «Двухпозиционное реле с гистерезисом» (см. табл. 1.1, п. 8) с параметрами B и b .

Уравнение динамики линейной части системы в операторной форме имеет вид

$$(T_1 p + 1)y = \frac{Kz}{p}. \quad (3.1)$$

Уравнение нелинейного элемента при $u(t) = 0$ описывается нелинейной функцией

$$z = F(x) = -F(y), \quad (3.2)$$

где $x = -y$ и $F(-y) = -F(y)$, так как нелинейная релейная характеристика нечётно-симметричная (см. рис. 2.6).

Общее нелинейное дифференциальное уравнение динамики замкнутой системы имеет вид

$$T_1 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = -K \cdot F(y). \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) разбивается на участки 1-2, 2-3 и т.д., внутри которых в соответствии с нелинейной характеристикой функция $F(y)$ принимает постоянные значения $+B$ или $-B$ (рис. 3.1).

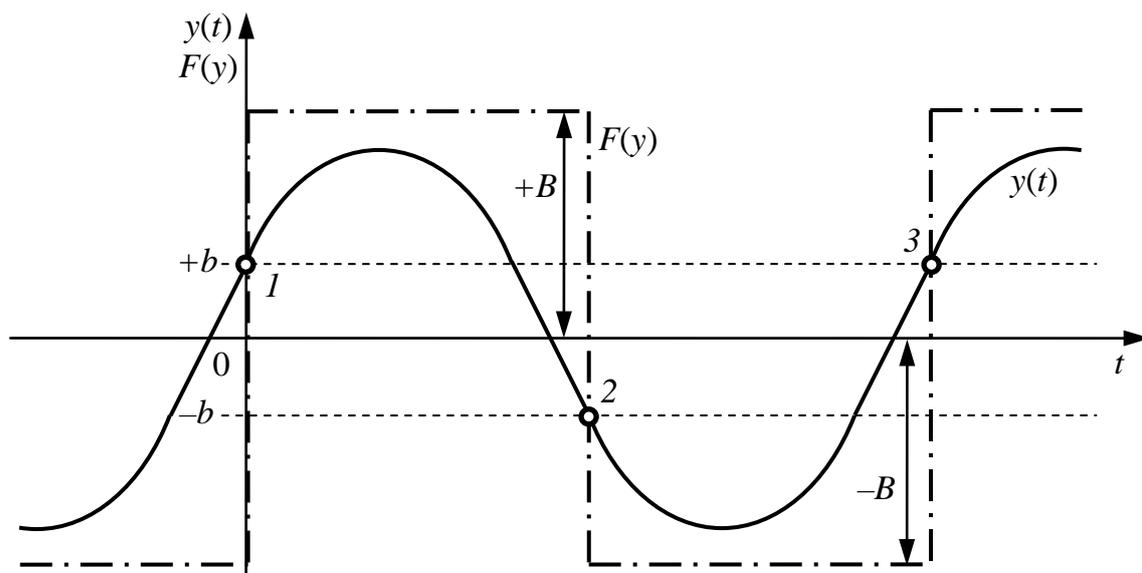


Рис. 3.1. Разбиение участков переходной характеристики

Рассчитаем движение выходной координаты системы отдельно на участках 1-2 и 2-3 (рис. 3.2), отсчитывая время t на каждом из них от нуля. На участке 1-2, согласно формуле (3.3), уравнение динамики замкнутой системы имеет вид

$$T_1 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = -KB, \quad (3.4)$$

проинтегрировав которое дважды получим уравнение движения выходной координаты системы

$$\frac{dy}{dt} = C_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - KB; \quad (3.5)$$

$$y(t) = -T_1 C_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - KBt + C_2. \quad (3.6)$$

Начальные условия для участка 1-2:

$$t = 0; y = b; dy/dt = y'_1.$$

По ним из формул (3.5) и (3.6) находим

$$C_1 = y'_1 + KB; \quad (3.7)$$

$$C_2 = b + T_1 C_1. \quad (3.8)$$

На участке 2-3, согласно выражению (3.3), уравнение динамики замкнутой системы имеет вид

$$T_1 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = KB, \quad (3.9)$$

проинтегрировав которое дважды получим уравнение движения выходной координаты системы:

$$\frac{dy}{dt} = C_3 e^{-\frac{t}{T_1}} + KB; \quad (3.10)$$

$$y(t) = -T_1 C_3 e^{-\frac{t}{T_1}} + KBt + C_4. \quad (3.11)$$

Начальные условия для участка 2-3:

$$t = 0; y = -b; dy/dt = y'_2.$$

Начальное условие для участка 2-3 в точке 2: y'_2 определяется на основании решения уравнений (3.5) и (3.6) для предыдущего участка 1-2 при значении величин $y = -b$ и $t = t_2$:

$$y_2' = C_1 e^{\frac{t_2}{T_1}} - KB; \quad (3.12)$$

$$-b = -T_1 C_1 e^{\frac{t_2}{T_1}} - KB t_2 + C_2. \quad (3.13)$$

Постоянные времени C_3 и C_4 определяем из формул (3.10) и (3.11), отсчитывая время t на участке 2-3 снова от нуля ($t = 0$):

$$C_3 = y_2' - KB; \quad (3.14)$$

$$C_4 = -b + T_1 C_3. \quad (3.15)$$

На следующем за точкой 3 участке снова, как и на 1-2, будет решаться уравнение (3.4), при этом постоянные интегрирования определяются с учетом координат конца предыдущего участка 2-3 и т. д.

По построенной переходной характеристике можно определить амплитуду A' и частоту ω' автоколебаний.

Однако задачу определения амплитуды A' и частоты ω' автоколебаний можно решить аналитически, в этом случае расстояние 1-3 по оси времени (см. рис. 3.1) является периодом автоколебаний. Вся кривая 1-2-3 после точки 3 должна повторяться в точности в том же виде. Вследствие нечётной симметрии характеристики $F(x)$ «Двухпозиционное реле с гистерезисом» (см. табл. 1.1, п. 8) должна иметь место нечётная симметрия полупериодов 1-2 и 2-3. Поэтому для определения устойчивого периодического решения (автоколебаний) достаточно рассмотреть один полупериод – участок 1-2.

Обозначим через T^* полупериод искомых автоколебаний. В силу периодичности решения начало и конец участка 1-2 должны удовлетворять равенствам:

$$\begin{cases} y_2' = -y_1'; \\ y_2 = -y_1 = -b \end{cases} \text{ при } t = T^*. \quad (3.16)$$

Первое условие (3.16), согласно уравнениям (3.5) и (3.7), принимает вид

$$C_1 e^{\frac{T^*}{T_1}} - KB = -(C_1 - KB), \quad (3.17)$$

откуда
$$C_1 = \frac{2KB}{1 + e^{\frac{T^*}{T_1}}}. \quad (3.18)$$

Второе условие (3.16), согласно уравнениям (3.6) и (3.8), запишется в виде

$$-b = -T_1 C_1 e^{\frac{T^*}{T_1}} - KBT + b + T_1 C_1. \quad (3.19)$$

Подставив сюда выражение C_1 из формулы (3.18), придем к уравнению

$$\operatorname{th} \frac{T^*}{2T_1} = \frac{T^*}{2T_1} - \frac{b}{KBT_1} \quad (3.20)$$

с одной неизвестной величиной – полупериодом автоколебаний T^* .

Трансцендентное уравнение (3.20) легко решается графически. Введем обозначения:

$$\begin{cases} z_1(T^*) = \operatorname{th} \frac{T^*}{2T_1}; \\ z_2(T^*) = \frac{T^*}{2T_1} - \frac{b}{KBT_1}. \end{cases} \quad (3.21)$$

Построив графики функций $z_1(T^*)$ и $z_2(T^*)$ и найдя точку их пересечения (см. рис. 3.2), определим полупериод автоколебаний T^* .

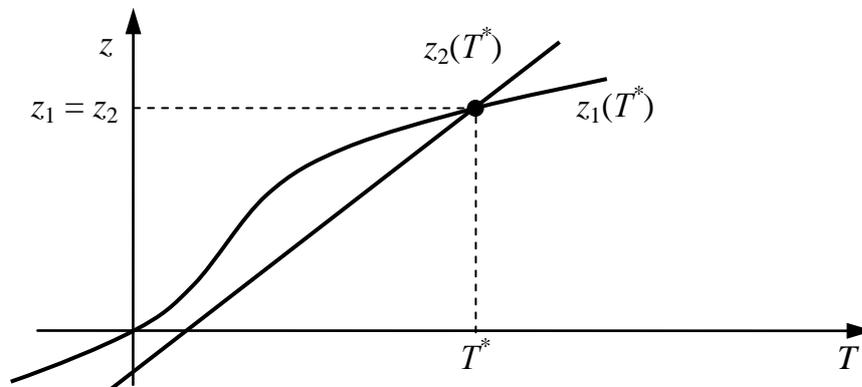


Рис. 3.2. Нахождение полупериода автоколебаний T^*

Частота автоколебаний

$$\omega' = \frac{2\pi}{2T^*} = \frac{2\pi}{T}. \quad (3.22)$$

Амплитуда автоколебаний определится как y_{\max} на участке 1-2 (см. рис. 3.1), т.е. из условия $dy/dt = 0$. При этом из уравнения (3.5)

$$C_1 e^{\frac{t_{\max}}{T_1}} = KB, \quad (3.23)$$

где постоянная C_1 определится по формуле (3.18), а t_{\max} – время максимума выходной величины. Определим его из формулы (3.23) совместно с выражением (3.18):

$$e^{-\frac{t_{\max}}{T_1}} = \frac{1 + e^{-\frac{T^*}{T_1}}}{2}; \quad (3.24)$$

$$t_{\max} = -T_1 \ln \frac{1 + e^{-\frac{T^*}{T_1}}}{2}. \quad (3.25)$$

Далее по формуле (3.6) совместно с выражением (3.8) определим амплитуду автоколебаний A' .

$$A' = y_{\max} = -T_1 C_1 e^{-\frac{t_{\max}}{T_1}} - K B t_{\max} + b + T_1 C_1. \quad (3.26)$$

Таким образом, задача определения амплитуды A' и частоты ω' автоколебаний решена аналитически.

3.2. Качество колебательных переходных процессов нелинейных систем. Диаграммы качества

Рассмотрим определение качества колебательных переходных процессов в нелинейных системах, которые в первом приближении могут быть описаны затухающей или расходящейся синусоидой с **показателем затухания** ζ и частотой ω . Эти процессы могут быть затухающими до нуля или до амплитуды автоколебаний и расходящимися изнутри до амплитуды автоколебаний или же расходящимися неограниченно в случае неустойчивости (рис. 3.3).

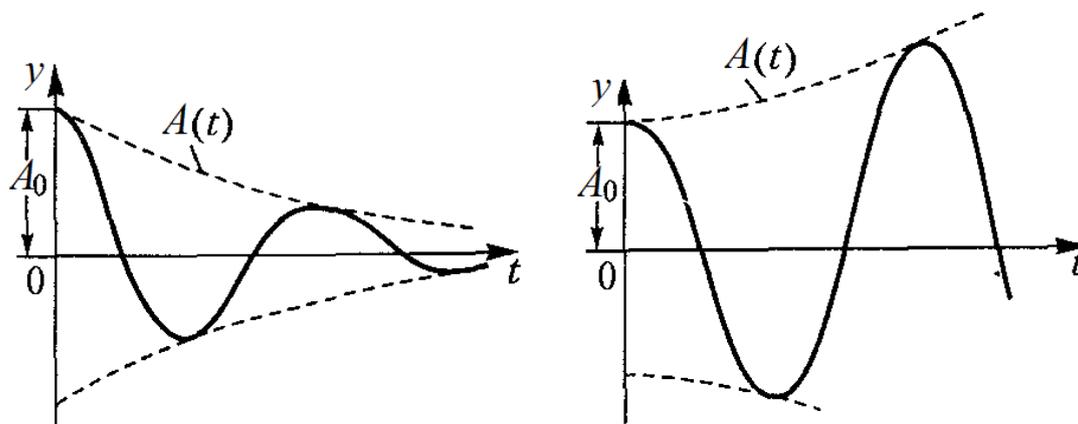


Рис. 3.3. Графики колебательных переходных процессов

Как уже говорилось ранее, с достаточной для практики точностью симметричный колебательный переходный процесс в нелинейных автоматических системах часто может быть описан выражением

$$y = A(t) \sin \varphi(t), \quad (3.27)$$

где $A(t)$ – переменная амплитуда колебаний; $\varphi(t)$ – переменная фаза колебаний.

Причем в отличие от линейных систем показатель затухания колебаний ζ и частота колебаний ω системы во время переходного процесса не являются постоянными величинами.

Поэтому выражение для амплитуды колебаний $A(t)$ следует определять в виде дифференциальной зависимости

$$A(t) = A_0 e^{\int_0^t \zeta dt} \quad \text{или} \quad \frac{dA}{dt} = A\zeta, \quad (3.28)$$

где A_0 – начальное значение амплитуды колебаний, определяемое начальными условиями. Выражение (3.28) говорит о том, что огибающая колебаний (см. рис. 3.3) состоит из элементарных отрезков экспонент с непрерывно меняющимся показателем ζ .

В частном случае для линейных систем, когда $\zeta = \text{const}$, получим выражение

$$A(t) = A_0 e^{\zeta t}. \quad (3.29)$$

Если же частота ω и показатель затухания ζ в процессе колебаний меняются с течением времени, т.е. в случае нелинейной системы, то решение следует записывать в другом виде согласно формулам (3.28) и (3.30).

Также для нелинейных систем текущее значение частоты колебаний ω в переходном режиме имеет вид

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{или} \quad \varphi(t) = \int_0^t \omega dt + \varphi_0. \quad (3.30)$$

Таким образом, симметричный колебательный переходный процесс в нелинейных автоматических системах находим в виде

$$\begin{cases} y = A \sin \varphi; \\ \frac{dA}{dt} = A\zeta; \\ \omega = \frac{d\varphi}{dt}. \end{cases} \quad (3.31)$$

Искомыми неизвестными здесь являются показатель затухания ζ , амплитуда A и частота колебаний ω . Причем при положительном значении показателя затухания ζ колебания расходятся до амплитуды автоколебаний или бесконечности, а при $\zeta < 0$ колебания сходятся до нуля или до амплитуды автоколебаний.

Одним из условий применимости гармонической линеаризации для исследования переходных процессов в нелинейных системах является требование медленности изменения величин ζ и ω во времени по сравнению с периодом колебаний. На быстроту изменения амплитуды A ограничений не накладывается (нужно лишь, чтобы весь процесс затухания протекал быстрее, чем за один период, иначе вообще не будет колебаний).

В связи с этим формулы гармонической линеаризации при исследовании переходных процессов имеют некоторую особенность по сравнению с формулами для исследования автоколебаний. Для выходной величины, описываемой формулой (3.27), имеем выражение сигнала на входе нелинейной функции $z = F(x)$ (см. п. 2.9)

$$px = A\omega \cos \varphi + A\zeta \sin \varphi, \quad (3.32)$$

откуда
$$\cos \varphi = \frac{p - \zeta}{A\omega} x. \quad (3.33)$$

Поэтому первая гармоника (затухающая или расходящаяся) на выходе нелинейной функции $z = F(x)$ (см. п. 2.9) при изменении выходной величины согласно выражению (3.27) имеет вид

$$z = q(A)x + q'(A) \frac{p - \zeta}{\omega} x = \left(q(A) - q'(A) \frac{\zeta}{\omega} \right) x + \frac{q'(A)}{\omega} px. \quad (3.34)$$

В данном случае коэффициенты гармонической линеаризации $q(A)$ и $q'(A)$ сохраняют свой вид для конкретной симметричной нелинейности и могут быть определены по формулам (2.58) и (2.59) или по табл. 2.1 (см. п. 2.9).

ГПФ нелинейного элемента в данном случае будет

$$W_{HЭ}(p) = \frac{z(p)}{x(p)} = q(A) + q'(A) \frac{p - \zeta}{\omega}. \quad (3.35)$$

Частотная ГПФ линеаризованного нелинейного звена при подстановке $p = \zeta + j\omega$, что соответствует ближайшей к мнимой оси паре комплексных корней, повторяет выражение (2.62) и имеет вид

$$W_{HЭ}(jA) = q(A) + jq'(A). \quad (3.36)$$

В случае автоматической системы (см. рис. 2.6) с одной нелинейностью $F(x)$ и передаточной функцией линейной части, обладающей свойством фильтра низких частот,

$$W_{ЛЧ}(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}. \quad (3.37)$$

Уравнения линейной части системы и нелинейного звена при входном воздействии $u(t) = 0$ в операторной форме:

$$\begin{cases} Q(p)y = R(p)z; \\ z = F(x) = -F(y). \end{cases} \quad (3.38)$$

Тогда уравнение замкнутой системы в операторной форме примет вид

$$Q(p)y = -R(p)F(y). \quad (3.39)$$

После гармонической линеаризации нелинейного элемента, согласно формуле (3.34), его уравнение в операторной форме имеет вид

$$z = -\left(q(A) + q'(A) \frac{p - \zeta}{\omega} \right) y. \quad (3.40)$$

Тогда уравнение замкнутой системы (3.39) с учетом выражения (3.40) в операторной форме примет вид

$$\left[Q(p) + R(p) \left(q(A) + q'(A) \frac{p - \zeta}{\omega} \right) \right] y = 0. \quad (3.41)$$

Запишем характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы

$$Q(p) + R(p) \left(q(A) + q'(A) \frac{p - \zeta}{\omega} \right) = 0. \quad (3.42)$$

Затухающий или расходящийся колебательный переходный процесс (3.31) в нелинейной системе, описываемой уравнением (3.41), соответствует паре комплексных корней $p_{1,2} = \zeta \pm j\omega$ характеристического уравнения (3.42). Поэтому для отыскания этого решения перейдем в частотную область, заменив оператор $p = \zeta + j\omega$. Получим характеристическое уравнение в частотной форме

$$Q(\zeta + j\omega) + R(\zeta + j\omega)(q(A) + jq'(A)) = 0. \quad (3.43)$$

В комплексном уравнении (3.43) содержатся три неизвестных: ζ , ω и A , последняя из которых входит в коэффициенты гармонической линеаризации $q(A)$ и $q'(A)$.

Для отыскания решения уравнения (3.43) при высокой степени полинома подстановку $p = \zeta + j\omega$ целесообразно осуществлять путем разложения в ряд по степеням $j\omega$.

$$Q(\zeta + j\omega) = Q(\zeta) + j\omega \left(\frac{dQ}{dp} \right)_{\zeta} + \frac{1}{2!} (j\omega)^2 \left(\frac{d^2 Q}{dp^2} \right)_{\zeta} \dots + \frac{1}{n!} (j\omega)^n \left(\frac{d^n Q}{dp^n} \right)_{\zeta}, \quad (3.44)$$

где индекс « ζ » означает, что в выражения производных надо подставить показатель затухания ζ вместо оператора Лапласа p . По такой же формуле разлагается в ряд и многочлен $R(\zeta + j\omega)$.

При малых значениях ζ (для медленно затухающих процессов) удобнее применять разложение по степеням ζ , ограничиваясь его первой степенью, а именно:

$$Q(\zeta + j\omega) = Q(j\omega) + \zeta \left(\frac{dQ}{dp} \right)_{j\omega}, \quad (3.45)$$

где индекс $j\omega$ означает, что в выражения производных надо подставить $j\omega$ вместо оператора p . По такой же упрощенной формуле разлагается в ряд и многочлен $R(\zeta + j\omega)$.

Подставив полученный разложением в ряд многочлен в характеристическое уравнение (3.43), можно выделить его вещественную и мнимую части, что дает два уравнения:

$$\begin{cases} U(\zeta, A, \omega) = 0; \\ V(\zeta, A, \omega) = 0. \end{cases} \quad (3.46)$$

Данная система позволяет найти две неизвестные переменные как функцию третьей – $\zeta(A)$ и $\omega(A)$ или $\omega(\zeta)$.

При проектировании наибольший интерес представляет задача синтеза, т. е. задача определения параметров системы, обеспечивающих предъявленные к системе технические требования. Поэтому зачастую не требуется построение кривой переходного процесса, и исследование может проводиться с точки зрения оценки влияния какого-либо параметра, например, $K_{ЛЧ}$ – общего коэффициента усиления линейной части системы, на показатель затухания ζ и частоту колебаний ω . Это достигается построением так называемых **диаграмм качества** затухания симметричных нелинейных колебаний.

Диаграмма качества представляет собой семейства линий равно-го затухания $\zeta = \text{const}$ и линий равного значения частоты колебаний $\omega = \text{const}$, построенных на плоскости в прямоугольных координатах (рис. 3.4). Одной из координат всегда является амплитуда колебаний A , а другой – параметр системы, например, $K_{ЛЧ}$, подбирая который можно получить необходимое качество переходного процесса.

Диаграмма качества затухания симметричных нелинейных колебаний показывает, как изменяются быстрота затухания переходного процесса и частота колебаний системы при изменении амплитуды колебаний. Такие диаграммы позволяют более удобно производить синтез нелинейных автоматических систем.

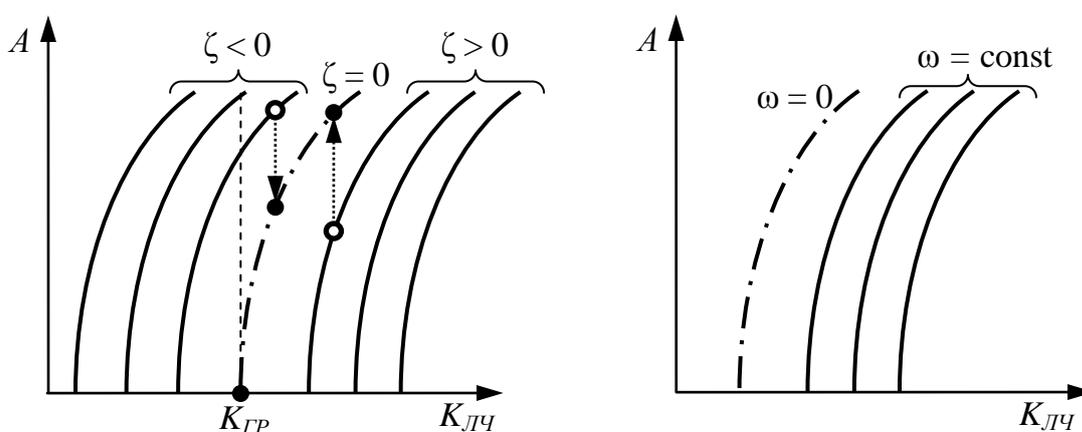


Рис. 3.4. Диаграммы качества затухания симметричных нелинейных колебаний

Для линейной системы линии $\zeta = \text{const}$ и $\omega = \text{const}$ в тех же координатах имели бы вид вертикальных прямых, так как показатель затухания и частота колебательных переходных процессов в линейной системе не зависят от величины амплитуды колебаний A , а меняются только с изменением параметров системы (в данном случае $K_{ЛЧ}$). В нелинейной же системе эти линии искривляются (см. рис. 3.4) или просто наклоняются в зависимости от формы нелинейности и общей структуры системы. Это выражает собой изменение показателя затухания ζ и частоты ω нелинейных колебательных переходных процессов с изменением величины амплитуды колебаний A .

Особое значение имеют две линии: $\zeta = 0$ и $\omega = 0$. $\zeta = 0$ соответствует периодическому решению, а по линии $\omega = 0$ можно ориентировочно оценивать границу между монотонными и колебательными переходными процессами в области устойчивости нелинейной системы.

Если линии $\zeta > 0$ расположены ниже, чем $\zeta = 0$, а $\zeta < 0$ – выше, то периодическое решение устойчиво, т. е. оно соответствует автоколебаниям. Тогда линия $\zeta = 0$ непосредственно дает нам зависимость

амплитуды автоколебаний A от параметра $K_{ЛЧ}$. Кроме того, с помощью линии $\zeta = 0$ в этом случае определяется колебательная граница устойчивости $K_{ГР}$ нелинейной системы по параметру $K_{ЛЧ}$.

Левее значения $K_{ГР}$ на рис. 3.4 будет область абсолютной устойчивости, так как переходные процессы затухают ($\zeta < 0$) при любом начальном отклонении, причем дается количественная оценка быстроты затухания (величина ζ). По величине ω можно оценить при этом и число колебаний за время затухания переходного процесса от заданной начальной до заданной конечной амплитуды.

Правее значения $K_{ГР}$ лежит область неустойчивых колебаний, т.е. все колебательные процессы сходятся (если начальная точка на прямой $K_{ЛЧ}(A)$ лежит выше линии $\zeta = 0$) или расходятся (если начальная точка на прямой $K_{ЛЧ}(A)$ лежит ниже линии $\zeta = 0$), стремясь к устойчивому автоколебательному режиму. В первом случае амплитуда колебаний A уменьшается, а во втором – увеличивается (см. рис. 3.4).

Если же линии $\zeta > 0$ расположены выше, чем $\zeta = 0$, а $\zeta < 0$ – ниже, то периодическое решение неустойчиво. Линия $\zeta = 0$ в этом случае дает границу начальных отклонений, до которой равновесное состояние нелинейной системы устойчиво (устойчивость «в малом» и неустойчивость «в большом»).

Итак, построив диаграммы качества затухания нелинейных переходных процессов по разным параметрам системы, можно произвести выбор оптимальных значений данных параметров, осуществив тем самым синтез нелинейной автоматической системы.

При необходимости изменения структуры системы путем введения корректирующих устройств следует построить такие диаграммы по основным параметрам вводимых устройств.

3.3. Показатели качества регулирования нелинейных систем

График переходного процесса наиболее наглядно характеризует динамические свойства системы. По этому графику можно определить время регулирования (время переходного процесса) t_p , перерегулирование σ , статическую ошибку δ . Все эти показатели качества регулирования достаточно просто определяются в линейных системах. В нелинейных системах при построении графика переходного процесса делается ряд серьезных допущений.

Во-первых, используется гармоническая линеаризация. Во-вторых, при затухающих колебаниях время переходного процесса уменьшается, так как нелинейное звено дополнительно гасит колеба-

ния. При возрастающей амплитуде время переходного процесса дополнительно увеличивается за счёт нелинейного звена. В-третьих, понятия «время регулирования» и «перерегулирование» в колебательном переходном процессе имеет другой физический смысл по сравнению с линейной системой.

В нелинейной системе, которая находится в зоне притяжения, и один устойчивый колебательный процесс переходит к другому устойчивому колебательному процессу. Тогда время регулирования отмеряет интервал времени между двумя соседними устойчивыми колебательными режимами, а перерегулирование характеризуется **средним значением переходного колебательного процесса**, которое определяется средним значением амплитуды и частоты во время $t = 0,5t_p$.

Время затухания переходного процесса на заданном интервале (от начальной A_0 до конечной амплитуды A_1) определяется в соответствии с выражениями (3.28) как

$$t_p = \int_{A_0}^{A_1} \frac{dA}{A\zeta(A)}, \quad (3.47)$$

где $\zeta(A)$ – аналитическая зависимость коэффициента затухания от амплитуды колебания A .

Однако в большинстве практических задач зависимость $\zeta(A)$ имеет достаточно сложный вид, и точное определение величины интеграла связано со значительными затруднениями.

В данном случае более целесообразным является определение t_p в виде суммы $\Delta t_i (i = 1, \dots, k)$, считая на каждом из отрезков величину $\zeta(A)$ постоянной:

$$t_p = \sum_{i=1}^k \Delta t_i; \quad (3.48)$$

$$\Delta t_i = \int_{A_{0i}}^{A_{0i} + \Delta A_i} \frac{dA}{A\zeta(A)} = \frac{1}{\zeta\left(A_{0i} + \frac{\Delta A_i}{2}\right)} \ln \frac{A_{0i} + \Delta A_i}{A_{0i}}. \quad (3.49)$$

Быстро, но более грубо длительность переходного процесса может определяться по среднему значению ζ_{cp} на всем интервале изменения амплитуды колебаний (от A_0 до A_1). Тогда

$$t_p = \frac{1}{\zeta_{cp}} \ln \frac{A_1}{A_0}. \quad (3.50)$$

Однако при использовании среднего значения ζ_{cp} необходима осторожность, когда имеется значительное изменение ζ . Важно иметь в виду, что линия $\zeta = 0$ является границей между затухающими и расходящимися процессами. Поэтому процесс не переходит через линию $\zeta = 0$, а либо асимптотически приближается к ней, либо удаляется от нее.

Число колебаний в переходном процессе за время t_p с учетом разности фаз колебаний $\Delta\varphi$ определяют по формуле

$$m = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{A_0}^{A_1} \frac{\omega(\zeta) dA}{A\zeta(A)} \approx \frac{\omega_{cp}}{2\pi} t_p \approx \frac{t_p}{T_{cp}}, \quad (3.51)$$

где $\omega(\zeta)$ – аналитическая зависимость частоты колебаний ω от коэффициента затухания ζ ; ω_{cp} и T_{cp} – среднее значение периода и частоты колебаний в переходном процессе.

Величину перерегулирования δ при начальной амплитуде колебаний A_0 и среднем их значении в переходном режиме A_{cp} можно определить, используя средние значения частоты ω_{cp} и показателя затухания колебаний ζ_{cp} во время $t = 0,5t_p$:

$$\delta = \frac{A_{cp}}{A_0} \cdot 100\% = e^{-\frac{\pi \zeta_{cp}}{\omega_{cp}}} \cdot 100\%. \quad (3.52)$$

Таким образом, используя вышеприведенные показатели качества, можно с достаточной степенью точности количественно оценить качество регулирования нелинейной автоматической системы в переходном режиме.

3.4. Анализ качества регулирования одноконтурной нелинейной системы

Рассмотрим анализ качества регулирования одноконтурной нелинейной системы (см. рис. 2.6) с типовой нелинейной характеристикой $F(x)$ «Идеальное трехпозиционное реле» (см. табл. 1.1, п. 7). Выходная величина реле $B = 100$, порог срабатывания реле $b = 1$. Постоянные времени линейной части системы $T_1 = 0,05$; $T_2 = 0,2$. Коэффициент усиления линейной части системы $K_{лч}$ подлежит исследованию.

Пусть уравнение динамики линейной части системы имеет вид

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p u = K_{лч} z, \quad (3.53)$$

а уравнение нелинейного элемента $HЭ$ при входном воздействии $u(t) = 0$ описывается нелинейной функцией

$$z = F(x) = -F(y), \quad (3.54)$$

где $x = -y$ и $F(-y) = -F(y)$, так как нелинейная релейная характеристика нечётно-симметричная (см. рис. 2.6).

Уравнение замкнутой системы в операторной форме будет иметь вид

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p y = -K_{лч} F(y). \quad (3.55)$$

После гармонической линейзации нелинейного элемента «Идеальное трехпозиционное реле» его уравнение в операторной форме имеет вид

$$z = -q(A) y, \quad (3.56)$$

где коэффициент гармонической линейзации $q(A)$ определяется согласно табл. 2.1, а коэффициент $q'(A) = 0$.

Запишем характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + K_{лч} q(A) = 0. \quad (3.57)$$

Для отыскания пары комплексных корней $p_{1,2} = \zeta \pm j\omega$ характеристического уравнения (3.57), соответствующих колебательному переходному процессу, перейдем в частотную область, заменив оператор $p = \zeta + j\omega$. Получим характеристическое уравнение в частотной форме

$$T_1 T_2 (\zeta + j\omega)^3 + (T_1 + T_2) (\zeta + j\omega)^2 + (\zeta + j\omega) + K_{лч} q(A) = 0. \quad (3.58)$$

Осуществим, согласно (3.44), разложение характеристического полинома $D(\zeta + j\omega)$ в ряд по степеням $j\omega$.

$$D(\zeta + j\omega) = D(\zeta) + j\omega \left(\frac{dD}{dp} \right)_{\zeta} + \frac{1}{2!} (j\omega)^2 \left(\frac{d^2 D}{dp^2} \right)_{\zeta} + \frac{1}{3!} (j\omega)^3 \left(\frac{d^3 D}{dp^3} \right)_{\zeta}; \quad (3.59)$$

$$D(\zeta) = T_1 T_2 \zeta^3 + (T_1 + T_2) \zeta^2 + \zeta + K_{лч} q(A); \quad (3.60)$$

$$\left(\frac{dD}{dp} \right)_{\zeta} = 3T_1 T_2 \zeta^2 + 2(T_1 + T_2) \zeta + 1; \quad (3.61)$$

$$\frac{1}{2!} \left(\frac{d^2 D}{dp^2} \right)_{\zeta} = 3T_1 T_2 \zeta + (T_1 + T_2); \quad (3.62)$$

$$\frac{1}{3!} \left(\frac{d^3 D}{dp^3} \right)_{\zeta} = T_1 T_2. \quad (3.63)$$

Выделим, согласно формуле (3.46), действительную часть характеристического полинома $U(\zeta, A, \omega)$, получаемую из слагаемых, не содержащих мнимой единицы j (первый и третий член ряда), и мнимую часть $V(\zeta, A, \omega)$, получаемую из слагаемых выражения, содержащих мнимую единицу j (второй и четвёртый член ряда).

$$\begin{cases} T_1 T_2 \zeta^3 + (T_1 + T_2) \zeta^2 + \zeta + K_{ЛЧ} q(A) - (3T_1 T_2 \zeta + (T_1 + T_2)) \omega^2 = 0; \\ 3T_1 T_2 \zeta^2 \omega + 2(T_1 + T_2) \zeta \omega + \omega - T_1 T_2 \omega^3 = 0. \end{cases} \quad (3.64)$$

Выделим величину ω из уравнения мнимой части $V(\zeta, A, \omega)$.

$$\omega^2 = \frac{3T_1 T_2 \zeta^2 + 2(T_1 + T_2) \zeta + 1}{T_1 T_2}. \quad (3.65)$$

Как видно из формулы (3.65), частота колебаний ω не зависит от коэффициента усиления линейной части системы $K_{ЛЧ}$, а зависит только от показателя затухания колебаний ζ и постоянных времени линейной части системы T_1 и T_2 .

Полученное выражение (3.65) для ω^2 подставляем в уравнение вещественной части $U(\zeta, A, \omega)$. Тогда

$$\begin{aligned} & T_1 T_2 \zeta^3 + (T_1 + T_2) \zeta^2 + \zeta + K_{ЛЧ} q(A) - \\ & - \frac{(3T_1 T_2 \zeta + (T_1 + T_2))(3T_1 T_2 \zeta^2 + 2(T_1 + T_2) \zeta + 1)}{T_1 T_2} = 0. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Из этого уравнения выделяем коэффициент усиления линейной части системы $K_{ЛЧ}$.

$$\begin{aligned} K_{ЛЧ} = & \frac{(3T_1 T_2 \zeta + (T_1 + T_2))(3T_1 T_2 \zeta^2 + 2(T_1 + T_2) \zeta + 1)}{q(A) T_1 T_2} - \\ & - \frac{T_1 T_2 \zeta^3 + (T_1 + T_2) \zeta^2 + \zeta}{q(A)}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

С учетом численных значений постоянных времени линейной части системы выражение (3.65) приобретает вид

$$\omega(\zeta) = \sqrt{3\zeta^2 + 50\zeta + 100}. \quad (3.68)$$

На рис. 3.5 изображен график зависимости $\omega(\zeta)$. Нулевым значениям частоты колебаний ω соответствуют значения показателя затухания колебаний $\zeta_1 = -14,3426$ и $\zeta_2 = -2,3241$, при которых переходный процесс в области устойчивости нелинейной системы будет монотонным. При $\zeta = 0$ величина $\omega = 10$ рад/с, в этой точке наблюдаются автоколебания, к которым стремится выходная величина системы.

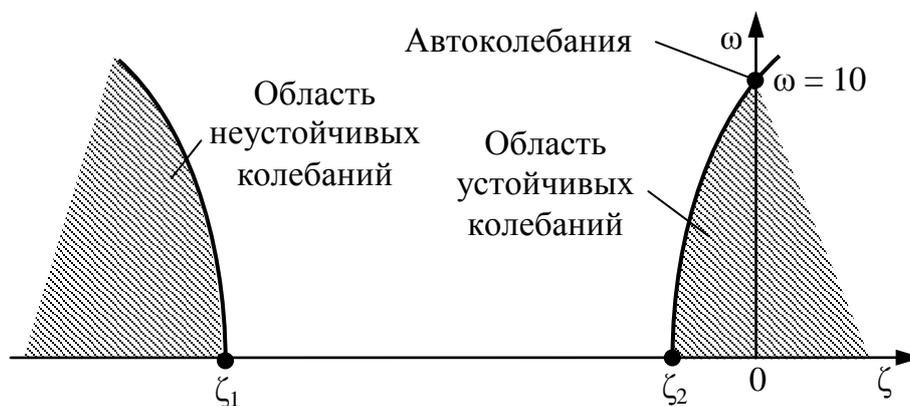


Рис. 3.5. График зависимости $\omega(\zeta)$

С учетом численных значений постоянных времени линейной части системы, параметров реле и коэффициента гармонической линеаризации $q(A)$ выражение (3.67) приобретает вид

$$K_{ЛЧ}(A, \zeta) = \frac{\pi A^2}{400\sqrt{A^2 - 1}} (0,021\zeta^3 + 2\zeta^2 + 15,25\zeta + 25). \quad (3.69)$$

Согласно зависимости $K_{ЛЧ}(A, \zeta)$ (3.69), рассчитаем значения коэффициента усиления линейной части системы $K_{ЛЧ}$ для значений показателя затухания колебаний $-14,3426 \geq \zeta \geq -2,3241$, так как в данном диапазоне уравнение (3.68) имеет решение.

Таблица 3.1

Значения коэффициента усиления линейной части системы $K_{ЛЧ}$

$A \backslash \zeta$	-16,0	-15,0	-14,343	-2,324	-1,0	0,0	1,0	2,0
2,0	3,754	3,181	2,825	0,002	0,213	0,453	0,767	1,155
4,0	6,716	5,690	5,053	0,003	0,381	0,811	1,372	2,066
6,0	9,892	8,382	7,443	0,005	0,561	1,195	2,020	3,043
8,0	13,108	11,106	9,863	0,006	0,743	1,583	2,677	4,032
10,0	16,338	13,843	12,293	0,008	0,926	1,973	3,337	5,026
12,0	19,576	16,586	14,729	0,009	1,109	2,364	3,998	6,022
14,0	22,817	19,333	17,168	0,011	1,293	2,756	4,660	7,019
16,0	26,061	22,081	19,609	0,012	1,477	3,148	5,322	8,016

По полученным значениям коэффициента усиления линейной части системы $K_{ЛЧ}$, значениям показателя затухания ζ и амплитуды A (табл. 3.1), можно построить диаграмму качества колебательных переходных процессов одноконтурной нелинейной системы (рис. 3.6).

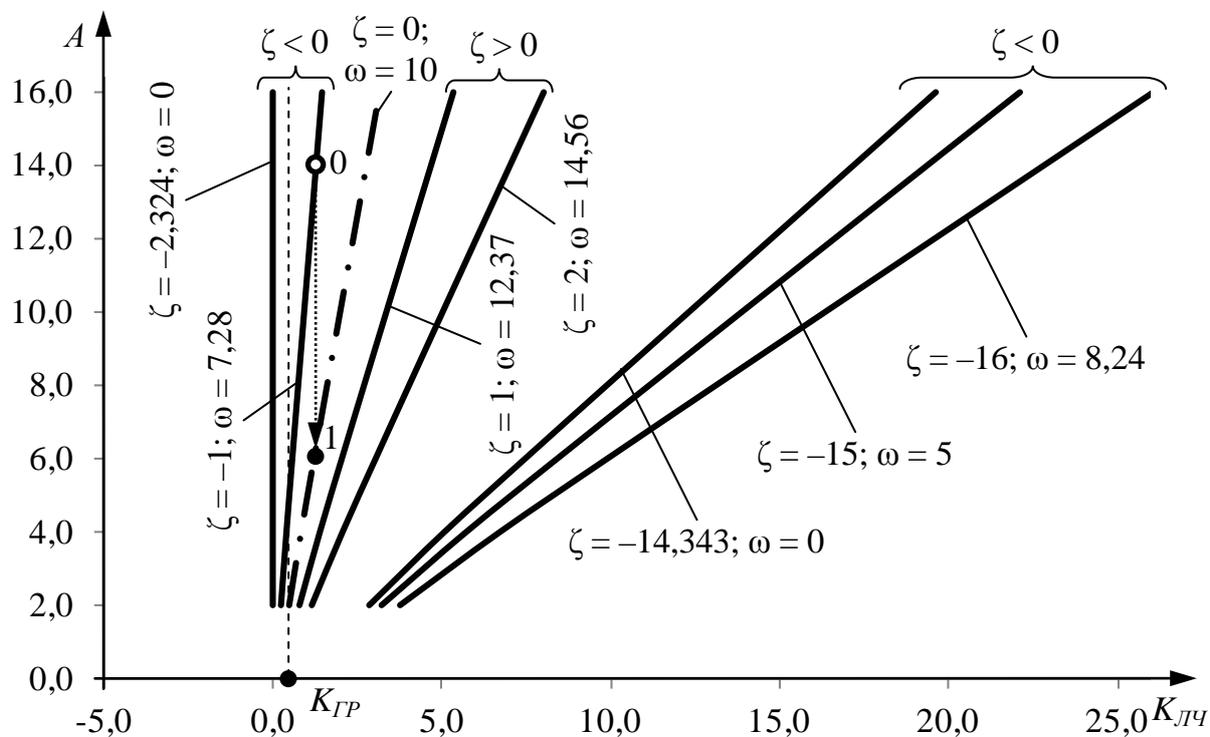


Рис. 3.6. Диаграммы качества колебательных переходных процессов одноконтурной нелинейной системы

На диаграмме качества отображены линии равных значений показателя затухания ζ , которым соответствуют равные значения частоты колебаний ω . Так как нелинейная характеристика однозначная, то линии $K_{ЛЧ}(A, \zeta)$ и $K_{ЛЧ}(A, \omega)$ совпадают.

На основании расчетов и построенной диаграммы качества можно сделать следующие выводы о динамических свойствах системы:

- 1) частота колебаний ω в переходном режиме для каждого значения ζ постоянна и не зависит от коэффициента $K_{ЛЧ}$ и амплитуды A ;
- 2) при заданных параметрах реле и постоянных времени линейной части система имеет один устойчивый автоколебательный режим работы (линия $\zeta = 0$) с частотой колебания $\omega = 10$ рад/с;
- 3) по линии $\zeta = 0$ на диаграмме определяется колебательная граница устойчивости нелинейной системы по параметру $K_{ЛЧ}$. Левее значения $K_{ГР} = 0,453$ на рис. 3.6 будет область абсолютной устойчивости (устойчивость «в целом»), так как переходные процессы затухают ($\zeta < 0$) при любом начальном отклонении;

4) правее значения $K_{ГР} = 0,453$ лежит область автоколебаний, т.е. все колебательные процессы сходятся или расходятся, стремясь к устойчивому автоколебательному режиму (к линии $\zeta = 0$);

5) линии с показателем затухания $\zeta \leq -14,3426$ лежат ниже линии $\zeta = 0$; это означает, что периодическое решение (линия $\zeta = 0$) для данных значений показателя затухания ζ и соответствующих им значений коэффициента $K_{ЛЧ}$ будет неустойчиво;

6) левее линии $\zeta = -2,324$ и $\omega = 0$ на диаграмме качества лежит область монотонных переходных процессов, т.е. переходные процессы будут не колебательными, а апериодическими.

Оценим качество регулирования нелинейной автоматической системы в переходном режиме.

Приближенно длительность переходного процесса t_P можно определить по среднему значению ζ_{cp} на всем интервале изменения амплитуды колебаний (от A_0 до A_1) (3.50). Например, начальная точка O имеет амплитуду $A_0 = 14$ и $\zeta_0 = -1$, а конечная точка на линии $\zeta = 0$ – точка I – имеет амплитуду $A_0 = 6$ и $\zeta_0 = 0$ (см. рис. 3.6), тогда

$$\zeta_{cp} = (-1 + 0)/2 = -0,5;$$

$$t_P = \frac{1}{-0,5} \ln \frac{6}{14} = 1,69 \text{ с.}$$

Величину перерегулирования можно определить по формуле (3.52), используя средние значения частоты ω_{cp} и показателя затухания колебаний ζ_{cp} во время $t = 0,5t_P$.

$$\zeta_{cp} = -0,5;$$

$$\omega_0 = 7,28 \text{ рад/с}; \omega_1 = 10 \text{ рад/с}; \omega_{cp} = (7,28 + 10)/2 = 8,64 \text{ рад/с};$$

$$\delta = e^{\frac{\pi \cdot (-0,5)}{8,64}} \cdot 100\% = 83,3\% .$$

Число колебаний m за время переходного процесса приближенно можно определить по формуле (3.52).

$$\omega_{cp} = 8,64 \text{ рад/с};$$

$$t_P = 1,69 \text{ с};$$

$$m \approx \frac{8,64}{2\pi} \cdot 1,69 \approx 2,32 .$$

Таким образом, проведя анализ качества регулирования одноконтурной нелинейной системы, можно с достаточной степенью точности оценить качество регулирования нелинейной автоматической системы в переходном режиме при любых начальных отклонениях, параметрах реле и значениях коэффициентов линейной части системы.

Контрольные вопросы и задания

1. Перечислите основные показатели качества регулирования нелинейной автоматической системы.
2. В чем суть метода припасовывания?
3. Как определяется качество колебательных переходных процессов в нелинейных системах?
4. В чем особенность колебательных переходных процессов в нелинейных системах?
5. В каком виде ищется симметричный колебательный переходный процесс в нелинейных автоматических системах?
6. На что влияет показатель затухания колебаний ζ ?
7. Что такое диаграмма качества затухания симметричных нелинейных колебаний и как её построить?
8. Что определяется по линиям $\zeta = 0$ и $\omega = 0$ на диаграммах качества?
9. Как по диаграмме качества определяется колебательная граница устойчивости нелинейной системы?
10. Как по диаграмме качества определяется устойчивое и неустойчивое периодические решения?
11. Что называют средним значением переходного колебательного процесса?
12. Что характеризует время регулирования нелинейной автоматической системы?
13. Как определяется число колебаний в переходном процессе?
14. Как определяется величина перерегулирования нелинейной автоматической системы при начальной амплитуде колебаний A_0 ?

4. КОРРЕКЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В этой главе рассмотрены методики и способы синтеза нелинейных систем, но не в виде оптимизации параметров, а как задача введения в нелинейную АСУ дополнительных корректирующих устройств, обеспечивающих требуемые динамические свойства в плане устойчивости и качества регулирования.

Наличие нелинейности может существенно улучшить или ухудшить качество регулирования нелинейной АСУ. Поэтому при проектировании нелинейных систем решается целый ряд задач.

Задачи, решаемые при коррекции нелинейных автоматических систем:

- компенсация влияния нелинейной статической характеристики в виде люфта, зазора, зоны нечувствительности, зоны насыщения и т.д. на динамику нелинейной системы;
- уменьшение амплитуды автоколебаний или их устранение;
- вибрационная линеаризация существенно нелинейной характеристики;
- уменьшение инерционности системы с помощью псевдолинейного корректирующего звена;
- изменение режима работы в зависимости от изменения состояния системы.

Методы коррекции нелинейных автоматических систем:

- коррекция линейной части системы;
- применение компенсирующих и форсирующих устройств;
- введение дополнительных обратных связей;
- обеспечение заданного закона управления с помощью логических корректирующих устройств.

Коррекция нелинейных систем может быть осуществлена с помощью линейных или нелинейных корректирующих устройств. Отличие нелинейных корректирующих устройств в выполнении конкретных более узких задач по улучшению качества регулирования.

Но чем шире диапазон внешних воздействий, тем труднее выбрать нелинейное корректирующее устройство. Может получиться, что нелинейная коррекция, выбранная для определенного режима работы, может оказаться далеко не эффективной при других неучтенных условиях работы системы. В этом случае линейное корректирующее устройство, которое имеет широкий диапазон воздействия, обеспечивает более надежную коррекцию системы.

Сложность коррекции нелинейных систем усугубляется еще и тем, что нет универсальной методики и способа коррекции, как и структуры или типа нелинейного корректирующего устройства. Для каждой конкретной нелинейной системы и требуемых динамических свойств необходим индивидуальный подход в плане коррекции.

4.1. Линейная коррекция нелинейных систем

Для достижения требуемой точности и качества регулирования в нелинейные системы можно вводить линейные корректирующие устройства такие же, как и в линейных системах. Эти линейные корректирующие устройства могут быть последовательными (с введением производных, интегралов и т. п.) и параллельными (в виде местных обратных связей различного типа).

Рассмотрим нелинейную систему (см. рис. 2.6) с одной нечётно-симметричной однозначной нелинейностью $F(x)$, которая имеет передаточную функцию линейной части, обладающую свойством фильтра низких частот.

После гармонической линеаризации нелинейного элемента его уравнение в операторной форме имеет вид

$$z = q(A)x, \quad (4.1)$$

где коэффициент гармонической линеаризации $q(A)$ определяется согласно табл. 2.1, а коэффициент $q'(A) = 0$.

Пусть коэффициент гармонической линеаризации принимает ограниченные значения

$$0 \leq q(A) \leq q_{\max}(A). \quad (4.2)$$

В случае наличия релейных нелинейностей (см. табл. 1.1, п. 6 – 9) не всегда возможно обеспечить устойчивое равновесное состояние системы в нулевой точке и установившийся режим будет автоколебательным. В этом случае введением линейных корректирующих устройств в линейную часть системы можно добиться приемлемых значений параметров автоколебаний (A' ; ω').

Суть линейной коррекции состоит в том, что линейное корректирующее устройство любого типа вводится последовательно с нелинейным звеном. Тогда корректирующее звено можно рассматривать как составляющую линейной части системы или гармонически линеаризованного нелинейного элемента. В последнем случае вводится понятие *нормированного коэффициента гармонической линеаризации* $q_0(A)$.

Нормированный коэффициент гармонической линейаризации $q_0(A)$ предназначен для компенсации определенного параметра нелинейной характеристики и записывается в виде

$$q_0(A) = K_{K3} q(A). \quad (4.3)$$

Коэффициент K_{K3} является компенсирующим и выбирается согласно формуле самого коэффициента гармонической линейаризации $q(A)$. Например, для типовой нелинейной характеристики «Идеальное трехпозиционное реле» (см. табл. 1.1, п. 7) коэффициент гармонической линейаризации $q(A)$ имеет вид

$$q(A) = \frac{4B}{\pi A^2} \sqrt{A^2 - b^2} \quad \text{при } A \geq b. \quad (4.4)$$

Для компенсации выходной величины реле B коэффициент K_{K3} выбирается как

$$K_{K3} = \frac{\pi b}{4B}. \quad (4.5)$$

Тогда нормированный коэффициент гармонической линейаризации $q_0(A)$ будет иметь вид

$$q_0(A) = K_{K3} q(A) = \frac{b}{A^2} \sqrt{A^2 - b^2}. \quad (4.6)$$

Теперь с нормированным коэффициентом гармонической линейаризации $q_0(A)$ параметр выходной величины реле B не будет оказывать влияния на динамические свойства скорректированной нелинейной системы.

При рассмотрении корректирующего устройства в составе линейной части системы можно применять все классические частотные методы синтеза линейных систем при условии гармонической линейаризации нелинейного элемента (метод логарифмических характеристик, метод гармонического баланса и т.д.). Или же, в случае однозначной нелинейности $F(x)$, применить для синтеза частотный метод Попова (см. п. 2.13.) без линейаризации нелинейного элемента.

4.2. Компенсация нелинейной характеристики

Если в нелинейной системе имеются неизбежные, вредные для управления нелинейности (люфт, гистерезис, зона нечувствительности), то путем введения специальной нелинейной коррекции можно ослабить вредное влияние имеющихся в системе нелинейностей.

Естественная нелинейность в виде зоны нечувствительности (см. табл. 1.1, п. 1) вносит дополнительные статические и динамические ошибки в работу системы. Поэтому необходимо компенсировать влияние такой нелинейности. Пусть нелинейное усилительное звено с функцией $F_1(x)$ имеет зону нечувствительности $2b$. Для компенсации её влияния параллельно с заданным нелинейным звеном включают нелинейное звено с функцией $F_2(x)$ с таким же коэффициентом усиления в пределах от $-b$ до $+b$ без зоны нечувствительности, но с зоной насыщения после значения $|b|$ (рис. 4.1).

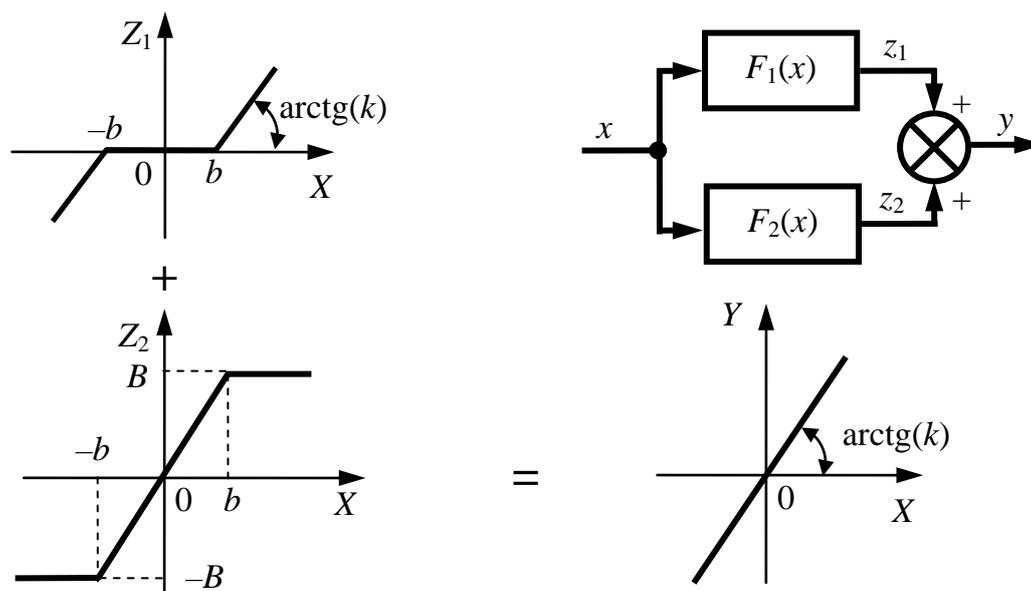


Рис. 4.1. Компенсация нелинейности в виде зоны нечувствительности

Выходной сигнал y будет складываться из двух параллельных сигналов. В пределах зоны нечувствительности $2b$ входной сигнал будет проходить через нелинейное звено с функцией $F_2(x)$. После зоны нечувствительности характеристика $F_2(x)$ не изменяется (она в зоне насыщения), и сигнал будет проходить через звено $F_1(x)$. Таким образом, с помощью параллельных нелинейных характеристик получена одна общая линейная характеристика.

Главная трудность такой коррекции нелинейного звена $F_1(x)$ состоит в подборе второго нелинейного звена $F_2(x)$, у которого зона насыщения и коэффициент усиления совпадали бы с зоной нечувствительности и коэффициентом усиления функции $F_1(x)$.

Для компенсации нелинейности также используются дополнительные обратные связи различного вида: жесткие, гибкие, смешанные. Рассмотрим схему компенсации нелинейной характеристики $F(x)$ с помощью жесткой обратной связи (ЖОС) (рис. 4.2).

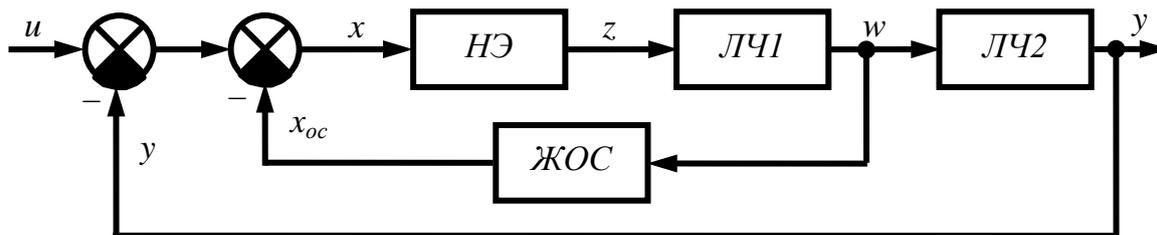


Рис. 4.2. Структурная схема нелинейной АСУ с компенсацией нелинейности

Из теории линейных непрерывных систем известно, что если измеренное значение регулируемой величины, приходящее к элементу сравнения, пропорционально выходной величине, то такая обратная связь называется жёсткой, если же измеренное значение пропорционально скорости или ускорению выходной величины, то – гибкой.

Пусть нелинейный элемент $НЭ$, имеющий функцию $F(x)$, и линейная часть системы $ЛЧ1$, имеющая функцию $W_1(p)$, охвачены идеальной жесткой обратной связью $ЖОС$ с большим коэффициентом передачи $K_{OC} \gg 1$. Тогда передаточная функция скорректированного участка системы имеет вид

$$W_{ЗАМ}(p) = \frac{F(x)W_1(p)}{1 + F(x)W_1(p)K_{OC}} = \frac{[F(x)W_1(p)]/K_{OC}}{\frac{1}{K_{OC}} + F(x)W_1(p)} \approx \frac{1}{K_{OC}}, \quad (4.7)$$

так как $K_{OC} \gg 1$, то $1/K_{OC} \rightarrow 0$.

Следовательно, с помощью практически безынерционного усилителя с большим коэффициентом передачи можно компенсировать нелинейную характеристику $F(x)$ и получить звено с передаточной функцией, обратной передаточной функции звена обратной связи.

4.3. Коррекция амплитуды и частоты автоколебаний

Корректирующие цепи как последовательные, так и параллельные в линейной части системы повышают частоту и снижают амплитуду автоколебаний в системе. В этом можно убедиться на любом примере. Особое значение имеют запаздывающие обратные связи, охватывающие нелинейный элемент. Чаще всего применяется обратная связь вокруг релейных элементов (см. табл. 1.1, п. 6 – 9) через апериодическое звено. Эта обратная связь действует очень эффективно в смысле снижения амплитуды и повышения частоты автоколебаний.

На рис. 4.3 изображена структурная схема нелинейной АСУ с коррекцией амплитуды автоколебаний в виде запаздывающей обратной связи, охватывающей релейный элемент с типовой нелинейной характеристикой $F(x)$ «Двухпозиционное реле с гистерезисом» (см. табл. 1.1, п. 8).

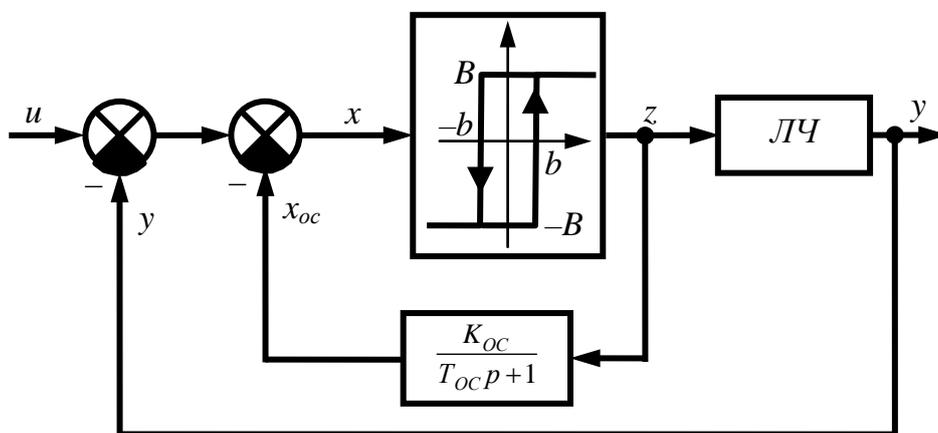


Рис. 4.3. Структурная схема нелинейной АСУ с коррекцией амплитуды и частоты автоколебаний

Параметры цепи обратной связи K_{oc} и T_{oc} всегда выбираются так, чтобы в несколько раз повысить частоту автоколебаний ω' . В таком случае период автоколебаний T' практически определяется только цепью обратной связи и порогом включения нелинейного элемента b . Таким образом, период автоколебаний с достаточной точностью получается из выражения

$$T' \approx T_{oc} \ln \frac{K_{oc} B + b}{K_{oc} B - b}. \quad (4.8)$$

При высокой частоте колебаний амплитуда выходной величины системы $y(t)$ становится очень малой, так как работает свойство фильтра низких частот линейной части системы (см. п. 2.9). Особенно хорошо данная коррекция работает при высоком порядке характеристического уравнения линейной части системы.

4.4. Вибрационная линеаризация релейного элемента

Релейный элемент является существенно нелинейным элементом. Его выходная величина изменяется скачком при подаче на вход непрерывно возрастающей входной величины. После срабатывания реле эта выходная величина z остается постоянной ($z = B$) при даль-

нейшем увеличении входной величины x . Такое свойство реле позволяет сравнительно просто коммутировать большие мощности в выходном сигнале при сравнительно небольшом входном сигнале.

Задача *вибрационной линеаризации* релейного элемента состоит в получении на выходе реле сигнала, изменяющегося пропорционально входной величине, а не скачком. Для этого одновременно с постоянным входным сигналом x_0 на вход релейного элемента подадим дополнительное периодическое высокочастотное воздействие $A \sin \omega t$. Тогда выходная величина реле $z(t)$ становится периодической функцией с частотой поданного гармонического сигнала

$$z(t) = F(x_0 + A \sin \omega t). \quad (4.9)$$

На рис. 4.4, *а* на вход элемента «Идеальное двухпозиционное реле» (см. табл. 1.1, п. 6) подан только гармонический сигнал в виде синусоиды $A \sin \omega t$. Выходной сигнал с реле имеет одинаковую ширину положительных и отрицательных импульсов.

На рис. 4.4, *б* на вход того же реле подано два сигнала: гармонический в виде синусоиды $A \sin \omega t$ и постоянный сигнал x_0 . На величину этого постоянного сигнала синусоида увеличила свою постоянную составляющую и «приподнялась» над осью абсцисс на эту величину. Поэтому реле стало раньше срабатывать на включения положительного сигнала и позже отключаться при отрицательном сигнале. Произошла широтно-импульсная модуляция сигнала.

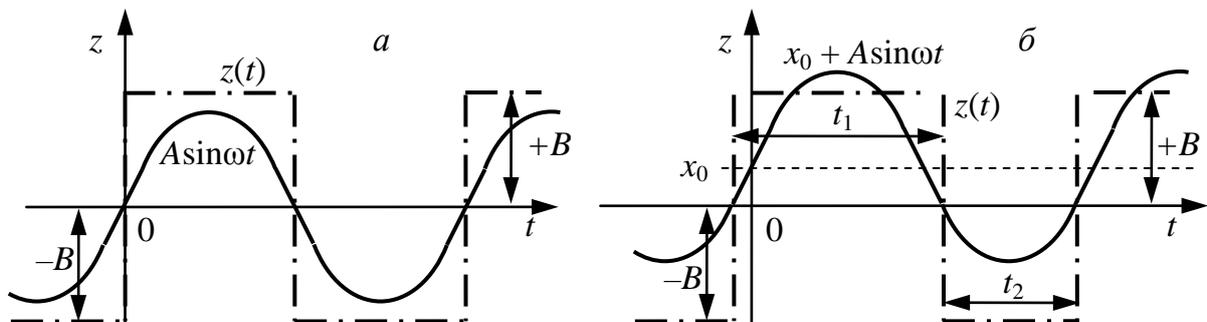


Рис. 4.4. Воздействие внешнего сигнала на реле:

а – периодического сигнала; *б* – постоянного и периодического сигналов

Сигнал с элемента «Идеальное двухпозиционное реле» остался периодическим, поэтому его можно представить в виде ряда Фурье:

$$z(t) = C_0 + \sum C_i \sin(\omega_i t + \varphi_i). \quad (4.10)$$

Каждому значению x_0 будет соответствовать своя величина постоянной составляющей C_0 , своя широтно-импульсная модуляция

сигнала и своя фазовая характеристика. Выходной сигнал реле далее поступает на линейную часть системы, которая обладает свойством фильтра низких частот и подавляет все высокочастотные гармоники. Остается только постоянная составляющая ряда Фурье z_{cp} .

Очевидно, что z_{cp} будет пропорционально разности площадей положительных и отрицательных импульсов, отнесенных к периоду колебаний T :

$$z_{cp} = \frac{B(t_1 - t_2)}{T}; \quad (4.11)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (4.12)$$

Тогда при равенстве постоянного входного сигнала x_0 и периодического высокочастотного воздействия $A \sin \omega t$ имеем выражение

$$x_0 = A \sin \omega t = A \sin \omega \frac{t_1 - t_2}{4} = A \sin \frac{\pi t_1 - t_2}{2 T} = A \sin \frac{\pi z_{cp}}{2 B}. \quad (4.13)$$

Из формулы (4.13) определим зависимость z_{cp} от x_0 :

$$z_{cp} = \frac{2B}{\pi} \arcsin \frac{x_0}{A} \approx \frac{2Bx_0}{\pi A}. \quad (4.14)$$

Таким образом, релейная характеристика для среднего выходного значения релейного элемента z_{cp} вследствие воздействия синусоидальных колебаний стала линейной. Этот эффект носит название вибративной линеаризации релейных элементов.

Для получения более пропорциональной зависимости $z_{cp} = f(x_0)$ в качестве дополнительного гармонического сигнала и используют треугольную форму импульса (рис. 4.5). Тогда

$$z_{cp} = \frac{B}{A} x_0. \quad (4.15)$$

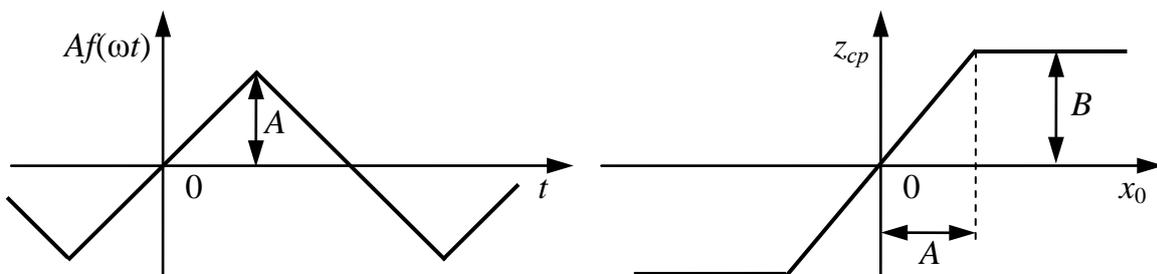


Рис. 4.5. Воздействие периодического треугольного сигнала на реле

В данном случае диапазон выпрямленной релейной характеристики равен амплитуде дополнительного периодического воздействия A . Максимальное значение линейризованной характеристики равно выходному сигналу реле B . Эти выводы получены при рассмотрении характеристики идеального реле.

Анализируя выходную характеристику реле с зоной нечувствительности и петлей гистерезиса, выясняется, что при вибрационной линейризации влияние зоны нечувствительности существенно устраняется, а влияние петли гистерезиса устраняется фактически полностью. Таким способом можно существенно снизить влияние люфтов, зазоров и сухого трения в механических системах.

Некоторым недостатком такой вибрационной линейризации релейных систем является необходимость в наличии генератора периодических колебаний. В качестве периодических колебаний могут быть использованы автоколебания самой релейной системы, за счёт своих высокочастотных составляющих. Частота этих колебаний должна быть существенно больше, чем частота управляющего или возмущающего воздействия. В общем случае, такая линейризация релейных систем может быть недостаточно эффективной, так как есть требования к частоте и амплитуде вынужденных колебаний относительно входного сигнала.

Для эффективной вибрационной линейризации период колебаний T должен быть существенно больше времени срабатывания реле, чтобы обеспечить четкий колебательный режим. С другой стороны, частота колебаний ω должна выбираться как можно выше, чтобы линейная часть системы, обладающая свойством фильтра низких частот, эффективнее подавляла высокочастотные гармоники.

В заключение необходимо отметить, что любое улучшение одного показателя качества системы приводит к ухудшению другого показателя качества системы. В данном случае вибрационная линейризация релейной характеристики приводит к уменьшению быстродействия системы, потому что исполнительное устройство реагирует на среднее значение управляющего воздействия z_{cp} , которое всегда меньше выходного сигнала реле B . Если основное требование к системе является быстродействие, то вибрационная линейризация существенно препятствует этому. Целесообразно использовать основное свойство реле: при малом входном сигнале практически мгновенно выдавать мощный сигнал.

4.5. Псевдолинейная коррекция

Среди нелинейных корректирующих устройств можно выделить такие устройства, в которых амплитудно-фазовые характеристики не зависят от амплитуды входного сигнала, а являются только функциями частоты входного сигнала. У таких устройств отсутствует жесткая взаимосвязь между амплитудой и фазой.

Псевдолинейным корректирующим устройством (ПКУ) называется такое нелинейное устройство, у которого гармонически линеаризованная частотная передаточная функция не зависит от амплитуды, а зависит только от частоты входного сигнала. Причем эта зависимость от частоты нелинейная и в общем случае может быть такая, которая обеспечивает изменение частотной характеристики системы в желаемом направлении.

Важное достоинство применения ПКУ заключается в возможности изменения фазовых соотношений величин в системе независимо от амплитудных. Очевидно, что это достоинство ПКУ дает особые возможности по улучшению динамических свойств системы, которые отсутствуют в линейной коррекции.

Примером релейных ПКУ являются реле с опережающей петлей гистерезиса (рис. 4.6). Такое реле, в отличие от реле с нормальной петлей гистерезиса, дающего запаздывание сигнала по фазе (см. п. 2.9), вносит на выходе опережающий фазовый сдвиг с минимальным амплитудным изменением выходной величины.

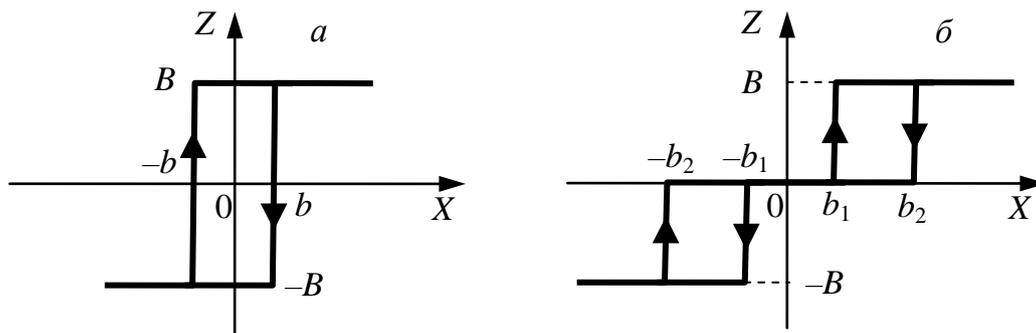


Рис. 4.6. Реле с опережающей петлей гистерезиса:
а – двухпозиционное; б – трехпозиционное

Если «Двухпозиционное реле с гистерезисом» (см. табл. 1.1, п. 8) после гармонической линеаризации имеет коэффициенты $q(A)$ и $q'(A)$ (см. табл. 2.2, п. 7), то фазовая характеристика линеаризованного реле будет иметь вид

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{q'(A)}{q(A)} = -\operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{A^2 - b^2}}. \quad (4.16)$$

Однако у реле с опережающей петлей гистерезиса мнимый коэффициент гармонической линеаризации $q'(A)$ положителен:

$$q'(A) = \frac{4Bb}{\pi A^2}, \quad (4.17)$$

а фазовая характеристика такого реле будет

$$\varphi(\omega) = +\operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{A^2 - b^2}}. \quad (4.18)$$

Максимальное значение угла опережения достигается при равенстве порога включения реле и входной амплитуды $|b| = A$.

$$\varphi(\omega) = +\operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{0}} = +90^\circ. \quad (4.19)$$

Аналогично для нелинейности «Трехпозиционное реле с гистерезисом» (см. табл. 1.1, п. 9) мнимый коэффициент гармонической линеаризации $q'(A)$ положителен:

$$q'(A) = +\frac{2B(b_2 - b_1)}{\pi A^2}, \quad (4.20)$$

а фазовая характеристика такого реле будет

$$\varphi(\omega) = +\operatorname{arctg} \frac{b_2 - b_1}{\left(\sqrt{A^2 - b_2^2} + \sqrt{A^2 - b_1^2}\right)}. \quad (4.21)$$

Максимальное значение угла опережения достигается при равенстве порога включения реле и входной амплитуды $|b_2| = A$.

$$\varphi(\omega) = +\operatorname{arctg} \frac{b_2 - b_1}{\left(\sqrt{b_2^2 - b_1^2}\right)}. \quad (4.22)$$

Реле с опережающей петлей гистерезиса могут включаться последовательно с релейным регулятором или объектом управления, имеющим большую инерционность или звено чистого запаздывания, тем самым компенсировать или полностью устранять запаздывание сигнала по фазе, улучшая ФЧХ системы и соответственно её динамические свойства в плане устойчивости.

Рассмотренные релейные ПКУ считаются одноканальными, т.е. изменение фазы и амплитуды происходит в одном канале – релейная характеристика с опережающей петлей гистерезиса. В результате фазовой коррекции имеется и амплитудное изменение выходной величины.

В промышленности чаще используют двухканальные ПКУ, где входной сигнал разветвляется и проходит по двум каналам, в которых амплитудная и фазовая составляющие сигнала формируются отдельно.

Структурная схема псевдолинейного звена с амплитудным подавлением представлена на рис. 4.7. Звено состоит из оператора Sign, низкочастотного фильтра, блока определения модуля (модульный элемент МЭ) и перемножающего устройства [11].

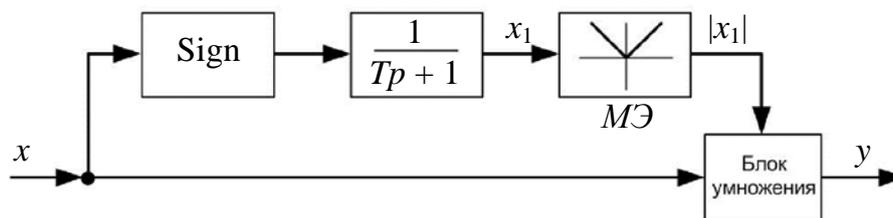


Рис. 4.7. Структурная схема псевдолинейного звена с амплитудным подавлением

Первый канал служит для формирования амплитудной характеристики и включает в себя элемент, ослабляющий высокие частоты, например, апериодическое звено $W(p) = 1/(Tp + 1)$. Для исключения прохождения информации о фазе последовательно включен модульный элемент МЭ. Это может быть двухполупроводниковый выпрямитель. На выходе МЭ – значение только амплитуды [11].

АФЧХ псевдолинейного звена с амплитудным подавлением, полученная в результате гармонической линеаризации, имеет вид [11]:

$$W_{ПА}(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega); \quad (4.23)$$

$$U(\omega) = \frac{8}{\pi^2 \sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \left(1 + \frac{\cos(-2 \arctg \omega T)}{3} \right); \quad (4.24)$$

$$V(\omega) = \frac{8}{\pi^2 \sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \left(\frac{\sin(-2 \arctg \omega T)}{3} \right). \quad (4.25)$$

Анализируя представленную выше АФЧХ, можно показать, что при изменении частоты АЧХ данного звена меняется от значения, равного 1 до нуля. А изменение ФЧХ при различных параметрах низкочастотного фильтра происходит не более чем на -20° , в то время,

как максимальный фазовый сдвиг обычного апериодического звена первого порядка может достигать -90° . Т.е. при возникновении в системе колебаний выходной величины автоматически производится уменьшение коэффициента передачи звена [11].

Структурная схема псевдолинейного звена с фазовым опережением представлена на рис. 4.8. Звено состоит из блока определения модуля (модульный элемент МЭ), фазоопережающего (форсирующего) звена, оператора Sign и перемножающего устройства [11].

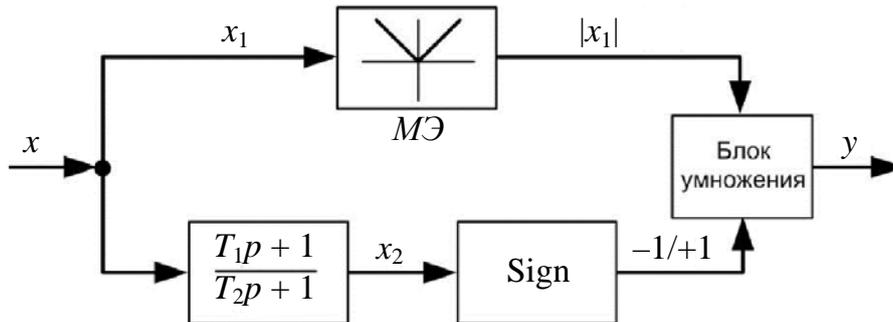


Рис. 4.8. Структурная схема псевдолинейного звена с фазовым опережением

АФЧХ псевдолинейного звена с фазовым опережением, полученная в результате гармонической линеаризации, имеет вид [11]:

$$W_{\text{пф}}(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega); \quad (4.26)$$

$$U(\omega) = \frac{1}{\pi} \left(\pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega T_1 - \omega T_2}{1 + \omega^2 T_1 T_2} + \sin \left(2 \operatorname{arctg} \frac{(\omega T_1 - \omega T_2)}{1 + \omega^2 T_1 T_2} \right) \right); \quad (4.27)$$

$$V(\omega) = \frac{1}{\pi} \left(1 - \cos \left(2 \operatorname{arctg} \frac{(\omega T_1 - \omega T_2)}{1 + \omega^2 T_1 T_2} \right) \right). \quad (4.28)$$

Анализ частотных характеристик звена показывает, что при изменении постоянных времени звена T_2 от 1 до 0,01 с и T_1 от 1 до 10 с ФЧХ изменяется в пределах от 0 до 78° , а логарифмическая АЧХ изменяется в пределах от 0 до -4 дБ. Такое изменение АЧХ не оказывает существенного влияния на запас устойчивости системы. Данное псевдолинейное звено с фазовым опережением осуществляет фазовый сдвиг, величина которого зависит от значений постоянных времени T_1 и T_2 , улучшая ФЧХ системы и соответственно её динамические свойства в плане устойчивости и качество регулирования [11].

В современной теории управления с помощью ПКУ осуществляют коррекцию свойств линейного ПИД-регулятора.

На рис. 4.9 представлена структурная схема модифицированно-го псевдолинейного ПИД-регулятора [11].

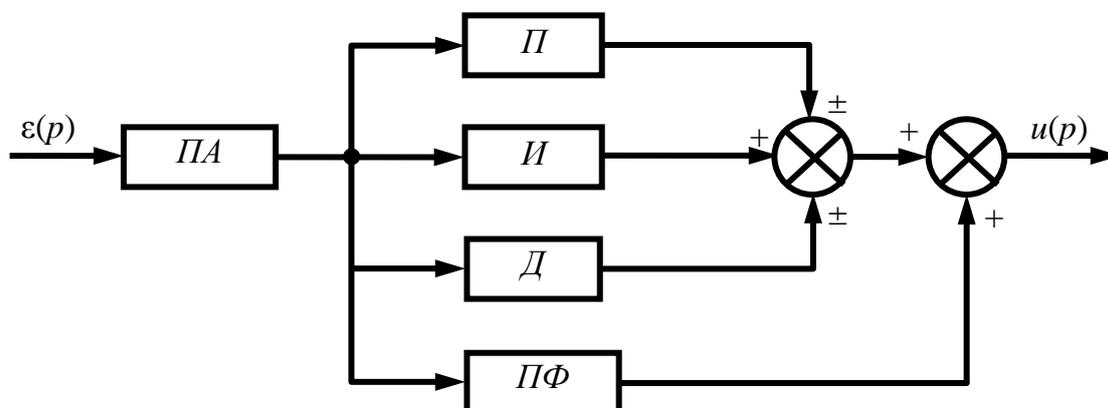


Рис. 4.9. Структурная схема псевдолинейного ПИД-регулятора

В состав данного регулятора включены следующие звенья: псевдолинейное звено с амплитудным подавлением (ПА), пропорциональное звено (П), интегрирующее звено (И), дифференцирующее звено (Д) и псевдолинейное фазоопережающее звено (ПФ).

Модифицированный псевдолинейный ПИД-регулятор эффективно работает в условиях, когда параметры объекта управления меняются в широком диапазоне. И в этой связи такой регулятор можно рассматривать как робастный, т.е. устойчивый к помехам и изменяющимся внешним условиям.

4.6. Скользящий режим работы нелинейных систем

В релейной следящей АСУ при отсутствии зоны нечувствительности реле фазовый портрет будет иметь устойчивый фокус с предельным циклом установившихся колебаний (см. рис. 2.8). Для уменьшения амплитуды установившихся колебаний, а в идеале для полной ликвидации колебательного процесса в установившемся режиме дополнительно в обратную связь включают дифференцирующее звено для создания гибкой отрицательной обратной связи (ГОС). Тогда в такой нелинейной системе может возникнуть особый *скользящий режим* работы.

Для иллюстрации работы нелинейной АСУ в скользящем режиме рассмотрим систему, структурная схема которой представлена на рис. 4.10 при входном воздействии $u(t) = 0$.

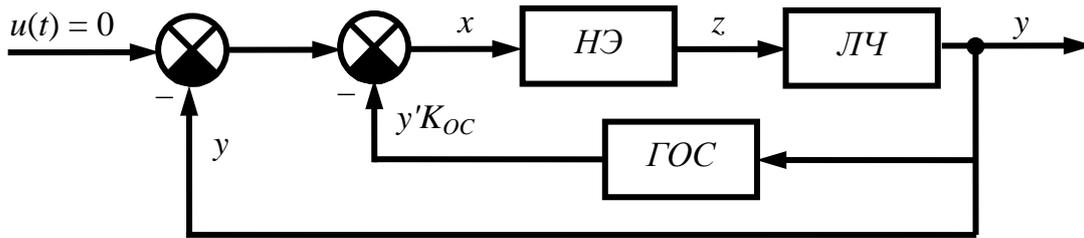


Рис. 4.10. Структурная схема нелинейной АСУ со скользящим режимом

Уравнение линейной части ЛЧ нелинейной АСУ имеет вид

$$p^2 y = Kz, \quad (4.29)$$

а уравнение нелинейного элемента НЭ с характеристикой «Идеальное двухпозиционное реле» (см. табл. 1.1, п. б) описывается нелинейной функцией

$$z = F(x) = \begin{cases} B & \text{при } x_1 > 0; \\ -B & \text{при } x_1 < 0. \end{cases} \quad (4.30)$$

Кроме того, в системе имеется местная гибкая отрицательная обратная связь, описываемая передаточной функцией

$$W_{ГОС}(p) = K_{OC} p. \quad (4.31)$$

Общее дифференциальное уравнение динамики системы в операторной форме при $u(t) = 0$ будет иметь вид

$$p^2 y = -KF(y + pyK_{OC}). \quad (4.32)$$

Введем новые переменные состояния $x_i(t)$ вместо $(i-1)$ производных выходной величины $y(t)$:

$$x_1 = y; \quad x_2 = \dot{y}. \quad (4.33)$$

Отсюда получим дифференциальное уравнение фазовых траекторий системы

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = -\frac{K}{x_2} F(x_1 + x_2 K_{OC}). \quad (4.34)$$

Линия переключения на фазовой плоскости $[x_1; x_2]$ на рис. 4.11 описывается уравнением

$$x_1 + x_2 K_{OC} = 0. \quad (4.35)$$

В связи с релейной функцией НЭ на фазовой плоскости $[x_1; x_2]$ можно выделить две области: (1), где $F(x) = -B$ и (2), где $F(x) = +B$.

Справа от линии переключения при $(x_1 + x_2 K_{OC}) > 0$ функция $F(x) = -B$ и уравнение фазовых траекторий имеет вид

$$x_2^2 = -2K_1 B x_1 + C_1. \quad (4.36)$$

Таким образом, фазовые траектории – это параболы, ветви которых направлены в отрицательную сторону оси x_1 . Положение вершины параболы определяется произвольной постоянной C_1 , т.е. начальными условиями переходного процесса x_{10} и x_{20} .

Слева от линии переключения при $(x_1 + x_2 K_{OC}) < 0$ функция $F(x) = +B$ и уравнение фазовых траекторий имеет вид

$$x_2^2 = 2K_1 B x_1 + C_2. \quad (4.37)$$

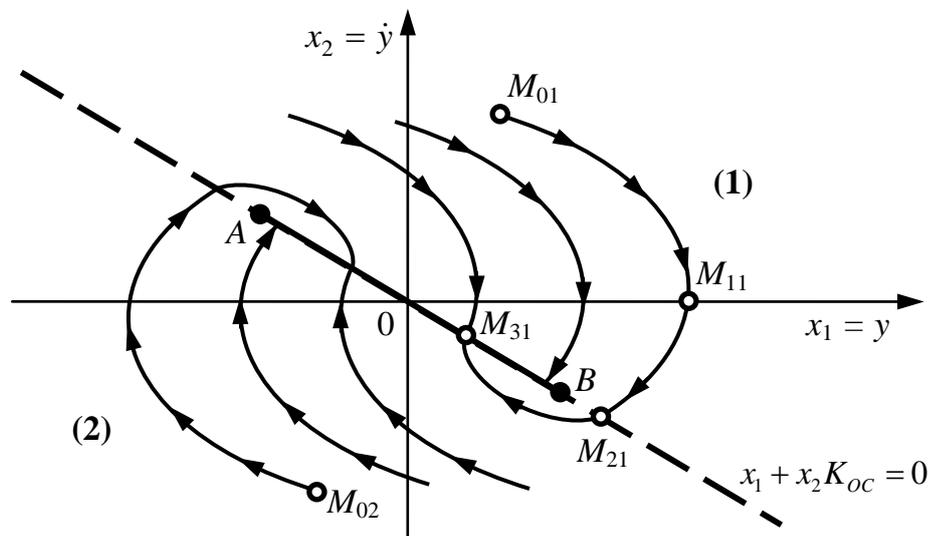


Рис. 4.11. Фазовый портрет нелинейной АСУ в скользящем режиме

Видно, что на линии переключения фазовые траектории встречаются, упираясь в отрезок AB . Это можно объяснить следующим образом: изначально процесс идет по фазовой траектории 1 (рис. 4.12). Как только фазовая траектория пересечет линию переключения AB , вступит в свои права фазовая траектория 2, которая вернет процесс к отрезку AB . Но тут встретится фазовая траектория 3 и т.д. В результате изображающая точка путем вибраций около линии переключения переместится к началу координат.

Такой ход процесса соответствует переключениям релейного элемента с характеристикой «Идеальное двухпозиционное реле» с большой частотой. Теоретически частота переключения бесконечна, а амплитуда вибраций, изображенных на рис. 4.12, стремится к нулю. Следовательно, теоретически изображающая точка скользит по линии

переключения к началу координат – к равновесному состоянию. Процесс такого рода называется *скользящим процессом*.

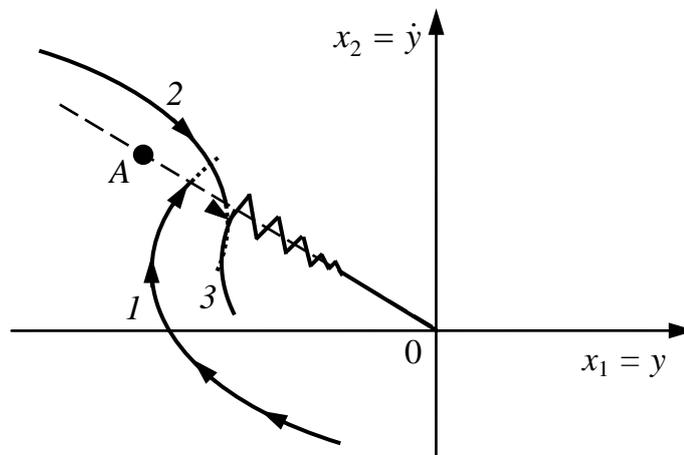


Рис. 4.12. «Скольжение» фазовой траектории по линии переключения

Скользящий режим в системе с дифференцирующим звеном в цепи обратной связи возникает не при любом значении K_{OC} . Для его возникновения наклон фазовой траектории после переключения реле должен быть больше, чем наклон линии переключения. Тогда после линии переключения фазовая траектория снова возвращается на эту же линию переключения. Но возможен случай, когда скользящий режим возникнет не сразу, а на втором или на третьем, или на n -ном витке устойчивого фокуса. Но может быть, что скользящий режим не возникнет при малой величине наклона линии переключения.

Найдем закон движения в скользящем процессе. На линии переключения имеет место уравнение

$$x_1 + x_2 K_{OC} = 0 \text{ или } y + \frac{dy}{dt} K_{OC} = 0. \quad (4.38)$$

Решением данного уравнения является выражение

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{t}{K_{OC}}}, \quad (4.39)$$

где значения $t = 0$ и $y = y_0$ считаются в момент попадания изображающей точки на линию скользящего процесса. Итак, скользящий процесс происходит по экспоненциальному закону.

Здесь важно отметить следующее. Нелинейная система второго порядка (4.32) на участке скользящего процесса AB вырождается в линейную систему первого порядка, т.е. вначале был колебательный процесс (до точки M_{31}), а затем движение по линии переключения заканчивается практически аperiodическим процессом.

При этом закон движения в скользящем процессе не зависит от параметров прямой цепи системы и определяется только коэффициентом обратной связи. Например, при начальном положении M_{01} (см. рис. 4.11) получим фазовую траекторию $M_{01}M_{11}M_{21}M_{31}$, переходящую в скольжение в точке M_{31} . Такой фазовой траектории соответствует процесс во времени $y(t)$, изображенный на рис. 4.13, где отмечены характерные точки.

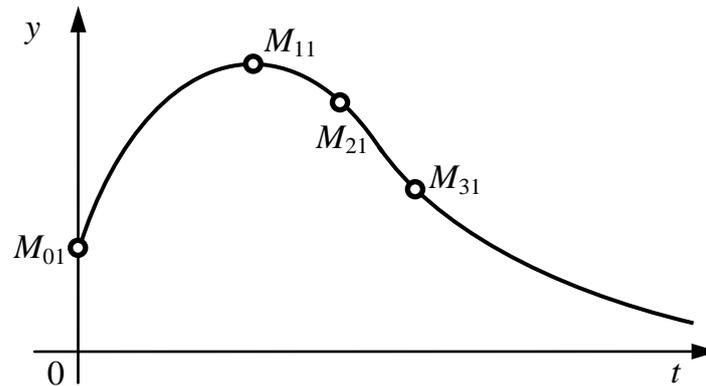


Рис. 4.13. Переходный процесс системы на линии переключения

Найдем положение концов отрезка скользящего процесса A и B на фазовой плоскости (см. рис. 4.11). Очевидно, что в этих точках касательные к параболам совпадают с линией переключения. Это условие согласно формуле (4.34) можно записать в виде

$$\frac{\dot{x}_{2A}}{\dot{x}_{1A}} = -\frac{1}{K_{OC}}, \quad (4.40)$$

тогда из уравнения фазовых траекторий (4.34), подставив условие (4.35), получим для точек A и B выражение

$$-\frac{1}{K_{OC}} = -\frac{K}{x_{2A}} F(x_{1A} + K_{OC}x_{2A}) = -\frac{KB}{x_{2A}}; \quad (4.41)$$

$$-\frac{1}{K_{OC}} = -\frac{K}{x_{2B}} F(x_{1B} + K_{OC}x_{2B}) = +\frac{KB}{x_{2B}}. \quad (4.42)$$

Следовательно, отрезок скользящего процесса AB тем больше, чем больше коэффициенты усиления прямой цепи и обратной связи. Учитывая данный вывод, можно настраивать и оптимизировать релейную АСУ в скользящем режиме на этапе проектирования.

4.7. Нелинейные системы с переменной структурой

Структура системы определяется составом звеньев и связями между ними. Изменить структуру системы – это значит изменить состав её элементов или связи между звеньями.

Системой с переменной структурой (СПС) называют систему, в которой структура в процессе её функционирования изменяется на основе текущей информации для достижения определенной цели: обеспечение устойчивости, улучшение качества и т.п.

Использование принципов построения СПС при синтезе систем управления позволяет достичь устойчивости и приемлемого качества в тех случаях, когда параметры объекта изменяются в широких пределах или отсутствует информация, необходимая для реализации обычных алгоритмов управления с фиксированной структурой, обеспечивающих заданные требования к системе.

Пусть линейная АСУ с жесткой отрицательной обратной связью имеет структурную схему, представленную на рис. 4.14, а.

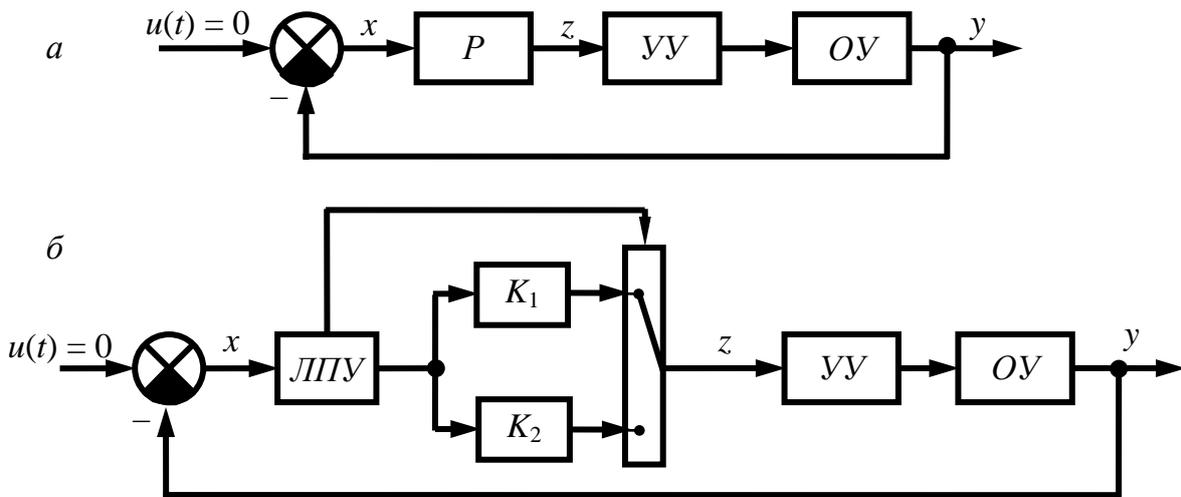


Рис. 4.14. Структурная схема системы с переменной структурой

Пусть устройство управления $УУ$ вместе с объектом управления $ОУ$ и регулятором P , использующим пропорциональный закон управления ($z = -yK_{П}$), образуют линейную часть системы, которая описывается передаточной функцией

$$W_{лч}(p) = \frac{K}{T^2 p^2}. \quad (4.43)$$

Общее дифференциальное уравнение динамики замкнутой системы без переменной структуры (см. рис. 4.14, а) в операторной форме при $u(t) = 0$ будет иметь вид

$$T^2 p^2 y = -Ky. \quad (4.44)$$

Тогда характеристическое уравнение замкнутой системы

$$T^2 p^2 + K = 0. \quad (4.45)$$

При $K > 0$ его корни будут чисто мнимыми $p_{1,2} = \pm j\omega$, а при $K < 0$ – действительными разных знаков $p_{1,2} = \pm\alpha_i$. Следовательно, в первом случае в системе имеется устойчивый предельный цикл, т.е. она обладает устойчивыми автоколебаниями, а во втором случае она асимптотически неустойчива. Таким образом, в рамках фиксированной структуры не удастся синтезировать асимптотически устойчивую систему.

Для обеспечения устойчивого переходного процесса и уменьшения автоколебаний в установившемся режиме используется *логическое переключающее устройство* (ЛПУ).

Логическое переключающее устройство в СПС обеспечивает изменение структурной схемы при переходе изображающей точки на фазовом пространстве через некоторую, заранее определенную границу. Это дает дополнительную возможность существенно изменить динамическую характеристику системы и добиться устойчивого переходного процесса при неустойчивой характеристике основной части системы. Особенно эффективно ЛПУ для создания скользящего режима работы, который может быть заранее заданным вне зависимости от параметров основной части системы.

Введем в рассмотренную выше систему переменную структуру (рис. 4.14, б). Введем новые переменные состояния $x_i(t)$ вместо $(i-1)$ производных выходной величины $y(t)$ в формуле (4.44) и получим дифференциальное уравнение фазовых траекторий системы

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = -\frac{K_i x_1}{T^2 x_2}. \quad (4.46)$$

Проинтегрировав последнее уравнение, получим алгебраическое уравнение фазовых траекторий в виде эллипса с полуосями по оси абсцисс x_1 и по оси ординат x_2

$$\frac{x_1^2}{T^2} + \frac{x_2^2}{K_i} = C. \quad (4.47)$$

Большая полуось эллипса при $K_i = K_1 < T_2$ располагается на оси абсцисс (рис. 4.15, а), а при $K_i = K_2 > T_2$ – на оси ординат (рис. 4.15, б). Фазовая траектория в первом случае имеет большую амплитуду колебания, но сравнительно небольшую скорость выходной величины. А во втором случае, наоборот, имеет сравнительно небольшую амплитуду, но значительную скорость выходной величины.

Задача ЛПУ в том, чтобы переменным образом использовать положительные свойства каждой фазовой траектории. Для изменения структуры системы с помощью ЛПУ необходимо принять **логический алгоритм управления** (ЛАУ), согласно которому система автоматически выбирает оптимальную траекторию движения.

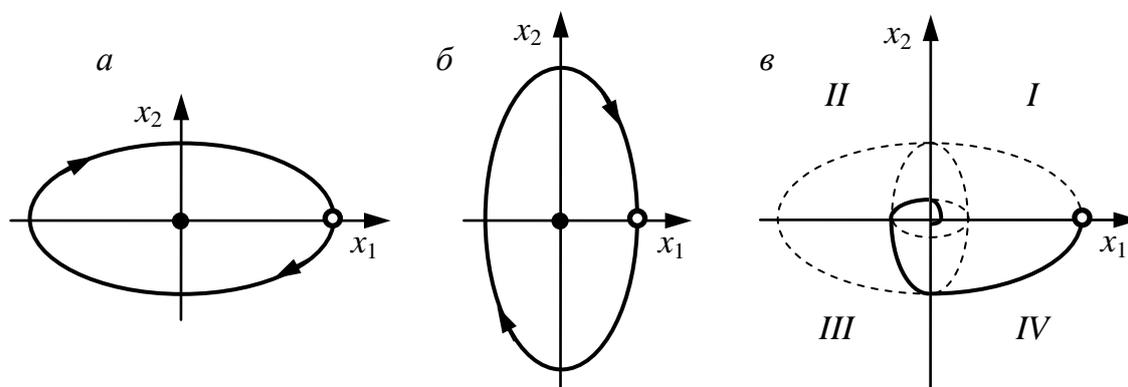


Рис. 4.15. Фазовые траектории нелинейной АСУ с переменной структурой

Если во II и IV квадрантах фазовой плоскости $[x_1; x_2]$ изображающая точка будет двигаться по фазовым траекториям, представленным на рис. 4.15, а, а в I и III квадрантах – по фазовым траекториям, представленным на рис. 4.15, б, то общая фазовая траектория типа эллипса переходит к устойчивому фокусу (рис. 4.15, в). В этом случае полученная СПС асимптотически устойчива.

Математически описать ЛАУ можно следующей нелинейной функцией:

$$z = \begin{cases} -K_1 y & \text{при } x_1 x_2 < 0; \\ -K_2 y & \text{при } x_1 x_2 > 0. \end{cases} \quad (4.48)$$

С помощью ЛПУ можно создать различные переходные процессы, но особый интерес представляют такие ЛПУ, реализующие скользкий процесс, который не зависит от параметров основной части системы и может протекать с заранее заданными свойствами.

Рассмотрим работу системы (рис. 4.16), в которой устройство управления УУ вместе с объектом управления ОУ образуют линей-

ную часть системы, описываемую передаточной функцией (4.43). Кроме этого, в системе имеется местная гибкая отрицательная обратная связь, описываемая передаточной функцией

$$W_{ГOC}(p) = K_{OC} p. \quad (4.49)$$

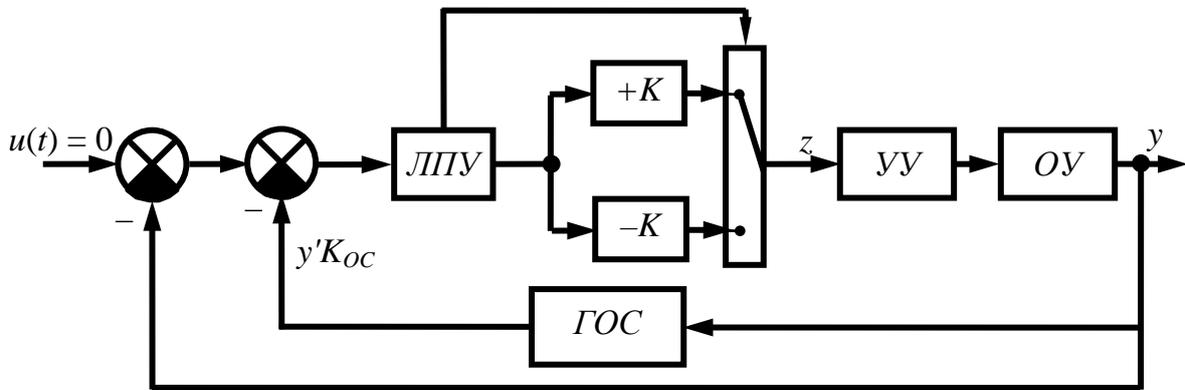


Рис.4.16. Структурная схема системы с переменной структурой

В СПС ЛПУ переключает звенья, коэффициенты которых равны по модулю, но имеют противоположные знаки. Тогда согласно формуле (4.46) получим уравнения фазовых траекторий в виде эллипса при $+K$ и в виде гиперболы при $-K$.

$$\frac{x_1^2}{T^2} + \frac{x_2^2}{K} = C; \quad (4.50)$$

$$\frac{x_1^2}{T^2} - \frac{x_2^2}{K} = C. \quad (4.51)$$

Гибкая отрицательная обратная связь обеспечивает скользящий режим работы в системе. Уравнение линии переключения

$$x_1 + x_2 K_{OC} = 0. \quad (4.52)$$

В такой системе ЛПУ работает по следующему ЛАУ. В I квадранте и части IV квадранта фазовой плоскости $[x_1; x_2]$ (до линии переключения) включается звено $+K$. А также в III квадранте и части II квадранта (до линии переключения) тоже включается звено $+K$ (рис. 4.17). Изображающая точка идёт по замкнутому циклу (4.50). Во II квадранте от линии переключения до положительной полуоси x_2 и в IV квадранте от линии переключения до отрицательной полуоси x_2 включается звено $-K$. Изображающая точка идёт по фазовой траектории «седло» с сепаратрисой C . При любом начальном значении $x_{10}; x_{20}$ сис-

тема стремится к линии переключения и по ней к устойчивому состоянию. Это устойчивое состояние может быть автоколебательным с достаточно малой частотой и амплитудой. Оно может иметь устойчивое равновесное состояние. Необходимо отметить, что при равенстве модулей $|+K| = |-K|$ фазовые траектории всегда попадут на линию переключения и система дальше пойдёт по скользящему режиму. Это не зависит от абсолютного значения величины коэффициента K .

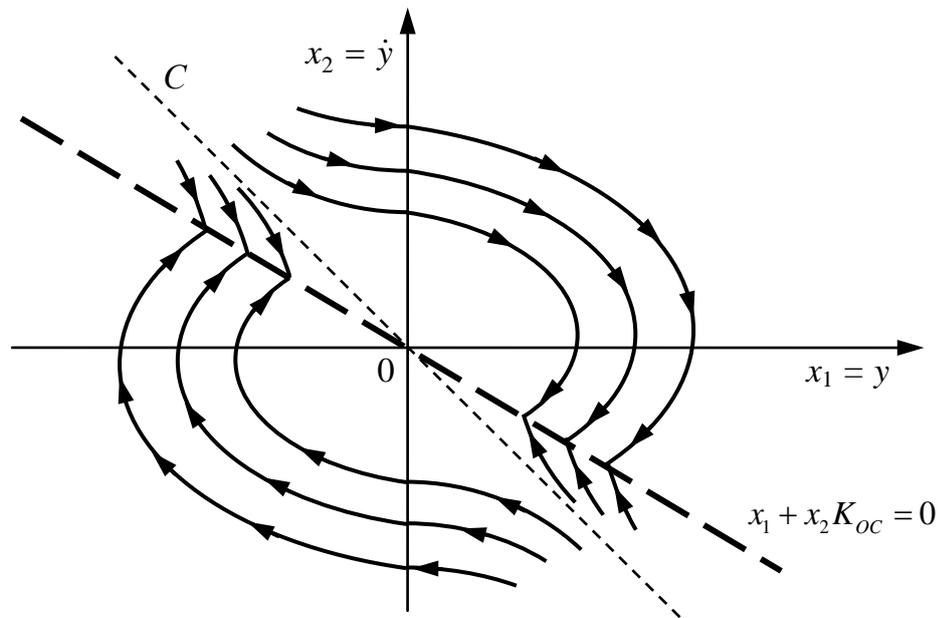


Рис. 4.17. Фазовый портрет нелинейной АСУ с переменной структурой в скользящем режиме

Математически описать ЛАУ можно следующей нелинейной функцией:

$$z = \begin{cases} -K_1 \left(y + p y K_{oc} \right) & \text{при } x_1 \left(x_2 + \frac{x_1}{K_{oc}} \right) > 0; \\ +K_2 \left(y + p y K_{oc} \right) & \text{при } x_1 \left(x_2 + \frac{x_1}{K_{oc}} \right) < 0. \end{cases} \quad (4.53)$$

В заключение стоит отметить, что выбор ЛАУ должен полностью соответствовать требованиям, предъявляемым к качеству переходного процесса системы. Широкие возможности ЛАУ позволяют существенно повысить точность регулирования, в разы снизить перерегулирование и уменьшить время регулирования, а также значительно расширить область устойчивости системы, т.е. расширить область допустимых нагрузок и управляющих воздействий.

Контрольные вопросы и задания

1. Перечислите задачи, решаемые при коррекции нелинейной системы.
2. Перечислите методы коррекции нелинейных автоматических систем.
3. В чем суть линейной коррекции нелинейных систем?
4. Для чего нужен нормированный коэффициент гармонической линеаризации?
5. Как компенсировать нелинейность в виде зоны нечувствительности?
6. В чем суть компенсации нелинейной характеристики с помощью жесткой обратной связи?
7. Как осуществляют коррекцию амплитуды и частоты автоколебаний в нелинейных автоматических системах?
8. В чем суть вибрационной линеаризации релейного элемента?
9. Как работает широтно-импульсная модуляция сигнала при вибрационной линеаризации релейного элемента?
10. Какой недостаток имеет вибрационная линеаризация релейного элемента?
11. Что называется псевдолинейным корректирующим устройством?
12. Опишите релейное ПКУ с опережающей петлей гистерезиса.
13. Опишите псевдолинейное звено с амплитудным подавлением.
14. Опишите псевдолинейное звено с фазовым опережением.
15. Опишите структуру модифицированного псевдолинейного ПИД-регулятора.
16. В чем заключается скользящий режим работы в нелинейных автоматических системах?
17. Как реализуется скользящий режим работы в нелинейных автоматических системах?
18. Что называется скользящим процессом в нелинейных автоматических системах?
19. От каких параметров зависит отрезок скользящего процесса?
20. Дайте определение системе с переменной структурой.
21. В чем функции логического переключающего устройства?
22. Для чего нужен логический алгоритм управления?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенный в учебном пособии материал по теории автоматического управления нелинейными системами позволит студентам высшего учебного заведения освоить основы математического моделирования, методы определения автоколебаний, анализа устойчивости, оценки качества регулирования и коррекции нелинейных автоматических систем, а также приобрести навыки практического решения задач.

Для расширенного изучения теории нелинейных систем автоматического управления рекомендуется воспользоваться литературой, приведенной в библиографическом списке.

В качестве прикладных компьютерных программ рекомендуется использовать пакетное приложение [Simulink](#) программного комплекса [MATLAB®](#), программный комплекс «Моделирование в технических устройствах» («[МВТУ](#)»), программная среда VisSim® и др.

Библиографический список

1. *Бесекерский, В. А.* Теория автоматического управления : учебное пособие / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. – 4-е изд., перераб. и доп. – СПб. : Профессия, 2003. – 752 с.
2. *Васильев, Е.М.* Теория автоматического управления. Нелинейные системы : учебное пособие / Е.М. Васильев, В.Г. Коломыцев. – Пермь : Изд-во Пермского национального исследовательского политехнического университета, 2011. – 115 с.
3. *Власов, К.П.* Теория автоматического управления. Основные положения. Примеры расчета / К.П. Власов. – М. : Гуманитарный центр, 2013. – 540 с.
4. *Евсюков, В. Н.* Нелинейные системы автоматического управления : учебное пособие для студентов вузов / В.Н. Евсюков. – Оренбург : ГОУ ОГУ, 2007. – 172 с.
5. *Ким, Д. П.* Теория автоматического управления : учебник и практикум для академического бакалавриата / Д. П. Ким. – М. : Юрайт, 2016. – 276 с.
6. *Мирошник, И. В.* Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы : учебное пособие / И.В. Мирошник. – СПб. : Питер, 2006. – 272 с.
7. *Ощепков, А. Ю.* Системы автоматического управления: теория, применение, моделирование в MATLAB : учебное пособие / А. Ю. Ощепков. – 2-е изд., испр. и доп. – СПб. : Лань, 2013. – 208 с.
8. *Попов, Е. П.* Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления : учебное пособие / Е.П. Попов. – 2-е изд., стер. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 256 с.
9. *Преображенский, А.В.* Теория автоматического управления : учебное пособие / А.В. Преображенский. – Н. Новгород : Изд-во ФГОУ ВПО «ВГАВТ», 2011. – 96 с.
10. *Солодовников, В. В.* Теория автоматического регулирования. Кн. 3. Теория нестационарных, нелинейных и самонастраивающихся систем автоматического регулирования / В. В. Солодовников [и др.] ; ред. В. В. Солодовников. – М. : Машиностроение, 1969. – Ч. I. – 608 с.
11. *Скороспешкин, В. Н.* Модифицированный псевдолинейный ПИД - регулятор [Электронный ресурс] / В. Н. Скороспешкин, М.В. Скороспешкин // Интернет-журнал «Науковедение». – 2013. – № 6 (19). – М. : Науковедение, 2009. – Режим доступа: <http://naukovedenie.ru/index.php?p=issue-6-13> (дата обращения: 27.03.2017). – ISSN 2223-5167.
12. *Юревич, Е. И.* Теория автоматического управления : учебник для вузов / Е. И. Юревич. – 4-е изд., перераб. и доп. – СПб. : БХВ-Петербург, 2016. – 560 с.

Практическая работа № 1

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТИПОВЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗВЕНЬЕВ

Цель практической работы: моделирование статических и динамических характеристик типовых нелинейных звеньев.

Задание на практическую работу:

1. Составить в Simulink схемы моделей типовых характеристик нелинейных звеньев (рис. П.1, П.2, П.3), состоящие из построителя сигналов «Signal Builder», блока нелинейной характеристики («Dead Zone», «Saturation», «Backlash», «Relay»), усилителя «Gain», миксеров сигналов «Mux» и «Demux», осциллографа «Scope» и построителя «XY Graph».

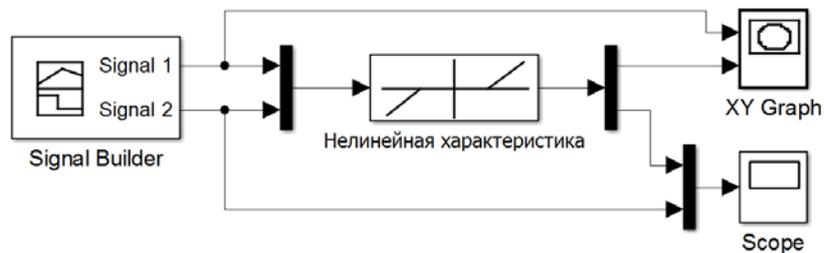


Рис. П.1. Схема для исследования нелинейных характеристик

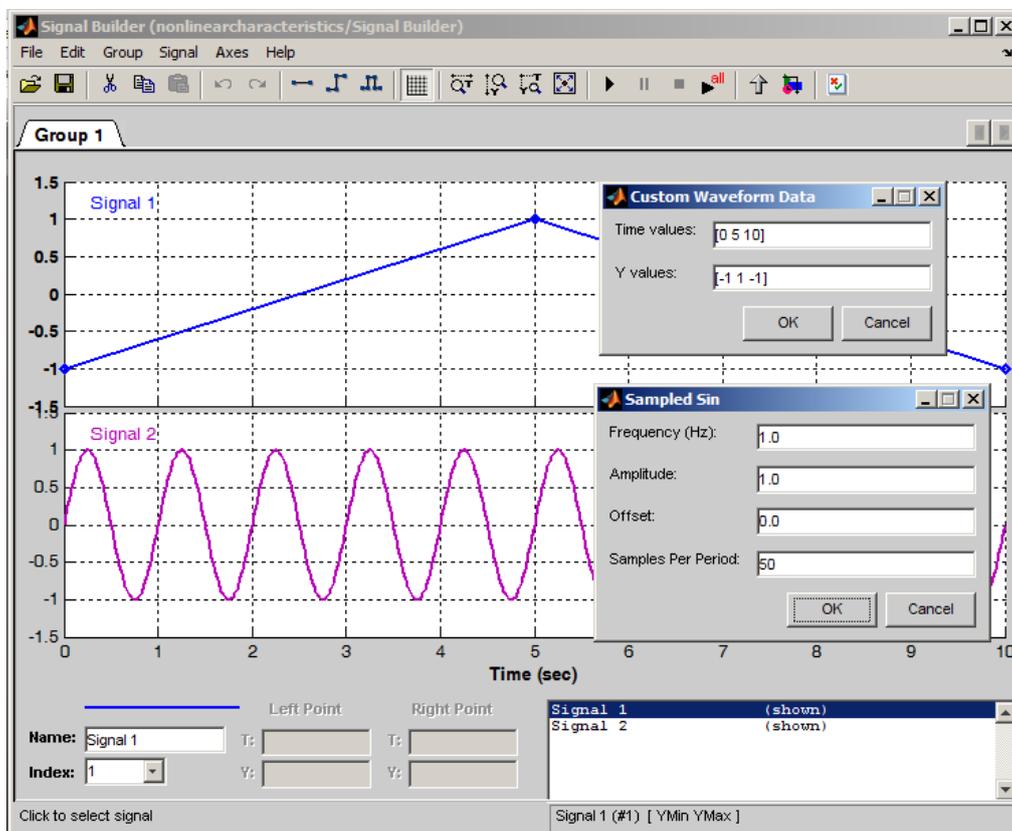


Рис. П.2. Внешний вид настроек построителя сигналов «Signal Builder»

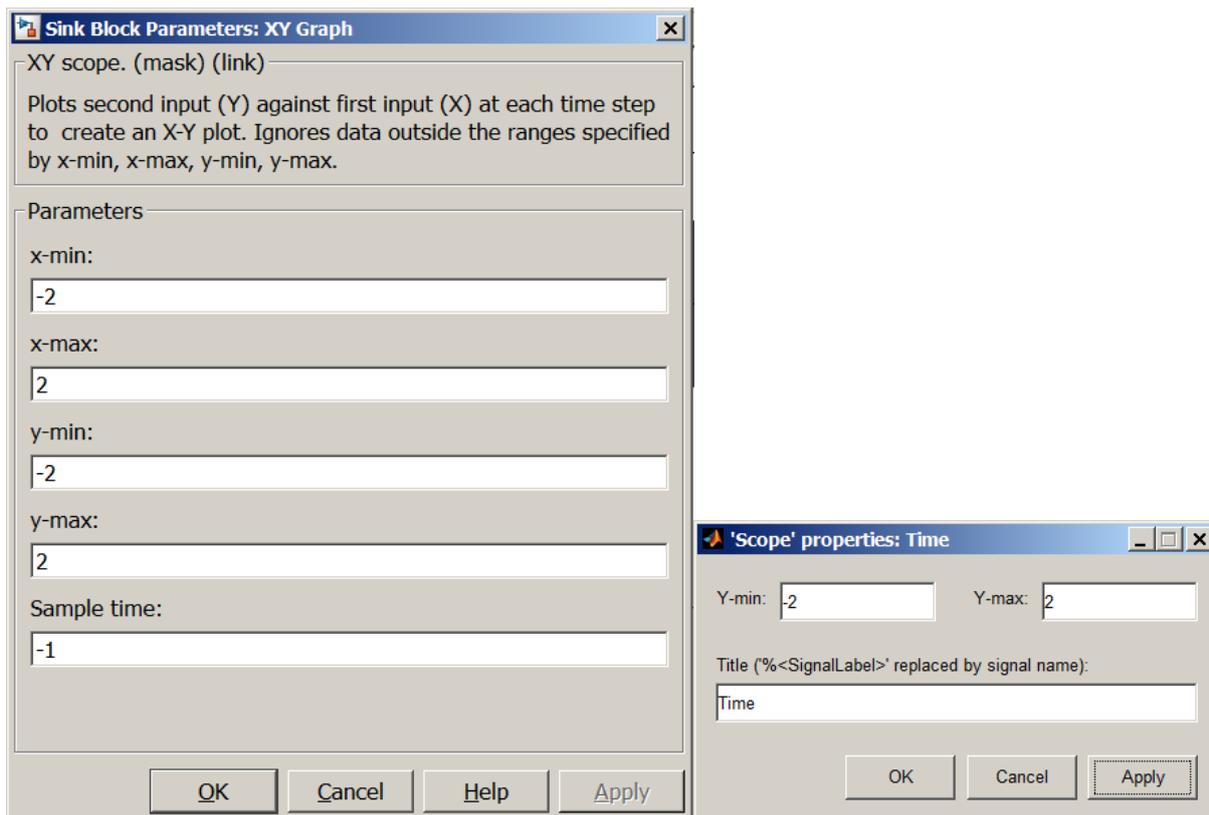


Рис. П.3. Окна настройки «XY Graph» и осциллографа «Scope»

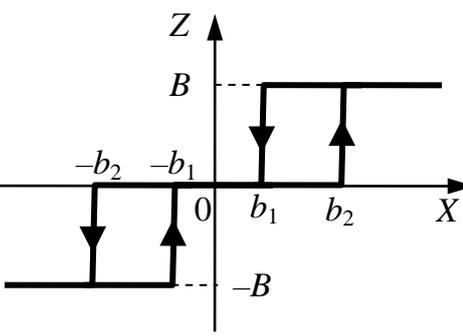
2. Согласно табл. П.1 задать для каждой схемы нелинейных характеристик численные параметры, произвести моделирование схемы, получить характеристики каждой нелинейности.

Таблица П.1

Статические характеристики и уравнения типовых нелинейностей

№ п/п	Внешний вид характеристики	Название и уравнение звена
1		<p><u>Зона нечувствительности</u></p> $z = \begin{cases} 2(x - 0,5) & \text{при } x > 0,5; \\ 0 & \text{при } x \leq 0,5; \\ 2(x + 0,5) & \text{при } x < -0,5 \end{cases}$
2		<p><u>Насыщение (ограничение)</u></p> $z = \begin{cases} 0,5 & \text{при } x > 0,5; \\ 2x & \text{при } x \leq 0,5; \\ -0,5 & \text{при } x < -0,5 \end{cases}$

1	2	3
3		<p><u>Зона нечувствительности с насыщением</u></p> $z = \begin{cases} 0,5 & \text{при } x > 0,75; \\ 2(x - 0,5) & \text{при } 0,5 < x \leq 0,75; \\ 0 & \text{при } x \leq 0,5; \\ 2(x + 0,5) & \text{при } -0,5 > x \geq -0,75; \\ -0,5 & \text{при } x < -0,75 \end{cases}$
4		<p><u>Люфт (Мертвый ход)</u></p> $z = \begin{cases} 2(x - 0,5) & \text{при } \dot{x} > 0; \\ 2(x + 0,5) & \text{при } \dot{x} < 0; \\ \text{const} & \text{при } x - z < b \end{cases}$
5		<p><u>Идеальное двухпозиционное реле</u></p> $z = \begin{cases} 1,5 & \text{при } x > 0; \\ -1,5 & \text{при } x < 0 \end{cases}$
6		<p><u>Идеальное трехпозиционное реле</u></p> $z = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0,5; \\ 0 & \text{при } x \leq 0,5; \\ -1 & \text{при } x < -0,5 \end{cases}$
7		<p><u>Двухпозиционное реле с гистерезисом</u></p> $z = \begin{cases} \left. \begin{matrix} 2 & \text{при } x > 0,5; \\ -2 & \text{при } x < -0,5; \end{matrix} \right\} \text{при } \dot{x} > 0; \\ \left. \begin{matrix} 2 & \text{при } x > -0,5; \\ -2 & \text{при } x < -0,5; \end{matrix} \right\} \text{при } \dot{x} < 0 \end{cases}$

1	2	3
8		<p>Трехпозиционное реле с гистерезисом</p> $Z = \begin{cases} \left. \begin{array}{l} 2 \text{ при } X > 0,75; \\ 0 \text{ при } -0,25 \leq X \leq 0,75; \\ -2 \text{ при } X < -0,25; \end{array} \right\} \text{при } \dot{X} > 0; \\ \left. \begin{array}{l} 2 \text{ при } X > 0,25; \\ 0 \text{ при } -0,75 \leq X \leq 0,25; \\ -2 \text{ при } X < -0,75; \end{array} \right\} \text{при } \dot{X} < 0 \end{cases}$

Содержание отчета по работе:

- 1) название и цель;
- 2) аналитические зависимости и схемы характеристик, описывающие исследуемые звенья;
- 3) схема исследуемой модели в среде Simulink для каждого нелинейного звена;
- 4) статические и динамические характеристики каждого нелинейного звена;
- 5) вывод по работе.

Контрольные вопросы:

1. Какая система называется нелинейной?
2. Приведите классификацию нелинейных характеристик.
3. По указанию преподавателя нарисовать статическую характеристику и уравнение типового нелинейного звена.
4. Приведите примеры нелинейностей в реальных технических устройствах.

Практическая работа № 2

ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ АВТОМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ

Цель работы: исследование параметров автоколебаний в нелинейной автоматической системе управления.

Задание на практическую работу:

1. Составить в Simulink схему модели для исследования автоколебаний в нелинейной системе автоматического управления (рис. П.4), состоящую из *нелинейной части* (блоки нелинейных характеристик «Saturation» и «Relay») и *линейной части* (усилитель «Gain», передаточная функция «Transfer fcn», интегратор «Integrator»). Приемниками выходного сигнала установить осциллограф «Scope» и «XY Graph»;

2. Согласно табл. П.2 задать для каждой схемы нелинейной системы численные значения параметров и задающее воздействие $u(t)$, произвести моделирование схемы и получить переходную и фазовую характеристики выходного сигнала;

3. В случае наблюдения установившегося периодического режима – симметричных автоколебаний, определить их амплитуду A' , период T' и частоту ω' .

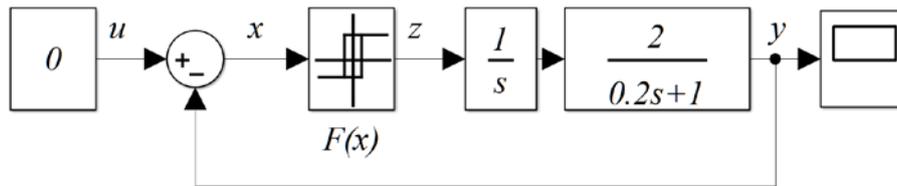


Рис. П.4. Структурная схема модели нелинейной АСУ в Simulink

Таблица П.2

Параметры линейной и нелинейной частей системы

№ п/п	Нелинейная часть	Линейная часть
1		$W_{ЛЧ}(p) = \frac{K}{(Tp+1)(Tp+1)p};$ $T = 0,2; K = 1 \text{ и } 5; u(t) = 10$
2		$W_{ЛЧ}(p) = \frac{K}{(Tp+1)(Tp+1)p};$ $T = 0,2; K = 0,1 \text{ и } 1; u(t) = 0$
3		$W_{ЛЧ}(p) = \frac{K}{(Tp+1)(Tp+1)};$ $T_1 = 2; T_2 = 1; K = 1 \text{ и } 2; u(t) = 0$
4		$W_{ЛЧ}(p) = \frac{K}{p(Tp+1)};$ $T = 0,2; K = 1; u(t) = 0$
5		$W_{ЛЧ}(p) = \frac{K(T_1p+1)}{(T_2p+1)};$ $T_1 = 0,05; T_2 = 0,1; K = 1; u(t) = 0$

Содержание отчета по работе:

- 1) название и цель;
- 2) схема исследуемой модели в среде Simulink для каждой нелинейной системы автоматического управления;
- 3) переходная и фазовая характеристики для каждой нелинейной системы автоматического управления;
- 4) амплитуда A' , период T' и частота ω' автоколебаний для каждой нелинейной системы автоматического управления (при наличии симметричных колебаний);
- 5) вывод по работе.

Контрольные вопросы:

1. Какая система называется нелинейной?
2. Приведите определение автоколебаний в нелинейной системе.
3. В каком случае возможно возникновение автоколебаний в нелинейной системе.
4. Приведите определение переходной характеристики.
5. Что такое фазовое пространство и фазовая траектория?
6. Как в данной работе получали фазовые траектории?
7. Какие существуют типовые фазовые траектории и какие особые точки им соответствуют?
8. Приведите методику определения амплитуды A' , периода T' и частоты ω' автоколебаний.
9. Приведите примеры автоколебательных режимов в реальных нелинейных системах.

Практическая работа № 3

ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК И ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Цель практической работы: практическое освоение способов построения переходных характеристик по фазовым траекториям системы и наоборот.

Задание на практическую работу:

- 1) для каждой заданной на рис. П.5 фазовой траектории построить приблизительную переходную характеристику системы;
- 2) для каждой заданной на рис. П.6 переходной характеристики построить приблизительную фазовую траекторию системы;
- 3) для каждой заданной на рис. П.7 пары временной и импульсной переходных характеристик построить приблизительную фазовую траекторию системы.

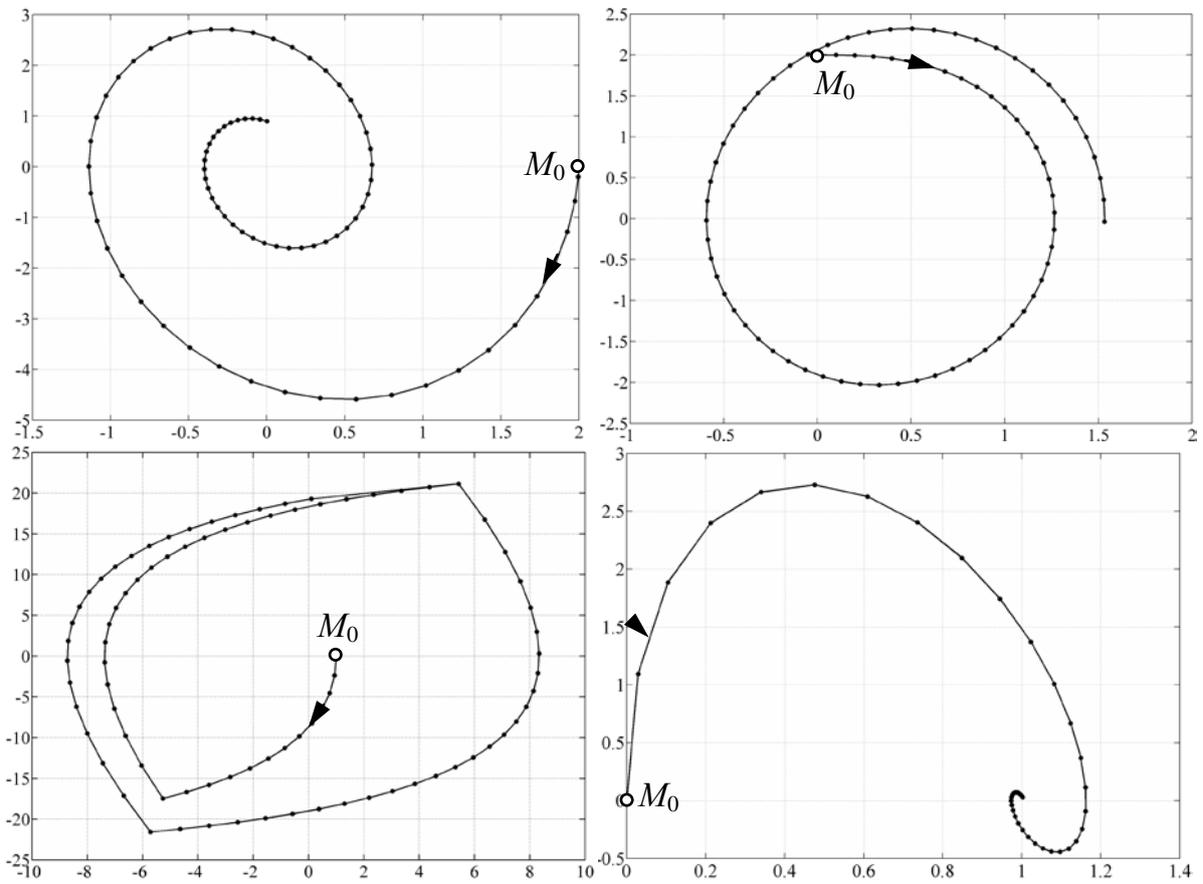


Рис. П.5. Фазовые траектории системы

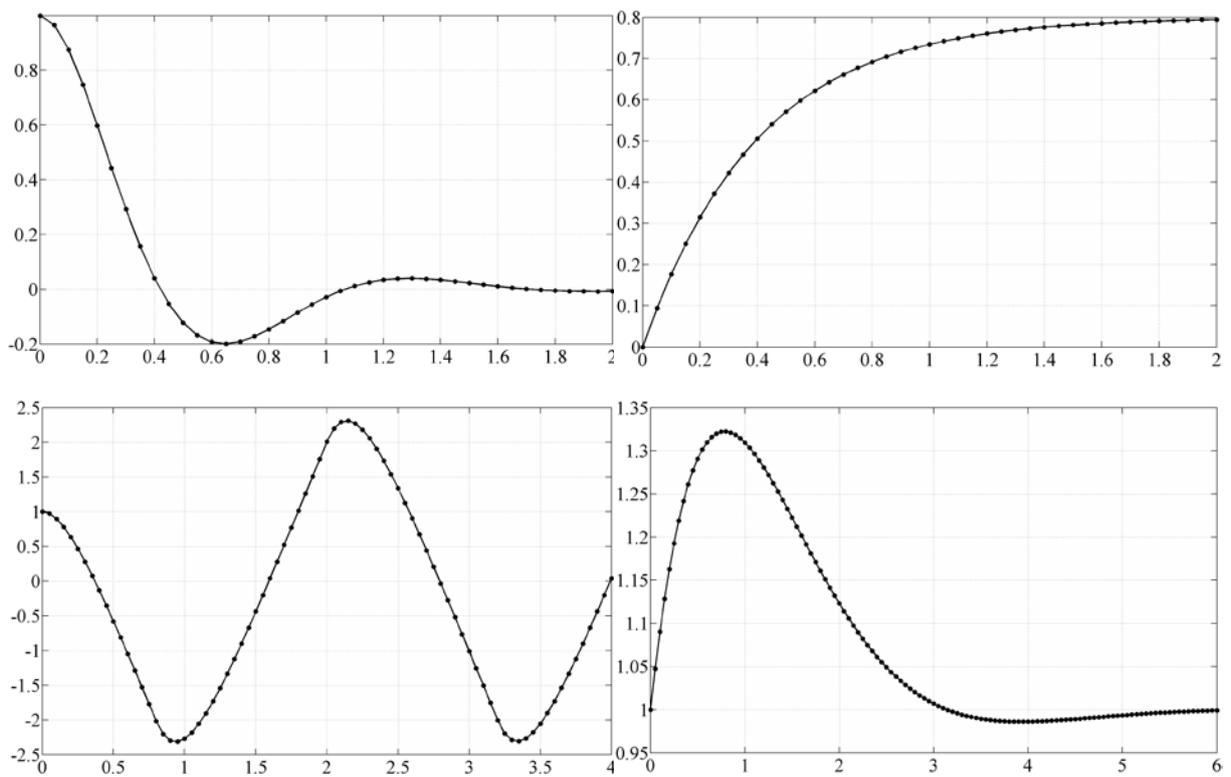


Рис. П.6. Переходные характеристики системы



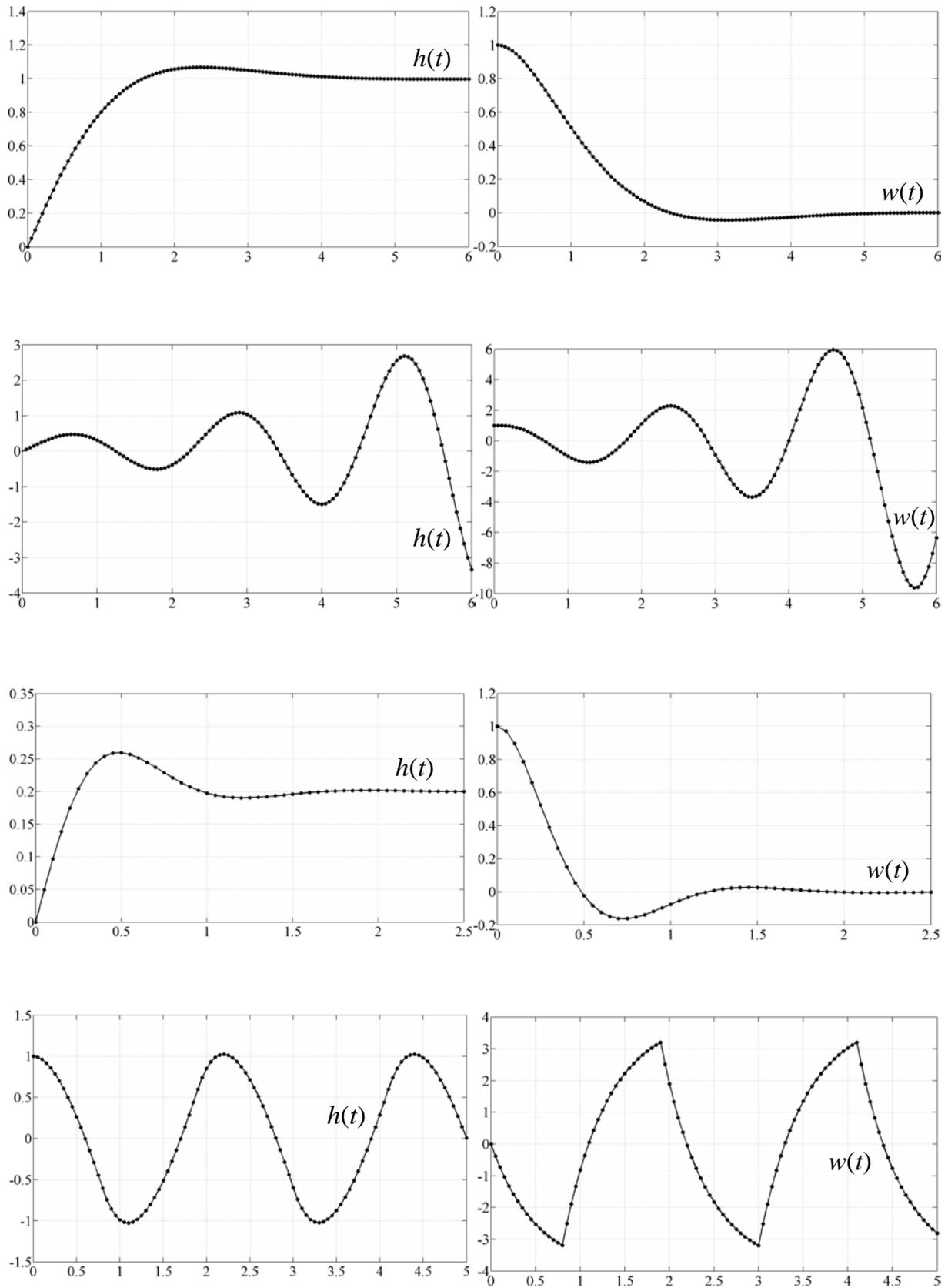


Рис. П.7. Временные и импульсные переходные характеристики системы



Содержание отчета по работе:

- 1) название и цель;
- 2) исходные характеристики системы;
- 3) полученные характеристики системы;
- 4) вывод по работе.

Контрольные вопросы:

1. Что такое фазовое пространство, фазовая траектория и фазовый портрет?
2. Что показывает изображающая точка?
3. Какие существуют типовые фазовые траектории и какие особые точки им соответствуют?
4. Как связаны переходная характеристика системы и её фазовая траектория?
5. Как связаны переходная и импульсная характеристика с фазовой траекторией системы?
6. Как строится фазовая траектория на фазовой плоскости?
7. Какие из приведенных характеристик соответствуют устойчивому, неустойчивому и автоколебательному процессам?

Практическая работа № 4

ПОСТРОЕНИЕ ФАЗОВОГО ПОРТРЕТА СИСТЕМЫ

Цель практической работы: практическое освоение метода фазовых траекторий и построения фазового портрета системы.

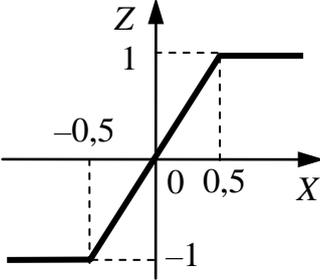
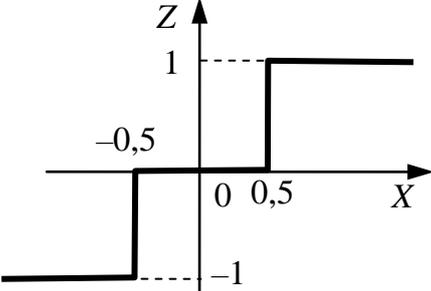
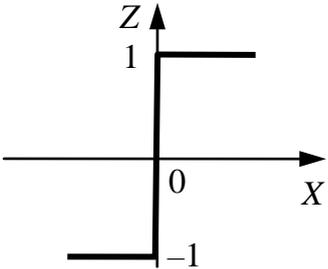
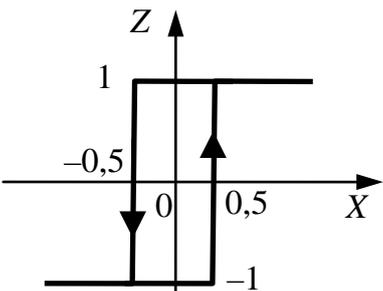
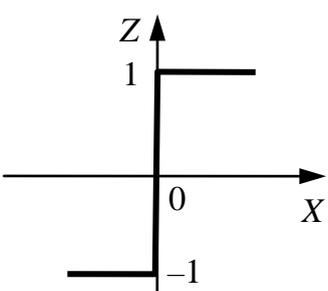
Задание на практическую работу:

- 1) согласно математическому описанию (табл. П.3) и структурной схеме системы (см. рис. 2.6) получить параметрическое и дифференциальное уравнения фазовых траекторий системы;
- 2) для произвольного участка фазовой плоскости построить фазовую траекторию системы методом изоклин;
- 3) найти решения дифференциального уравнения фазовой траектории $x_2 = f(x_1)$ и построить фазовый портрет системы с заданными начальными условиями $M_0(x_{10}; x_{20})$.

Содержание отчета по работе:

- 1) название и цель;
- 2) передаточная функция линейной части и нелинейная характеристика нелинейной части системы;
- 3) расчетные формулы и фазовая траектория системы, построенная методом изоклин;
- 4) расчетные формулы и фазовый портрет системы;
- 5) вывод по работе.

Параметры линейной и нелинейной частей системы

№ п/п	Нелинейная часть	Линейная часть	Начальные условия
1		$W_{ЛЧ}(p) = \frac{2}{p^2}$	$M_0(0,5; 0);$ $M_0(1; 0);$ $M_0(2; 0)$
2		$W_{ЛЧ}(p) = \frac{1,5}{p^2}$	$M_0(1; 0);$ $M_0(0; 1);$ $M_0(1; 1)$
3		$W_{ЛЧ}(p) = \frac{5}{p^2}$	$M_0(0; 0);$ $M_0(1; 0);$ $M_0(-2; 0)$
4		$W_{ЛЧ}(p) = \frac{2}{(0,2p+1)p}$	$M_0(0; 0);$ $M_0(1; 0);$ $M_0(2; 0)$
5		$W_{ЛЧ}(p) = \frac{10}{(2p+1)p}$	$M_0(0; 0);$ $M_0(1; 0);$ $M_0(2; 2)$

Контрольные вопросы:

1. Назовите вид типовых нелинейностей, представленных в табл. П.3.
2. Что такое фазовая траектория и фазовый портрет?
3. Перечислите основные свойства фазовых траекторий.
4. Поясните процесс получения параметрического и дифференциального уравнений фазовых траекторий системы.
5. Что такое изоклина?
6. Какие изоклины называют главными?
7. Что означает пересечение главных изоклин?
8. Какие особые точки соответствуют построенным фазовым траекториям?

Практическая работа № 5**ГАРМОНИЧЕСКАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ**

Цель практической работы: получение гармонически линеаризованных моделей нелинейных звеньев.

Задание на практическую работу:

- 1) согласно заданным нелинейным характеристикам и функциям нелинейных звеньев (табл. П.4) вычислить коэффициенты гармонической линеаризации $q(A)$ и $q'(A)$;
- 2) по результатам вычислений записать гармоническую передаточную функцию и комплексный коэффициент передачи линеаризованной нелинейности;
- 3) построить графики зависимости $q(A)$ и $q'(A)$.

Содержание отчета по работе:

- 1) название и цель;
- 2) статические характеристики нелинейностей;
- 3) расчетные формулы, коэффициенты гармонической линеаризации $q(A)$ и $q'(A)$, гармоническая передаточная функция и комплексный коэффициент передачи линеаризованной нелинейности;
- 4) графики зависимости $q(A)$ и $q'(A)$;
- 5) вывод по работе.

Контрольные вопросы:

1. В чем суть гармонической линеаризации?
2. В каком случае можно применять гармоническую линеаризацию для нелинейной системы?
3. Поясните методику гармонической линеаризации.

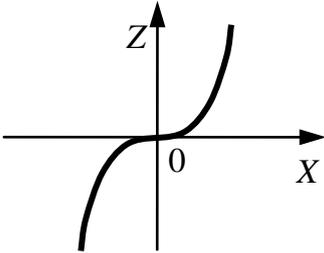
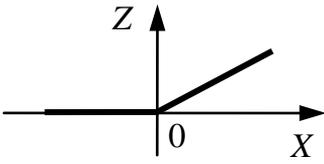
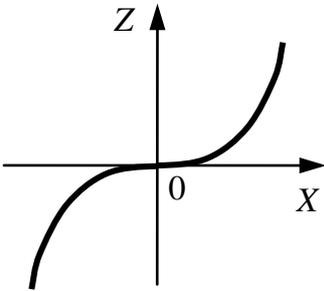
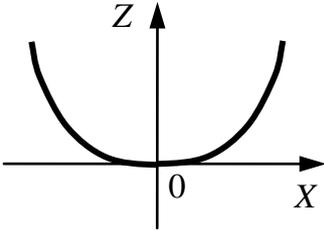
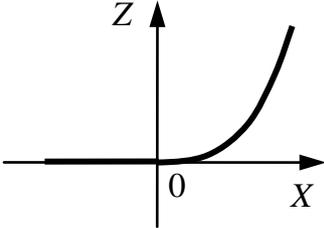
4. В чем состоит свойство фильтра низких частот линейной части системы?

5. В каком случае комплексный коэффициент передачи нелинейного звена не имеет мнимой части?

6. Какие нелинейности после гармонической линеаризации дают фазовый сдвиг сигнала, проходящего через них?

Таблица П.4

Статические характеристики нелинейностей

№ п/п	Внешний вид характеристики	Функция звена
1		$F(x) = kx^3$
2		$F(x) = \begin{cases} kx & \text{при } x \geq 0; \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$
3		$F(x) = kx^2 \text{ sign}(x)$
4		$F(x) = kx^2$
5		$F(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{при } x \geq 0; \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$

Практическая работа № 6

АНАЛИЗ АВТОКОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Цель практической работы: освоение методов определения и анализа автоколебаний в нелинейной системе.

Задание на практическую работу:

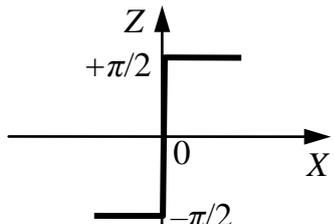
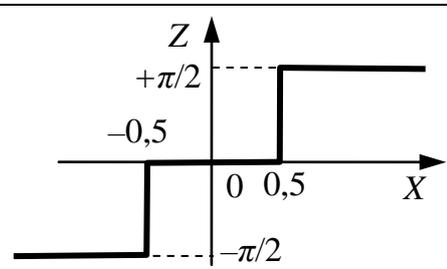
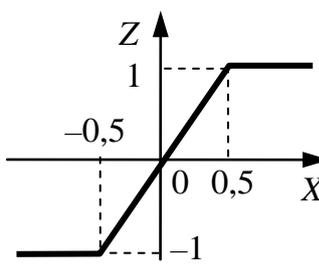
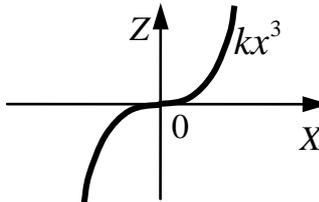
1) согласно математическому описанию (табл. П.5) и рис. 2.6 отобразить модель нелинейной системы в виде структурной схемы;

2) провести анализ автоколебаний в нелинейной системе алгебраическим методом;

3) провести анализ автоколебаний в нелинейной системе методом гармонического баланса.

Таблица П.5

Параметры линейной и нелинейной частей системы

№ п/п	Нелинейная часть	Линейная часть
1		$W_{ЛЧ}(p) = \frac{5}{(0,1p + 1)(p + 1)p}$
2		$W_{ЛЧ}(p) = \frac{5}{(p + 1)^2 p}$
3		$W_{ЛЧ}(p) = \frac{5}{(0,1p + 1)(p + 1)p}$
4		$W_{ЛЧ}(p) = \frac{5}{(0,1p + 1)^2 p}$

Контрольные вопросы:

1. В чем суть гармонической линеаризации?
2. В чем суть алгебраического метода определения автоколебаний в нелинейной системе?
3. В чем суть метода гармонического баланса?
4. Какой тип корней характеристического уравнения системы позволяет определить автоколебания?
5. Как получить гармонически линеаризованное уравнение замкнутой системы?
6. Назовите два условия гармонического баланса.
7. От чего зависит и как строится обратная амплитудно-фазовая характеристика нелинейности с обратным знаком?
8. Как определить устойчивость автоколебательного процесса в методе гармонического баланса?

Практическая работа № 7**АНАЛИЗ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ**

Цель практической работы: определение абсолютной устойчивости нелинейной системы частотным методом Попова.

Задание на практическую работу:

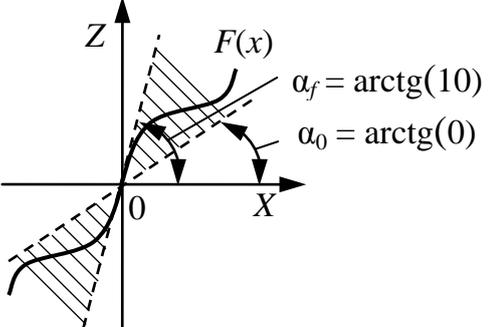
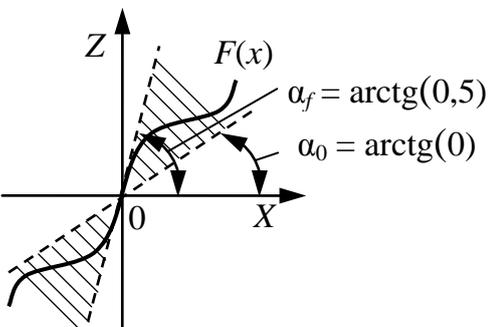
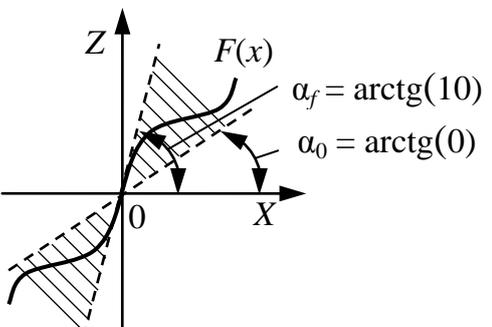
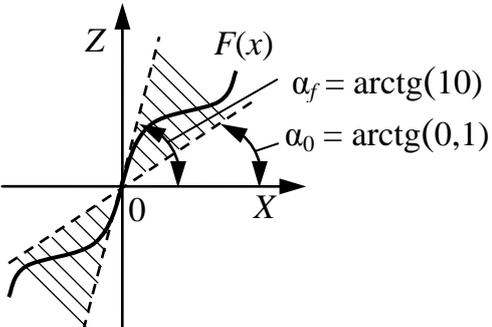
1) согласно сектору, определяющему границы нелинейной характеристики, и математическому описанию линейной части системы (табл. П.6), структура которой задана на рис. 2.26, провести анализ абсолютной устойчивости частотным методом Попова.

Контрольные вопросы:

1. Какие виды нелинейных характеристик позволяют использовать частотный метод Попова?
2. Что такое абсолютная устойчивость системы?
3. Сформулируйте теорему Попова.
4. Что называется линией Попова?
5. Что в плане линейной части системы является условием применимости критерия Попова?
6. Как получить модифицированную частотную характеристику линейной части системы?
7. Какова графическая интерпретация теоремы Попова?
8. Как определяется угловой коэффициент нелинейной характеристики?
9. Какова графическая интерпретация теоремы Попова для системы с нелинейностью, ограниченной сектором (α_0 и α_f)?



Параметры линейной и нелинейной частей системы

№ п/п	Сектор статической характеристики нелинейности	Линейная часть
1	 <p> $\alpha_f = \text{arctg}(10)$ $\alpha_0 = \text{arctg}(0)$ </p>	$W_{\text{ЛЧ}}(p) = \frac{5}{(0,5p+1)} \frac{1}{p}$
2	 <p> $\alpha_f = \text{arctg}(0,5)$ $\alpha_0 = \text{arctg}(0)$ </p>	$W_{\text{ЛЧ}}(p) = \frac{5}{(0,3p+1)} \frac{1}{p} e^{-0,4p}$
3	 <p> $\alpha_f = \text{arctg}(10)$ $\alpha_0 = \text{arctg}(0)$ </p>	$W_{\text{ЛЧ}}(p) = \frac{0,4}{(0,5p+1)^2 p}$
4	 <p> $\alpha_f = \text{arctg}(10)$ $\alpha_0 = \text{arctg}(0,1)$ </p>	$W_{\text{ЛЧ}}(p) = \frac{0,1}{(0,1p+1)^2 p}$

Практическая работа № 8

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Цель практической работы: практическое определение границ абсолютной устойчивости нелинейной системы.

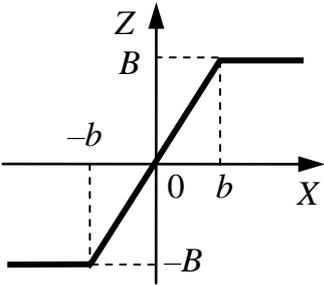
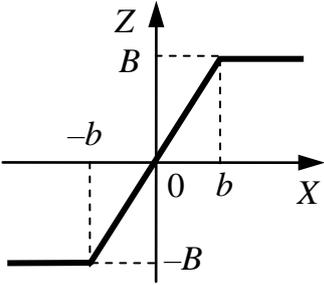
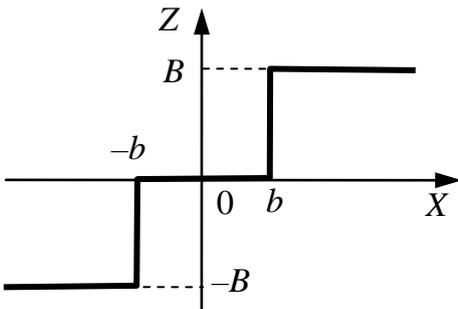
Задание на практическую работу:

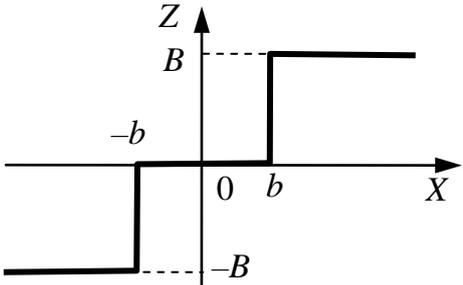
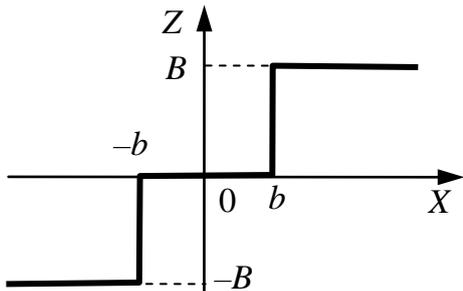
1) согласно математическому описанию (табл. П.7) и структурной схеме (см. рис. 2.6) определить границы абсолютной устойчивости системы.

2) построить на плоскости параметров линейной части системы область абсолютной устойчивости системы.

Таблица П.7

Параметры линейной и нелинейной частей системы

№ п/п	Нелинейная часть	Линейная часть
1	2	3
1		$W_{ЛЧ}(p) = \frac{K}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p}$
2		$W_{ЛЧ}(p) = \frac{K}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p + KK_{OC}}$
3		$W_{ЛЧ}(p) = \frac{K}{(Tp + 1)} \frac{1}{p}$

1	2	3
4		$W_{ЛЧ}(p) = \frac{K}{(Tp+1)^2 p}$
5		$W_{ЛЧ}(p) = \frac{K(T_1p+1)}{(T_2p+1)^2 p}$

Контрольные вопросы:

1. Как по критерию Гурвица можно определить наличие пары чисто мнимых корней в характеристическом уравнении гармонически линеаризованной системы?
2. Поясните методику определения границ абсолютной устойчивости системы.
3. Как по характеристическому уравнению гармонически линеаризованной системы составить матрицу Гурвица?
4. Назовите два условия определения границ абсолютной устойчивости системы.

Практическая работа № 9**АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ПРЯМЫМ МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА**

Цель практической работы: практическое определение устойчивости нелинейной системы прямым методом Ляпунова.

Задание на практическую работу:

1. Исследовать на знакоопределенность следующие квадратичные формы функции Ляпунова:

a) $V = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3;$

b) $V = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3;$

c) $V = x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3;$

- d) $V = x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3$;
 e) $V = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;
 f) $V = -x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.

2. Исследовать прямым методом Ляпунова устойчивость положения равновесия следующих систем:

- a) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0,5x_1 - x_2 + 2x_2 - x_1^3; \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2. \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2^3; \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 - x_2^3. \end{cases}$
- c) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 - x_1^3; \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2^3 + x_3; \\ \dot{x}_3 = -x_2 - x_3^5. \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_3 - x_1^3; \\ \dot{x}_2 = -x_2^3 + x_3; \\ \dot{x}_3 = 2x_1 - x_2 - x_3^3. \end{cases}$
- e) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + 0,5x_1x_2^2; \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_1^2x_2. \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + 0,5x_1x_2^3; \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_1^2x_2 - x_2^3. \end{cases}$

3. Определить границы и области значений параметров (a, b, c) , при которых устойчиво положение равновесия следующих систем:

- a) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -bx_1^3 + ax_2; \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 2x_2^5. \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + ax_2; \\ \dot{x}_2 = -2cx_1 - 2x_2^5. \end{cases}$
- c) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + ax_2; \\ \dot{x}_2 = -cx_1 - 2x_2^5. \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -bx_1^3 + ax_2; \\ \dot{x}_2 = -cx_1 - 2dx_2^5. \end{cases}$

Контрольные вопросы:

1. В какой форме представляется математическое описание системы для применения прямого метода Ляпунова?
2. Что является функцией Ляпунова?
3. Что значит знакоопределенность, знакопостоянство и знакопеременность функции Ляпунова?
4. Как проверить знакоопределенность функции Ляпунова в виде квадратичной формы?
5. Что такое полная производная функции Ляпунова по времени?
6. Сформулируйте теоремы Ляпунова об устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости.
7. Что представляет собой градиент функции Ляпунова?
8. Что представляет собой вектор фазовой скорости системы?
9. Поясните порядок расчета при оценке устойчивости нелинейной системы прямым методом Ляпунова.