**18. Дано нелинейное уравнение в пространстве непрерывных функций $C[a;b]$.**

**A. Используя принцип сжимающих операторов, доказать, что данное уравнение имеет единственное решение $x(t) \in C[a;b]$.**

**B. Методом простых итераций найти приближенное решение этого уравнения с точностью $\varepsilon = 0.01$, используя априорную оценку числа итераций. В качестве ответа предъявить график приближенного решения.**

**Для вычислений и построения графика использовать математические пакеты.**

$$5. \quad x(t) - \sin^2 \frac{x(t)}{\pi} = t, \quad [a;b] = [-4\pi; 4\pi]$$

**Образец решения**

$$x(t) + t^2 = \frac{7}{4}\sqrt{1 + |x(t)|}, \quad [a;b] = [-3;3]$$

Решение этой задачи опирается на теорию сжимающих операторов и метод простых итераций, изложенные в §4, §5 конспекта лекций.

*A. Используя принцип сжимающих операторов, докажем, что данное уравнение имеет единственное решение $x(t) \in C[-3;3]$.*

Представим уравнение следующим образом:

$$\frac{7}{4}\sqrt{1 + |x(t)|} - t^2 = x(t). \tag{1}$$

Рассмотрим оператор

$$\Phi : C[-3;3] \to C[-3;3], \quad \Phi[x] = \frac{7}{4}\sqrt{1 + |x(t)|} - t^2.$$

Уравнение (1) имеет вид $\Phi[x] = x$, его решение – неподвижная точка оператора $\Phi$.
Докажем, что оператор $\Phi$ сжимающий, используя достаточный признак (см. конспект лекций, § 5, пункт 5.3). Обозначим $\Phi[x] = \varphi(t, |x(t)|)$, где $\varphi(t,u) = \frac{7}{4}\sqrt{1+u} - t^2$. Очевидно, что функция двух переменных $\varphi(t,u)$ непрерывна на множестве $[-3;3] \times [0;+\infty)$, непрерывно дифференцируема по переменной $u$, причем при всех $(t,u) \in [-3;3] \times [0;+\infty)$ справедлива оценка

$$|\varphi'_u(t,u)| = \frac{7}{8\sqrt{1+u}} \le \frac{7}{8} < 1.$$

Отсюда следует, что оператор $\Phi$ сжимающий с коэффициентом сжатия $\alpha = \frac{7}{8}$. Согласно принципу сжимающих операторов $\Phi$ имеет единственную неподвижную точку $x(t) \in C[-3;3]$, которая и является решением уравнения (1).

*B. Методом простых итераций найдем приближенное решение уравнения (1) с точностью $\varepsilon = 0.01$ и построим его график. Процесс вычислений организуем с помощью априорной оценки числа итераций.*

Схема действия метода простых итераций, использование априорной оценки описаны в конспекте лекций, §4, пункт 4.2. Для произвольного начального приближения $x_0$ последовательность итераций задается рекуррентной формулой $x_n = \Phi[x_{n-1}]$. В данном случае

**20. Дана задача Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка.**

**A. Найти точное решение задачи Коши.**

**B. Преобразовать задачу Коши к интегральному уравнению Вольтерры и методом простых итераций найти несколько первых приближений к точному решению. Проиллюстрировать графически сходимость приближенных решений к точному.**

**Для вычислений и построения графиков использовать математические пакеты.**

15. $x' + (x+1)\sin t = \sin t \cos^2 t\,, \quad x(\pi) = -\dfrac{2}{e}$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ НА СЛЕДУЮЩЕЙ СТРАНИЦЕ

**Образец решения**

$$x' = x\cos t + \sin 2t, \quad x(0) = -1 \tag{1}$$

*A. Найдем точное решение задачи Коши (1).*

Линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка может быть решено методом Бернулли или методом вариации произвольной постоянной:

$$x(t) = e^{\sin t} - 2 - 2\sin t.$$

*B. Преобразуем задачу Коши (1) к интегральному уравнению Вольтерры и применим к нему метод простых итераций для нахождения приближенных решений.*

Порядок и цель преобразований изложены в конспекте лекций, §5, пункт 5.5.
Задача Коши (1) равносильна интегральному уравнению Вольтерры

$$x(t) = -1 + \int_0^t \left(x(s)\cos s + \sin 2s\right)ds.$$

После упрощения получаем уравнение следующего вида:



$$x(t) = \underbrace{\int_0^t \cos s \cdot x(s)ds - \frac{1}{2}(1+\cos 2t)}_{\Phi[x]} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi[x] = x.$$

К интегральному уравнению Вольтерры может быть применен метод простых итераций, схема действия которого описана в конспекте лекций, §4, пункт 4.2. Для произвольного начального приближения $x_0$ последовательность итераций задается рекуррентной формулой $x_n = \Phi[x_{n-1}]$. В данном случае

$$x_n(t) = \int_0^t \cos s \cdot x_{n-1}(s)ds - \frac{1}{2}(1+\cos 2t).$$

Выберем произвольным образом начальное приближение, например $x_0(t) = t$. Тогда

$$x_1(t) = -\frac{3}{2} + \cos t + t\sin t - \frac{1}{2}\cos 2t,$$

$$x_2(t) = -\frac{1}{2} + \frac{t}{2} - \frac{7}{4}\sin t + \frac{3}{8}\sin 2t - \frac{t}{4}\cos 2t - \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{12}\sin 3t \quad \text{и т.д..}$$

Формулы следующих итераций слишком громоздки, поэтому в качестве ответа построим графики точного решения и нескольких приближений. На каждом из рисунков 5 – 7 изображены график точного решения $x$ и график одного из приближений $x_n$ (пунктиром): $x_5$ (рис. 5), $x_6$ (рис. 6), $x_7$ (рис. 7).

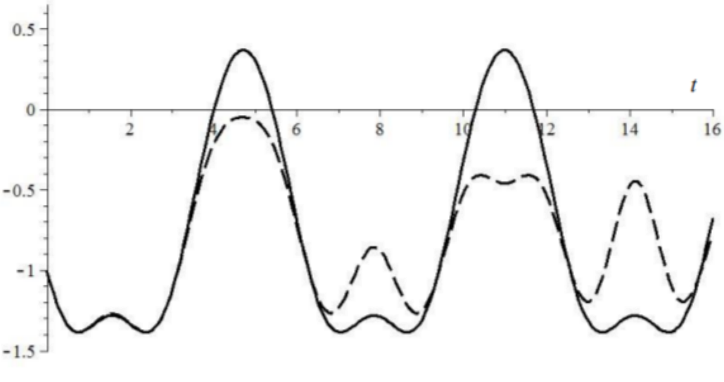
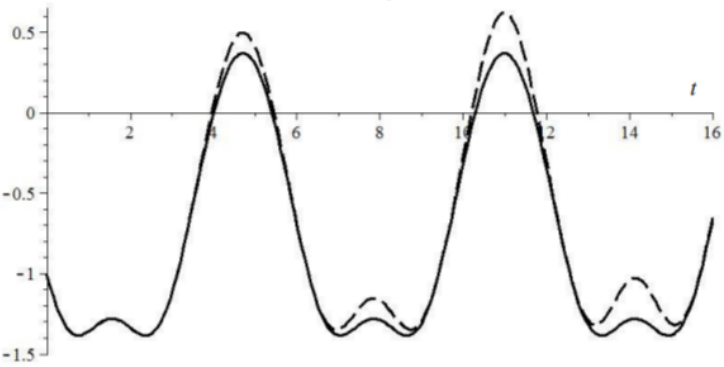



Рис. 5



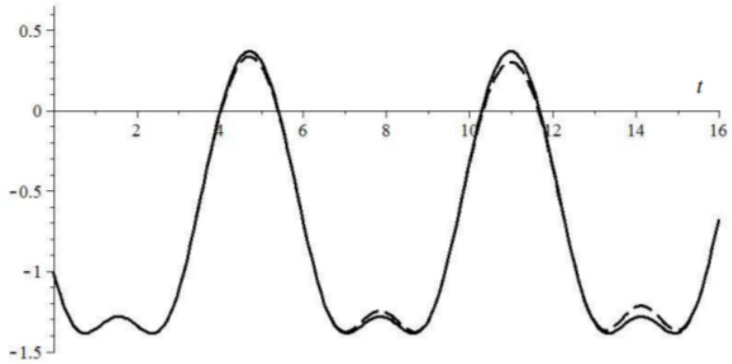



Рис. 7

Промежуток $[0;16]$ для построения графиков и порядки приближений выбраны так, чтобы наиболее наглядно проявилась сходимость приближенных решений к точному решению.