Кононенко Данил
3530903/00001
Вариант - 19

20. Дана задача Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка.
A. Найти точное решение задачи Коши.
B. Преобразовать задачу Коши к интегральному уравнению Вольтерры и методом простых итераций найти несколько первых приближений к точному решению. Проиллюстрировать графически сходимость приближенных решений к точному.

Для вычислений и построения графиков использовать математические пакеты.

$$x' = (x - \sin t)\cos t, \quad x(0) = 2$$

Решение.
А. Найдем точное решение задачи Коши

$$x' = (x - \sin t)\cos t\,, \quad x(0) = 2. \qquad (1)$$

Линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка может быть решено методом Бернулли или методом вариации произвольной постоянной:

$$x(t) = 1 + \sin t + e^{\sin t}.$$

В. Преобразуем задачу Коши (1) к интегральному уравнению Вольтерры и применим к нему метод простых итераций для нахождения приближенных решений.Порядок и цель преобразований изложены в конспекте лекций, §5, пункт 5.5.
Задача Коши (1) равносильна интегральному уравнению Вольтерры

$$x(t) = 2 + \int_0^t (x(s) - \sin s)\cos s\,ds.$$

После упрощения получаем уравнение следующего вида:

$$x(t) = 2 - \frac{1}{2}(\sin t)^2 + \int_0^t x(s)\cos s\ ds.$$

К интегральному уравнению Вольтерры может быть применен метод простых итераций, схема действия которого описана в конспекте лекций, §4, пункт 4.2. Для произвольного начального приближения x_0 последовательность итераций задается рекуррентной формулой $x_n = \Phi[x_{n-1}]$.
В данном случае

$$x_n(t) = 2 - \frac{1}{2}(\sin t)^2 + \int_0^t x_{n-1}(s)\cos s\ ds$$

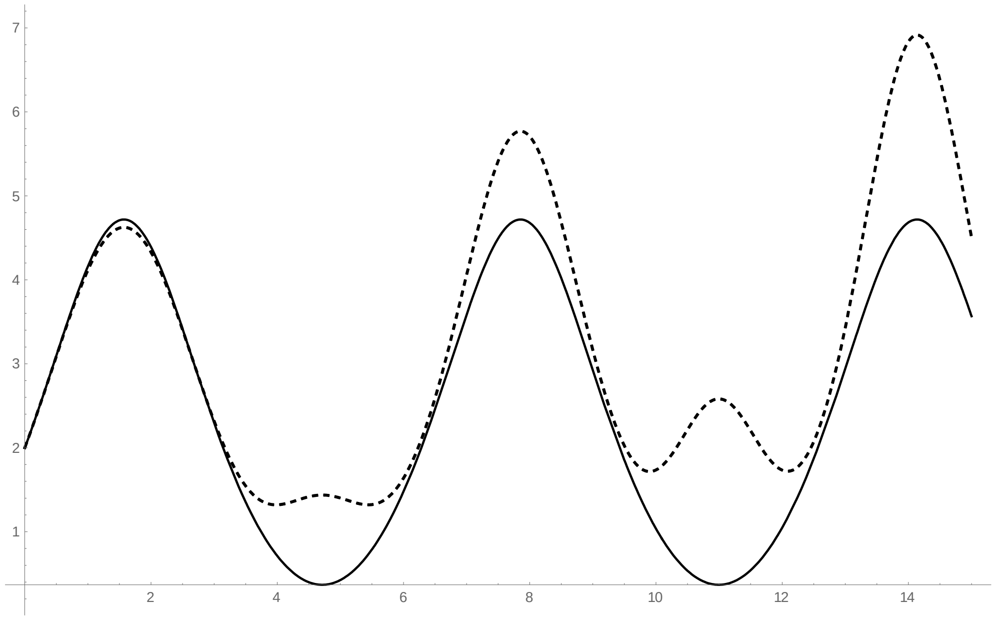
Выберем произвольным образом начальное приближение, например
$x_0(t) = t$.
Тогда
$x_1(t) = 1 + \cos t + t\sin t - \frac{1}{2}(\sin t)^2$,

$$x_2(t) = 2 - \frac{1}{2}(\sin t)^2 + \frac{1}{24}(12t - 6t\cos 2t + 21\sin t + 9\sin 2t + \sin 3t)$$

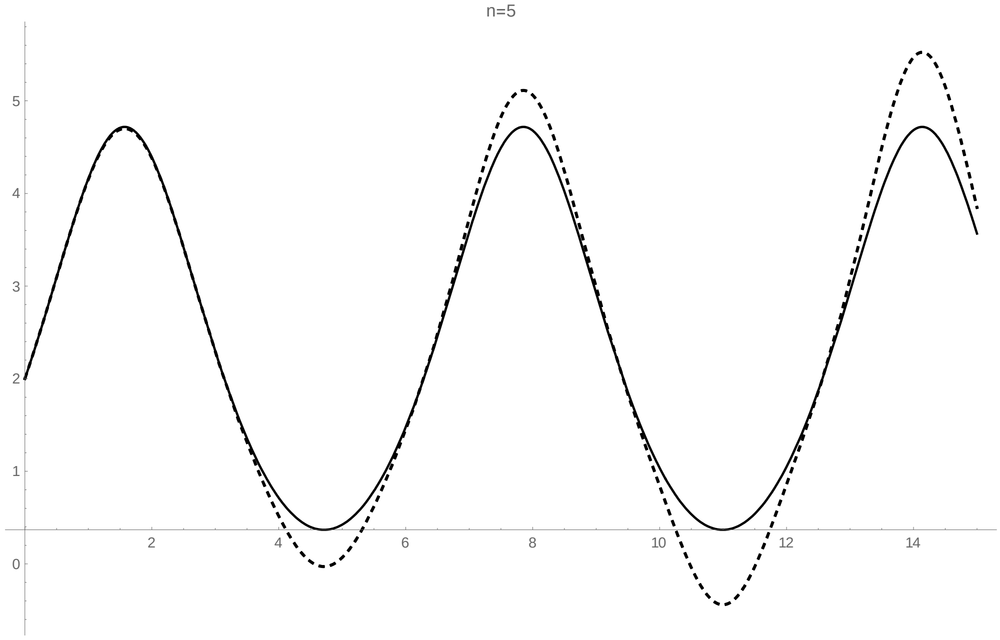
и т.д.

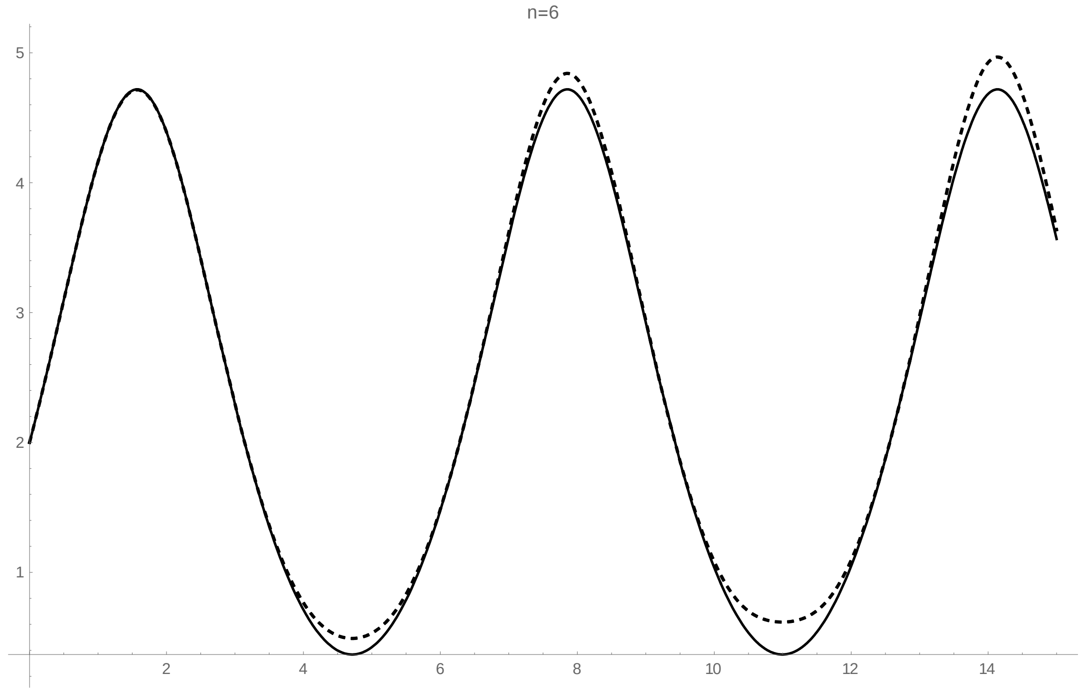
Формулы следующих итераций слишком громоздки, поэтому в качестве ответа построим графики точного решения и нескольких приближений. На каждом из рисунков изображены график точного решения x(t) (толстая линия) и график одного из приближений $x_n(t)$ (пунктирная линия):

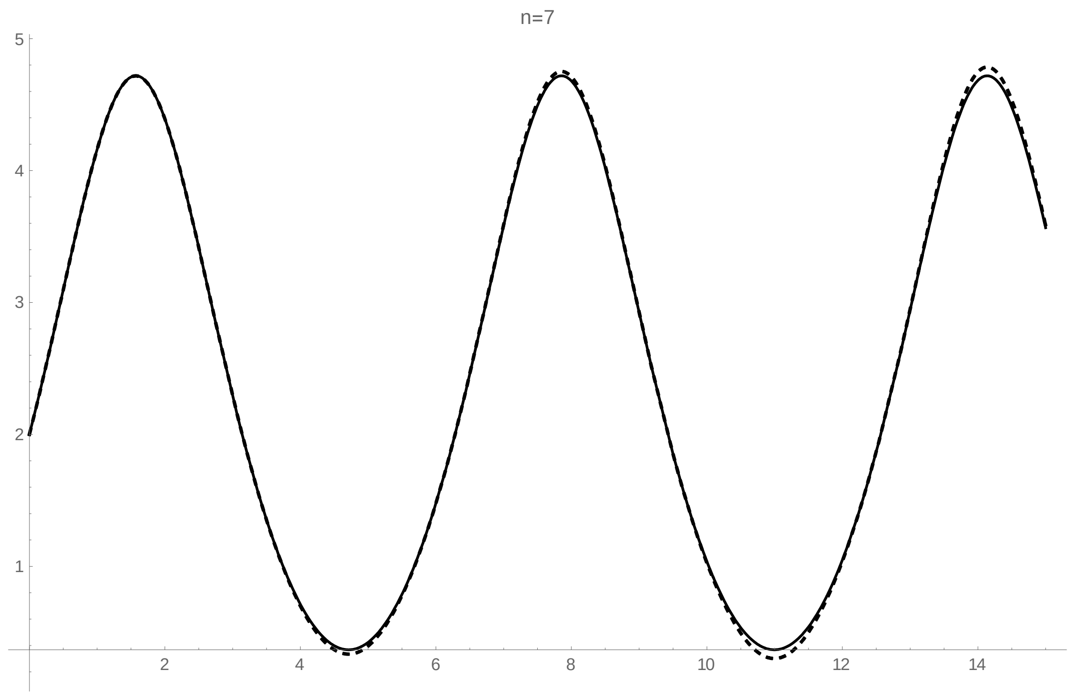
n=4



n=5







(Математическое ПО – Mathematica 8.0)
Промежуток $[0; 15]$ для построения графиков и порядки приближений выбраны так, чтобы наиболее наглядно проявилась сходимость приближенных решений к точному решению.