Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный архитектурно-строительный университет»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания
для студентов заочной формы обучения

Составители М.В. Зголич,
Т.А. Шалыгина

Томск 2014

Дифференциальные уравнения / Сост. М.В. Зголич, Т.А. Шалыгина – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2014. – 32 с.

Рецензент Р.И. Лазарева
Редактор Я.Д. Липатникова

Методические указания к самостоятельной работе по дисциплине Б2.Б.1 – «Математика» при изучении темы «Дифференциальные уравнения» студентами второго курса заочной формы обучения всех специальностей и всех профилей подготовки специалистов и бакалавров.

Печатаются по решению методического семинара кафедры высшей математики, протокол № 6 от 24 марта 2014 г.

Утверждены и введены в действие проректором по учебной работе В.В. Дзюбо.

с 1.09.2015
до 1.09.2020

Оригинал-макет подготовлен М.В. Зголич.

Подписано в печать 14.11.14.
Формат 60×84. Бумага офсет. Гарнитура Таймс.
Уч.-изд. л. 1,68. Тираж экз. Заказ № .

Изд-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.
Отпечатано с оригинал-макета в ООП ТГАСУ.
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Данные методические указания предназначены для студентов заочного факультета и дают ряд практических рекомендаций студентам по выполнению контрольной работы по теме «Дифференциальные уравнения».

Содержание данного раздела направлено на формирование у студента общекультурных (ОК) и профессиональных компетенций (ПК):

ОК-1	Владение культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения
ОК-9	Способность к целенаправленному применению базовых знаний в области математических, естественных, гуманитарных и экономических наук в профессиональной деятельности
ПК-1	Способность использовать законы и методы математики, естественных, гуманитарных и экономических наук при решении профессиональных задач

В результате освоения материала студент должен:

Знать:	понятие обыкновенных дифференциальных уравнений первого и высших порядков.
Уметь:	правильно использовать нужные методы в зависимости от вида дифференциального уравнения
Владеть:	основными методами решений дифференциальных уравнений.

Тема 1. **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА**

1. Основные сведения из теории

Определение. *Дифференциальным уравнением первого порядка* называется соотношение между независимой переменной x, неизвестной функцией $y(x)$ и ее первой производной y', т. е.

$$F(x, y, y') = 0.$$

Если это уравнение можно разрешить относительно производной y', то оно примет вид

$$y' = f(x, y).$$

Дифференциальное уравнение первого порядка может быть записано с использованием дифференциалов x и y, т. е.

$$P(x, y)dx + Q(x, y)\,dy = 0.$$

Определение. *Общим решением дифференциального уравнения первого порядка* называется функция $y = \varphi(x, c)$, где c – постоянная, удовлетворяющая условиям:

а) она удовлетворяет дифференциальному уравнению при любых значениях постоянной c;

б) каково бы ни было начальное условие $y = y_0$, при $x = x_0$, можно найти такое значение $c = c_0$, что функция $y = \varphi(x, c_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Определение. *Частным решением* называется функция

$$y = \varphi(x, c_0),$$

которая получается из общего решения $y = \varphi(x, c)$, если в нем произвольной постоянной c придать значение c_0.

Определение. Соотношение вида $\Phi(x, y, c) = 0$, неявно задающее неизвестную функцию y, называется *общим интегралом дифференциального уравнения*, а соотношение $\Phi(x, y, c_0) = 0$ – *частным интегралом*.

Геометрически общее решение (или общий интеграл) представляет собою семейство кривых на координатной плоскости.

Частному решению (или частному интегралу) соответствует одна кривая этого семейства, проходящая через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Замечание. Задачу, которая состоит в отыскании решения дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющего начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$ называют *задачей Коши*.

2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Уравнение вида

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

называется *уравнением с разделенными переменными*.

Важно: при dx стоит функция, зависящая только от x, при dy – зависящая только от y. Общий интеграл такого уравнения

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = c .$$

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x, y)$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если функция $f(x, y)$ допускает представление в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной, т. е.

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y) .$$

Для решения уравнения нужно разделить переменные следующим образом: сначала представить производную y' в виде отношения дифференциалов

$$y' = \frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y) ,$$

затем умножить обе части равенства на dx и разделить на $f_2(y)$.

В результате получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) \cdot dx$$

Определение. Уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными,* если обе функции – $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ допускают представление в виде произведения двух сомножителей, каждый из которых зависит только от одной переменной:

$$P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0.$$

Разделение переменных приводит к такому уравнению:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy = 0,$$

которое затем интегрируется.

Замечание. Следует заметить, что в процессе разделения переменных при делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестные x и y, могут быть потеряны решения, обращающие это выражение в нуль.

3. Однородные дифференциальные уравнения

Определение. Функция $f\ (x,\ y)$ называется *однородной функцией своих аргументов порядка* n, если имеет место тождество

$$f(tx,ty) \equiv t^n f(x,y),$$

где t – параметр. При $n = 0$ получаем однородную функцию нулевого порядка, для которой имеет место соотношение

$$f(tx,ty) = f(x,y).$$

Например, функция $f(x,y)=x^2-xy$ есть однородная функция второго порядка, так как

$$f(tx,ty)=(tx)^2-(tx)\cdot(ty)=t^2(x^2-xy)=t^2\cdot f(x,y)\,,$$

а функция $f(x,y)=\dfrac{4x-9y}{x+7y}$ есть однородная функция нулевого порядка, так как

$$f(tx,ty)=\frac{4(tx)-9(ty)}{tx+7(ty)}=\frac{t(4x-9y)}{t(x+7y)}=\frac{4x-9y}{x+7y}=f(x,y)\,.$$

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$y'=f(x,y)$$

называется *однородным*, если функция $f(x,y)$ есть однородная функция нулевого порядка. Если дифференциальное уравнение записано в виде

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0\,,$$

то оно называется однородным, если обе функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются однородными функциями одного и того же порядка.

Однородное уравнение <u>решают</u> с помощью введения вместо неизвестной функции $y\,(x)$ новой функции $u\,(x)$ следующим образом:

$$u=\frac{y}{x} \quad \text{или} \quad y=u\cdot x\,.$$

В результате такой замены уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Замечание. Следует заметить, что если правая часть дифференциального уравнения может быть представлена в виде функции от частного $\frac{y}{x}$, т. е. $f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, то это уравнение является однородным.

4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение. *Линейным дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции $y\ (x)$ и ее производной y', т. е. уравнение вида

$$y' + p\ (x)\cdot y = q(x),$$

где $p\ (x)$ и $q\ (x)$ – непрерывные функции от x.

Если $q(x)\equiv 0$, то уравнение называется *линейным однородным уравнением.*

4.1. Методы решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Метод решения линейного уравнения – *метод вариации произвольной постоянной* – заключается в следующем. Сначала находят общее решение однородного уравнения

$$y' + p(x)\cdot y = 0,$$

которое имеет вид $y = c\cdot e^{-\int p(x)dx}$.

Следуя методу вариации произвольной постоянной, общее решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$y = c(x)\cdot e^{-\int p(x)dx},$$

где $c\ (x)$ – неизвестная пока функция от x.

После нахождения этой функции общее решение данного уравнения станет известным.

Общее решение линейного уравнения также может быть найдено *методом Бернулли.*

Положим $y = u(x)\cdot v(x)$,

где $u(x)$ и $v(x)$ – неизвестные пока функции. Найдя

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

и подставив в данное уравнение нужные выражения, будем иметь

$$u' \cdot v + u \cdot v' + p(x) \cdot u \cdot v = q(x),$$

или после преобразований

$$u' \cdot v + u(p(x) \cdot v + v') = q(x).$$

В качестве функции $v(x)$ возьмем любое частное решение уравнения

$$v' + p(x) \cdot v = 0,$$

вторую функцию $u(x)$ найдем, решив уравнение

$$u' \cdot v = q(x).$$

Найдя обе функции $u(x)$ и $v(x)$, мы найдем и общее решение уравнения

$$y = u(x) \cdot \mathrm{v}(x).$$

Замечание. Дифференциальное уравнение может оказаться линейным относительно функции $x(y)$ и ее производной x'.Такое уравнение выглядит так:

$$x' + p(y) \cdot x = q(y).$$

5. Уравнения Бернулли.

Уравнение Бернулли имеет вид

$$y' + p(x)y = q(x) \cdot y^n, \qquad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Это уравнение заменой $z = y^{1-n}$ можно свести к линейному уравнению

$$\frac{z'}{1-n} + p(x) \cdot z = q(x).$$

Более удобным практически является метод решения уравнения с помощью подстановки $y = u(x) \cdot v(x)$ без сведения уравнения Бернулли к линейному.

Тема 2. **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА.**

1. Основные сведения из теории

Определение. *Дифференциальным уравнением второго порядка* называется соотношение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию $y\ (x)$ и ее первую и вторую производные. Оно имеет вид

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

или, если оно разрешимо относительно y'',

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{1}$$

Определение. *Общим решением дифференциального уравнения второго порядка* называется функция

$$y = \varphi(x, c_1, c_2),$$

содержащая две произвольные постоянные c_1 и c_2 такие, что если заданы начальные условия

$$y(x_0) = y_0 \qquad \text{и} \qquad y'(x_0) = y_0',$$

то найдутся такие значения $\tilde{c}_1$ и $\tilde{c}_2$, что функция

$$y = \varphi(x, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2)$$

будет являться решением данного дифференциального уравнения, удовлетворяющим этим начальным условиям.

Определение. Любое решение, получаемое из общего решения при конкретных значениях произвольных постоянных c_1 и c_2, называется *частным решением дифференциального уравнения*.

Теорема (*существования и единственности решения дифференциального уравнения* (1)).

Если функция $f(x, y, y')$ и ее частные производные по y и y' непрерывны в некоторой области, содержащей $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0'$, то существует единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее условиям

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_0'.$$

2. Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.

Типы дифференциального уравнения второго порядка, ***допускающие понижение порядка.***

I тип. Уравнение имеет вид $y'' = f(x)$.

Общее решение находится путем двукратного интегрирования следующим образом:

$$y'' = \frac{dy'}{dx}, \qquad y' = \int f(x)dx + c_1,$$

$$y' = \frac{dy}{dx}, \qquad y = \int(\int f(x)dx)dx + c_1 x + c_2 .$$

II тип. Уравнение не содержит явным образом искомой функции $y(x)$:

$$y'' = f(x, y').$$

Порядок уравнения понижается на единицу заменой $y' = z(x)$. Так как $y'' = z'$, то получим уравнение первого порядка относительно $z(x)$:

$$z' = f(x, z).$$

III тип. Уравнение не содержит явным образом независимой переменной x:

$$y'' = f(y, y').$$

Порядок уравнения понижается на единицу с помощью подстановки $y' = z(y)$. В этом случае

$y'' = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z$, и уравнение примет вид

$$z\frac{dz}{dy} = f(y, z).$$

3. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение. Линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называют уравнение вида

$$y'' + p_1 \cdot y' + p_2 \cdot y = f(x),$$

где p_1 и p_2 – числа.

Если $f(x) = 0$, уравнение называется однородным:

$$y'' + p_1 \cdot y' + p_2 \cdot y = 0$$

Общее решение линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид

$$y_{\text{о.о}} = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2,$$

где y_1 и y_2 – линейно независимые решения.

Решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами ищем в виде $y = e^{kx}$, $k = \text{const}$.
После подстановки в уравнение

$$y'' + p_1 \cdot y' + p_2 \cdot y = 0 \qquad (2)$$

решения $y = e^{kx}$ получаем характеристическое уравнение

$$k^2 + p_1 \cdot k + p_2 = 0$$

относительно неизвестного k.

Вид общего решения уравнения (2) зависит от корней характеристического уравнения следующим образом (табл. 1).

Таблица 1

Корни характеристического уравнения	Вид общего решения
Корни различные действительные $k_1 \neq k_2$	$y_{\text{о.о.}} = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$
Корни действительные равные $k_1 = k_2 = k$	$y_{\text{о.о.}} = c_1 e^{kx} + c_2 \cdot x \cdot e^{kx}$
Корни комплексные $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y_{\text{о.о.}} = c_1 e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x + c_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$

Общее решение линейного <u>*неоднородного*</u> уравнения имеет вид

$$y = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}},$$

где $y_{\text{о.о}}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, а $y_{\text{ч.н}}$ – частное решение данного неоднородного уравнения.

Для подбора частного решения по виду правой части уравнения $f(x)$ и корней характеристического уравнения удобно пользоваться табл. 2:

Таблица 2

Правая часть дифференциального уравнения $f(x)$	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения
$f(x) = P_n(x)$, $P_n(x)$ – *многочлен степени n*	1. Число 0 не является корнем характеристического уравнения	$y_{ч.н} = Q_n(x)$, $Q_n(x)$ – *многочлен степени n*
	2. Число 0 – корень характеристического уравнения кратности s	$y_{ч.н} = x^s \cdot Q_n(x)$
$f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$	1. Число α не является корнем характеристического уравнения	$y_{ч.н} = e^{\alpha x} \cdot Q_n(x)$
$f(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$	1. Число $\pm\beta i$ не является корнем характеристического уравнения	$y_{ч.н} = \widetilde{A}\cos\beta x + \widetilde{B}\sin\beta x$
	2. Число $\pm\beta i$ – корень характеристического уравнения	$y_{ч.н} = x(\widetilde{A}\cos\beta x + \widetilde{B}\sin\beta x)$

Окончание табл. 2

Правая часть дифференциального уравнения $f(x)$	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения
$f(\text{x}) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$	1. Число $\alpha \pm i\beta$ не является корнем характеристического уравнения	$y_{\text{ч.н}} = e^{\alpha x}(\widetilde{A}\cos\beta x + \widetilde{B}\sin\beta x)$
	2. Число $\alpha \pm i\beta$ – корень характеристического уравнения	$y_{\text{ч.н}} = xe^{\alpha x}(\widetilde{A}\cos\beta x + \widetilde{B}\sin\beta x]$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определения дифференциального уравнения первого порядка и его общего и частного решения (интеграла). Сформулируйте задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка и укажите ее геометрический смысл.

2. Дайте геометрическое истолкование дифференциального уравнения первого порядка, выясните геометрический смысл общего и частного решения.

3. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка.

4. Дайте определение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными. Изложите метод нахождения его общего решения. Приведите примеры.

5. Дайте определение однородного дифференциального-уравнения первого порядка. Изложите метод нахождения его общего решения. Приведите примеры.

6. Дайте определение линейного дифференциального уравнения первого порядка. Изложите метод нахождения его общего решения. Приведите примеры.

7. Дайте определение уравнения Бернулли. Изложите метод нахождения его общего решения. Приведите примеры.

8. Что называется особым решением дифференциального уравнения первого порядка?

9. Дайте определения дифференциального уравнения второго порядка и его общего и частного решения. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения дифференциального уравнения второго порядка.

10. Изложите метод решения дифференциального уравнения $y'' = f(x)$. Приведите пример.

11. Изложите метод решения дифференциального уравнения $y'' = f(x, y')$. Приведите пример.

12. Изложите метод решения дифференциального уравнения $y'' = f(y, y')$. Приведите пример.

13. Дайте определение линейного дифференциального уравнения второго порядка (однородного и неоднородного). Сформулируйте основные свойства частных решений линейного однородного дифференциального уравнения.

14. Выведите формулу общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, если характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня. Приведите пример.

15. Выведите формулу общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, если характеристическое уравнение имеет два одинаковых действительных корня. Приведите пример.

16. Выведите формулу общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с по-

стоянными коэффициентами, если характеристическое уравнение имеет комплексные корни. Приведите пример.

17. Изложите правило нахождения частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, если его правая часть имеет вид $e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n.

18. Изложите правило нахождения частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, если его правая часть имеет вид $e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$.

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РЕШЕНИЮ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Задача 1. Найти общее решение (или общий интеграл) данных дифференциальных уравнений:

а) $x \cdot y \cdot y' = 1 + x^2$,

в) $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$,

с) $x \cdot y' + 2y = x^2$.

Решение:

а) Запишем данное соотношение в виде уравнения, разрешенного относительно производной, т. е. в виде $y' = f(x,y)$.

В данном случае, поделив обе части уравнения на $x \cdot y$, получаем

$$y' = \frac{1+x^2}{xy} = \frac{1+x^2}{x}\,\frac{1}{y}.$$

Правая часть уравнения есть произведение двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной. Это значит, что данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные следующими действиями:

$$y' = \frac{dy}{dx}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1+x^2}{x}\,\frac{1}{y}, \qquad y\,dy = \frac{1+x^2}{x}\,dx .$$

Получили в результате уравнение с разделенными переменными, обе части которого интегрируем:

$$\int y\,dy = \int \frac{1+x^2}{x}\,dx, \qquad \int y\,dy = \int \left(\frac{1}{\mathrm{x}} + \mathrm{x}\right) dx,$$

$$\int y\,dy = \int \frac{dx}{x} + \int x\,dx, \qquad \frac{y^2}{2} = \ln|\,x\,| + \frac{x^2}{2} + c,$$

$$\frac{y^2 - x^2}{2} = \ln|\,x\,| + c .$$

Мы получили соотношение между x, y и произвольной постоянной c, которое называется *общим интегралом.*

в) Разрешим уравнение относительно производной y':

$$y' = -\frac{4x-3y}{2y-3x} \quad \text{или} \quad y' = \frac{4x-3y}{3x-2y}. \tag{3}$$

Правая часть этого уравнения

$$f(x,y) = \frac{4x-3y}{3x-2y}$$

является однородной функцией нулевого порядка относительно своих аргументов, так как удовлетворяет следующему условию:

$$f(tx,ty) = f(x,y) .$$

В самом деле,

$$f(tx,ty) = \frac{4(tx)-3(ty)}{3(tx)-2(ty)} = \frac{t\,(4x-3y)}{t\,(3x-2y)} = \frac{4x-3y}{3x-2y} = f(x,y) .$$

Отсюда следует, что уравнение (3) является однородным. Однородное уравнение решают подстановкой $u = \dfrac{y}{x}$ или $y = u \cdot x$.

Найдем y' и подставим в уравнение (3):

$$y' = u' \cdot x + u\,,$$

$$u' \cdot x + u = \frac{4x - 3ux}{3x - 2ux}, \quad u' \cdot x + u = \frac{x(4 - 3u)}{x(3 - 2u)},$$

$$u' \cdot x = \frac{4 - 3u}{3 - 2u} - u\,, \qquad u' \cdot x = \frac{4 - 3u - u\,(3 - 2u)}{3 - 2u},$$

$$u' \cdot x = \frac{2u^2 - 6u + 4}{3 - 2u}.$$

Получившееся уравнение оказывается уравнением с разделяющимися переменными. Разделяем переменные:

$$\frac{du}{dx}x = \frac{2u^2 - 6u + 4}{3 - 2u}, \qquad \frac{(3 - 2u)\,du}{2u^2 - 6u + 4} = \frac{dx}{x},$$

после чего интегрируем:

$$\int \frac{3 - 2u}{2u^2 - 6u + 4}du = \int \frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{4u - 6}{2u^2 - 6u + 4}du \;= -\frac{1}{2}\int \frac{d(2u^2 - 6u + 4)}{2u^2 - 6u + 4} \;=$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|2u^2 - 6u + 4\right| + c_1, \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|\,x\,| + c_1\,.$$

Получаем общий интеграл:

$$-\frac{1}{2}\ln\left|2u^2 - 6u + 4\right| = \ln|\,x\,| + \ln c\,, \text{ где } \ln c = c_2 - c_1\,.$$

После потенцирования общий интеграл примет вид

$$2u^2 - 6u + 4 = \frac{1}{c^2 x^2}.$$

Вернемся к старой функции y, подставив вместо u $\frac{y}{x}$:

$$2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 6\,\frac{y}{x} + 4 = \frac{1}{c^2 x^2}$$

или $\quad 2y^2 - 6xy + 4x^2 = \dfrac{1}{c^2}$.

c) В данное уравнение неизвестная функция y и ее производная y' входят в первой степени. Отсюда следует вывод: уравнение является линейным. Будем искать решение линейного уравнения в виде произведения двух пока неизвестных функций $u(x)$ и v (x), т. е. $y = u \cdot v$. Найдем производную

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

и подставим в уравнение (c):

$$x(u' \cdot v + u \cdot v') + 2u \cdot v = x^2,$$

$$x \cdot u' \cdot v + x \cdot u \cdot v' + 2u \cdot v = x^2,$$

$$x \cdot u' \cdot v + (x \cdot u \cdot v' + 2u \cdot v) = x^2,$$

$$x \cdot u' \cdot v + u(x \cdot v' + 2v) = x^2.$$

Для нахождения функции $v(x)$ положим:

$$x \cdot v' + 2v = 0.$$

Найдем частное решение (для этого положим $c = 0$) этого уравнения с разделяющимися переменными:

$$x\,\frac{dv}{dx} = -2v, \qquad \frac{dv}{v} = -2\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2\int \frac{dx}{x}, \qquad \ln v = -2\ln x, \qquad v = \frac{1}{x^2}.$$

Для нахождения другой функции $u(x)$ у нас получается уравнение:

$$x \cdot u' \cdot v = x^2, \qquad x \cdot u'\,\frac{1}{x^2} = x^2, \qquad u' = x^3,$$

$$\frac{du}{dx} = x^3, \qquad du = x^3 dx, \qquad \int du = \int x^3 dx,$$

$$u = \frac{x^4}{4} + c.$$

Общее решение данного уравнения (c) будет иметь вид

$$y = u \cdot v = \left(\frac{x^4}{4} + c\right)\frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{4} + \frac{c}{x^2}.$$

Задача 2. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$2x \cdot y' - y = \frac{3x^2}{y},$$

удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 2$.

Решение: Уравнение Бернулли имеет вид

$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$

Данное уравнение можно записать в виде

$$y' - \frac{y}{2x} = \frac{3x^2}{2x}\, y^{-1},$$

поэтому делаем вывод: данное уравнение является уравнением Бернулли. Его можно решать тем же методом, что и линейное уравнение. Будем искать общее решение в виде $y = u \cdot v$:

$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$,

$u' \cdot v + u \cdot v' - \dfrac{u \cdot v}{2x} = \dfrac{3x}{2u \cdot v}$,

$u' \cdot v + u\left(v' - \dfrac{v}{2x}\right) = \dfrac{3x}{2u \cdot v}$,

$v' - \dfrac{v}{2x} = 0, \qquad \dfrac{dv}{v} = \dfrac{dx}{2x}, \qquad \displaystyle\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}$,

$\ln v = \dfrac{1}{2}\ln x, \qquad v = \sqrt{x}$ – одну функцию нашли.

$u' \cdot \sqrt{x} = \dfrac{3x}{2u \cdot \sqrt{x}}, \qquad \dfrac{du}{dx} = \dfrac{3}{2u}$,

$2u\, du = 3\, dx, \qquad \displaystyle\int 2u\, du = \int 3\, dx$,

$u^2 = 3x + c$ или $u = \sqrt{3x + c}$.

Общее решение уравнения примет вид

$$y = u \cdot v = \sqrt{3x + c} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{3x^2 + cx}\,.$$

Чтобы найти частное решение уравнения, нужно найти значение константы c. Для ее нахождения подставим в общее решение $x = 1$ и $y = 2$:

$2 = \sqrt{3 \cdot 1 + c \cdot 1} = \sqrt{3 + c}$,

$4 = 3 + c$, $c = 1$.

Подставив в общее решение значение $c = 1$, получаем частное решение $y = \sqrt{3x^2 + x}$.

Задача 3. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + \frac{1}{x}\, y' = x^2\,.$$

Решение:

В данном уравнении второго порядка отсутствует в явном виде сама функция y. Это уравнение допускает понижение порядка, для чего надо сделать замену $y' = z\,(x)$. Тогда $y'' = z'$ и уравнение примет вид

$$z' + \frac{1}{x}\, z = x^2\,. \tag{4}$$

Уравнение (4) оказывается линейным уравнением первого порядка относительно функции $z\,(x)$ и решается следующим образом:

$z = u \cdot v$, $\qquad z' = u' \cdot v + u \cdot v'$,

$u' \cdot v + u \cdot v' + \dfrac{u \cdot v}{x} = x^2$, $\qquad u' \cdot v + u\left(v' + \dfrac{v}{x}\right) = x_2$,

$v' + \dfrac{v}{x} = 0$, $\qquad \dfrac{dv}{v} = -\dfrac{dx}{x}$, $\qquad \int \dfrac{dv}{v} = -\int \dfrac{dx}{x}$,

$$\ln v = -\ln x, \qquad v = \frac{1}{x};$$

$$u'\frac{1}{x} = x^2, \qquad du = x^3 dx, \qquad \int du = \int x^3 dx, \qquad u = \frac{x^4}{4} + c_1.$$

Общее решение уравнения (3) примет вид

$$z = u \cdot v = \frac{1}{x}\left(\frac{x^4}{4} + c_1\right) = \frac{x^3}{4} + \frac{c_1}{x}.$$

В начале решения была сделана замена $y' = z$. Следовательно,

$$y' = \frac{x^3}{4} + \frac{c_1}{x}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, получаем

$$dy = \left(\frac{x^3}{4} + \frac{c_1}{x}\right)dx,$$

$$\int dy = \int \left(\frac{x^3}{4} + \frac{c_1}{x}\right)dx,$$

$y = \dfrac{x^4}{16} + c_1 \ln x + c_2$ – общее решение данного уравнения.

Задача 4. Найти частное решение уравнения

$$y'' + 4y' = x^2 + 5x,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решение:

Данное уравнение является линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида $f(x) = P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n. Общее решение такого уравнения складывается из общего решения однородного уравнения (правая часть равна нулю) и какого-либо частного решения неоднородного уравнения.

Решим сначала однородное уравнение

$$y'' + 4y' = 0\,.$$

Составляем характеристическое уравнение

$$k^2 + 4k = 0\,,$$

корнями которого будут $k_1 = 0$ и $k_2 = -4$.

Соответственно этим корням находим частные решения

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{0x} = 1 \qquad \text{и} \qquad y_2 = e^{k_2 x} = e^{-4x}$$

и общее решение, которое представляет собой линейную комбинацию найденных частных решений:

$$y_{\text{о.о}} = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 \cdot 1 + c_2 e^{-4x}\,.$$

Теперь надо найти частное решение неоднородного уравнения.

Пользуясь таблицей, мы будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде

$$y_{\text{ч.н}} = (Ax^2 + Bx + C)\,x\,,$$

так как правая часть $f(x)$ уравнения представляет собой многочлен второй степени, а число 0 является корнем характеристического уравнения с кратностью $s = 1$.

Нам остается найти неизвестные пока коэффициенты A, B, C. Для этого найдем первую и вторую производные от $y_{\text{ч.н}}$ и подставим найденные выражения в данное неоднородное уравнение:

$$y_{\text{ч.н}} = Ax^3 + Bx^2 + Cx\,,$$

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C\,, \qquad y'' = 6Ax + 2B\,,$$

$$6Ax + 2B + 4(3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2 + 5x\,,$$

$$12Ax^2 + (6A + 8B)x + (2B + 4C) = x^2 + 5x\,.$$

Из полученного равенства двух многочленов следует равенство коэффициентов при одинаковых степенях x в левой и правой частях:

$$\begin{cases} 12A = 1; \\ 6A + 8B = 5; \\ 2B + 4C = 0 \end{cases}.$$

Решением системы являются:

$$A = \frac{1}{12}, \qquad B = \frac{9}{16}, \qquad C = -\frac{9}{32}.$$

Значит, частное решение имеет вид

$$y_{\text{ч.н}} = \frac{1}{12}x^3 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{9}{32}x,$$

а общее решение есть

$$y_{\text{о.н}} = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}} = c_1 + c_2 e^{-4x} + \frac{1}{12}x^3 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{9}{32}x.$$

Найдем значения постоянных c_1 и c_2. Для этого сначала продифференцируем полученное общее решение:

$$y' = -4c_2 e^{-4x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{8}x - \frac{9}{32}.$$

Теперь подставим $x = 0$ в выражения для y и y':

$$y(0) = c_1 + c_2 = 1,$$

$$y'(0) = -4c_2 - \frac{9}{32} = 0.$$

Решим систему:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ -4c_2 - \dfrac{9}{32} = 0. \end{cases}$$

Найденные $c_1 = \frac{137}{128}$ и $c_2 = -\frac{9}{128}$ подставим в общее решение и получим частное решение:

$$y = \frac{137}{128} - \frac{9}{128} e^{-4x} + \frac{1}{12} x^3 + \frac{9}{16} x^2 - \frac{9}{32} x .$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

1 – 10. Найти общее решение (или общий интеграл) данных дифференциальных уравнений первого порядка:

1. а) $2xy' + y^2 = 1$;

   б) $xy' = y \ln\left(\frac{y}{x}\right)$;

   в) $xy' = x - y + 1$.

2. а) $y^2 y' + 2x = 1 + x^2$;

   б) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$;

   в) $(1 - x^2)y' - 2xy = 1 + x^2$.

3. а) $y' + xy = xy^2$;

   б) $y^2 - 4xy + 4x^2 y' = 0$;

   в) $x(x-1)y' + 2xy = 1$.

4. а) $x^2 y' + y^2 = 1$;

   б) $y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6$;

в) $y' - \frac{3y}{x} = x$.

5. а) $xy' + y = y^2$;

б) $y' = \frac{y - 2x}{x + y}$;

в) $xy' - \frac{y}{x+1} = x$.

6. а) $y' - xy^2 = 2xy$;

б) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$;

в) $y' - y = (2x - 3)e^x$.

7. а) $xy' + y - 3 = 0$;

б) $y' = \frac{y - 3x}{x + 3y}$;

в) $2xy' - y = 3x^2$.

8. а) $y' = 3x^2 y - x^2$;

б) $xy' + xe^{\frac{y}{x}} - y = 0$;

в) $x^2 y' - 2xy = 3$.

9. а) $yy' = \frac{1 - 2x}{xy}$;

б) $x^2 y' + y^2 - 2xy = 0$;

в) $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x}$.

10. а) $(1+x^2)y' = xy + xy^2$;

б) $x^2 y' = y^2 + xy$;

в) $y' + 2\dfrac{y}{x} = x^2 + 2x$.

11 – 20. Найти частное решение данного дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющее данному начальному условию:

11. $xy' - 2\sqrt{xy} = y$, $\quad y(1) = 1$.

12. $y' + 4x^3 y = x^3 e^{-x^4} \cdot y^2$, $\quad y(0) = 8$.

13. $yy' + y^2 \operatorname{ctg} x = \cos x$, $\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

14. $2xy' - y = \dfrac{3x^2}{y}$, $\quad y(1) = 2$.

15. $x^2 y' - 2xy = y^2$, $\quad y(1) = -1$.

16. $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$, $\quad y(1) = 1$.

17. $2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3$, $\quad y(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

18. $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$, $\quad y(0) = 1$.

19. $2xy' - y = -\dfrac{1}{xy}$, $\quad y(2) = \dfrac{1}{2}$.

20. $y' + xy = 2xe^{-\frac{x^2}{2}} y^2$, $\quad y(0) = 1$.

21 – 23. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка:

21. $(1+y)y'' - 5\cdot(y')^2 = 0$.

22. $(1-x^2)y''=xy'$.

23. $y''\cdot \operatorname{tg} y=2(y')^2$.

24. $xy''+y'=x+1$.

25. $(y')^2+2y\cdot y''=0$.

26. $xy''-y'+\dfrac{1}{x}=0$.

27. $y''=-2\,\dfrac{y'}{x}+x^2$.

28. $1+(y')^2+y\cdot y''=0$.

29. $x^4y''+x^3y'=4$.

30. $(x^2+1)y''+2xy'=x^3$.

31 – 40. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида, удовлетворяющее данным начальным условиям:

31. $y''-4y'+13y=26x^2-3x$, $\quad y(0)=1,\ \ y'(0)=0$.

32. $y''+2y'=-2e^x(\sin x+\cos x)$, $\quad y(0)=0,\ \ y'(0)=0$.

33. $y''+5y'+6y=12\cos 2x$, $\quad y(0)=1,\ \ y'(0)=3$.

34. $y''+4y'-12y=8\sin 2x$, $\quad y(0)=0,\ \ y'(0)=0$.

35. $y''+y'-2y=e^x(2x+2)$, $\quad y(0)=2,\ \ y'(0)=-1$.

36. $y''-5y'=15x^2+4x$, $\quad y(0)=1,\ \ y'(0)=-\dfrac{2}{5}$.

37. $y''-4y'+5y=e^x\cdot x$, $\quad y(0)=\dfrac{1}{2},\ \ y'(0)=0$.

38. $y''-2y'+y=e^{2x}(x-1)$, $\quad y(0)=-2,\ \ y'(0)=0$.

39. $y'' + 2y' + 5y = 10x^2 - 7x + 8$, $\quad y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

40. $y'' - 4y' + 3y = 2e^x$, $\quad y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Ниже приведена таблица номеров задач, входящих в задание на контрольную работу по теме «Дифференциальные уравнения». Студент должен выполнять контрольные задания по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой его учебного номера (шифра).

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**
Номера задач контрольных заданий	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Обязательная литература

1. Лесняк Л.И., Старенченко В.А., Цепилевич Л.И., Шалыгина Т.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения и их приложения [Текст]:учебное пособие / под ред. Л.И. Лесняк. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2012. – 216 с. ISBN 978-5-93057-484-5.

2. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики: Учебное пособие для вузов по направлению "Технические науки" (550000). – СПб. [и др.]: Лань, 2009. – 727 с.

3. Соловьев И.А., Шевелев В.В., Червяков А.В., Репин А.Ю. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Кратные интегралы. Теория поля. Теория функций комплексного переменного. Обыкновенные дифференциальные

уравнения: Учебное пособие для вузов.- СПб.: Лань, 2009. – 445 с.

4. Демидович Б.П., Моденов В.П. Дифференциальные уравнения: Учебное пособие. – СПб. [и др.]: Лань, 2008.– 276с.

5. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебное пособие для втузов / Н.С. Пискунов. – М.: Интеграл-Пресс, 2008. – Т. 2. – 544 с.

Дополнительная литература

1. Шалыгина Т.А. Белов Н.Н., Цепилевич Л.И. Дифференциальные уравнения. Учебное пособие. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2008. – 123 с.

2. Бугров Я.С. Дифференциальное уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Феникс, 1984-1997. – 512 с.

3. Письменный Д.Г. Конспект лекций по высшей математике. 2 часть. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 256 с.

4. Владимирский Б. М., Горстко А.Б., Ерусалимский Я.М. Математика. Общий курс: Учебник для бакалавров естественнонауч. направлений:. – СПб.: Лань, 2009. – 960 с.