Интегралы Пуассона и Френеля

В задачах физики и дифракционной оптики возникают интегралы вида:

$$\int e^{-x^2}dx, \quad \int \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt, \quad \int \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt,$$

которые являются специальными функциями (т.е. "неберущимися" интегралами). Однако, переход к "многомерным" интегралам позволяет вычислить по крайней мере

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx, \quad \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt, \quad \int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt,$$

где $\Phi(z)=\int_0^z e^{-x^2}dx$ – функция ошибок, $\Phi_S(z)=\int_0^z \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ и $\Phi_C(z)=\int_0^z \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$ – интегралы Френеля.

Вычислите интегралK:

№ команды	1	2	3	4
Интеграл K	$\int_0^\infty \frac{\cos(4t-\pi/2)}{\sqrt{t}}dt$	$\int_0^\infty \frac{\sin(\pi/2-t)}{\sqrt{t}}dt$	$\int_0^\infty \frac{\sin(5t+\pi)}{\sqrt{t}}dt$	$\int_0^\infty \frac{\cos(2t-3\pi)}{\sqrt{t}}dt$
№ команды	5	6	7	8
ИнтегралK	$\int_0^\infty \frac{\cos(3t+\pi/2)}{\sqrt{t}}dt$	$\int_0^\infty \frac{\sin(3t+3\pi/2)}{\sqrt{t}}dt$	$\int_0^\infty \frac{\sin(t/3-\pi)}{\sqrt{t}}dt$	$\int_0^\infty \frac{\cos(\pi-3t)}{\sqrt{t}}dt$

План:

Вычислите $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=I$:

Заметим, что $I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\int_0^\infty e^{-y^2}dy$. Тогда $I^2=\int_0^\infty e^{-x^2}dx\int_0^\infty e^{-y^2}dy$ – двукратный интеграл.

- Перейдите к полярным координатам и вычислите его.

Вычислите $\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=J$ (для нечётных номеров команд) или $\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt=J$ (для чётных номеров команд):

- Используя предыдущий результат, докажите справедливость интегрального представления функции $\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-u^2t}du$.
- В исходном интеграле замените $\frac{1}{\sqrt{t}}$ её интегральным представлением и получите двойной (несобственный) интеграл.
- Выберите порядок интегрирования так, чтобы можно было найти первообразную в элементарных функциях. (Смена порядка интегрирования требует обоснования, но в данном случае она разрешена.)
- Вычислите интеграл J, затем интеграл K.
- Используя замену переменной и сводя эти интегралы к J, вычислите также:

$\int\limits_0^{\infty} \sin x^2 dx$ и $\int\limits_0^{\infty} \sin\left(\pi x^2/2\right) dx$ – для нечётных номеров команд,

$\int\limits_0^{\infty} \cos x^2 dx$ и $\int\limits_0^{\infty} \cos\left(\pi x^2/2\right) dx$ – для чётных номеров команд.

Нарисуйте графики функции ошибок, интегралов Френеля и их подынтегральных функций.