

Полнота и грамотность решения должны быть примерно такими же, как в образцах решения этих задач в сборнике (можно сокращать некоторые слишком подробные объяснения, которые присутствуют в образцах с методической целью).

Решение нужно набирать в редакторе, результаты компьютерного расчета, в том числе графики - вставить в виде картинок. При этом сам компьютерный код вставлять в решение не обязательно, можно только в качестве необременительного дополнения, подменять им математические рассуждения нельзя. В том месте решения, где использован компьютерный расчет, указывайте название мат.пакета или другую среду программирования.

§ 7. Ряды Фурье и задача аппроксимации

36. Дана функция $x = x(t)$ в пространстве $L^2(-1;1)$ со стандартным скалярным произведением. Для функции x в этом пространстве требуется найти

- многочлен наилучшего приближения первой степени;
- многочлен наилучшего приближения второй степени.

Построить графики функции x и полученных многочленов.

Для вычислений и построения графиков можно использовать математические пакеты.

5. $x(t) = \ln t^2$

Указание к решению

Для решения этой задачи необходимы сведения, изложенные в §11 конспекта лекций: информация о рядах Фурье, понятие элемента наилучшего приближения и схема его поиска. В гильбертовом пространстве $L^2(-1;1)$ для функции $x(t)$ требуется найти многочлен наилучшего приближения степени n . Многочлен – это линейная комбинация одночленов.

Следовательно, надо найти элемент наилучшего приближения в конечномерном линейном подпространстве $\text{Lin}\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$. Для решения этой задачи представляется целесообразным провести ортогонализацию и нормировку системы $1, t, t^2, \dots, t^n$ в пространстве $L^2(-1;1)$. Как показано в конспекте лекций, §9, пункт 9.2, в результате получаем $P_0(t), P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)$ – ортонормированные многочлены Лежандра. Многочлен наилучшего приближения n -ой степени для функции $x(t)$ вычисляется как частичная сумма ряда Фурье по системе многочленов Лежандра:

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(t), \quad c_k = (x, P_k) = \int_{-1}^1 x(t) P_k(t) dt.$$

Образец решения

$$x(t) = \begin{cases} t, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Чтобы решить поставленную задачу, достаточно найти две частичные суммы ряда Фурье по системе многочленов Лежандра: $S_1(t)$ и $S_2(t)$. Понадобятся три первых ортонормированных многочлена Лежандра:

$$P_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad P_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t, \quad P_2(t) = \sqrt{\frac{5}{2}}\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right).$$

Вычислим коэффициенты Фурье для функции $x(t)$:

$$c_0 = (x, P_0) = \int_{-1}^1 x(t)P_0(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 t dt = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$c_1 = (x, P_1) = \int_{-1}^1 x(t)P_1(t)dt = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$c_2 = (x, P_2) = \int_{-1}^1 x(t)P_2(t)dt = \sqrt{\frac{5}{2}} \int_0^1 t \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \right) dt = \frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{2}}.$$

Найдем для функции $x(t)$ многочлены наилучшего приближения первой и второй степени:

$$S_1(t) = c_0 P_0(t) + c_1 P_1(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{4},$$

$$S_2(t) = c_0 P_0(t) + c_1 P_1(t) + c_2 P_2(t) = \frac{15}{32}t^2 + \frac{t}{2} + \frac{3}{32}.$$

На рисунке 9 представлены график функции x и график многочлена S_1 (пунктиром).

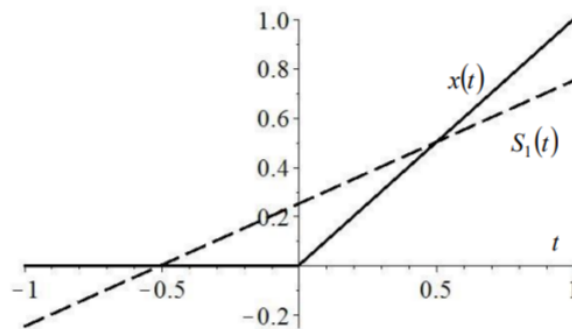


Рис. 9

На рисунке 10 представлены график функции x и график многочлена S_2 (пунктиром).

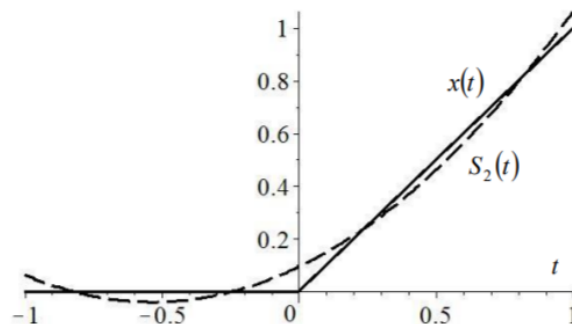


Рис. 10

37. Вычислить несколько первых коэффициентов Фурье для функции $x = x(t)$ по указанной системе ортогональных многочленов. Подтвердить графически сходимость ряда Фурье к функции x .

Для вычислений и построения графиков использовать математические пакеты.

1. $x(t) = \arctg(t)$, многочлены Лагерра

Образец решения

$$x(t) = -\frac{4t}{1+t^4}, \text{ многочлены Эрмита}$$

Решение этой задачи опирается на теоретические сведения, изложенные в конспекте лекций: понятие ортогональных многочленов и основные типы (§9, пункт 9.2, §10, пункт 10.2), определение и сходимость ряда Фурье (§11).

Многочлены Эрмита образуют ортогональный (после нормировки – ортонормированный) базис в гильбертовом пространстве $L^{2,\xi}(-\infty; +\infty)$, $\xi(t) = e^{-t^2}$. Обозначим этот ортонормированный базис следующим образом:

$$\{H_0(t), H_1(t), H_2(t), \dots, H_k(t), \dots\}.$$

Коэффициенты Фурье для функции x вычисляются по формуле

$$c_k = (x, H_k)_{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) H_k(t) e^{-t^2} dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Вычислим первые 30 коэффициентов Фурье. Все значения приведены с округлением до 4 знака после запятой ради экономии места, хотя вычисления проводились с гораздо более высокой точностью:

$$\begin{aligned} c_0 &= 0, & c_1 &= -1.7487, & c_2 &= 0, & c_3 &= 0.9705, & c_4 &= 0, & c_5 &= -0.5120, & c_6 &= 0, & c_7 &= 0.2546, \\ c_8 &= 0, & c_9 &= -0.1115, & c_{10} &= 0, & c_{11} &= 0.0334, & c_{12} &= 0, & c_{13} &= 0.0075, & c_{14} &= 0, \\ c_{15} &= -0.0271, & c_{16} &= 0, & c_{17} &= 0.0345, & c_{18} &= 0, & c_{19} &= -0.0354, & c_{20} &= 0, & c_{21} &= 0.0329, \\ c_{22} &= 0, & c_{23} &= -0.0288, & c_{24} &= 0, & c_{25} &= 0.0242, & c_{26} &= 0, & c_{27} &= -0.0197, & c_{28} &= 0, \\ c_{29} &= 0.0156, & c_{30} &= 0. \end{aligned}$$

Заметим, что поскольку функция x нечетная, то все коэффициенты Фурье с четными номерами нулевые. Кроме того, значения полученных коэффициентов Фурье стремятся к нулю при увеличении номера. Это является необходимым признаком того, что они вычислены правильно.

По условию задачи требуется подтвердить графически сходимость ряда Фурье к функции x :

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k H_k(t).$$

Для этого необходимо вычислить частичные суммы ряда Фурье

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n c_k H_k(t)$$

и продемонстрировать, что дистанция между графиками $S_n(t)$ и $x(t)$ сокращается с увеличением порядка n .

На рисунке 11 представлены графики функций x и S_{10} (пунктиром).

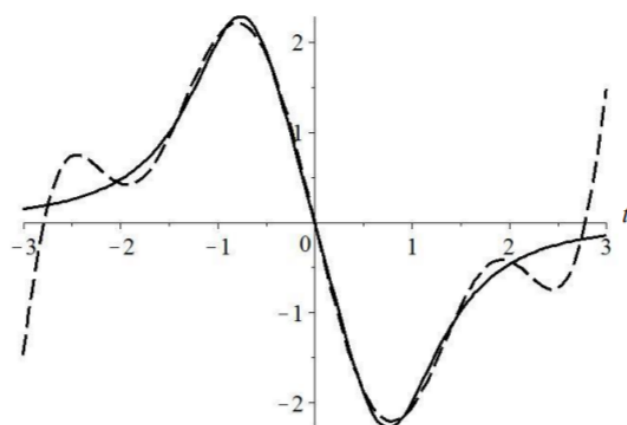


Рис. 11

На рисунке 12 представлены графики функций x и S_{30} (пунктиром).

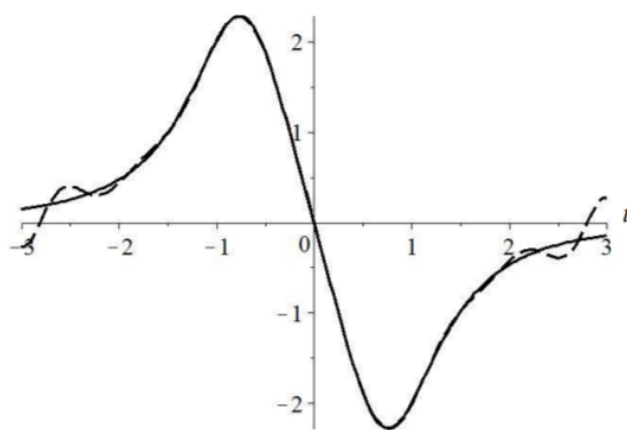


Рис. 12

39. Аппроксимировать функцию $x = x(t)$ на промежутке $[-1;1]$ двумя способами:

А. при помощи ортогональных многочленов Чебышёва I рода;

В. при помощи многочлена Тейлора (в точке $t_0 = 0$).

Число n – заданный порядок аппроксимации. Построить графики функции x и полученных аппроксимаций. Ответить на следующие вопросы, обосновав ответы численно:

- какой способ дает лучшую аппроксимацию вблизи нуля?
- какой способ дает лучшую равномерную аппроксимацию на промежутке $[-1;1]$?

Для вычислений и построения графиков использовать математические пакеты.

$$4. \quad x(t) = (t+1)t e^{-t^2}, \quad n = 3$$

Образец решения

$$x(t) = (2t+1)e^{-t^2}, \quad n = 4$$

Решение этой задачи опирается на теоретические сведения, изложенные в конспекте лекций: понятие многочленов Чебышёва (§9, пункт 9.2, §10, пункт 10.2), определение ряда Фурье и его связь с задачей аппроксимации (§11, §12). Как отмечено в §12, для аппроксимации функции можно использовать как ряд Фурье, так и ряд Тейлора. У каждого способа есть свои преимущества.

А. Аппроксимация многочленами Чебышёва I рода.

Многочлены Чебышёва I рода образуют ортогональный (после нормировки – ортонормированный) базис в гильбертовом пространстве $L^{2,\xi}(-1;1)$, $\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Обозначим

этот ортонормированный базис следующим образом:

$$\{T_0(t), T_1(t), T_2(t), \dots, T_k(t), \dots\}.$$

Составим для функции x частичную сумму ряда Фурье (4-го порядка) по системе многочленов Чебышёва I рода:

$$Cheb_4(t) = \sum_{k=0}^4 c_k T_k(t), \quad c_k = (x, T_k)_{\xi} = \int_{-1}^1 \frac{(2t+1)e^{-t^2} T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

На рисунке 15 представлены графики функций x и $Cheb_4$ (пунктиром).

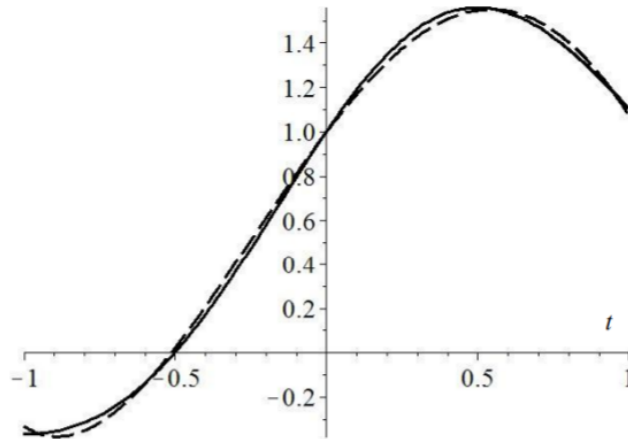


Рис. 15

В. Аппроксимация многочленом Тейлора.

Составим для функции x многочлен Тейлора 4-ой степени в точке $t_0 = 0$:

$$Taylor_4(t) = x(0) + \frac{x'(0)}{1!}t + \frac{x''(0)}{2!}t^2 + \frac{x'''(0)}{3!}t^3 + \frac{x^{IV}(0)}{4!}t^4 = 1 + 2t - t^2 - 2t^3 + \frac{t^4}{2}.$$

На рисунке 16 представлены графики функций x и $Taylor_4$ (пунктиром).

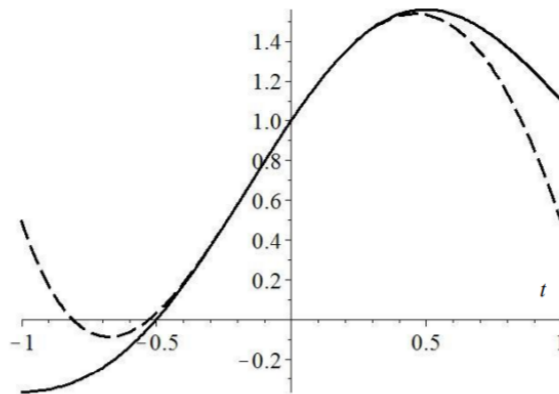


Рис. 16

По графикам можно предположить, что многочлены Чебышёва I рода в целом лучше аппроксимируют функцию x на промежутке $[-1;1]$, но вблизи нуля более точную аппроксимацию дает многочлен Тейлора. Подтвердим эти наблюдения численно.

Чтобы оценить качество аппроксимации вблизи нуля, рассмотрим пробные точки $t = 0.2$, $t = 0.1$:

$$\begin{aligned} |x(0.2) - Cheb_4(0.2)| &\approx 0.03428, & |x(0.1) - Cheb_4(0.1)| &\approx 0.02193, \\ |x(0.2) - Taylor_4(0.2)| &\approx 0.00031, & |x(0.1) - Taylor_4(0.1)| &\approx 0.00001. \end{aligned}$$

Действительно, вблизи нуля значения многочлена Тейлора гораздо ближе к значениям функции x , чем значения аппроксимации многочленами Чебышёва.

Чтобы оценить качество равномерной аппроксимации на промежутке $[-1;1]$, надо вычислить расстояния в метрике $C[-1;1]$:

$$\begin{aligned} \|x - Cheb_4\|_{C[-1;1]} &= \max_{t \in [-1;1]} |x(t) - Cheb_4(t)| \approx 0.039, \\ \|x - Taylor_4\|_{C[-1;1]} &= \max_{t \in [-1;1]} |x(t) - Taylor_4(t)| \approx 0.868. \end{aligned}$$

Итак, многочлены Чебышёва дают более точную равномерную аппроксимацию функции x на промежутке $[-1;1]$