Министерство образования и науки Российской Федерации.
Государственное образовательное учреждение
Высшего профессионального образования
“Ивановский государственный энергетический университет имени В. И. Ленина”

Кафедра высшей математики

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО КУРСУ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ФЗВО

(1 курс)

Иваново 2004

Составители: **Л. Н. Соснина,**
В.В. Астраханцев,
Б.Ф. Сковорода

Редактор **В. И. Варламов**

Методические указания содержат 4 контрольные работы по высшей математике для студентов 1 курса заочного факультета ИГЭУ:

1 семестр – контрольные работы № 1 и 2,

2 семестр – контрольные работы № 3 и 4.

Приводятся программа по курсу высшей математики для 1 и 2 семестров и указания к выполнению контрольных работ № 1 − 4.

Утверждены цикловой методической комиссией ИВТФ.

Рецензент

кафедра высшей математики Ивановского государственного энергетического университета.

Рекомендации по выполнению и оформлению контрольных работ

При выполнении контрольных работ необходимо учитывать указанные ниже рекомендации. Работы, выполненные без соблюдения этих рекомендаций, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку. Необходимо оставлять поля шириной $4-5$ см для замечаний рецензента.

2. На обложке тетради должны быть написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), номер контрольной работы, название дисциплины; здесь же указывается название учебного заведения, дата отсылки работы и адрес студента. В конце работы ставится дата ее выполнения и подпись студента.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании по положенному варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи задания, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.

4. Решения задач следует располагать в порядке номеров, указанных в задании, сохраняя номера задач, излагать подробно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения.

5. Перед решением каждой задачи надо полностью выписать ее условие. Если несколько задач, из которых нужно выбрать задачи варианта, имеют общую формулировку, то следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.

6. После получения прорецензированной работы, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и выполнить все его рекомендации. Внесенные в решения задач исправления или дополнения следует прислать для повторной проверки. Если работа не зачтена и отсутствует указание рецензента на то, что можно ограничиться представлением исправленных решений отдельных задач, то вся работа должна быть выполнена заново.

При выполнении контрольной работы рекомендуется оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех дополнений и исправлений. Вносить исправления в сам текст работы после ее рецензирования запрещается.

Внимание! В каждой контрольной работе вам нужно решить задачи, последняя цифра номера которых совпадает с последней цифрой вашего шифра. Так, например, если ваш шифр оканчивается цифрой 3, то в контрольной работе №1 вам нужно решить задачи № 3, 13, 23, 33, 43 и 53.

Программа по высшей математике для ФЗВО (1, 2 семестры)

1. Векторная алгебра

Координаты, модуль, направляющие косинусы вектора. Скалярное, векторное и смешанное произведение: определение и вычисление. Угол между векторами. Признаки параллельности и перпендикулярности векторов. Площадь параллелограмма и треугольника. Объем пирамиды, построенной на векторах. Признак компланарности векторов.

2. Аналитическая геометрия на плоскости

Различные виды уравнений прямой на плоскости. Угол между прямыми. Признаки параллельности и перпендикулярности прямых.

Уравнение окружности. Эллипс, гипербола, парабола (определение, канонические уравнения). Параллельный перенос системы координат. Полярные координаты и их связь с декартовыми.

3. Аналитическая геометрия в пространстве

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Общее уравнение плоскости. Канонические и общие уравнения прямой. Угол между плоскостями, прямыми, прямой и плоскостью. Признаки параллельности и перпендикулярности плоскостей, прямых, прямой и плоскости.

4. Элементы линейной алгебры

Матрицы, определители, системы. Действия над матрицами. Обратная матрица. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса, по формулам Крамера и матричным способом.

Линейные преобразования векторов в пространстве и на плоскости. Нахождение собственных чисел и собственных векторов матрицы.

5. Комплексные числа

Определение комплексного числа. Изображение на плоскости. Алгебраическая, тригонометрическая, показательная формы. Действия над комплексными числами. Формулы Муавра и Эйлера. Извлечение корня из комплексного числа. Логарифм комплексного числа. Возведение комплексного числа в комплексную степень.

6. Введение в математический анализ

Предел последовательности. Предел функции. 1-й и 2-й замечательные пределы. Раскрытие неопределенностей вида

$$\frac{0}{0},\ \ \frac{\infty}{\infty},\ \ 0\cdot\infty,\ \ 1^{\infty},\ \ 0^{0},\ \ \infty-\infty.$$

Непрерывность функции. Точка разрыва. Односторонние пределы.

7. Производная функции и ее приложения

Производная функции, ее геометрический и механический смыслы. Дифференцируемость функции. Дифференциал функции и его геометрический смысл. Связь дифференциала с производной. Правила вычисления производных: производная суммы, произведения, частного, производная обратной функции, производная параметрически заданной функции. Таблица производных. Производные и дифференциалы высших порядков.

Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Условия монотонности функции. Точки экстремума. Необходимое условие экстремума, достаточные условия экстремума функции. Исследование функции с помощью производной второго порядка. Точка перегиба. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования и построения графика функции.

8. Неопределенный и определенный интегралы

Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных формул интегрирования. Непосредственное интегрирование. Интегрирование по частям и подстановкой. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции. Интегрирование некоторых иррациональных функций.

Определение и геометрический смысл определенного интеграла. Основные свойства определенного интеграла. Производная интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям. Геометрические приложения определенного интеграла: вычисление площади плоской фигуры, площади криволинейного сектора, объем тела вращения и длины дуги плоской кривой. Несобственные интегралы.

Контрольная работа №1

Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии. Комплексные числа

1 – 10. Даны векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Найдите :

а) скалярное произведение векторов $\bar{a} \cdot \bar{b}$;

б) векторное произведение векторов $\bar{a} \times \bar{b}$;

в) смешанное произведение векторов $\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c}$;

г) проекцию вектора $\bar{b}$ на вектор $\bar{a}$;

д) площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$;

е) объем пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

1. $\bar{a} = \overline{AB}$, $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(-1;\ 0;\ 1)$, $\bar{b} = 2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{c} = (1;\ 2;\ 0)$.
2. $\bar{a} = (1;1;1)$, $\bar{b} = \overline{BC}$, $B(0;\ 1;\ 2)$, $C(2;\ -1;\ 0)$, $\bar{c} = 2\bar{j} - \bar{k}$.
3. $\bar{a} = -\bar{i} + 2\bar{j}$, $\bar{b} = (-1;\ 2;\ -1)$, $\bar{c} = \overline{CD}$, $C(0;\ 2;\ -1)$, $D(-1;\ -2;\ -1)$.
4. $\bar{a} = \overline{LN}$, $L(1;\ 2;\ 3)$, $N(-1;\ 2;\ 0)$, $\bar{b} = -\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{c} = (2;\ 3;\ -1)$.
5. $\bar{a} = (-2;\ 0;\ 3)$, $\bar{b} = \bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{c} = \overline{AB}$, $A(0;\ -2;\ 1)$, $B(1;\ 2;\ -1)$.
6. $\bar{a} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = (2;\ -1;\ 0)$, $\bar{c} = \overline{CD}$, $C(0;\ 2;\ 3)$, $D(2;\ -1;\ -1)$.
7. $\bar{a} = \overline{AB}$, $A(2;\ -2;\ 2)$, $B(1;\ 0;\ -1)$, $\bar{b} = -2\bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{c} = (1;\ 1;\ -1)$.
8. $\bar{a} = -\bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{b} = \overline{MN}$, $M(3;\ 1;\ -2)$, $N(0;\ -1;\ -2)$, $\bar{c} = (0;\ -1;\ -3)$.
9. $\bar{a} = (-1;\ 3;\ 4)$, $\bar{b} = \overline{AB}$, $A(-2;\ 1;\ 3)$, $B(1;\ 0;\ -3)$, $\bar{c} = -\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$.
10. $\bar{a} = \overline{MN}$, $M(-2;\ 3;\ 4)$, $N(0;\ -2;\ 3)$, $\bar{b} = -2\bar{i} + 3\bar{j}$, $\bar{c} = (2;\ 3;\ -4)$.

11 – 20. Заданы координаты вершин пирамиды ABCD.

1. Составьте:
   а) уравнение плоскости, проходящей через точки A, B, C;
   б) уравнение прямой, проходящей через точки A, B;
   в) уравнение прямой, проходящей через точку D, перпендикулярно плоскости (ABC).
2. Найдите:
   а) длину ребра AB;
   б) угол между ребрами AB и AD;
   в) угол между ребром AD и гранью ABC.

11. A(3; 5; 4), B(8; 7; 4), C(5; 10; 4), D(4; 7; 8).
12. A(2; 0; 0), B(1; 0; 1), C(0; –1; 0), D(1; –1; 1).
13. A(7; 7; 3), B(6; 5; 8), C(3; 5; 8), D(8; 4; 1).
14. A(0; 1; 0), B(1; 0; 0), C(–1; –1; 1), D(2; 2; 1).

15. A(10; 6; 6), B(-2; 8; 2), C(6; 8; 9), D(7; 10; 3).
16. A(4; 2; 5), B(0; 7; 2), C(0; 2; 7), D(1; 5; 0).
17. A(4; 4; 10), B(4; 10; 2), C(2; 8; 4), D(9; 6; 4).
18. A(1; 1; 0), B(0; 1; 2), C(1; 0; -1), D(-1; 2; 1).
19. A(-1; 2; -1), B(1; 1; 2), C(0; 2; 1), D(2; -1; -2).
20. A(1; 8; 2), B(5; 2; 6), C(5; 7; 4), D(4; 10; 9).

21 – 30. Задачи по аналитической геометрии на плоскости.

21. Точка C(-1; 3) – вершина прямого угла равнобедренного прямоугольного треугольника, гипотенуза которого задана уравнением $3x-4y-12=0$. Найдите уравнения катетов этого треугольника.
22. Заданы уравнение стороны прямоугольника $3x-4y+5=0$ и две его вершины A(1; -3) и C(1; 2). Найдите уравнения остальных сторон прямоугольника.
23. Заданы A(1; 3) – вершина треугольника ABC и уравнения двух медиан $x-2y+1=0$ и $y-1=0$. Найдите уравнения сторон треугольника.
24. Составьте уравнения прямых, проходящих через точку M(2; -3) и образующих угол 45° с прямой $2x-3y+6=0$.
25. Точки A(-3; -2), B(4; -1), C(1; 3) – вершины трапеции ABCD (AD||BC). Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Найдите координаты вершины D этой трапеции.
26. Точки A(3; 4), B(-1; 2), C(2; -1) – вершины треугольника. Найдите уравнение медианы, проведенной из вершины A, и уравнение средней линии, параллельной стороне BC.
27. Заданы уравнения двух сторон параллелограмма $x-2y=0$, $x-y-1=0$ и точка пересечения диагоналей A(3; -1). Найдите уравнения двух других сторон.
28. Найдите координаты центра и радиус окружности, проходящей через точки A(1; 5), B(-4; 0), C(4; -4).
29. В треугольнике ABC заданы уравнения стороны AB $x+7y-6=0$ и биссектрис AD $x+y-2=0$ и BE $x-3y-6=0$. Найдите координаты вершин.
30. Найдите координаты точки A, симметричной точке B(-3; 1) относительно прямой $2x-y+1=0$.

31 – 40. Постройте кривые второго порядка:

31. а) $x^2-4x-5=y$, б) $2x^2+y^2-2=0$.
32. а) $y^2+xy=0$, б) $x^2+y^2-10x=0$.
33. а) $x=2y^2-12y+14$, б) $x^2+y^2+6y=0$.
34. а) $x^2=2-y$, б) $2x^2+2y^2-4x+y=0$.
35. а) $y^2=6x-12$, б) $8x^2+4y^2=32$.
36. а) $y=-x^2+4x$, б) $16x^2-9y^2=144$.

37. а) $y^2+4y-2x+2=0$, б) $x^2-y^2=0$.

38. а) $x^2+6xy+9y^2=16$, б) $x^2+y=2x$.

39. а) $x^2+y^2-4x+2y+5=0$, б) $3x^2+4y^2-12=0$.

40. а) $x^2+y^2-8x=0$, б) $x=-4y^2+y$.

41 – 50. Постройте линию по уравнению в полярных координатах, задавая угол φ от 0 до 2π с шагом $\dfrac{\pi}{6}$. Запишите уравнение кривой в декартовой прямоугольной системе координат и определите вид кривой.

41. $r=2\cos 2\varphi$.

42. $r=\dfrac{2}{\cos\varphi}$.

43. $r=2(1+\cos\varphi)$.

44. $r=\dfrac{3}{1-\cos\varphi}$.

45. $r=2\sin 2\varphi$.

46. $r=\dfrac{1}{1-\sin\varphi}$.

47. $r=\dfrac{1}{2+\cos\varphi}$.

48. $r=\dfrac{1}{\sin\varphi}$.

49. $r=\dfrac{1}{1-\cos\varphi}$.

50. $r=\dfrac{1}{2+2\cos\varphi}$.

51 – 60. Задано комплексное число z.

а) Запишите число z в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

б) Найдите все корни уравнения $w^2-z=0$.

51. $z=\dfrac{2}{1+i}+\dfrac{5\,i}{2-i}$.

52. $z=\dfrac{2}{i}+i\,(1-i)$.

53. $z=(1+2i)(1+3i)$.

54. $z=(i-1)(2+i)^2+i$.

55. $z=(1+i)^3-(1-i)^3$.

56. $z=(i+i^2)^2+(1-2i)^3$.

57. $z=\dfrac{1}{\sqrt{3}+i}$.

58. $z=\left(\dfrac{i^3+1}{i^{21}+1}\right)^2$.

59. $z=(1+i)^2(1+2i)+\dfrac{2}{i}$.

60. $z=\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2$.

Контрольная работа № 2

Элементы линейной алгебры. Введение в математический анализ

61 – 70. Решите систему линейных уравнений:
а) методом Гаусса,
б) средствами матричного исчисления,
в) по формулам Крамера.

61. $\begin{cases} 2x-3y+z=-7, \\ x+2y-3z=0, \\ 3x-y+4z=-1. \end{cases}$

62. $\begin{cases} x+2y-4z=8, \\ -2x-y+3z=-6, \\ 5x+3y-z=14. \end{cases}$

63. $\begin{cases} x+y+2z=2, \\ 2x-y+3z=2, \\ 4x+y+4z=9. \end{cases}$

64. $\begin{cases} 3x-y+5z=-5, \\ x+2y+4z=3, \\ 3x+y+z=5. \end{cases}$

65. $\begin{cases} 6x-2y+z=-13, \\ 2x+y-3z=4, \\ x-2y+5z=-15. \end{cases}$

66. $\begin{cases} 4x-3y+z=-11, \\ 2x+y+3z=-3, \\ x-3y+2z=-9. \end{cases}$

67. $\begin{cases} 3x-5y-6z=-13, \\ 2x+3y-4z=4, \\ x-9y+z=-19. \end{cases}$

68. $\begin{cases} 2x-3y-3z=12, \\ x+y+5z=-3, \\ 3x-2y+3z=8. \end{cases}$

69. $\begin{cases} 2x-4y+3z=-1, \\ 3x-y+4z=-10, \\ x+5y-z=-7. \end{cases}$

70. $\begin{cases} 2x-y+3z=-4, \\ x+4y+2z=-6, \\ 3x-2y+z=-9. \end{cases}$

71 – 80. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного матрицей A.

71. $A=\begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix}.$

72. $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

73. $A=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

74. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$.

75. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

76. $A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

77. $A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

78. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

79. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

80. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

81 – 90. Построить графики функций $y = A\sin(ax+b)$, $y = A\cos(ax+b)$ преобразованием графиков функций $y=\sin x$, $y=\cos x$.

81. $y = 2\sin(x+\frac{\pi}{3})$.

82. $y = -2\cos(x+\frac{\pi}{4})$.

83. $y = -\sin(x-\frac{\pi}{4})$.

84. $y = 3\cos(x-\frac{\pi}{4})$.

85. $y = 2\cos\frac{x}{2}$.

86. $y = -2\sin 2x$.

87. $y = 2\cos 2x + 1$.

88. $y = \sin(2x+\frac{\pi}{3})$.

89. $y = -\sin(4x-2)$.

90. $y = -\cos(x+\frac{\pi}{4})$.

91 – 100. Найдите пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

91. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x-1}{x+1}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{5-\sqrt{2x+25}}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$.

92. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - x - 3}{x^3 - 8x + 5}$, б) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$,

в) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{\sin(x+3)}{9 - x^2}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-4}{3x+1}\right)^{x-2}$.

93. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 6x + 1}{2x - 7}$, б) $\lim\limits_{x\to-8} \dfrac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$,

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{x(1 - tgx)}{2\cos 2x}$, г) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1 + \sin x}$.

94. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 90x^2 + 10}{25x^3 + 13x}$, б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 - \sqrt{4 - x}}{\sin 4x}$, г) $\lim\limits_{x\to\pi} (1 + 2tgx)^{ctgx}$.

95. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - x}{x^2 + 5}$, б) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x+1}}$,

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$, г) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1 - 5x}$.

96. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3 - 9}}$, б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x}}{\sin 3x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{1 - \sqrt{1 + tgx}}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^2}$.

97. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 10x - 1}{x + 10^5}$, б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{3 - \sqrt{x+9}}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tgx - \sin x}{\sin^3 x}$, г) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

98. а) $\lim\limits_{x\to-1} (x^5 - 4^{x+1} - 3)$, б) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1 + \sqrt{2x^2 - 1}}{x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tgx}{\sqrt[3]{(1 - \cos x)^2}}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x}{3x-5}\right)^{4x}$.

99. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}}{x-1}$, б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+4x})$,

в) $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$, г) $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln x-\ln(x+1)]$.

100. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x-2x^2}{3+x^3}$, б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot ctg2x$, г) $\lim\limits_{x\to 3}(4x-11)^{\frac{1}{x-3}}$.

101 − 110. Найдите пределы функций при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$, односторонние пределы в точках разрыва и постройте график функции.

101. $y=e^{\frac{1}{x-2}}$. 102. $y=\dfrac{x}{x^2-9}$.

103. $y=4^{\frac{1}{2-x}}$. 104. $y=\dfrac{x^2-x-2}{|x-2|}$.

105. $y=\dfrac{1}{x^2-16}$. 106. $y=\dfrac{x}{5-x}$.

107. $y=\dfrac{x}{4-x^2}$. 108. $y=8^{\frac{1}{4-x}}$.

109. $y=\dfrac{x}{x-3}$. 110. $y=\dfrac{1}{x^2-4}$.

111 − 120. Постройте график функции *y=f(x)*. Укажите точки разрыва функции, если они существуют.

111. $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}\,,\ 0\le x\le 1,\\ 4-2x\,,\ 1<x<2.5,\\ 2x-7\,,\ x\ge 2.5\,.\end{cases}$ 112. $f(x)=\begin{cases}1-x^2,\ x<0,\\ (x-1)^2,\ 0\le x\le 2,\\ 4-x\,,\ x>2.\end{cases}$

113. $f(x)=\begin{cases}-2x\,,\ x\le 0,\\ \sqrt{x}\,,\ 0<x<4,\\ 3\,,\ x\ge 4.\end{cases}$ 114. $f(x)=\begin{cases}x-2\,,\ x<-1,\\ 1+x^2\,,\ -1\le x<1,\\ 2x\,,\ x\ge 1.\end{cases}$

115. $f(x)=\begin{cases}\sin x\,,\ x\le 0,\\ 2+x^2\,,\ 0<x<1,\\ 4-x\,,\ x\ge 1.\end{cases}$ 116. $f(x)=\begin{cases}-x\,,\ x\le -2,\\ x^2\,,\ -2<x\le 2,\\ 6-x\,,\ x>2.\end{cases}$

117. $f(x)=\begin{cases}(x+2)^2\ ,\ x\le 0,\\ \cos x\ \ ,\ 0<x\le\pi,\\ 5-x\ \ ,\ x>\pi.\end{cases}$

118. $f(x)=\begin{cases}x+2\ ,\ x\le -\dfrac{\pi}{4},\\ tgx\ ,\ -\dfrac{\pi}{4}<x\le\dfrac{\pi}{4},\\ 1\ ,\ x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

119. $f(x)=\begin{cases}\cos x\ ,\ x\le 0,\\ -x^2\ ,\ 0<x\le 2,\\ x-6\ ,\ x>2.\end{cases}$

220. $f(x)=\begin{cases}-4-x,\ x\le -4,\\ -(x+2)^2\ ,\ -4<x\le 0,\\ x-4\ ,\ x>0.\end{cases}$

Контрольная работа №3

Производная функции и её приложения

121 − 130. Найдите производные данных функций. В пункте д) функция $y=f(x)$ задана параметрически формулами $x=x(t)$, $y=y(t)$.

121. а) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

б) $y=e^{-x}\cdot\left(x^3+3x^2+6x+6\right)$,

в) $y=\left(e^{\arcsin\frac{1}{x}}+10\right)^3$,

г) $y=\left(1+x^2\right)^{\arccos x}$,

д) $x=3\ln^2 t$,
$y=\sqrt{t-t^2}$.

122. а) $y=\dfrac{\sin^2 x}{1+3^{x^2}}$,

б) $y=15-e^{\cos^2 6x}\cdot\sin^2 6x$,

в) $y=4^{arctg\sqrt{x^2-1}}$,

г) $y=(\cos x)^{arctgx}$,

д) $x=e^{2t}\cdot\sin t$,
$y=e^{2t}\cdot\cos t$.

123. а) $y=\dfrac{e^{\sin x^2}}{\sqrt{1+tgx}}+2^{x^2}$,

б) $y=\sqrt{x}\cdot\arcsin\sqrt{x}+\cos^3\dfrac{x}{3}$,

в) $y=\ln\sqrt{1+ctg^2 x}$,

г) $y=\left(x^2-9\right)^{\sqrt[3]{x}}$,

д) $x=t^2+\cos t$,
$y=5-\sin t$.

124. а) $y=\dfrac{\sin^2 5x}{\cos^3 5x+7}$,

б) $y=e^{-x}-\cos e^{-2x}\cdot\sin e^{-2x}$,

в) $y=\ln\cos\dfrac{3x-4}{x+1}$,

г) $y=\left(1+x^2\right)^{\arcsin x}$,

д) $x=\ln\sqrt{\dfrac{t^2-1}{t^2+1}}$,
$y=\sqrt{t^2+1}$.

125. а) $y=\dfrac{\sin x}{1+\ln\cos x}$,

б) $y=tg^3x\cdot\arccos x$,

в) $y=\ln\arcsin\sqrt{1+e^{3x}}$,

г) $y=(arctgx)^{\frac{1}{x^2}}$,

д) $x=\dfrac{3}{t+1}$,

$y=\dfrac{t}{t+1}$.

126. а) $y=\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$,

б) $y=x^5\cdot\left(\ln^2 x+\sin x-1\right)$,

в) $y=x\cdot\arcsin\dfrac{x}{4}-\sqrt{10-x^2}$,

г) $y=(\arccos x)^{x^2}$,

д) $x=e^{t^2}\cdot\cos t$,

$y=e^t\cdot tg\,t$.

127. а) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$,

б) $y=\sqrt{x^2+2x}\cdot\ln(2x+1)$,

в) $y=\arccos\left(x\cdot\sqrt{5-x^2}\right)$,

г) $y=(arctg\,x)^{\ln^2 x}$,

д) $x=\ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)$,

$y=\sqrt{t^2-1}$.

128. а) $y=arctg\,\dfrac{2x^2}{1-x^4}$,

б) $y=\ln\sin\sqrt{x}\cdot tg\sqrt{x}$,

в) $y=\ln\cos\dfrac{2x-1}{7}+2$,

г) $y=\left(e^{3x}\right)^{\arccos x}$,

д) $x=\arccos\sqrt[3]{t}$,

$y=\ln\sqrt[3]{t^2}$.

129. а) $y=e^x\cdot\sqrt{1-e^{3x}}-\arccos e^x$,

б) $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{x-1}$,

в) $y=\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{1-e^{2x}}}$,

г) $y=x^{tgx}$,

д) $x=\ln tg(t-1)$,

$y=\dfrac{1}{\sin^2 t}$.

130. а) $y=x\cdot\sqrt{1-x^2}+arctg\,\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,

б) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^4-1}}$,

в) $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$,

г) $y=\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{\cos x}}$,

д) $x=\sqrt{3t-t^2}$,

$y=\arccos(t-1)$.

131 − 140. Докажите, что заданная функция $y=f(x)$ является решением уравнения.

131. $y=(x+3)\sin x-2\cos x$,

$y''+y=2\cos x$.

132. $y=x\cdot e^{-x}+\dfrac{x^4}{12}\cdot e^{-x}$,

$y''+2y'+y=x^2\cdot e^{-x}$.

133. $y = e^{-3x} \cdot (1 - \cos 4x + 2\sin 4x)$,
$y'' + 6y' + 25y = 16 \cdot e^{-3x}$.

134. $y = e^{x} \cdot (5 - 3\cos 2x - 2\sin 2x)$,
$y'' + y' - 2y = 26 \cdot e^{x} \cdot \sin 2x$.

135. $y = e^{2x} \cdot (\cos x \cdot \ln \cos x + x \cdot \sin x)$,
$y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$.

136. $y = x + e^{-x} - (1 + e^{-x}) \cdot \ln(1 + e^{x})$,
$y'' + y' = \dfrac{1}{1 + e^{x}}$.

137. $y = \dfrac{1}{2\cos x}$,
$y'' + y = \cos^{-3} x$.

138. $y = e^{x} \cdot \left(\sqrt{4 - x^2} + x \cdot \arcsin \dfrac{x}{2} \right)$,
$y'' - 2y' + y = \dfrac{e^{x}}{\sqrt{4 - x^2}}$.

139. $y = -\cos x \cdot \ln tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} \right)$,
$y'' + y = tg\ x$.

140. $y = e^{x} \cdot (x - \ln x)$,
$y'' - 2y' + y = x^{-2} \cdot e^{x}$.

141 − 150. Вычислите предел, используя правило Лопиталя.

141. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx - x}{\sin x - x^2}$.

142. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 5x}$.

143. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{tg\left(\dfrac{\pi x}{2} \right)}{\ln(1 - x)}$.

144. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x - 1)}{ctg\, \pi x}$.

145. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^{x} - 1} \right)$.

146. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \sin^2 x)^{\frac{1}{tg^2 x}}$.

147. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

148. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{ctg^2 x}$.

149. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x} + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$.

150. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \sin(2x - 1) \cdot tg\pi x$.

151 − 160. Провести полное исследование функции и построить её график.

151. $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

152. $y = x + e^{-x}$.

153. $y = \dfrac{4+x}{x^2}$.

154. $y = x \cdot e^{-x}$.

155. $y = -1 + x \cdot e^{x}$.

156. $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$.

157. $y = \dfrac{1-x^3}{x^2}$.

158. $y = \dfrac{5\cdot(x-2)}{x^2}$.

159. $y = x^2 \cdot e^{-x}$.

160. $y = \dfrac{e^x}{x}$.

161 − 170.

161. Найти наибольшую площадь равнобедренного треугольника с боковой стороной a.
162. Найти наибольшую площадь равнобедренного треугольника, вписанного в круг радиуса r.
163. Найти наименьшую площадь равнобедренного треугольника, описанного вокруг окружности радиуса r.
164. Найти наибольший объём конуса с образующей равной l.
165. Найти наибольший объём цилиндра, если площадь его полной поверхности равна S.
166. Цилиндр вписан в конус с высотой H и радиусом основания R. Найти наибольший объём вписанного цилиндра.
167. Найти наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в круг радиуса R.
168. В полукруг радиуса R вписан прямоугольник с наибольшей площадью. Найти длины сторон этого прямоугольника.
169. Найти радиус основания и высоту конуса наименьшего объёма, описанного около шара радиуса R.
170. Найти радиус основания и высоту цилиндра наибольшего объёма, который можно вписать в шар радиуса R.

Контрольная работа №4

Неопределенные и определенные интегралы

171 – 180. Закон движения точки на прямой задан функцией $S(t)$. Найти скорость $V(t)$ и ускорение $a(t)$ и их наибольшие абсолютные значения на отрезке $[\,0\,;\,T\,]$.

171. $S(t)=t^4-6t^3+7{,}5t^2$, T=3.
172. $S(t)=t^4-11t^3+36t^2$, T=3.
173. $S(t)=t^4-2{,}5t^3+1{,}5t^2$, T=1.
174. $S(t)=t^4-\frac{7}{3}t^3+2t^2$, T=1.
175. $S(t)=t^4-9{,}5t^3+18t^2$, T=5.
176. $S(t)=t^4-9t^3+21t^2$, T=4.
177. $S(t)=t^4-5t^3+6t^2$, T=3.
178. $S(t)=t^4-\frac{17}{3}t^3+5t^2$, T=3.
179. $S(t)=t^4-\frac{11}{3}t^3+3t^2$, T=2.
180. $S(t)=t^4-3{,}5t^3+2{,}25t^2$, T=2.

181 – 190. Найти неопределённые интегралы.

181. а) $\int\frac{\sqrt[3]{arctgx}\,dx}{1+x^2}$, б) $\int\frac{dx}{(x^2+2)(x-1)^2}$,

в) $\int xe^{2x}dx$, г) $\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$,

д) $\int\sin^4 x\cos^3 xdx$, е) $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

182. а) $\int\frac{e^{tgx}dx}{\cos^2 x}$, б) $\int\frac{dx}{x(x^2+2)}$,

в) $\int arctg\,2xdx$, г) $\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$,

д) $\int\sin^4 x\cos^2 xdx$, е) $\int\frac{dx}{\cos x(1-\sin x)}$.

183. а) $\int(1-3\sin x)^{\frac{1}{4}}\cos xdx$, б) $\int\frac{(x+3)dx}{x^3+x^2-2x}$,

в) $\int\sqrt{x}\ln xdx$, г) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$,

д) $\int\sin^4 xdx$, е) $\int\frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$.

184. а) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$, б) $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$,

в) $\int x\cdot arctgxdx$, г) $\int \frac{(4x+7)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$,

д) $\int \sin^3 x\cos^3 x\,dx$, е) $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$.

185. а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln x}}$, б) $\int \frac{xdx}{x^3-1}$,

в) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$, г) $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{2x^2-3x+5}}$,

д) $\int \sin^2(1-4x)dx$, е) $\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$.

186. а) $\int \sqrt[4]{4+e^x}\cdot e^x dx$, б) $\int \frac{(7x-15)\,dx}{x^3-2x^2+5x}$,

в) $\int x\ln(x^2+1)dx$, г) $\int \frac{\sqrt{x+3}dx}{1+\sqrt[4]{x+3}}$,

д) $\int \cos^6 xdx$, е) $\int \frac{\sin xdx}{(1+\cos x)(3-\sin x+2\cos x)}$.

187. а) $\int \sqrt[3]{2x^4-1}\cdot x^3dx$, б) $\int \frac{(2x^2-1)\,dx}{x^3-5x^2+6x}$,

в) $\int x\cdot\arcsin\frac{1}{x}\,dx$, г) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$,

д) $\int \sin 2x\cos 8xdx$, е) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$.

188. а) $\int \frac{e^{\arcsin x}dx}{\sqrt{1-x^2}}$, б) $\int \frac{(3x^2+2x-1)\,dx}{(x-1)^2(x+2)}$,

в) $\int x\ln^2 xdx$, г) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$,

д) $\int \cos^5 xdx$, е) $\int \frac{(2-\sin x)\,dx}{2+\cos x}$.

189. а) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{6-e^{2x}}}$, б) $\int \frac{\cos^2 xdx}{\sin x}$,

в) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$, г) $\int \frac{(x+1)\,dx}{x^4-4x^3+4x^2}$, д) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$, е) $\int \frac{dx}{\sin 2x - 2\sin x}$.

190. а) $\int \frac{\sin\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}}$, б) $\int \frac{x^2dx}{x^4-81}$,

в) $\int x^2 \sin x dx$, г) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$,

д) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx$, е) $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

191 – 200. Вычислить определённый интеграл.

191. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$. 192. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

193. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx$. 194. $\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$.

195. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \sin 2x dx$. 196. $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$.

197. $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4}$. 198. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x+3}$.

199. $\int_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$. 200. $\int_{\ln 3}^0 \frac{1-e^x}{1+e^x}dx$.

201 – 210.

201. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=16-x^2$ и полукубической параболой $y=-\sqrt[3]{x^2}$.

202. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r=a(1+\cos\varphi)$.

203. Вычислить площадь фигуры, ограниченной трёхлепестковой розой $r=a\cos 3\varphi$ $(a>0)$.

204. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(t\in[0;2\pi])$ и осью Ox.

205. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $2y=x^2$, $2x+2y=3$.

206. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

207. Вычислить длину дуги кривой $x = \frac{t^6}{6}$, $y = 2 - \frac{t^4}{4}$ между точками её пересечения с осями координат.

208. Вычислить длину дуги одной арки циклоиды $x = 9(t - \sin t)$, $y = 9(1 - \cos t)$.

209. Вычислить длину дуги полукубической параболы $9y^2 = 4(3 - x)^3$ между точками пересечения с осью Oy.

210. Вычислить длину кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$, $(a > 0)$.

211 – 220. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

211. $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

212. $\int_{0}^{3} \frac{xdx}{x^2 - 4}$.

213. $\int_{3}^{5} \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2 - 9}}$.

214. $\int_{0}^{2} \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$.

215. $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$.

216. $\int_{1}^{\ell} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

217. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$.

218. $\int_{1}^{+\infty} \frac{(x^3 + 1)dx}{x^4}$.

219. $\int_{0}^{3} \frac{dx}{(x-2)^3}$.

220. $\int_{0}^{+\infty} x \cdot \sin xdx$.

Методические указания к выполнению контрольных работ

Контрольная работа №1

Запишем формулы для вычисления определителей второго и третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}).$$

Примеры. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - (-3) = -4 + 3 = -1$.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 2(-2+10) + 3(-1-2) - 1(5+2) = 16 - 9 - 7 = 0 .$$

1. Некоторые формулы векторной алгебры (1 – 10)

1) Если $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1).$$

2) Если $\bar{a} = (x;\ y;\ z)$, то $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ и

$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

3) *Скалярным произведением* векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число $\bar{a} \cdot \bar{b}$, равное произведению модулей этих векторов и косинуса угла φ между этими векторами:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi .$$

Если известны координаты векторов

$$\bar{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1), \quad \bar{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2),$$

то

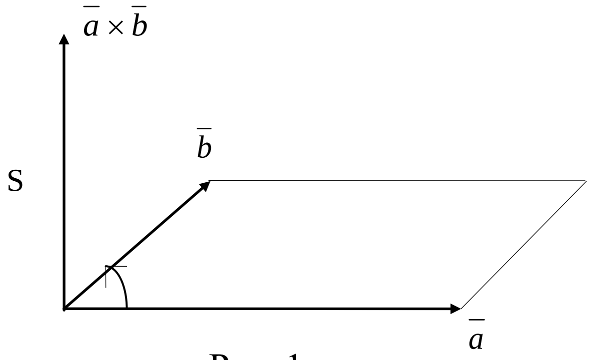
$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 ,$$

угол φ между векторами определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} .$$

4) *Векторным произведением* векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{a} \times \bar{b}$, перпендикулярный векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, модуль которого равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, и направленный так, что из

его конца кратчайший поворот от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ наблюдается происходящим против часовой стрелки.



$$S=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$$

Рис. 1

Если известны координаты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$

$$\bar{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1),\quad \bar{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2),$$

то векторное произведение выражается через определитель третьего порядка:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Площади параллелограмма и треугольника, построенных на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$S=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|,\quad S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|.$$

5) *Смешанным произведением* векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется число

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}.$$

Если известны координаты векторов

$$\bar{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1),\quad \bar{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2),\quad \bar{c}=(x_3;\ y_3;\ z_3),$$

то
$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение, взятое по абсолютной величине, равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Объем пирамиды, построенной на этих векторах, составляет шестую часть объема параллелепипеда.

$$V_{параллелепипеда} = \left|\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}\right|,$$

$$V_{пирамиды} = \frac{1}{6}\left|\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}\right|.$$

Примеры. $\bar{a} = \overline{AB}, \quad A(2;3;-1), \quad B(1;1;0);$
$\bar{b} = 2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}; \quad \bar{c} = (1;2;1).$

Тогда

$$\bar{a} = (1-2;\ 1-3;\ 0+1) = (-1;-2;\ 1),$$
$$\bar{b} = (2;-1;1),$$
$$\bar{c} = (1;2;1).$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = -2+2+1 = 1; \quad |\bar{a}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6},$$

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{6},$$

$$пр_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|\cdot\cos\varphi = \sqrt{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{\sqrt{6}};$$

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i}(-2+1) - \bar{j}(-1-2) + \bar{k}(1+4) = -\bar{i} + 3\bar{j} + 5\bar{k} = (-1;3;5);$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{1+9+25} = \frac{\sqrt{35}}{2};$$

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1(-1-2) + 2(2-1) + 1(4+1) = 10;$$

$$V_{пир.} = \frac{1}{6}\left|\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}\right| = \frac{1}{6}\cdot 10 = \frac{5}{3}.$$

2. Плоскость и прямая в пространстве (11-20)

1) Плоскость в пространстве задается одним уравнением первой степени относительно текущих координат x, y, z:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$ – общее уравнение плоскости.

Здесь $\bar{n} = (A; B; C)$ – нормальный вектор плоскости, т.е. вектор, перпендикулярный плоскости.

2) Уравнение плоскости, проходящей через точку $K(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = (A; B; C)$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

3) Прямая в пространстве задается системой двух уравнений первой степени относительно текущих координат:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Это общее уравнение прямой в пространстве.

Направляющий вектор прямой, т.е. вектор, параллельный прямой, находится по формуле

$$\bar{l} = \overline{n_1} \times \overline{n_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Здесь $\overline{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$, $\overline{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ – нормальные векторы плоскостей, пересекающихся по данной прямой.

4) Канонические уравнения прямой в пространстве

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

– это уравнения прямой, проходящей через точку $K(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору $\bar{l} = (m; n; p)$; $\bar{l}$ – направляющий вектор прямой.

Если, в частности, $\bar{l} = (0; 0; p)$, то уравнения прямой запишутся так:

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{p} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-x_0=0, \\ y-y_0=0. \end{cases}$$

5) Угол между прямыми в пространстве находится как угол между направляющими векторами этих прямых $\overline{l_1}=(m_1;n_1;p_1)$, $\overline{l_2}=(m_2;n_2;p_2)$:

$$\cos\varphi=\frac{\left|\overline{l_1}\cdot\overline{l_2}\right|}{\left|\overline{l_1}\right|\cdot\left|\overline{l_2}\right|}=\frac{\left|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2\right|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

6) Угол между прямой и плоскостью определяется формулой

$$\sin\varphi=\frac{\left|\overline{n}\cdot\overline{l}\right|}{\left|\overline{n}\right|\cdot\left|\overline{l}\right|}=\frac{\left|Am+Bn+Cp\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

где $\overline{n}=(A;B;C)$ – нормальный вектор плоскости,
$\overline{l}=(m;n;p)$ – направляющий вектор прямой.

Пример. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;\,2;\,-1), B(2;\,1;\,1)$ перпендикулярно плоскости $x+y-3z-1=0$.

Решение. Пусть $\overline{n_1}$ – нормальный вектор данной плоскости. Поскольку искомая плоскость проходит через точки A и B и перпендикулярна данной плоскости, то векторы $\overline{AB}$ и $\overline{n_1}$ параллельны искомой плоскости. Значит, нормальный вектор $\overline{n}$ искомой плоскости можно найти как векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{n_1}$.

$$\overline{n_1}=(1;1;-3), \qquad \overline{AB}=(2-1;\;1-2;\;1+1)=(1;-1;\,2),$$

$$\overline{n}=\overline{AB}\times\overline{n_1}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=\overline{i}(3-2)-\overline{j}(-3-2)+\overline{k}(1+1)=\overline{i}+5\overline{j}+2\overline{k}=(1;\,5;\,2)\cdot$$

Уравнение искомой плоскости запишется таким образом в виде

$$1(x-1)+5(y-2)+2(z+1)=0,$$

или

$$x+5y+2z-9=0.$$

3. Прямая на плоскости (21-30)

1) $Ax + By + C = 0$ – общее уравнение прямой на плоскости.

2) $y = kx + b$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом, k – угловой коэффициент прямой.

3) $y - y_0 = k(x - x_0)$ – уравнение прямой, проходящей через точку $A(x_0;\ y_0)$ с угловым коэффициентом k.

4) $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ – уравнение прямой, проходящей через две точки: $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$.

5) Угол между прямыми, заданными уравнениями $y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$ в направлении от первой прямой ко второй определяется формулой

$$tg\ \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}.$$

$k_1 = k_2$ – признак параллельности прямых,

$k_1 k_2 = -1$ – признак перпендикулярности прямых.

6) Если даны точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$, то координаты середины отрезка $[AB]$ вычисляются по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

4. Кривые второго порядка (31-40)

1) Уравнение вида

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0 \ \ (A \neq 0),$$

которое характеризуется равенством коэффициентов при x^2 и y^2 и отсутствием произведения xy, определяет на плоскости окружность, точку или пустое множество.

Разделив обе части уравнения на А и выделив из квадратных трехчленов полные квадраты, получим

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = a.$$

Если $a>0$, то это уравнение окружности с центром в точке $O(\alpha;\beta)$ и радиусом $r=\sqrt{a}$.

2) Уравнение

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0 \quad (A\neq B,\ \ A\cdot B>0),$$

в котором коэффициенты A и B при x^2 и y^2 не равны, но имеют одинаковые знаки, и отсутствует произведение координат, задает на плоскости эллипс, оси которого параллельны осям координат, точку или пустое множество. Для эллипса после выделения полных квадратов данное уравнение приводится к виду

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1,$$

где точка $O(\alpha;\beta)$ − центр, a и b − полуоси эллипса.

3) $y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$ – уравнение параболы, ось которой параллельна оси Oy;

$x=ay^2+by+c \quad (a\neq 0)$ – уравнение параболы, ось которой параллельна оси Ox.

После выделения полного квадрата первое уравнение запишется в виде

$$y=a(x-\alpha)^2+\beta,$$

второе –

$$x=a(y-\alpha)^2+\beta.$$

Точки $B_1(\alpha;\beta)$ и $B_2(\beta;\alpha)$ – вершины первой и второй парабол соответственно.

4) Уравнение $Ax^2-By^2+Cx+Dy+E=0, \quad (A\cdot B>0)$ определяет на плоскости гиперболу или две пересекающиеся прямые. Выделяя полные квадраты, для гиперболы данное уравнение приводится к виду:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=\pm 1,$$

где $O(\alpha;\beta)$ – центр, a и b – полуоси гиперболы.

Пример. Построить кривую $x^2+2y^2+x-y=0$.

Решение. Это эллипс. Выделяем полные квадраты.

$$x^2+x+2\left(y^2-\frac{1}{2}y\right)=0,$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+2\left[\left(y-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]=0,$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+2\left(y-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}=0,$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{8},$$

$$\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{8}}+\frac{2\left(y-\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{3}{8}}=1,$$

$$\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{8}}+\frac{\left(y-\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{3}{16}}=1.$$

$$C\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}\right);\quad a=\sqrt{\frac{3}{8}}\approx 0{,}6,\quad b=\sqrt{\frac{3}{16}}\approx 0{,}4.$$

5. Уравнение кривой в полярных координатах (41-50)

Чтобы в уравнении кривой перейти от полярных координат φ, r к декартовым x, y, используйте формулы: $\cos\varphi=\frac{x}{r}$, $\sin\varphi=\frac{y}{r}$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, которые получаются из рассмотрения прямоугольного треугольника OAM, изображенного на рис. 2.

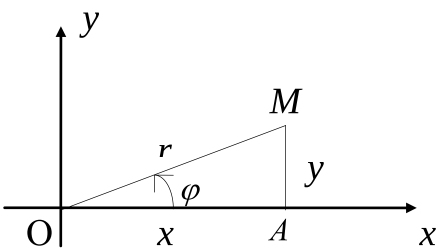


Рис. 2

Пример. Пусть задана кривая уравнением в полярных координатах

$$r=\frac{2}{3+\cos\varphi}.$$

Решение.

$$r=\frac{2}{3+\frac{x}{r}},\quad r=\frac{2r}{3r+x},\quad 3r+x=2,$$

$$3r=2-x,\quad 9r^2=4-4x+x^2,\quad 9\left(x^2+y^2\right)=4-4x+x^2.$$

$8x^2+9y^2+4x-4=0$ – уравнение кривой в декартовых координатах (эллипс).

6. Комплексные числа (51-60)

Комплексным числом называется выражение вида $x+yi$, где x, y – действительные числа, i – мнимая единица, удовлетворяющая условию $i^2=-1$.

Комплексное число $z=x+yi$ изображается точкой $M(x;\ y)$ плоскости или радиусом-вектором $\overline{OM}$ этой точки (см. рис. 2). Из прямоугольного треугольника OAM получаются следующие формулы:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad r=\sqrt{x^2+y^2},\quad tg\ \varphi=\frac{y}{x},$$

где $r=\left|\overline{OM}\right|$ – модуль числа z, φ – аргумент.

Запишем комплексное число z в алгебраической, тригонометрической и показательной формах:

$$z=x+yi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=r\cdot e^{\varphi i}.$$

Комплексные числа в алгебраической форме складываются и умножаются, как многочлены, причем

$$i^2=-1,\quad i^3=i^2\cdot i=-i,\quad i^4=i^2\cdot i^2=1,\quad i^5=i^4\cdot i=i,\ \ldots$$

При делении комплексных чисел числитель и знаменатель надо умножить на число, сопряженное знаменателю, например:

$$\frac{1-i}{3+2i}=\frac{(1-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{3-2i-3i-2}{9+4}=\frac{1-5i}{13}=\frac{1}{13}-\frac{5}{13}i.$$

Показательная функция

$$e^z=e^{x+yi}=e^x\cdot e^{yi}=e^x(\cos y+i\sin y).$$

Корень n-й степени из комплексного числа

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{x+yi}=\sqrt{r(\cos\varphi+i\sin\varphi}=\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Пример. Найти все корни уравнения $w^2 - 4i = 0$.

Решение. Из уравнения следует, что $w = \sqrt{4i}$. Пусть $z = 4i$. Это комплексное число изображено на рис. 3 точкой M (0; 4). Тогда модуль $r = 4$, а аргумент $\varphi = \frac{\pi}{2}$. В тригонометрической форме число z имеет вид:

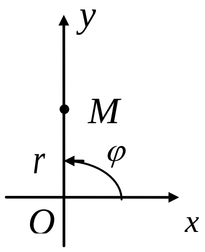


Рис. 3

$$4i = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\sqrt{4i} = \sqrt{4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)} = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2}\right).$$

Если $k = 0$, то $w_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Если $k = 1$, то $w_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

Ответ: $\pm\sqrt{2}(1 + i)$.

Контрольная работа №2

1. Решение системы линейных уравнений (61-70)

А. Метод Гаусса.

Пример. Решить методом Гаусса систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l|c|l} 2x - 3y + z = 2 & -1 & -2 \\ x + 5y - 4z = -5 & 2 & \\ 4x + y - 3z = -4 & & 1 \end{array}\right..$$

Используя первое уравнение, исключим вначале x из второго и третьего уравнений. Для этого сложим первое уравнение, умноженное на -1, со вторым, умноженным на 2. Затем первое уравнение, умноженное на -2, сложим с третьим уравнением.

Получим

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ \quad 13y - 9z = -12 \\ \quad 7y - 5z = -8 \end{cases} \begin{array}{|l} \\ -7 \\ 13 \end{array} .$$

Исключим из третьего уравнения y, складывая второе уравнение, умноженное на -7, с третьим, умноженным на 13:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2\,, \\ \quad 13y - 9z = -12\,, \\ \qquad -2z = -20\,. \end{cases}$$

Теперь последовательно находим z, y и x:

$z = 10;\quad 13y - 90 = -12,\quad 13y = 78,\quad y = 6;$
$2x - 18 + 10 = 2,\quad 2x = 10,\quad x = 5.$

Ответ: $x = 5,\quad y = 6,\quad z = 10.$

Б. Матричный способ.

Рассмотрим вначале действия над матрицами.

Матрицей размером $m \times n$ называется таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Если $m = n$, то получаем квадратную матрицу $n-$го порядка.

При умножении матриц каждая строка первой матрицы умножается на каждый столбец второй.

При умножении строки на столбец перемножаются их первые элементы, вторые и т.д. и результаты складываются. Поэтому можно умножать только такие матрицы, у которых число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Примеры.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2-1 & -2+3+1 \\ 1-2-2 & -1-3+2 \\ 0+4-1 & 0+6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y + z \\ x + 3y - 4z \\ 4x + y - 3z \end{pmatrix}.$$

Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к квадратной матрице A, если

$$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Покажем, как найти обратную матрицу A^{-1}.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

а)

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2(-15+4)+3(-3+16)+1(1-20) = -22+39-19 = -2 \neq 0.$$

Так как $\det A \neq 0$, то A^{-1} существует.

б) Пусть a_{ij} - элемент матрицы A, расположенной в i-й строке и j-м столбце. Если в определителе $\Delta = \det A$ вычеркнуть строку и столбец с элементом a_{ij}, то получим дополнительный минор Δ_{ij} элемента a_{ij}. Это определитель 2-го порядка.

Составим матрицу A_1 из дополнительных миноров Δ_{ij} элементов матрицы A:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -15+4 & -3+16 & 1-20 \\ 9-1 & -6-4 & 2+12 \\ 12-5 & -8-1 & 10+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 13 & -19 \\ 8 & -10 & 14 \\ 7 & -9 & 13 \end{pmatrix}.$$

в) Составим матрицу A_2 из алгебраических дополнений A_{ij} элементов A.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij} = \begin{cases} \Delta_{ij}, \text{ если } i+j - \text{ четное число}, \\ -\Delta_{ij}, \text{ если } i+j - \text{ нечетное число}. \end{cases}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -11 & -13 & -19 \\ -8 & -10 & -14 \\ 7 & 9 & 13 \end{pmatrix}.$$

г) Транспонируем матрицу A_2, т.е. строки поменяем местами со столбцами:

$$A_3 = A_2^T = \begin{pmatrix} -11 & -8 & 7 \\ -13 & -10 & 9 \\ -19 & -14 & 13 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица A^{-1} определяется формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A_3,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -11 & -8 & 7 \\ -13 & -10 & 9 \\ -19 & -14 & 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 11 & 8 & -7 \\ 13 & 10 & -9 \\ 19 & 14 & -13 \end{pmatrix}.$$

Покажем, как решается система уравнений матричным способом.

Пример. Решить систему $\begin{cases} 2x - 3y + z = 2, \\ x + 5y - 4z = -5, \\ 4x + y - 3z = -4. \end{cases}$

Решение. Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Получаем матричное уравнение $A \cdot X = B$.
Его решение $X = A^{-1} \cdot B$, т.е.

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 11 & 8 & -7 \\ 13 & 10 & -9 \\ 19 & 14 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 22-40-28 \\ 26-50+36 \\ 38-70+52 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 5, \quad y = 6, \quad z = 10.$

2. Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования (71-80)

Пусть

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix},\qquad \bar{e}=\begin{pmatrix}m\\ n\\ p\end{pmatrix}.$$

Ненулевой вектор $\bar{e}$ называется собственным вектором линейного преобразования, заданного матрицей A, если

$$A\bar{e}=\lambda\bar{e},$$

где λ – собственное значение, находящееся из характеристического уравнения

$$\det(A-\lambda\cdot E)=0,$$

или

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 0\\ 2 & 1-\lambda & -1\\ 1 & -1 & -\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Раскрываем определитель по элементам первой строки:

$$(1-\lambda)\left(-\lambda+\lambda^2-1\right)+1(-2\lambda+1)+0=0,$$

$$-\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda=0,\quad -\lambda\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)=0.$$

$$\lambda^2-2\lambda+2\neq 0,\ \text{т.к.}\ \ D=b^2-4ac=4-8=-4<0;\quad \lambda=0.$$

Составим систему уравнений для координат m, n, p собственного вектора $\bar{e}$. Коэффициентами при неизвестных будут элементы определителя при $\lambda=0$:

$$\begin{cases}(1-0)m-1\cdot n+0\cdot p=0,\\ 2\cdot m+(1-0)n-1\cdot p=0,\\ m-n-0\cdot p=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}m-n=0,\\ 2m+n-p=0,\\ m-n=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}m=n,\\ p=3n.\end{cases}$$

Полагаем $n=1$, тогда $m=1$, $p=3$.

$\bar{e}=(1;\ 1;\ 3)^{\mathrm{T}}$ – собственный вектор с собственным значением $\lambda=0$.

3. Вычисление предела функции (91-100)

Для решения предложенных задач необходимо ознакомиться с определениями и свойствами пределов, бесконечно малых и бесконечно больших величин. Условные выражения

$$\left\{\frac{0}{0}\right\},\quad \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\},\quad \{0\cdot\infty\},\quad \{\infty-\infty\},\quad \{1^{\infty}\},\quad \{0^{0}\}$$

характеризуют типы неопределенностей и применяются для обозначения переменных величин, при вычислении предела которых нельзя сразу применять общие свойства пределов. Укажем некоторые примеры раскрытия неопределенностей.

При вычислении пределов используются следующие простейшие пределы, основанные на свойствах пределов:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} A\cdot x=\infty$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{A}{x}=\infty$. A – $const$,

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{A}=\infty$. 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{A}{x}=0$. $A\neq 0$.

В некоторых примерах для раскрытия неопределенности вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ можно попытаться числитель и знаменатель разложить на множители и дробь сократить или применить первый замечательный предел

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1.$$

Для раскрытия неопределенности вида $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ числитель и знаменатель (если они являются многочленами относительно независимой переменной x) делят на x с наибольшим показателем.

В случае неопределенности вида $\{1^{\infty}\}$ используют второй замечательный предел

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e=2{,}7\ldots$$

или получающуюся из него формулу

$$\lim_{\substack{u\to 1\\ v\to\infty}} u^{v}=e^{\lim\limits_{\substack{u\to 1\\ v\to\infty}}(u-1)v}.$$

Примеры.

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{2x^2-x-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x+1}{2x+1}=\dfrac{3}{3}=1.$

2) $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{1}{x-2}}=\left[1^{\infty}\right]=e^{\lim\limits_{x\to2}(2x-3-1)\frac{1}{x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to2}\frac{2x-4}{x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to2}2}=e^2.$

4. Односторонние пределы функции (101-110)

Пример. $\lim\limits_{x\to3+0}2^{\frac{1}{3-x}}=\lim\limits_{\substack{x\to3\\(x>3)}}2^{\frac{1}{3-x}}=0.$

т.к. $x\to3+0\Rightarrow\begin{cases}x\to3\\x>3\end{cases}\Rightarrow3-x\to-0\Rightarrow\dfrac{1}{3-x}\to-\infty\Rightarrow2^{\frac{1}{3-x}}\to0.$

Контрольная работа №3

121 – 130. Для вычисления производной элементарной функции используются следующие формулы, полученные с помощью определения производной.

1) Производная постоянной равна нулю.

2) $(x)'=1.$

3) $(u+v)'=u'+v'.$

4) $(cu)'=c\cdot u'$, где c – постоянная.

Формулы 3 и 4 можно записать одной равносильной им формулой $\left(c_1u+c_2v\right)'=c_1u'+c_2v'$, где c_1 и c_2 - постоянные.

Свойство производной, выраженное этой формулой, называется свойством линейности. В частном случае, если $c_1=1$, $c_2=-1$, получим, что

$$(u-v)'=u'-v',$$

т.е. производная разности двух функций равна разности производных этих функций.

5) $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'.$

6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}.$

7) $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$, где $\alpha \in R$.

8) $\left(a^{u}\right)' = a^{u} \cdot \ln a \cdot u'$, где $a \in R$ и $a > 0$.

Если $a = e$, то $\left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u'$, так как $\ln e = 1$.

9) $\left(\log_{a} u\right)' = \dfrac{1}{\ln a} \cdot \dfrac{u'}{u}$, где $a \in R$, $a > 0$ и $a \neq 1$.

Если $a = e$, то $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

10) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

11) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

12) $(tg\ u)' = \dfrac{u'}{\cos^{2} u}$.

13) $(ctg\ u)' = -\dfrac{u'}{\sin^{2} u}$.

14) $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^{2}}}$.

15) $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^{2}}}$.

16) $(arctg\ u)' = \dfrac{u'}{1+u^{2}}$.

17) $(arcctg\ u)' = -\dfrac{u'}{1+u^{2}}$.

Примеры на вычисление производной

а) – в) Найти производную функции $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}$.

При нахождении производной используем формулы 6 (производная частного) и 7 (производная степенной функции).

$$y' = \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}\right)' = \frac{\left(x^2\right)' \cdot \sqrt{x^2+3} - x^2\left(\sqrt{x^2+3}\right)'}{x^2+3} =$$

$$= \frac{2x\sqrt{x^2+3} - x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(x^2+3\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(x^2+3\right)'}{x^2+3};$$

т.к. $\left(x^2+3\right)' = \left(x^2\right)' + (3)' = 2x$, то

$$y' = \frac{2x\sqrt{x^2+3} - \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3} = \frac{2x\left(x^2+3\right) - x^3}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}} = \frac{x^3+6x}{\sqrt{\left(x^2+3\right)^3}}.$$

Функцию $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}$ можно записать в виде произведения двух функций $y = x^2 \cdot \left(x^2+3\right)^{-\frac{1}{2}}$, и для вычисления производной использовать формулу 5.

$$y' = \left(x^2\left(x^2+3\right)^{-\frac{1}{2}}\right)' = \left(x^2\right)' \cdot \left(x^2+3\right)^{-\frac{1}{2}} + x^2 \cdot \left(\left(x^2+3\right)^{-\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= 2x\left(x^2+3\right)^{-\frac{1}{2}} + x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+3\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = x\left(x^2+3\right)^{-\frac{3}{2}}\left(2\left(x^2+3\right) - x^2\right) = \frac{x\left(x^2+6\right)}{\sqrt{\left(x^2+3\right)^3}}.$$

г) $y = (\sin x)^{\cos x}$.

Для вычисления производной степенно-показательной функции можно использовать следующую формулу: $y' = y(\ln y)'$.

Эту формулу рекомендуется использовать в тех случаях, когда с помощью свойств логарифмов функцию $\ln y$ удается преобразовать и сделать более простой для дифференцирования.

$$y' = \left((\sin x)^{\cos x}\right)' = (\sin x)^{\cos x}(\cos x \cdot \ln \sin x)' =$$

$$= (\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x \cdot \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right) = (\sin x)^{\cos x - 1}\left(\cos^2 x - \sin^2 x \cdot \ln \sin x\right).$$

д) Производная функции $y = f(x)$, заданной параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, вычисляется по формуле

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{y'}{x'},$$

где y' и x' – это производные функций по переменной t.

Найдем производную функции, заданной параметрически: $x = t^3$, $y = t^2$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{\left(t^2\right)'}{\left(t^3\right)'} = \frac{2t}{3t^2} = \frac{2}{3t}.$$

131 – 140. Производная от производной функции $y = f(x)$ называется производной второго порядка этой функции и обозначается y'' или $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

$$y'' = \left(y'\right)'.$$

Вычислим производную второго порядка функции $y = \ln tg\ x$.

$$y' = (\ln tg\ x)' = (\ln \sin x - \ln \cos x)' = \frac{(\sin x)'}{\sin x} - \frac{(\cos x)'}{\cos x} = ctg\ x + tg\ x.$$

$$y'' = \left(y'\right)' = (ctg\ x + tg\ x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}.$$

141 – 150. Если при $x \to a$ выражение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ является неопределенностью типа $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ и

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, \text{ то } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Этот способ вычисления называется правилом Лопиталя.

Неопределенности других типов с помощью алгебраических преобразований могут быть сведены к неопределенности $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

При вычислении пределов наряду с правилом Лопиталя следует использовать другие способы вычисления, а также свойства пределов.

Вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$, то имеем неопределенность типа 1^∞.

Для раскрытия такой неопределенности воспользуемся следующим утверждением.

Если при $x\to a$ функция u^v является неопределенностью типа 1^∞ и существует

$$\lim_{x\to a} v(u-1)=A,$$

то

$$\lim_{x\to a} u^v=\left[1^\infty\right]=e^A.$$

В нашем случае $a=0$, $u=\frac{\sin x}{x}$, $v=\frac{1}{x^2}$.

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right];$$

применим правило Лопиталя:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x)'}{\left(x^3\right)'}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right];$$

еще раз используем правило Лопиталя:

$$A=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)'}{\left(x^2\right)'}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x}=-\frac{1}{6}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

151 – 160. Полное исследование функции $y = f(x)$ можно свести к 3 этапам.

1 этап. Найти область определения функции; исследовать функцию на чётность, нечётность, периодичность; найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства функции. Установить характер точек разрыва (если они существуют), а так же найти асимптоты графика функции: вертикальные и наклонные.

Наклонные асимптота кривой $y = f(x)$, если они существуют, задаются уравнениями вида $y = kx+b$, где параметры k и b определяются формулами:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\ \ b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)\ .$$

При этом пределы могут быть различными при $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$.

Для существования вертикальной асимптоты в точке $x=x_0$ необходимо, чтобы хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x)$ был бесконечен.

2 этап. Исследование функции с помощью производной. Найти производную y'(x) и её критические точки (т.е. точки из области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует), определить промежутки возрастания и убывания функции и точки экстремума.

3 этап. Исследование функции с помощью производной второго порядка. Найти производную второго порядка $y''(x)$ и её критические точки, используя знак производной, определить промежутки выпуклости, вогнутости графика и точки перегиба.

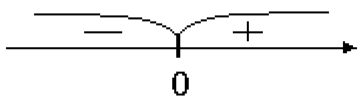
Используя результаты исследования нужно построить график функции.

Пример. Исследовать функцию $y = x\cdot e^x$ и построить её график.

1 этап. $D(y) = (-\infty\,;+\infty)$.

Точки пересечения графика с осями координат: $x = 0$, $y = 0$ (график проходит через начало координат). Функция не является чётной ($y(-x)\neq y(x)$), нечётной ($y(-x)\neq -y(x)$), периодической.

Интервалы знакопостоянства функции:



Границами интервалов, где функция сохраняет знак, могут быть только точки пересечения графика функции с осью Ox, точки разрыва и границы области определения функции.

Для исследуемой функции такой точкой является $x = 0$. При $x<0$ функция принимает отрицательные значения, при $x>0$ функция принимает положительные значения.

Вертикальных асимптот график функции не имеет, так как она непрерывна на всей числовой прямой.

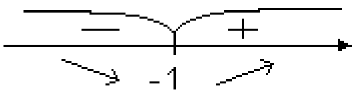
$k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xe^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, наклонной асимптоты нет, но есть горизонтальная асимптота $y=0$, т.к. $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{xe^x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$;

$$b = \lim_{x\to-\infty}(xe^x - 0\cdot x) = \lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = -\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

(использовалось правило Лопиталя).

2 этап.

$y' = (xe^x)' = 1\cdot e^x + xe^x$, $e^x + xe^x = 0$, $y' = 0$ при $x = -1$. Это критическая точка.

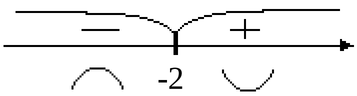


При $x = -1$ функция достигает минимума, $y_{\min} = y(-1) = -e^{-1} \approx -0{,}4$.

3 этап.

$y'' = \left((1+x)\cdot e^x\right)' = 1\cdot e^x + (1+x)\cdot e^x = e^x\cdot(2+x)$;

$y'' = 0$ при $x = -2$.



Точка $x = -2$ является точкой перегиба, так как производная второго порядка меняет знак в этой точке; при $x\in(-\infty; -2)$ график является выпуклым, а на интервале $(-2; +\infty)$ – вогнутым.

$$y(-2) = -2\,e^{-2} \approx -0.3\ .$$

Построение графика лучше начинать с проведения асимптот (если они есть), потом отмечаются точки экстремума, точки перегиба, точки пересечения с осями. Если этих точек недостаточно, то можно найти ещё несколько дополнительных точек.

График данной функции изображен на рис. 4.

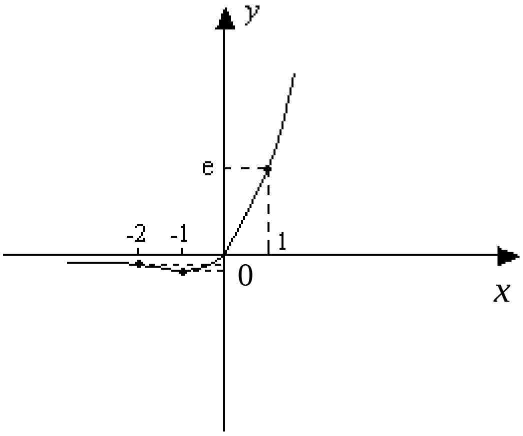


Рис. 4

$161-170$. В этих задачах величину, принимающую наибольшее или наименьшее значение, нужно записать как функцию некоторой переменной, а затем найти наибольшее или наименьшее значение этой функции.

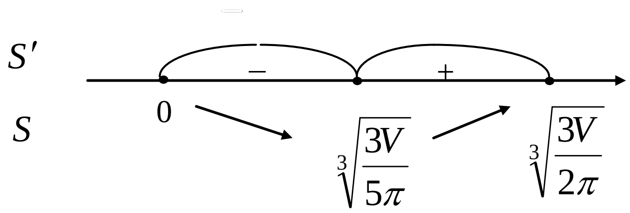
Пример. Тело представляет собой цилиндр, завершенный сверху полушаром. Какую наименьшую площадь полной поверхности может иметь тело, если его объем равен V ?

Решение.

Пусть R – радиус основания цилиндра, H – высота цилиндра. Тогда площадь полной поверхности тела $S=3\pi R^2+2\pi RH$, а объем тела $V=\dfrac{2}{3}\pi R^3+\pi R^2H$; отсюда $H=\dfrac{V}{\pi R^2}-\dfrac{2}{3}R$.

Значит, $S=3\pi R^2+2\pi R\left(\dfrac{V}{\pi R^2}-\dfrac{2}{3}R\right)=\dfrac{5}{3}\pi R^2+\dfrac{2V}{R}$. Таким образом, найдена площадь полной поверхности тела как функция радиуса R. При этом можно заметить, что $R\in\left(0;\sqrt[3]{\dfrac{3V}{2\pi}}\right]$. Осталось найти наименьшее значение функции $S(R)$.

$$S'(R)=\left(\frac{5}{3}\pi R^2+\frac{2V}{R}\right)'=\frac{10}{3}\pi R-\frac{2V}{R^2}=0;\quad R=\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}.$$



Следовательно, функция $S(R)$ при $R=\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$ имеет наименьшее значение.

$$S_{\min}=S\left(\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}\right)=\sqrt[3]{\frac{5\pi}{3V}}\cdot\left(\frac{5}{3}\pi\cdot\frac{3V}{5\pi}+2V\right)=\sqrt[3]{45\pi V^2}\,.$$

Таким образом, наименьшая площадь поверхности тела равна $\sqrt[3]{45\pi V^2}$.

Контрольная работа №4

171 – 180. Если закон движения точки на прямой задан функцией $S(t)$, то $V(t)=S'(t)$, $a(t)=V'(t)$. Для нахождения $\max\limits_{[0;T]}|V(t)|$ нужно найти критические точки функции $|V(t)|$, вычислить значение $V(t)$ в критических точках, принадлежащих отрезку $[0;T]$, и на концах этого отрезка и выбрать из полученных значений наибольшее по модулю. Точно так же находим $\max\limits_{[0;T]}|a(t)|$.

181 – 190. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$, при этом $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

Можно доказать, что $\int f(x)dx=F(x)+c$, где $F(x)$ – некоторая первообразная для $f(x)$, c – произвольная постоянная.

Для вычисления неопределенных интегралов нужно знать основные свойства, табличные интегралы и методы интегрирования.

Основные свойства неопределенных интегралов:

1. $\int(u(x)+v(x))dx=\int u(x)dx+\int v(x)dx$.

2. $\int c\ f(x)dx=c\int f(x)dx$, где c – постоянная, не равная нулю.

3. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$.

4. $\int du(x)=u(x)+c$.

Свойства 3 и 4 показывают, что операции дифференцирования и интегрирования являются взаимообратными.

Таблица неопределенных интегралов

1) $\int x^{a} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1.$

2) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c.$

3) $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + c, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1.$

Если $a = e$, то $\int e^{x} dx = e^{x} + c$.

4) $\int \cos x dx = \sin x + c.$

5) $\int \sin x dx = -\cos x + c.$

6) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tg\ x + c.$

7) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\ x + c.$

8) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + c, \ a > 0.$

9) $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\ \dfrac{x}{a} + c, \ a \neq 0.$

10) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + c, \quad a \neq 0.$

11) $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + c, \quad a \neq 0.$

Все формулы справедливы также в случае, если переменную x заменить на некоторую другую функцию. Так, если в формуле 2 заменить x на $\sin x$, то получим,

$$\int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + c\,.$$

Перейдем к рассмотрению методов интегрирования.

Непосредственное интегрирование (181-190, а)

Преобразование подынтегрального выражения в целях получения табличного интеграла называется непосредственным интегрированием, при этом используется следующая формула:

$$dx = \frac{du(x)}{u'(x)}.$$

Рассмотрим несколько примеров.

1) $\int \frac{\sin x}{1+2\cos x}dx = \int \frac{\sin x}{1+2\cos x} \cdot \frac{d(1+2\cos x)}{(1+2\cos x)'} = \int \frac{\sin x}{1+2\cos x} \cdot \frac{d(1+2\cos x)}{-2\sin x} =$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(1+2\cos x)}{1+2\cos x} = -\frac{1}{2}\ln\left|1+2\cos x\right| + c.$$

2) $\int xe^{5x^2}dx = \int xe^{5x^2} \cdot \frac{d\left(5x^2\right)}{\left(5x^2\right)'} = \int xe^{5x^2} \cdot \frac{d\left(5x^2\right)}{10x} = \frac{1}{10}\int e^{5x^2} d\left(5x^2\right) = \frac{1}{10}e^{5x^2} + c\,.$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-3x}} = \int (1-3x)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{d(1-3x)}{(1-3x)'} = -\frac{1}{3}\int (1-3x)^{-\frac{1}{3}} d(1-3x) =$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{(1-3x)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{(1-3x)^2} + c.$$

4) $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx = \int \frac{1+2x+x^2}{1+x^2}dx = \int \left(1+\frac{2x}{1+x^2}\right)dx = \int dx + \int \frac{2x}{1+x^2}dx =$

$$= x + \int \frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{d\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)'} = x + \ln\left(1+x^2\right) + c.$$

Интегрирование по частям (181-190, б)

Формула интегрирования по частям имеет вид

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

поскольку $dv = v'dx,\quad du = u'dx$, то эту же формулу можно записать так:

$$\int u\cdot v'dx = uv - \int v\cdot u'dx.$$

Для того чтобы применить формулу интегрирования по частям, нужно подынтегральную функцию разбить на два множителя, один из них обозначить u, другой – v'. После этого найти u' и v. Для нахождения функции v по заданной производной v' можно вычислить неопределенный интеграл $\int v'dx = v + c$ и затем положить $c = 0$.

При выборе функций u и v' следует помнить, что функция v' не должна быть сложной, иначе для нее будет трудно найти первообразную. В качестве u обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании, например, логарифмическую или обратную тригонометрическую функцию. В частном случае за u можно взять подынтегральную функцию, тогда $v' = 1$ и $v = x$.

Пример. Вычислить $\int x^3 \ln x dx$.

Решение. Положим $u = \ln x,\ \ v' = x^3$. Тогда $u' = \dfrac{1}{x}$.

Найдем v; $\int v'dx = \int x^3 dx + c;\quad v = \dfrac{x^4}{4}$.

Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int x^3 \ln x dx = \ln x\cdot\frac{x^4}{4} - \int\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + c = \frac{x^4}{16}(4\ln x - 1) + c.$$

Интегрирование подстановкой (181-190, д, е)

В неопределенном интеграле $\int f(x)dx$ можно сделать подстановку (замену переменной) $x = \varphi(t)$, чтобы получить более простой интеграл.

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Если подынтегральная функция является иррациональной, то нужно сделать такую подстановку, чтобы новая подынтегральная функция не содержала иррациональностей.

Пример. $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)^2}$ – интеграл от иррациональной функции.

Сделаем подстановку $\sqrt[6]{x}=t$, $x=t^6$, тогда $dx=d\left(t^6\right)=\left(t^6\right)'dt=6t^5dt$, $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x}=t^2$.

Таким образом,

$$\int\frac{dx}{\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)^2}=\left[\begin{array}{l}x=t^6,\\ t=\sqrt[6]{x}\end{array}\right]=\int\frac{6t^5dt}{\left(t^3+t^2\right)^2}=6\int\frac{tdt}{(t+1)^2}=6\int\frac{(t+1)-1}{(t+1)^2}dt=$$

$$=6\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}\right)dt=6\int\frac{dt}{t+1}-6\int\frac{dt}{(t+1)^2}=6\ln|t+1|+\frac{6}{t+1}+c=.$$

$$=6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+\frac{6}{\sqrt[6]{x}+1}+c$$

Если подынтегральная функция зависит только от функций $\sin x$ и $\cos x$, то можно сделать универсальную тригонометрическую подстановку $tg\,\frac{x}{2}=t$, $x=2arctg\,t$. В результате подынтегральная функция не будет содержать функций $\sin x$ и $\cos x$, так как

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2tg\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-tg^2\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$dx=(2arctg\,t)'dt=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример.

$$\int\frac{dx}{\sin x+\cos x+2}=\left[\begin{array}{l}x=2arctg\,t,\\ t=tg\,\frac{x}{2}\end{array}\right]=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+2\right)}=$$

$$=2\int\frac{dt}{t^2+2t+3}=2\int\frac{d(t+1)}{(1+t)^2+2}=\frac{2}{\sqrt{2}}arctg\,\frac{t+1}{\sqrt{2}}+c=\sqrt{2}arctg\,\frac{tg\,\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}+c.$$

Если подынтегральная функция зависит только от $tg\,x$, то следует сделать подстановку $tg\,x=t$, $x=arctg\,t$.

181 – 190, в. Данные интегралы можно вычислить, не используя универсальную тригонометрическую подстановку. Рассмотрим два примера.

1. $$\int \sin^2 x\cos^2 xdx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2xdx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int dx - \int \cos 4xdx\right) = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + c\,.$$

2. $$\int \sin^3 x\cos^2 xdx = \int \sin^3 x\cos^2 x\frac{d(\cos x)}{-\sin x} = -\int \left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 xd(\cos x) =$$

$$= \int \cos^4 xd(\cos x) - \int \cos^2 xd(\cos x) = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + c\,.$$

Интегрирование рациональных функций (181-190, г)

Отношение двух многочленов называется рациональной функцией. Если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе, то рациональная функция называется правильной, в противном случае – неправильной. Простейшими рациональными функциями называются функции вида

$$\frac{A}{(x-a)^k},\quad \frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^k},$$

где A, B, C, a, p, q – действительные числа; k – натуральное число и $p^2-4q<0$.

Алгоритм интегрирования рациональной функции:

1. Если рациональная функция неправильная, то с помощью деления ее нужно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной функции.

2. Знаменатель правильной рациональной функции нужно разложить на линейные и квадратичные множители.

3. Используя метод неопределенных коэффициентов, разложить правильную рациональную функцию на сумму простейших.

4. Проинтегрировать все полученные слагаемые.

Пример. Вычислить $\displaystyle\int \frac{\left(3x^2+4\right)dx}{x^2\left(x^2+4\right)}$.

Подынтегральная функция правильная, и ее знаменатель разложен на множители, поэтому переходим к третьему пункту алгоритма. Разложение на сумму простейших для этой функции будет иметь вид

$$\frac{3x^2+4}{x^2\left(x^2+4\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4},$$

где A, B, C, D – некоторые числа (неопределенные коэффициенты), которые нужно найти. Дроби в правой части приводим к общему знаменателю (он равен $x^2\left(x^2+4\right)$) и приравниваем числители.

$$Ax\left(x^2+4\right)+B\left(x^2+4\right)+(Cx+D)x^2=3x^2+4.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой части, получим систему уравнений.

$$\begin{array}{ll} x^3: & A+C=0, \\ x^2: & B+D=3, \\ x: & 4A=0, \\ x^0: & 4B=4. \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A=0, \\ B=1, \\ C=0, \\ D=2. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\int\frac{\left(3x^2+4\right)dx}{x^2\left(x^2+4\right)}=\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{2dx}{x^2+4}=-\frac{1}{x}+arctg\,\frac{x}{2}+c.$$

$191-200$. Если $f(x)$ – непрерывная функция на $[a;b]$ и $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ можно вычислить по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

Пример.

$$\int\limits_2^3 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_2^3=\frac{1}{3}(27-8)=\frac{19}{3}.$$

При вычислении определенного интеграла можно использовать формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b uv'dx=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vu'dx.$$

(функции v' и u' должны быть непрерывны на $[a;b]$).

Пример.

$$\int_0^{\pi} x\sin x dx = \begin{bmatrix} u = x, & v' = \sin x, \\ u' = 1, & v = -\cos x \end{bmatrix} = x(-\cos x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\cos x)dx = \pi + \int_0^{\pi}\cos dx =$$

$$= \pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi .$$

В определенном интеграле можно сделать замену переменной $x = \varphi(t)$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt ,$$

где числа α и β такие, что $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ (функция $f(x)$ должна быть непрерывна на $[a;b]$, функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ – непрерывна на $[\alpha;\beta]$).

201 − 210.

Геометрические приложения определенного интеграла .

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и неотрицательна на $[a;b]$. Тогда площадь S криволинейной трапеции D (рис.5), ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a,$ $x = b$ вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx .$$

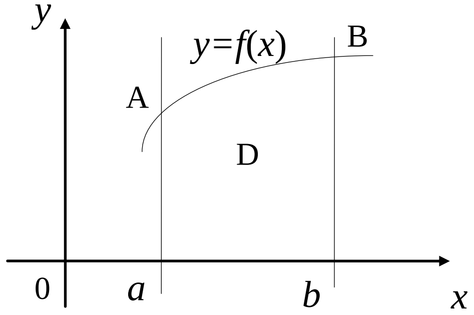


Рис. 5

Объем V тела, образованного вращением криволинейной трапеции D вокруг оси Ox, вычисляется по формуле

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx .$$

Длина дуги AB, заданной графиком функции $y = f(x)$, вычисляется по формуле

$$l_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx .$$

Если функция $y=f(x)$ задана параметрически уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, где $t\in[t_1;t_2]$, $x(t_1)=a$, $x(t_2)=b$, то

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt,\qquad V=\pi\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)x'(t)dt,$$

$$l_{AB}=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$

Пусть в полярной системе координат задана функция $r=r(\varphi)$, где φ – полярный угол, r – полярный радиус точки.

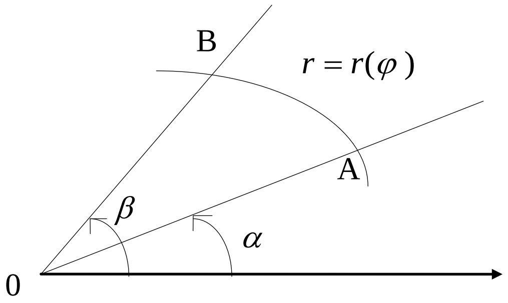


Рис. 6

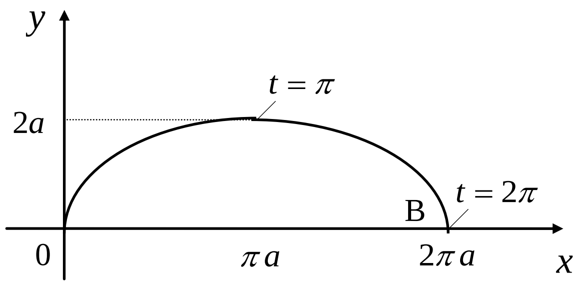
Если функция $r=r(\varphi)$ непрерывна на $[\alpha;\beta]$, то площадь криволинейного сектора OAB, ограниченного графиком функции $r=r(\varphi)$ и лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ (рис. 6), вычисляется по формуле:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi.$$

Длина дуги вычисляется по формуле $l_{AB}=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi$.

Пример. Вычислить длину одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t\in[0;2\pi]$, $a>0$.

Решение. Нарисуем арку циклоиды (рис. 7). Заметим, что если t меняется от 0 до 2π, то x возрастает от 0 до $2\pi a$, а y сначала возрастает от 0 до $2a$, а затем убывает до 0.



t	0	π	2π	...
x	0	πa	$2\pi a$	...
y	0	$2a$	0	...

Рис. 7

$$l_{0B}=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{(a(1-\cos t))^2+(a\sin t)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}a\sqrt{2-2\cos t}\,dt=$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=4a\left(-\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=4a(-\cos\pi+\cos 0)=8a\,.$$

211 − 220**.** Несобственные интегралы – это обобщение понятия определенного интеграла для случая, когда либо неограниченным является промежуток интегрирования, либо неограничена подынтегральная функция на отрезке интегрирования. Рассмотрим эти два случая.

1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a;+\infty)$, тогда $\lim\limits_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)dx$ называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ на промежутке $[a;+\infty)$ и обозначается $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, т.е.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)dx,$$

при этом, если существует конечный предел, говорят, что несобственный интеграл сходится, в противном случае – расходится.

Аналогично

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx=\lim_{c\to-\infty}\int_c^a f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} f(x)dx+\int_a^{+\infty} f(x)dx, \qquad (1)$$

при этом несобственный интеграл в левой части формулы (1) называется сходящимся, если оба несобственных интеграла в правой части формулы (1) сходятся (число а в формуле (1) можно выбрать произвольно).

2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty$, тогда $\lim\limits_{x\to b-0}\int_a^c f(x)dx$ называется несобственным интегралом и обозначается $\int_a^b f(x)dx$, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{c\to b-0}\int_a^c f(x)dx,$$

при этом, если существует конечный предел, то несобственный интеграл называется сходящимся.

Возможны другие случаи, например,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c \to 0+0} \int_c^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c \to 0+0} \left(\ln|x| \Big|_c^1 \right) = \lim_{c \to 0+0} (-\ln c) = +\infty .$$

Следовательно, несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ расходится.

Библиографический список

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1. − М., 1978.

2. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. − М., 1961.

3. Ефимов Н.В. Квадратичные формы и матрицы. − М., 1972.

4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1. − М.: Высш. шк., 1981.

5. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. − М.: Наука, 1987.

6. Свешников А.Г. , Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. − М.: Наука, 1979.

7. Данко П.Е. , Попов А.Г. , Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. − М.: Высш. шк., 1980, Ч.I, II.

8. Бугров Я.С. , Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. − М.: Наука, 1980.

9. Бугров Я.С. , Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. − М.: Наука, 1980.

10. Задачи и упражнения по математическому анализу для вту- зов / Под ред. Б.П. Демидовича. − М.: Наука, 1978.

Контрольные задания
и методические указания
по курсу высшей математики
для студентов заочного факультета
(1 курс)

Составители: СОСНИНА Лидия Николаевна,
АСТРАХАНЦЕВ Виктор Васильевич,
СКОВОРОДА Борис Федосьевич

Редактор Н. О. Козина
Лицензия ИД №05875 от 4.07.01
Подписано в печать .Формат $60 \times 84\, 1/16$. Печать плоская. Усл. печ. л. 3,25. Тираж 1000 экз. Заказ
Ивановский государственный энергетический университет.
153003 Иваново, ул. Рабфаковская, 34.