### ***Тема 2. Лабораторная работа Методы решения нелинейных уравнений***

#### **2.1. Вопросы, подлежащие изучению**

1. Постановка задачи численного решения нелинейных уравнений.
2. Этапы численного решения уравнения.
3. Аналитический и графический методы отделения корней.
4. Уточнение корня методами половинного деления, итерации, Ньютона и хорд.
5. Графическая иллюстрация методов половинного деления, итерации, Ньютона и хорд.
6. Условие окончания вычислений при использовании методов половинного деления, итерации, Ньютона и хорд.
7. Сходимость метода итерации, выбор начального значения корня, правило выбора итерирующей функции и оценка погрешности метода итерации.
8. Теорема о сходимости метода Ньютона и оценка погрешности метода.
9. Правило выбора неподвижной точки, начальной точки и условие сходимости метода хорд.
10. Условия окончания вычислений в методах итерации, Ньютона и хорд.
11. Сравнение методов половинного деления, итерации, Ньютона и хорд.
12. Алгоритмы и программы решения нелинейных уравнений на языке программирования.
13. Решение нелинейных уравнений средствами математических пакетов

#### **2.2. Задание**

1. **Выбрать индивидуальное задание** (нелинейное уравнение)из таблицы.2-1**.**
2. **Отделить корни уравнения.**
3. **Уточнить корень уравнения 4-мя численными методами, для чего провести исследование нелинейного уравнения для каждого метода**:

* проверить выполнение условий сходимости вычислительного процесса, в случае расходящегося процесса – сделать необходимые преобразования для обеспечения сходимости;
* выбрать начальное приближение;
* сформулировать условия окончания этапа уточнения корня.

1. **Провести «ручной расчет»** трех итераций.
2. **Оценить погрешность** результата «ручного расчета».
3. **Решить нелинейное уравнение средствами математического пакета.**

#### **2.3. Варианты задания**

Таблица 2-1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Уравнение** | **№** | **Уравнение** |
| **1** | **tg(0,36x +0,4) = x2** | **19** | **ex + ln(x) – x = 0** |
| **2** | **x + ln(4x) – 1 = 0** | **20** | **1–x+sin(x)–ln(1+x) = 0** |
| **3** | **ex – 4 e-x – 1 = 0** | **21** | **– cos(1–x) = 0** |
| **4** | **x ex – 2 = 0** | **22** | **sin(x2)+cos(x2)–10x = 0** |
| **5** | **4 (x2 + 1) ln(x) – 1 = 0** | **23** | **x2 – ln(1 + x) – 3 = 0** |
| **6** | **2 – x – sin(x / 4) = 0** | **24** | **cos(x / 2) ln(x – 1) = 0** |
| **7** | **x2 + ln(x) – 2 = 0** | **25** | **cos(x/5) – x = 0** |
| **8** | **cos(x)–(x + 2)1/2 + 1 = 0** | **26** | **3x – e-x = 0** |
| **9** | **4 (1 + x1/2) ln(x) – 1 = 0** | **27** | **4(1+) ln(x)–10 = 0** |
| **10** | **5 ln(x) –  = 0** | **28** | **(x-3)2 lg(x-2) = -2** |
| **11** | **ex + x3 – 2 = 0** | **29** | **x – 1 / (3 + sin(3.6x)) = 0** |
| **12** | **3 sin () + x – 3 = 0** | **30** | **0.25x3 + cos(x / 4) = 0** |
| **13** | **0.1x2 – x ln(x) = 0** | **31** | **2 – x = ln x** |
| **14** | **cos(1 + 0.2x2) – x = 0** | **32** | **x2 + 4sinx = 0** |
| **15** | **3 x – 4 ln(x) – 5 = 0** | **33** | **0,5x -3 = (x+2)2** |
| **16** | **sin(1 – 0.2x2) – x = 0** | **34** | **1 + lgx = 0,5** |
| **17** | **ex – e-x – 2 = 0** | **35** | **2 lgx – x/2+ 1 = 0** |
| **18** | **x – sin(1 / x) = 0** | **36** | **x – sinx = 0,25** |

#### **2.4. Содержание отчета**

1. Индивидуальное задание (уравнение, метод решения).
2. Результаты этапа отделения корней (интервалы изоляции корня уравнения).
3. Результаты исследования задания для «ручного расчета»:

* условие сходимости вычислительного процесса;
* начальное приближение;
* условие окончания процесса уточнения.

1. Результаты «ручного расчета», представленные по форме табл. 2.-2а для метода половинного деления или по форме табл. 2.-2б для остальных методов.

Таблица 2-2а

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **к** | **a** | **b** | **f(a)** | **f(b)** | **(a+b)/2** | **f( (a+b)/2)** | **b-a** |
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  |  |  |

Таблица 2-2б

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **к** | **x** | **f(x)** |
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |

1. Оценки погрешностей результатов «ручного расчета».
2. Результаты решения задачи, полученные с помощью математического пакета.

#### **2.5. Пример выполнения задания**

**1. Задание для решения нелинейных уравнений:**

* уравнение ;
* методы решения нелинейных уравнений для ручного расчета – половинного деления, итерации, Ньютона и хорд;

1. **Отделение корней с использованием MathCad**

Отделение корней производим графическим методом (а) с обязательным подтверждением результата аналитически (б)

**а)**

|  |
| --- |
|  |

**б)** На отрезке [0; 1] функция f(x) меняет знак, т.е. существует, по крайней мере, один корень. Поскольку знак первой производной f1(x)= -sin(x) - 3 < 0 на выбранном отрезке остается постоянным, то можно сказать, что функция на этом отрезке монотонна. Знакопостоянство второй производной f2(x)= -cos(x)<0 на выбранном отрезке является необходимым условием применения метода Ньютона и метода хорд. Следовательно, уравнение 1-3х+cos(x)=0 имеет единственный корень на отрезке [0;1].

**3.** **Уточнение корня с использованием MathCad**

***Метод половинного деления***

1. **Исследование задания**

* Метод **половинного деления** **сходится**, если на выбранном отрезке отделен один корень. Так как на отрезке [0;1] функция  меняет знак () и монотонна (f’(x)<0), то условие сходимости выполняется.
* **Выберем за начальное приближение** середину отрезка  =0.5.
* **Условие окончания процесса уточнения корня**. Для оценки погрешности метода половинного деления справедливо условие |bn – an|<ε , т.е. длина отрезка, полученного на n-ом шаге должна быть меньше заданной точности - 

1. **Результаты «ручного расчета» трех итераций**

|  |
| --- |
| *1 итерация*  f(x0)=0.377  f(a)>0, f(x0)>0 и f(b)<0  следовательно,  *2 итерация*  f(x1)=-0.518  f(a)>0, f(x1)<0 и f(b)<0  следовательно,  *3 итерация*    f(x2)=-0.064  f(a)>0, f(x2)<0 и f(b)<0  следовательно,  и т.д. |

Результаты вычислений представлены в форме табл. 2-2а.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **n** | **a** | **b** | **f(a)** | **f(b)** | **(a+b)/2** | **f( (a+b)/2)** | **b-a** |
| 1 | 0 | 1 | 2 | -1.459 | 0.5 | 0.377 | 0.5 |
| 2 | 0.5 | 1 | 0.377 | -1.459 | 0.75 | -0.518 | 0.25 |
| 3 | 0.5 | 0.75 | 0.377 | -0.518 | 0.625 | -0.064 | 0.125 |
| 4 | 0.5 | 0.625 | 0.377 | -0.064 | 0.5625 | 0.158 | 0.0625 |

После трех итераций приближение к корню – середина отрезка x3=0.5625.

**3) Погрешность численного решения нелинейных уравнений**

Оценим погрешность результата после трех итераций .

***Метод итераций***

**1) Исследование задания для «ручного расчета»**

* Приведем уравнение f(x)=0 к виду . Тогда рекуррентная формула  . **Для сходимости процесса итерации** необходимо, чтобы  при **.** Если  то сходимость не обеспечена.

Приведем уравнение  к виду x = (cos(x)+1)/3и проведем исследование.

|  |
| --- |
|  |

В приведенном примере условие сходимости выполняется и можно использовать итерирующую функцию  в рекуррентной формуле для уточнения корня методом итераций, что и будет показано ниже. Однако, в случаях, когда свободный х выразить не удается, или когда  целесообразно воспользоваться следующим приемом, позволяющим обеспечить выполнение условий сходимости.

Построим функцию  где параметр  может быть определен по правилу:

если то 

если  то  где .

Приведем пример выбора параметра λ и итерирующей функции. Для заданного уравнения исследовано, что

f `(x)<0, тогда .

f `(0)= -3, f `(1)=-3.841,

*r* = max{ |-3|, |-3.841| }=3.841, тогда 0<λ<0.26.

Полагаем λ=0.25. Тогда рекуррентная формула xn+1 = φ(xn),

где φ(x)= 0.25(1 - 3x + cos x) + x = 0.25(1+x+cos x).

* **Выберем начальное приближение к корню** (в методе итераций x0– произвольное значение из отрезка [a;b])**,** например, x0=0**,** и с использованием итерационной функции  выполним три итерации.
* **Условие окончания процесса уточнения корня**. Для оценки погрешности метода итерации справедливо соотношение:

. Процесс итерации следует продолжать до тех пор, пока не выполнится условие останова:, где q=max |φ `(x)| на выбранном отрезке, ε – заданная точность. Так как q==0.28, условие останова будет . Если *q*<1/2, то можно использовать условие 

**2) «Ручной расчет» трех итераций**

Для получения решения уравнения методом итерации необходимо воспользоваться следующей рекуррентной формулой: , 

|  |
| --- |
|  |

Результаты вычислений представлены в форме табл. 2-2b.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **к** | **Xк** | **f(xк)** |
| 0 | 0 | 2 |
| 1 | 0.6667 | -0.2141 |
| 2 | 0.5953 | 4.21 • 10-2 |
| 3 | 0.6093 | -7.9496 • 10-3 |

**3) Погрешность численного решения нелинейного уравнения**

Оценим погрешность результата после трех итераций:

 .

***Метод Ньютона***

**1) Исследование задания для «ручного расчета»**

* **Необходимые и достаточные условия сходимости** метода Ньютона:

непрерывна на [a;b] и ;

 и отличны от нуля и сохраняют знаки для .

В нашем случае на отрезке [0;1] требования теоремы выполняются.

* **Начальное приближение**  должно удовлетворять условию: , т.е. за начальное приближение следует принять тот конец отрезка, где знак функции и знак второй производной совпадают. Поскольку  < 0 и  < 0, то выберем начальное приближение к корню: =1.
* **Условие окончания процесса уточнения корня**. Для оценки погрешности метода Ньютона справедливо соотношение: , где *M2* – наибольшее значение  , *m1* –наименьшее значение  на отрезке[a;b]. Из требования обеспечения точности ε следует условие окончания вычислений 

**2) «Ручной расчет» трех итераций**

Для получения решения уравнения методом Ньютона воспользуемся следующей рекуррентной формулой: 

В нашем случае , =1.

|  |
| --- |
|  |

Представим вычисления в виде следующей табл. 2-2b.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **k** | **Xk** | **f(xk)** |
| 0 | 1 | -1.4597 |
| 1 | 0.6200 | -4.62•10-2 |
| 2 | 0.607121 | -6. 788 •10-5 |
| 3 | 0.607102 | -1.484 •10-10 |

**3) Погрешность численного решения нелинейных уравнений**

Оценим погрешность после трех итераций:

  

Тогда .

***Метод хорд***

**1) Исследование задания для «ручного расчета».**

* ***Проверка выполнения условий сходимости***.Для сходимости метода необходимо знакопостоянство  на отрезке [a;b].
* ***Выбор начального приближения.*** Видрекуррентной формулы зависит от того, какая из точек a или b является неподвижной. Неподвижен тот конец отрезка [a;b**]** , для которого знак функции f(x**)**совпадает со знаком ее второй производной. Тогда второй конец отрезка можно принять за начальное приближение к корню, то есть точку х0**.**

Рекуррентная формула метода хорд:

 где  - неподвижная точка.

На этапе отделения корня было показано, что для функции f(x)=1–3x+cosx вторая производная <0 на отрезке [0;1] и, следовательно, неподвижной точкой является точка x=b=1, так как .

Таким образом, полагая =a=0, получим сходящуюся последовательность приближений к корню.

В рассматриваемой задаче рекуррентная формула принимает следующий вид



***Условие окончания процесса уточнения корня.*** Оценку погрешности можно проводить по любой из формул  или , где *m1* и *M1* – наименьшее и наибольшее значения на отрезке. В случае, если *M*1<*m1*можно использовать правило останова .

**2) «Ручной расчет» трех итераций**

Для получения решения уравнения методом хорд воспользуемся следующей рекуррентной формулой:

****= 0.

|  |
| --- |
|  |

Результаты вычислений представлены в виде следующей таблицы:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **n** | **Xn** | **f(xn)** |
| 0 | 0 | 2 |
| 1 | 0.5781 | 0.1032549 |
| 2 | 0.6059 | 4.080772 •10-3 |
| 3 | 0.6070 | 1.590771•10-4 |

**3) Погрешность численного решения нелинейного уравнения**

Погрешность результата, вычисленного методом хорд, оцениваем по формуле   
 . Тогда после трех итераций



**4. Решение уравнения средствами MathCad**

Для решения нелинейных уравнений вида **f(x) = 0** в **Mathcad** используется функция **root(f(x), x, a, b)**, где **f(x)** – выражение, стоящее в левой части решаемого уравнения, **x** – аргумент функции, **a** и **b** –границы отрезка с корнем. В приведенном ниже примере **z**  - имя переменной, которой присваивается найденное значение корня. Функция **root** реализует вычисление корня уравнения численным методом с точностью **TOL (**по умолчанию **TOL** **=1.10-3**).

|  |
| --- |
|  |

**2.6**. **Контрольные вопросы  по теме**

### **Методы решения нелинейных уравнений**

**1.** Что представляет собой нелинейное уравнение?

**2.** Что является корнем нелинейного уравнения f(x)=0?

**3.** Чему равна функция в точке корня?

**4.** Как называется процесс нахождения возможно более узкого отрезка, содержащего

только один корень уравнения ?

**5.** Каково условие существования на отрезке [a;b] хотя бы одного корня?

**6.** При каких условиях корень xбудет единственным  на отрезке [a;b]?

**7.** Процесс решения нелинейного уравнения состоит из...

**8.** Как называются этапы решения нелинейного уравнения?

**9.**В чем заключается этап «отделения корней» нелинейного уравнения?

**10.** Что такое начальное приближение к корню?

**11.** Что определяется на этапе уточнения корней?

**12.** Какие методы не относятся к методам отделения корня?

**13.** Какие методы не относятся к методам уточнения корня?

**14.** Какие методы используются на этапе отделения корней?

**15.**Что необходимо, чтобы выбрать **x0**в качестве начального приближения в методе

Ньютона?

**16.**Что является необходимым условием существования корня на отрезке [a;b]?

**17.**Какой метод решения нелинейного уравнения требует  более близкого к корню

начального значения?

**18.** Назовите метод решения нелинейного уравнения, в результате которого

получается последовательность вложенных отрезков?

**19.** Можно ли уточнить корень уравнения графическим методом?

**20.**Что является  первым приближением к корню, отделенному на отрезке [a;b],при решении нелинейного уравнения методом половинного деления?

**21.**При каких условиях метод половинного деления всегда находит корень уравнения f(x)=0?

**22.** Что означает термин - «метод расходится»?

**23.** Какой метод решения нелинейного уравнения обладает квадратичной сходимостью?

**24.** Каково правило выбора итерирующей функции при использовании метода итераций?

**25.** Что принимается за начальное приближение в методе итерации?

**26.** Каково правило выбора неподвижной точки при использовании метода хорд?

**27.** Какое значение выбирается в качестве начального приближения в методе хорд?

**28.** Почему необходим этап отделения корней?

**29.** При каких условиях метод хорд позволяет вычислить отделенный корень с заданной

погрешностью?

**30.** Для каких функций не рекомендуется применять метод Ньютона?

**31.** Что можно сказать  о методе итерации, если на заданном отрезке имеются два корня?

**32.**Как могут осуществляться итерации приближения к корню  в процессе решения уравнения методом простой итерации?

**33.** Какой метод решения нелинейного уравнения обладает свойством «самокоррекции»?

**34.** Что относится к способам улучшения сходимости метода простой итерации?