О тригонометрических рядах Фурье

Пусть $f(t)$ — периодическая функция, описывающая некоторое колебательное движение. Требуется представить $f(t)$ в виде суммы функций вида $A\cos(\omega t+\varphi)=a\cos\omega t+b\sin\omega t$. Такие функции называются ***гармониками***.

Предположим, что период функции $T=2\pi$. Разложение в тригонометрический ряд будет выглядеть следующим образом:

$$f(t)\overset{?}{\leftrightarrow}\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt) \qquad (1)$$

Если разложение (1) существует и ряд в правой части сходится, то коэффициенты разложения находятся по формулам:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt$$

Предположим, что тригонометрический ряд в правой части (1) сходится к некоторой функции $S(t)$, которая называется суммой тригонометрического ряда Фурье. Справедлива следующая теорема:

Теорема Дирихле. Пусть $f(t)-2\pi-$ периодическая функция, удовлетворяющая условиям:

1) $f(t)$ — кусочно-непрерывна и имеет на $[-\pi,\pi]$ не более чем конечное число точек разрыва, причем все они первого рода.
2) $f(t)$ имеет на $[-\pi,\pi]$ не более чем конечное число экстремумов.

Тогда на промежутке $[-\pi,\pi]$ тригонометрический ряд Фурье сходится, причем его сумма $S(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$ такова, что

1) Если t — точка непрерывности функции $f(t)$, то $S(t)=f(t)$.
2) Если t — точка разрыва функции $f(t)$, то $S(t)=\frac{f(t+0)-f(t-0)}{2}$.
3) $S(\pi)=S(-\pi)=\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}$.

Варианты расчетного задания.

- Разложить в тригонометрический ряд Фурье 2π-периодическую функцию.
- Построить график исходной функции и на том же рисунке построить графики частичных сумм ряда Фурье: $S_5(x)$ – сумма пяти гармоник и $S_{100}(x)$ – сумма 100 гармоник.

1 вариант $f(x)=\begin{cases} e^x+1, x\in[-\pi,1) \\ \ln x, x\in[1,\pi) \end{cases}$	8 вариант $f(x)=\begin{cases} e^x-1, x\in[-\pi,1) \\ \ln(3+x), x\in[1,\pi) \end{cases}$	15 вариант $f(x)=\begin{cases} e^x+1, x\in[-\pi,1) \\ \cos x, x\in[1,\pi) \end{cases}$	22 вариант $f(x)=\begin{cases} e^x-3, x\in[-\pi,1) \\ \ln(4-x), x\in[1,\pi) \end{cases}$
2 вариант $f(x)=\begin{cases} e^x-1, x\in[-\pi,1) \\ \sin x, x\in[1,\pi) \end{cases}$	9 вариант $f(x)=\begin{cases} e^x-3, x\in[-\pi,1) \\ \sin 2x, x\in[1,\pi) \end{cases}$	16 вариант $f(x)=\begin{cases} e^x-1, x\in[-\pi,1) \\ \sin x+1, x\in[1,\pi) \end{cases}$	23 вариант $f(x)=\begin{cases} e^x+3, x\in[-\pi,1) \\ 1-\sin 2x, x\in[1,\pi) \end{cases}$
3 вариант $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}, x\in[-\pi,1) \\ 2\ln x, x\in[1,\pi) \end{cases}$	10 вариант $f(x)=\begin{cases} e^{x+1}, x\in[-\pi,1) \\ 2\ln x, x\in[1,\pi) \end{cases}$	17 вариант $f(x)=\begin{cases} e^{x+1}, x\in[-\pi,1) \\ 3\ln x, x\in[1,\pi) \end{cases}$	24 вариант $f(x)=\begin{cases} e^{x+3}, x\in[-\pi,1) \\ 2\ln 3x, x\in[1,\pi) \end{cases}$
4 вариант $f(x)=\begin{cases} e^x, x\in[-\pi,2) \\ \ln(x-1), x\in[2,\pi) \end{cases}$	11 вариант $f(x)=\begin{cases} 2+e^x, x\in[-\pi,2) \\ \ln(x+1), x\in[2,\pi) \end{cases}$	18 вариант $f(x)=\begin{cases} e^{x-2}, x\in[-\pi,2) \\ \ln(x+1), x\in[2,\pi) \end{cases}$	25 вариант $f(x)=\begin{cases} 2-e^x, x\in[-\pi,2) \\ \ln(x+4), x\in[2,\pi) \end{cases}$
5 вариант $f(x)=\begin{cases} 2^x+1, x\in[-\pi,3) \\ \ln x, x\in[3,\pi) \end{cases}$	12 вариант $f(x)=\begin{cases} 3^x+3, x\in[-\pi,3) \\ 2+\ln x, x\in[3,\pi) \end{cases}$	19 вариант $f(x)=\begin{cases} 2^x-1, x\in[-\pi,3) \\ 2\ln x, x\in[3,\pi) \end{cases}$	26 вариант $f(x)=\begin{cases} 3^x-3, x\in[-\pi,3) \\ 2-\ln 2x, x\in[3,\pi) \end{cases}$
6 вариант $f(x)=\begin{cases} \cos x, x\in[-\pi,1) \\ \ln x, x\in[1,\pi) \end{cases}$	13 вариант $f(x)=\begin{cases} \cos x, x\in[-\pi,1) \\ \ln x, x\in[1,\pi) \end{cases}$	20 вариант $f(x)=\begin{cases} \cos x, x\in[-\pi,1) \\ 2+\ln x, x\in[1,\pi) \end{cases}$	27 вариант $f(x)=\begin{cases} \cos x, x\in[-\pi,1) \\ 4+\ln x, x\in[1,\pi) \end{cases}$
7 вариант $f(x)=\begin{cases} 1-e^x, x\in[-\pi,1) \\ \ln x, x\in[1,\pi) \end{cases}$	14 вариант $f(x)=\begin{cases} 1-e^x, x\in[-\pi,1) \\ \ln x, x\in[1,\pi) \end{cases}$	21 вариант $f(x)=\begin{cases} 1-2e^x, x\in[-\pi,1) \\ 2-\ln x, x\in[1,\pi) \end{cases}$	28 вариант $f(x)=\begin{cases} 7-e^x, x\in[-\pi,1) \\ 3+\ln x, x\in[1,\pi) \end{cases}$

Примерно такой график должен получиться. Прямые линии – это данные в условии функции. В данном случае задана была кусочно-линейная функция, потому что некоторые студенты брали интегралы вручную.