ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»

Факультет машиностроения и аэрокосмической техники

Кафедра нефтегазового оборудования и транспортировки

Лабораторная работа №3 по курсу «Математическое моделирование в нефтегазовом деле»

Системы массового обслуживания с отказами

Выполнил студент группы ФИО

Проверил доцент А.М. Слиденко

Воронеж 2019

Цели работы:

1. Рассмотреть основные понятия теории случайных процессов.
2. Изучить метод построения модели системы массового обслуживания с отказами.
3. Провести анализ СМО с отказами с помощью уравнений Колмогорова и формул Эрланга.
4. Изучить методы приближенного решения системы дифференциальных уравнений с применением системы Mathcad.

Лабораторная работа №3
Система массового обслуживания с отказами

Задача. Ремонтная мастерская имеет четыре линии (канала) для ремонта автомашин. В мастерскую поступает простейший поток заявок на ремонт с плотностью $\lambda = 3$ вызова в час (вызов, поступивший в момент, когда все линии заняты, получает отказ). Из анализа статистических данных известно, что средняя длительность ремонта автомашины (для одного канала) составляет 2 часа.

Необходимо:

1) Построить граф состояний системы;

2) Записать уравнения Эрланга-Колмогорова с помощью этого графа;

3) Найти приближенное решение системы дифференциальных уравнений с помощью специальных функций системы Mathcad (Rkadapt или rkfixed);

4) Построить графики вероятностей состояний;

5) Определить время выхода на стационарный режим;

6) Определить вероятности состояний для стационарного режима;

7) Определить вероятность отказа СМО;

8) Определить среднее время, в течение которого мастерская вообще не загружена;

9) Найти относительную и абсолютную пропускную способность СМО;

10) Определить среднее число занятых каналов и среднее время пребывания заявки в системе;

11) Написать уравнения Эрланга для предельных вероятностей P_k в стационарном режиме;

12) Найти решение системы уравнений Эрланга различными способами, сравнить полученные результаты.

13)Оценить показатели эффективности работы мастерской и дать предложения по их улучшению.

Решение.

1.Граф состояний системы с четырьмя каналами обслуживания изображен на рис.1.

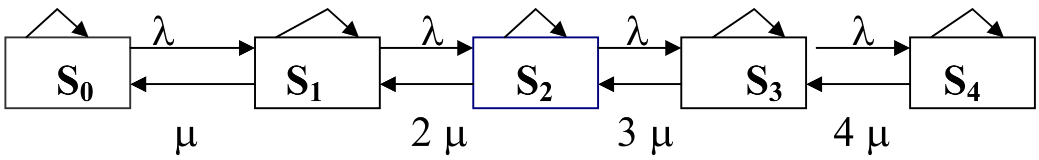


Рис.1. Граф состояний

Возможны следующие состояния системы:

S_0 - в СМО нет заявок (все каналы свободны);

S_1 - в СМО одна заявка (один канал занят);

S_2 - в СМО две заявки (два канала заняты);

S_3- в СМО три заявки (три канала заняты);

S_4 - в СМО четыре заявки (четыре канала заняты);

2) Запишем уравнения Колмогорова с помощью мнемонического правила составления уравнений:

Производная от $P_k(t)$	=	Сумма потоков вероятности, которые приводят систему в состояние S_k	−	сумма потоков вероятности, которые выводят систему из состоянию S_k

Запишем дифференциальное уравнение для вероятности *$P_0(t)$.*

В левой части уравнения записываем производную $\frac{dP_0(t)}{dt}$, в правую часть со знаком плюс записываем интенсивности входящих потоков, умноженные на вероятности состояний из которых они выходят (потоки вероятности) ($\mu \cdot P_1(t)$), со знаком минус интенсивности выходящих потоков, умноженные на вероятность данного состояния, (т.е. $-\lambda \cdot P_0(t)$). В результате получаем первое уравнение

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu \cdot P_1(t) - \lambda \cdot P_0(t). \qquad (1)$$

Аналогично получаем уравнения для остальных вероятностей состояний

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda \cdot P_0(t) + 2\mu \cdot P_2(t) - (\lambda + \mu) \cdot P_1(t), \quad (2)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda \cdot P_1(t) + 3\mu \cdot P_3(t) - (\lambda + 2\mu) \cdot P_2(t), \quad (3)$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = \lambda \cdot P_2(t) + 4\mu \cdot P_4(t) - (\lambda + 3\mu) \cdot P_3(t), \quad (4)$$

$$\frac{dP_4(t)}{dt} = \lambda \cdot P_3(t) - 4\mu \cdot P_4(t). \quad (5)$$

Кроме того

$$P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) + P_4(t) = 1. \quad (6)$$

3) Рассмотрим задачу (2.4)-(2.8) с начальными условиями

$P_0(0) = 1, \quad P_1(0) = P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = 0$.

Уравнение $P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) + P_4(t) = 1$ будет использовано для проверки вычислений.

В системе Mathcad введем исходные данные, начальные условия и вектор столбец правых частей системы дифференциальных уравнений, т.е. исходные данные для функции Rkadapt (листинг 1).

4) В системе Mathcad получаем график вероятностей состояний;

5) Переходной период длится до момента $t \approx 3$ч (определяется по графику или таблице).

6) Можно определить вероятности состояний для стационарного режима P_0 = 0,0086; P_1 =0,052; P_2 =0,157; P_3 =0,313; P_4 =0,47 (листинг 3).

7)Определяем основные показатели эффективности СМО (листинг 3).

Вероятность отказа в обслуживании заявки, т.е. вероятность состояния, когда все каналы заняты, P_4=0,47.

8)Среднее время, в течение которого мастерская вообще не загружена $t = P_0 \cdot 100\% = 0{,}009 \cdot 100\% = 0{,}9\%$

9) Относительная и абсолютная пропускная способность СМО.

Относительная пропускная способность есть вероятность того, что заявка будет обслужена

$$q = 1 - P_4 = 1\text{-}0{,}47\text{=}0{,}53.$$

Абсолютная пропускная способность $Q = q \cdot \lambda$ есть среднее число заявок, обслуживаемых системой в единицу времени

$$Q = q \cdot \lambda = 0{,}53 \ \ 3 = 1{,}59.$$

10.Определяем среднее число заявок в системе (среднее число занятых каналов)

$$N = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 + 4 \cdot P_4 =$$
$$= 0 \cdot 0{,}0086 + 1 \cdot 0{,}052 + 2 \cdot 0{,}157 + 3 \cdot 0{,}313 + 4 \cdot 0{,}47 = 3{,}185$$

Среднее время пребывания заявки в системе вычисляется по формуле $\hat{t}_{\text{обс}} = 1/\mu = 2$.

11-12).Предельные вероятности состояний вычисляются по формуле Эрланга

$$P_k = \frac{\alpha^k / k!}{\sum_{S=0}^{n} \alpha^S / S!} \quad k = 0,1,\ldots,n.$$

Здесь $\alpha = \lambda / \mu$.

Вычисления в системе Mathcad приведены на листингах 1 и 2.

13) Заключение

1.Вероятность отказа в обслуживании заявки равна 0,47. Это означает, что 47% неисправных автомашин не будут обслужены этой мастерской.

2.Если в мастерской восьмичасовой рабочий день, то в течение рабочего дня она будет простаивать в среднем $8 \cdot 0{,}009 = 0{,}072$ ч (т.е. 4,32 мин.)

Таким образом, мастерская работает практически без остановок. Повышение ее производительности целесообразно, т.к. 47% заявок получают отказ. Повышение пропускной способности возможно за счет увеличения числа каналов обслуживания (линий ремонта).

После увеличения числа каналов обслуживания расчет необходимо снова повторить.

Листинг 1

Исходные данные

$\lambda := 3$ $\mu := 0.5$ $N := 120$ $t_0 := 0$ $t_N := 12$

$$p0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

начальные условия

$$S(t,p) := \begin{bmatrix} -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1 \\ \lambda \cdot p_0 + 2 \cdot \mu \cdot p_2 - (\lambda + \mu) \cdot p_1 \\ \lambda \cdot p_1 + 3 \cdot \mu \cdot p_3 - (\lambda + 2 \cdot \mu) \cdot p_2 \\ \lambda \cdot p_2 + 4 \cdot \mu \cdot p_4 - (\lambda + 3 \cdot \mu) \cdot p_3 \\ \lambda \cdot p_3 - 4\mu \cdot p_4 \end{bmatrix}$$

вектор правых частей системы дифференциальных уравнений

$k := 0 .. N$ **циклические вычисления**

$Z := \mathrm{Rkadapt}(p0, t_0, t_N, N, S)$

специальная функция $\mathrm{Rkadapt}(p0, t_0, t_N, N, S)$ решает систему методом Рунге-Кутта (возвращает матрицу решений)

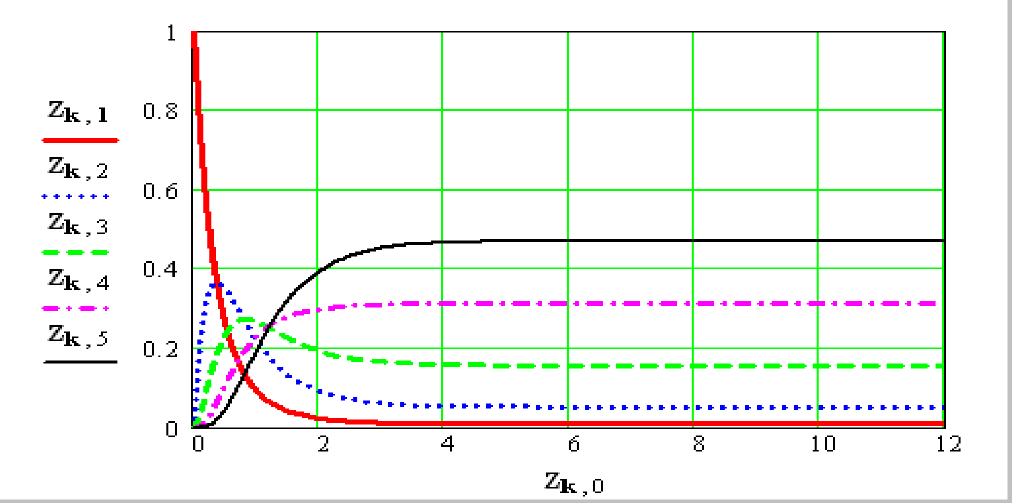
$Z_{20,1} + Z_{20,2} + Z_{20,3} + Z_{20,4} + Z_{20,5} = 1.000$

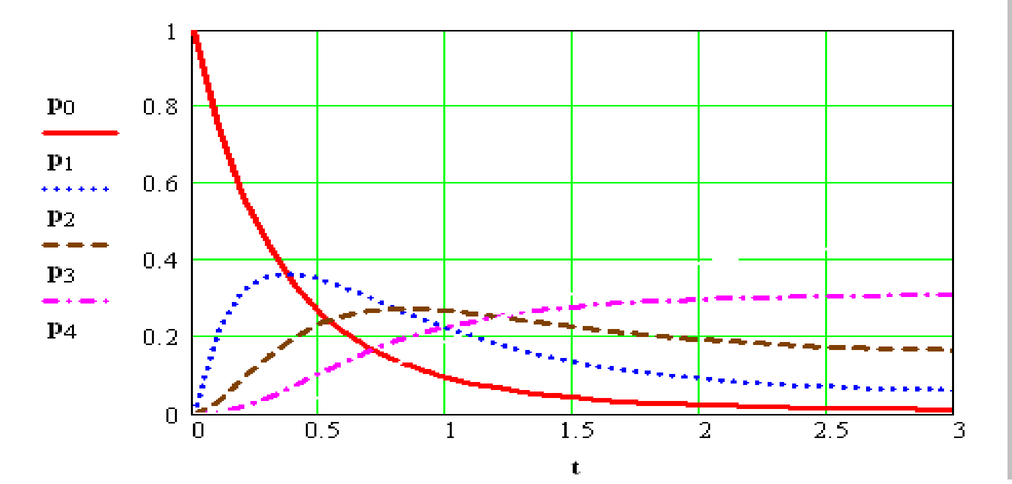
контроль вычислений

$t := Z^{\langle 0 \rangle}$ $p_0 := Z^{\langle 1 \rangle}$ $p_1 := Z^{\langle 2 \rangle}$ $p_2 := Z^{\langle 3 \rangle}$ $p_3 := Z^{\langle 4 \rangle}$ $p_4 := Z^{\langle 5 \rangle}$

обозначение переменных в естественной форме (для построения графиков)

4) ГРАФИКИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ





Листинг 2

Финальные вероятности (вероятности на стационарном режиме) Система линейных алгебраических уравнений решается матричным способом.

$$B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{bmatrix} -\lambda & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & -(\lambda+\mu) & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -(\lambda+2\mu) & 3\mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -(\lambda+3\mu) & 4\mu \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 172.500$$

$$P0 := A^{-1} \cdot B \qquad P0^T = (0.009 \quad 0.052 \quad 0.157 \quad 0.313 \quad 0.470)$$

Предельные вероятности определяются по таблице, полученной с помощью специальной функции Rkadapt (решение системы дифференциальных уравнений).

$Z^T =$

	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0	6.000	6.100	6.200	6.300	6.400	6.500	6.600	6.700	6.800	6.900
1	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009
2	0.052	0.052	0.052	0.052	0.052	0.052	0.052	0.052	0.052	0.052
3	0.157	0.157	0.157	0.157	0.157	0.157	0.157	0.157	0.157	0.157
4	0.313	0.313	0.313	0.313	0.313	0.313	0.313	0.313	0.313	0.313
5	0.469	0.469	0.469	0.469	0.469	0.469	0.469	0.469	0.470	0.470

Предельные вероятности в стационарном режиме (формулы Эрланга)

$$\alpha := \frac{\lambda}{\mu} \qquad k := 0..4 \qquad P_k := \frac{\alpha^k}{(k!) \cdot \sum_{s=0}^{4} \frac{\alpha^s}{s!}} \qquad P^T = (0.009 \quad 0.052 \quad 0.157 \quad 0.313 \quad 0.470)$$

$$\sum_{i=0}^{4} P_i = 1.000$$ **Контроль вычислений**

Листинг 3

Основные показатели эффективности СМО (вычисляются для стационарного режима)

$\lambda := 3$ $\mu := 0.5$ $P_0 := 0.009$ $P_1 := 0.052$ $P_2 := 0.157$ $P_3 := 0.313$ $P_4 := 0.470$

7. Вероятность отказа пришедшей заявки (вероятность состояния, когда все каналы заняты)

$Potk := P_4$ $Potk = 0.470$

8. Среднее время, в течение которого мастерская вообще не загружена

$t := P_0 100\%$ $t = 0.900\%$

9.Относительная пропускная способность СМО (вероятностьтого, что заявка будет обслужена)

$q := 1 - P_4$ $q = 0.530$

Абсолютная пропускная способность СМО - среднее число заявок, обслуживаемых системой в единицу времени

$Q := q \cdot \lambda$ $Q = 1.590$

Среднее число занятых каналов

$$N := \sum_{m=0}^{4} m \cdot P_m$$ $N = 3.185$

10. Среднее время пребывания заявки в системе $tobs := \frac{1}{\mu}$ $tobs = 2.000$

Контрольные задания к лабораторной работе №3

Задача. Ремонтная мастерская имеет k линий (каналов) для ремонта автомашин. В мастерскую поступает простейший поток заявок на ремонт с плотностью λ (вызов, поступивший в момент, когда все линии заняты, получает отказ). Из анализа статистических данных известно, что средняя длительность ремонта автомашины составляет $1/\mu$ часов.

Необходимо:

1) построить граф состояний системы;

2) записать уравнения Эрланга-Колмогорова с помощью этого графа;

3) найти приближенное решение системы дифференциальных уравнений с помощью системы Mathcad (Rkadapt или rkfixed).

4) построить графики вероятностей состояний;

5)определить время выхода на стационарный режим;

6)определить вероятности состояний для стационарного режима;

7) определить вероятность отказа СМО;

8) определить среднее время, в течение которого мастерская вообще не загружена;

9)найти относительную и абсолютную пропускную способность СМО;

10)определить среднее число занятых каналов и среднее время пребывания заявки в системе;

11) написать уравнения Эрланга для предельных вероятностей P_k в стационарном режиме;

12)найти решение системы уравнений Эрланга, сравнить полученные результаты с предыдущими (п. 5, 6);

13)оценить показатели эффективности работы мастерской и дать предложения по их улучшению.

Вариант	Плотность потока заявок λ	Плотность потока обслуживаний μ	Число каналов обслуживания k
1	4	0,2	3
2	5	0,15	3
3	5	0,1	5
4	6	0,08	5

5	6	0,07	5
6	7	0,05	3
7	2	0,2	5
8	2	0,25	3
9	2	0,3	3
10	2	0,35	5
11	3	0,4	5
12	3	0,4	3
13	3	0,5	5
14	3	0,5	3
15	3	0,4	3

Контрольные вопросы и задачи к лабораторным работам №3 и №4

1.Что называют потоком событий?

2.Приведите пример системы массового обслуживания.

3.Что называется случайным процессом? Приведите примеры.

4.Что представляет собой граф состояний системы?

5.Какой поток событий называется стационарным? ординарным? без последействия? Приведите примеры.

6.Какой поток событий называют простейшим?

7.Что называют плотностью потока?

8.Дайте определение СМО с отказами.

9.Дайте определение СМО с ожиданием.

10.Какой режим работы СМО называют стационарным?

11.Как определяются предельные (финальные) вероятности?

12.Приведите мнемоническое правило составления дифференциальных уравнений Колмогорова.

13.Приведите формулы Эрланга вычисления предельных вероятностей для СМО с отказами.

14.Приведите формулы Эрланга вычисления предельных вероятностей для СМО с ожиданием.

15.Назовите основные показатели эффективности работы СМО.

16.На каком режиме вычисляются основные показатели эффективности СМО?

17.Что называют относительной пропускной способностью СМО?

18. Что называют абсолютной пропускной способностью СМО?

19.Как определяется среднее число занятых каналов?

20.Как определяется среднее число заявок в системе?

21.Как определяется среднее число заявок в очереди?

22.Как определяется среднее время пребывания заявки в системе?

23. В СМО с отказами 2 канала. Предполагая потоки заявок и обслуживаний простейшими, (λ – интенсивность потока заявок, μ –интенсивность потока обслуживаний для одного канал) составить уравнения Колмогорова.

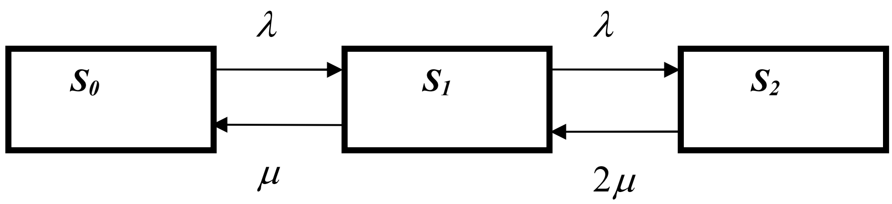
Решение. Возможные состояния системы:

S_0 - в СМО нет заявок;

S_1 - в СМО одна заявка;

S_2 - в СМО две заявки.

Граф состояний системы имеет вид



Уравнения Колмогорова составляем с помощью мнемонического правила:

$$\frac{dP_0}{dt} = \mu P_1 - \lambda P_0,$$

$$\frac{dP_1}{dt} = \lambda P_0 + 2\mu P_{31} - (\lambda + \mu)P_1,$$

$$\frac{dP_2}{dt} = \lambda P_1 - 2\mu P_2, \qquad P_0 + P_1 + P_2 = 1.$$

24. В СМО с отказами 2 канала. Предполагая потоки заявок и обслуживаний простейшими, интенсивности которых равны $\lambda = 2$, $\mu = 3$, найти среднее число занятых каналов на стационарном режиме.

Решение. Находим предельные вероятности по формуле Эрланга

$$P_0 = \frac{1}{1+\alpha+\dfrac{\alpha^2}{2!}}, \quad P_k = \frac{\alpha^k}{k!}P_0, \ k = 1{,}2. \ \alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3}.$$

$$P_0 = \frac{1}{1+\dfrac{2}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\dfrac{1}{2}} = \frac{1}{1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{9}} = \frac{9}{17}, \qquad P_1 = \alpha P_0 = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{17} = \frac{6}{17},$$

$$P_2 = \frac{\alpha^2}{2}P_0 = \frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}{2}\cdot\frac{9}{17} = \frac{2}{17}.$$

Проверка: $\dfrac{9}{17}+\dfrac{6}{17}+\dfrac{2}{17} = 1.$

Случайная величина K – число занятых каналов имеет следующий закон распределения:

K	0	1	2
P	$\frac{9}{17}$	$\frac{6}{17}$	$\frac{2}{17}$

Математическое ожидание вычисляется по формуле

$$\vec{K} = M(K) = 0\cdot\frac{9}{17}+1\cdot\frac{6}{17}+2\cdot\frac{2}{17} = \frac{10}{17} \approx 0{,}59.$$

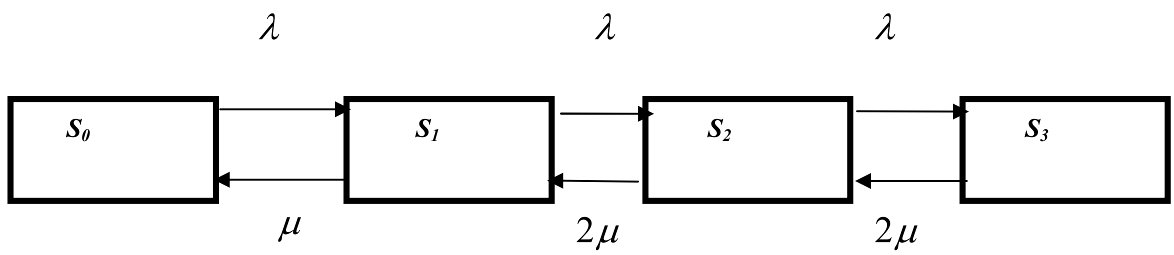
25. В СМО с ожиданием 2 канала и 1 место в очереди. Предполагая потоки заявок и обслуживаний простейшими, составить уравнения Колмогорова.

Решение. Возможные состояния системы:

S_0 – в СМО нет заявок; *S_1 - в СМО один канал занят, в очереди нет заявок;*

S_2 – в СМО два канала заняты, в очереди нет заявок.

S_3 – в СМО два канала заняты, в очереди одна заявка.



Уравнения Колмогорова:

$$\frac{dP_0}{dt} = \mu P_1 - \lambda P_0,$$

$$\frac{dP_1}{dt} = \lambda P_0 + 2\mu P_2 - (\lambda + \mu)P_1, \qquad \frac{dP_2}{dt} = \lambda P_1 + 2\mu P_3 - (\lambda + 2\mu)P_2$$

$$\frac{dP_3}{dt} = \lambda P_2 - 2\mu P_3, \qquad P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1.$$

26. В СМО с ожиданием 2 канала и 1 место в очереди. Предполагая потоки заявок и обслуживаний простейшими, интенсивности потоков $\lambda = 3$, $\mu = 1$, найти среднее число заявок на обслуживании и среднее число заявок в очереди.

Решение. Находим предельные вероятности состояний, используя формулы Эрланга

$$P_0 = \frac{1}{1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2}\left(1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^1\right)\left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right)}, \quad \alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{1} = 3.$$ Тогда

получаем

$$P_0 = \frac{1}{1 + 3 + \frac{3^2}{2} + \frac{3^2}{2}\left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^1\right)\left(\frac{3}{2-3}\right)} = \frac{1}{1 + 3 + \frac{3^2}{2} + \frac{3^2}{2}\frac{3}{2}} = \frac{4}{61},$$

$$P_1 = \alpha P_0 = 3 \cdot \frac{4}{61} = \frac{12}{61}, \quad P_2 = \frac{\alpha^2}{2} P_0 = \frac{3^2}{2} \cdot \frac{4}{61} = \frac{18}{61},$$

$$P_3 = \frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} P_0 = \frac{3^2}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{61} = \frac{27}{61}.$$

Вычислим среднее число заявок на обслуживании (то есть среднее число занятых каналов).

К	0	1	2
Р	$\frac{4}{61}$	$\frac{12}{61}$	$\frac{18}{61} + \frac{27}{61}$

$$\bar{K} = M(K) = 0 \cdot \frac{4}{61} + 1 \cdot \frac{12}{61} + 2 \cdot \left(\frac{18}{61} + \frac{27}{61}\right) = \frac{102}{61} \approx 1{,}672$$

Закон распределения случайной величины L_0 – числа заявок в очереди имеет вид

L_0	0	1
P	$\frac{4}{61}+\frac{12}{61}+\frac{18}{61}$	$\frac{27}{61}$

Вычисляем математическое ожидание

$$\bar{L}_0 = M(L_o) = 0\cdot\left(\frac{4}{61}+\frac{12}{61}+\frac{18}{61}\right)+1\cdot\frac{27}{61}=\frac{27}{61}\approx 0{,}44\,.$$