ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГОКОНТУРНЫХ САУ

Содержание практического занятия:

3.1. Определение передаточной функции по структурной схеме САУ
3.2. Определение передаточной функции по графу САУ

Структурной схемой системы управления называют графическое представление ее математической модели в виде соединений звеньев, изображаемых в виде прямоугольников или круга (для сумматора), с указанием входных и выходных переменных. Обычно внутри прямоугольника указывается условное обозначение оператора изображаемого им звена, а сам оператор в виде передаточной функции или дифференциального уравнения задается вне структурной схемы.

Различают два типа структурных схем систем автоматического управления:

Блочные структурные схемы, в которых элементы автоматики обозначаются прямоугольниками – блоками, содержащими соответствующие обозначения передаточных функций, а направленные воздействия или связи между блоками обозначаются стрелками.

Графовые структурные схемы или сигнальные графы, или графы Мейсона, в которых передаточные функции элементов автоматики обозначаются стрелками, а воздействия – точками или кружочками, именуемыми узлами графа или вершинами дуг графа.

3.1. Определение передаточной функции по структурной схеме САУ

Последовательное соединение. Так называется соединение, при котором выход предыдущего звена является входом последующего (рис. 3.1). При последовательном соединении передаточные функции отдельных звеньев перемножаются и при преобразовании структурных схем цепочку из последовательно соединенных звеньев можно заменить одним звеном с передаточной функцией

$$W_{экв}(p) = \prod_{i=1}^{N} W_i(p), \qquad (3.1)$$

где $W_{экв}(p)$ – эквивалентная передаточная функция; $W_i(p)$ – передаточная функция i-го звена; N – число последовательно включенных звеньев.

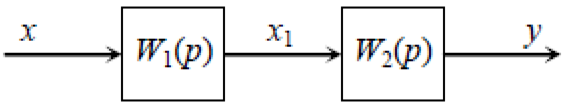


Рис. 3.1. Последовательное соединение двух звеньев

Параллельное соединение. Так называется соединение, при котором на вход всех звеньев подается одно и тоже воздействие, а их выходные переменные складываются (рис. 3.2). При параллельном соединении звеньев передаточные функции складываются и при преобразовании их можно заменить одним звеном с передаточной функцией

$$W_{экв}(p) = \sum_{i=1}^{N} W_i(p). \tag{3.2}$$

Если выход какого-либо звена поступает на сумматор с отрицательным знаком, то передаточная функция этого звена складывается с отрицательным знаком, т. е. вычитается.

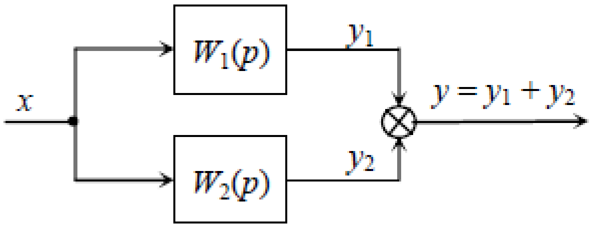


Рис. 3.2. Параллельное соединение двух звеньев

Обратное соединение или *соединение с обратной связью*. Так называется соединение двух звеньев, при котором выход звена прямой цепи подается на вход звена обратной связи, выход которого складывается с входом первого звена (рис. 3.3).

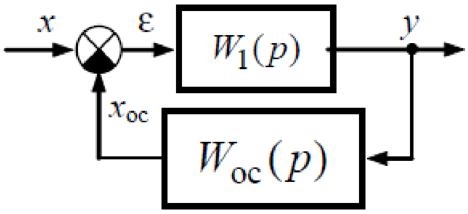


Рис. 3.3. Соединение с обратной связью

Эквивалентная передаточная функция системы с *отрицательной* обратной связью равна дроби, в числителе которой стоит передаточная функция прямого канала $W_1(p)$, а знаменатель представляет собой сумму единицы и произведения передаточных функций прямого и обратного каналов системы.

$$W_{экв}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_1(p)}{1+W_{oc}(p)W_1(p)}. \tag{3.3}$$

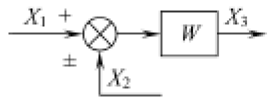
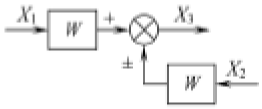
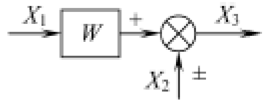
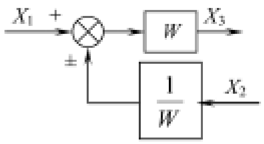
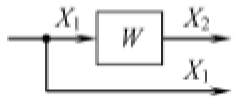
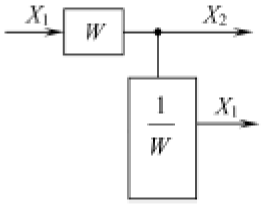
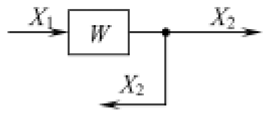
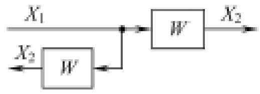
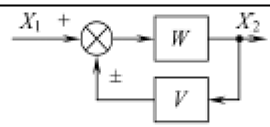
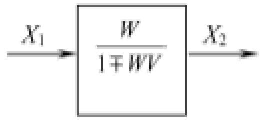
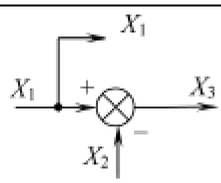
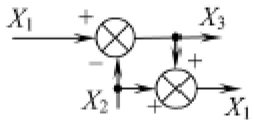
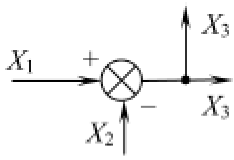
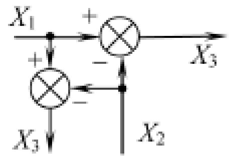
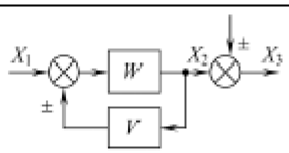
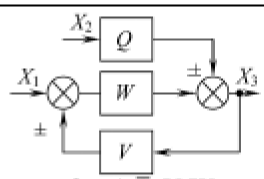
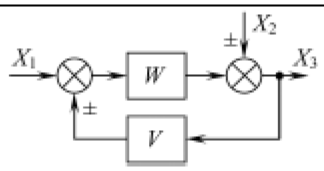
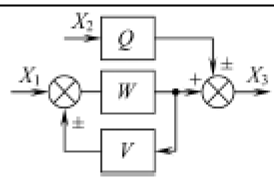
Для положительной обратной связи в знаменателе формулы знак «плюс» меняется на «минус».

$$W_{экв}(p) = \frac{W_1(p)}{1-W_{oc}(p)W_1(p)}, \tag{3.4}$$

Для нахождения передаточных функций сложных структурных схем осуществляются их эквивалентные преобразования, приведенные в табл 3.1.

Таблица 3.1

Преобразования структурных схем

№	Преобразование	Исходная схема	Эквивалентная схема
1.	Перенос сумматора через блок по ходу движения сигнала		
2.	Перенос сумматора через блок против движения сигнала		
3.	Перенос узла через блок по ходу движения сигнала		
4.	Перенос узла через блок против движения сигнала		
5.	Исключение контура с обратной связью		
6.	Перенос узла через сумматор вперед		
7.	Перенос узла через сумматор назад		
8.	Перенос узла обратной связи через сумматор по ходу движения сигнала		 Q = 1 ∓ V W
9.	Перенос узла обратной связи через сумматор против движения сигнала		 $Q = \dfrac{1}{1 \mp VW}$

Вычисление передаточной функции одноконтурной системы

Замкнутая система называется *одноконтурной*, если при ее размыкании в какой-либо точке замкнутого контура получается цепь (схема) без параллельных и обратных соединений (рис. 3.4).

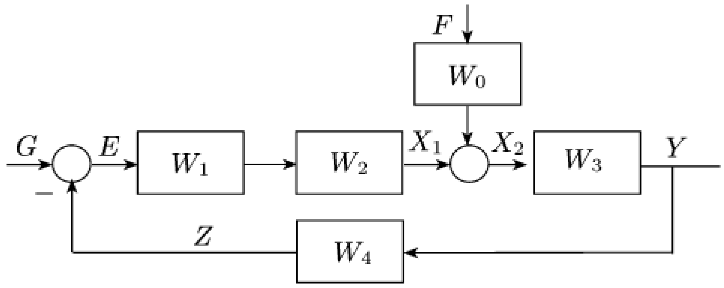


Рис. 3.4. Одноконтурная система управления

Цепь по ходу сигнала от точки приложения входной переменной до точки съема выходной переменной называется *прямой цепью*. Прямая цепь представляет последовательное соединение звеньев. Поэтому передаточная функция прямой цепи $W_п$ равна произведению передаточных функций звеньев, входящих в эту цепь, включая и сумматоры.

При размыкании обратной связи перед сумматором получаем последовательное соединение, передаточная функция которого равна $W_р = W_п W_{ос}$. Эта передаточная функция называется *передаточной функцией разомкнутой цепи*.

Передаточная функция контура $W_к$ равна произведению передаточных функций всех звеньев, входящих в замкнутый контур, включая сумматоры $W_к = W_п W_{ос} W_\Sigma$. Напомним: передаточная функция сумматора W_Σ по входу со знаком плюс равна плюс единице, а по входу со знаком минус – минус единице.

Прямая цепь системы (рис. 3.4) относительно входа g и выхода y представляет последовательное соединение двух сумматоров и звеньев с передаточными функциями W_1, W_2 и W_3. Входы сумматоров в этой цепи имеют знак плюс. Поэтому передаточные функции сумматоров равны единице и соответственно передаточная функция прямой цепи $W_п = W_1 W_2 W_3$.

Прямая цепь рассматриваемой системы относительно входа f и выхода e представляет последовательное соединение двух сумматоров и звеньев с передаточными функциями W_0, W_3 и W_4. Вход первого сумматора имеет знак плюс, и его передаточная функция равна 1; вход второго сумматора имеет знак минус, и его передаточная функция равна –1. Поэтому в этом случае передаточная функция прямой цепи $W_п = -W_0 W_3 W_4$.

Правило вычисления передаточной функции замкнутой одноконтурной системы. Передаточная функция одноконтурной системы относительно внешнего воздействия (входа) u и выхода x равна передаточной функции прямой цепи, деленной на единицу минус передаточная функция контура:

$$W_{xu}(p) = \frac{W_п}{1 - W_к}. \tag{3.5}$$

Согласно этой формуле передаточная функция рассматриваемой системы (см. рис. 3.4) относительно входа g и выхода y равна

$$W_{yg}(p) = \frac{W_1 W_2 W_3}{1 - W_1 W_2 W_3 W_4}; \tag{3.6}$$

относительно входа f и выхода e равна

$$W_{ef}(p) = \frac{-W_0 W_3 W_4}{1 - W_1 W_2 W_3 W_4}; \tag{3.7}$$

Вычисление передаточной функции многоконтурной системы

Замкнутая система называется *многоконтурной*, если при ее размыкании в какой-либо точке замкнутого контура получается цепь, содержащая параллельное или обратное или то и другое соединение.

Порядок вычисления передаточной функции многоконтурной системы следующий:

1) путем переноса узлов и сумматоров освободиться от перекрестных связей;

2) используя правила преобразования параллельных и обратных соединений, преобразовать многоконтурную систему в одноконтурную;

3) по правилу вычисления передаточной функции одноконтурной системы определить искомую передаточную функцию.

При преобразовании структурной схемы нужно позаботится о том, чтобы не исчезли точки съема переменных, относительно которых ищутся передаточные функции, или чтобы эти точки не оказались на неэквивалентном участке (т.е. не следует переносить сумматор через эти точки).

Пример 3.1. Определить передаточные функции W_{yg} и W_{yf} системы управления, представленной на рис. 3.5, а.

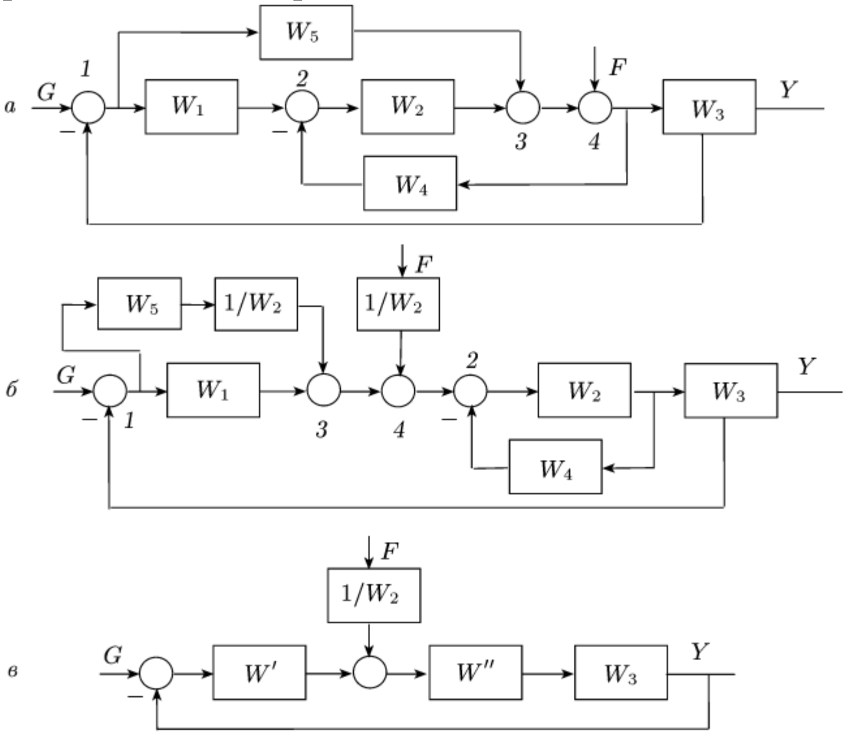


Рис. 3.5. Преобразование структурной схемы (к примеру 3.1)

Сначала освободимся от перекрестных связей. Для этого перенесем сумматор 3 против хода сигнала через звено с передаточной функцией W_2 и сумматор 2. То же самое проделаем с сумматором 4 (рис. 3.5, б).

Далее, заменив параллельное соединение звеном с передаточной функцией

$$W' = W_1 + W_5 \frac{1}{W_2} = \frac{W_1 W_2 + W_5}{W_2}; \qquad (3.8)$$

и обратное соединение звеном с передаточной функцией

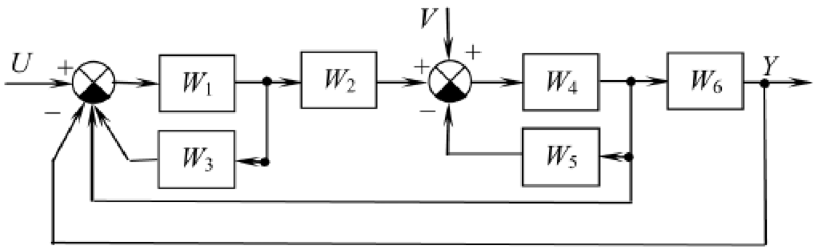
$$W'' = \frac{W_2}{1 + W_2 W_4}; \qquad (3.9)$$

получим одноконтурную систему (рис. 3.5, в). Из последней схемы по правилу вычисления передаточной функции одноконтурной системы находим

$$W_{yg} = \frac{W' W'' W_3}{1 + W' W'' W_3}; \; W_{yf} = \frac{W'' W_3}{W_2(1 + W' W'' W_3)}. \qquad (3.10)$$

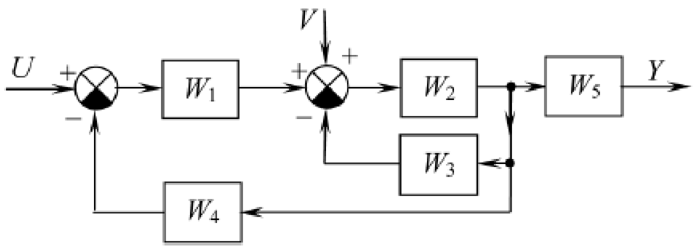
При вычислении передаточных функций многоконтурных систем с перекрестными связями во многих случаях целесообразно, а иногда и необходимо, если возможно, предварительно упростить схему, используя правила преобразования параллельных и обратных соединений, затем следовать приведенному выше порядку вычисления передаточных функций многоконтурных систем.

Задание 3.1. Для приведенных на рис. 3.6–3.10 структурных схем определить следующие передаточных функции:



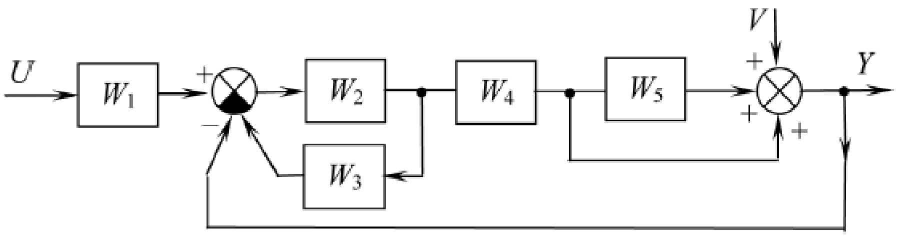
где $W_1(s) = \dfrac{1}{3s}$, $W_2(s) = 2, W_3(s) = 3$, $W_4(s) = \dfrac{2}{s}, W_5(s) = 0,5$, $W_6(s) = \dfrac{3}{s}$.

Рис. 3.6. Структурная схема многоконтурной САУ



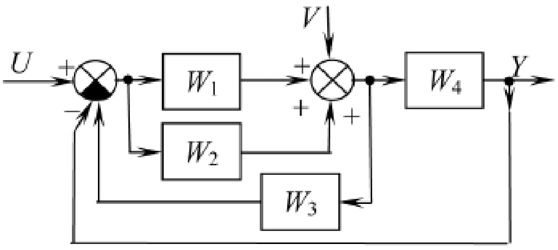
где $W_1(s) = 3, W_2(s) = \dfrac{2}{3s+1}$ $W_3(s) = \dfrac{1}{2}, W_4(s) = \dfrac{3}{2s+1}$, $W_5(s) = \dfrac{1}{2s}$.

Рис. 3.7. Структурная схема многоконтурной САУ



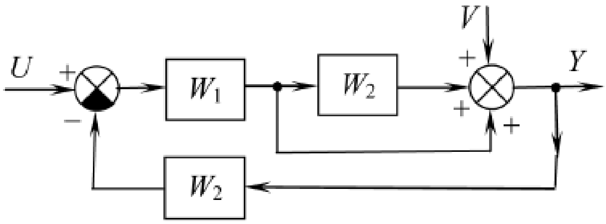
где $W_1(s) = 3, W_2(s) = \dfrac{1}{s}, W_3(s) = 2, W_4(s) = \dfrac{2}{s}, W_5(s) = \dfrac{3}{s}$.

Рис. 3.8. Структурная схема многоконтурной САУ



где $W_1(s) = \frac{2}{s}$, $W_2(s) = 3$, $W_3(s) = 4$, $W_4(s) = \frac{2}{s}$.

Рис. 3.9. Структурная схема многоконтурной САУ



где $W_1(s) = \frac{2}{s}$, $W_2(s) = \frac{1}{2s+1}$, $W_3(s) = \frac{1}{s+1}$.

Рис. 3.10. Структурная схема многоконтурной САУ

1. W_{yu} – ПФ относительно входа u и выхода y (рис. 3.6);
2. W_{yv} – ПФ относительно входа v и выхода y (рис. 3.6);
3. W_{yu} – ПФ относительно входа u и выхода y (рис. 3.7);
4. W_{yv} – ПФ относительно входа v и выхода y (рис. 3.7);
5. W_{yu} – ПФ относительно входа u и выхода y (рис. 3.8);
6. W_{yv}– ПФ относительно входа v и выхода y (рис. 3.8);
7. W_{yu} – ПФ относительно входа u и выхода y (рис. 3.9);
8. W_{yv}– ПФ относительно входа v и выхода y (рис. 3.9);
9. W_{yu} – ПФ относительно входа u и выхода y (рис. 3.10);
10. W_{yv}– ПФ относительно входа v и выхода y (рис. 3.10);

3.2. Определение передаточной функции по графу САУ

Граф системы управления состоит из дуг и вершин. *Дуга* соответствует звену и на схеме изображается отрезком линии со стрелкой, указывающей направление распространения сигнала. Дуга начинается и заканчивается в вершине.

Вершина на схеме изображается кружком и определяет переменную. Если к вершине подходит одна дуга, то она определяет выходную величину дуги (рис. 3.11, *а*), если же в вершину входят несколько дуг, то она соответствует сумме выходных переменных этих дуг (рис. 3.11, *б*).

Начальная вершина дуги определяет ее входную переменную (рис. 3.11, *в*). Вершина графа, имеющая только выходящие из нее дуги, определяет внешнее воздействие и называется *входной вершиной* графа.

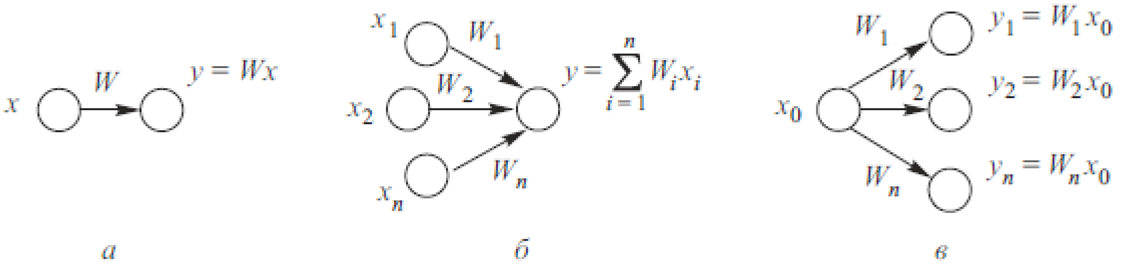


Рис. 3.11. Элементы графа САУ

Последовательность дуг W_1, W_2, …, W_n (не обязательно разных), для которых конечная вершина x_i дуги W_i является начальной вершиной дуги W_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$, называется *ориентированным маршрутом* или *ормаршрутом*. Ормаршрут называется *замкнутым*, если конечная вершина дуги W_n совпадает с начальной вершиной дуги W_1, и *незамкнутым* в противном случае.

Ормаршрут, в котором все дуги разные, называется *путем* от начальной вершины x_0 к конечной вершине x_n, если он не замкнут, и контуром, если он замкнут (x_0 и x_n совпадают). Путь и контур называют простыми, если все вершины $x_0, x_1, \ldots, x_n$ различны. Простой путь также называют *прямым путем*.

Два контура называются *несоприкасающимися*, если они не имеют общих вершин. Три, четыре и т.д. контура называются *несоприкасающимися*, если любая пара из этих контуров является несоприкасающейся.

Граф системы управления можно построить по структурной схеме. Для этого нужно произвести следующее (рис. 3.12):

1) сумматор с выходной переменной x заменить вершиной x;

2) звено с передаточной функцией W заменить дугой W; если выходная переменная подается на сумматор по отрицательному входу, то указанное звено заменить дугой $-W$;

3) каждой переменной, в том числе переменной, соответствующей внешнему воздействию, сопоставить свою вершину.

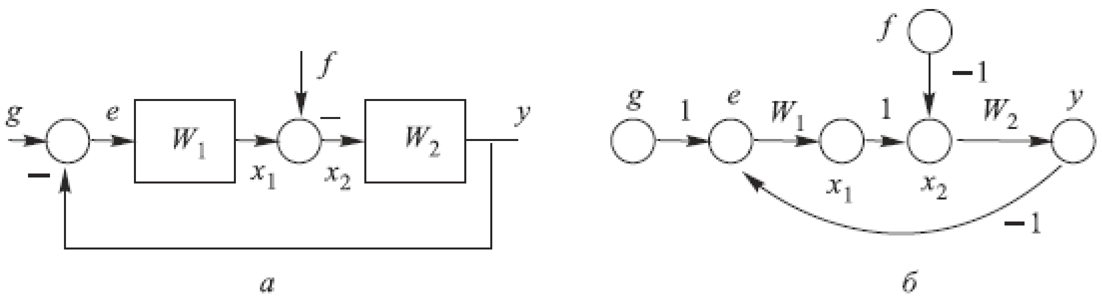


Рис. 3.12. Построение графа САУ

Формула Мейсона. *Определителем графа* (*подграфа*) называется передаточная функция Δ, равная

$$\Delta = 1 - \sum_j W_{0j} + \sum_{j,k} W_{0j} W_{0k} - \sum_{j,k,l} W_{0j} W_{0k} W_{0l} + \cdots. \quad (3.11)$$

Здесь в первой сумме W_{0j} — передаточная функция j-го простого контура, равная произведению передаточных функций дуг, входящих в этот контур, и суммирование производится по всем простым контурам; во второй сумме $W_{0j} W_{0k}$ – произведение передаточных функций j-го и k-го простых контуров и суммирование производится по всем несоприкасающимся парам контуров; в третьей сумме $W_{0j}W_{0k}W_{0l}$ – произведение передаточных функций j-го, k-го и l-го простых контуров и суммирование производится по всем несоприкасающимся тройкам контуров и т. д.

Подграфом i-го прямого пути называется подграф, который получается из исходного графа отбрасыванием всех дуг и вершин i-го пути, а также всех дуг, начинающихся или кончающихся на вершинах этого пути.

Передаточная функция системы управления относительно входа x и выхода z определяется следующим образом:

$$W_{0j} = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{m} W_{\text{п}i}\Delta_i, \tag{3.12}$$

где Δ – определитель графа системы управления; $W_{\text{п}i}$ – передаточная функция i-го прямого пути от начальной вершины x к конечной вершине z; m – общее число таких прямых путей; Δ_i – определитель подграфа i-го прямого пути.

Пример 3.2. Построить граф и по теореме Мейсона определить передаточную функцию W_{yg} системы (рис. 3.13, *а*).

Решение. Граф системы управления представлен на рис. 3.13, *б*.

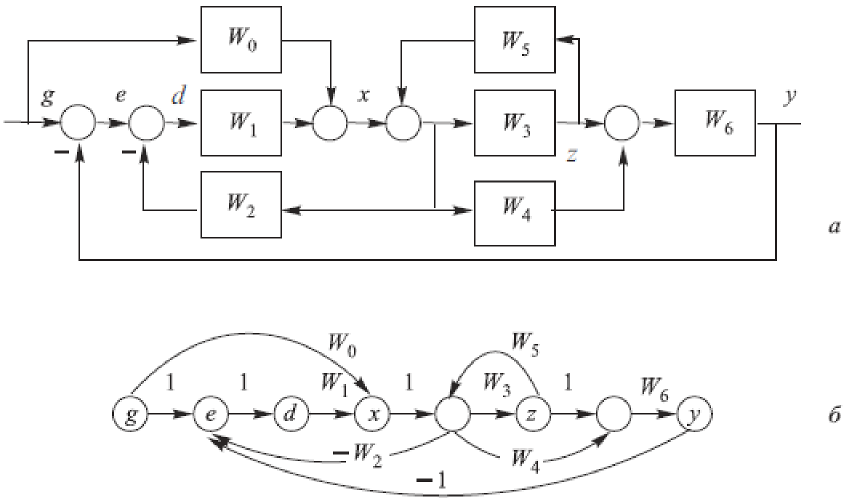


Рис. 3.13. Граф САУ к примеру 3.2

От вершины g до вершины y имеются четыре прямых пути. Передаточные функции этих путей равны

$$W_{\text{п}1} = W_0W_3W_6,\ W_{\text{п}2} = W_0W_4W_6,\ W_{\text{п}3} = W_1W_3W_6,\ W_{\text{п}4} = W_1W_4W_6. \tag{3.13}$$

Подграф 1-го пути состоит из вершин e и d, 2-го пути – из вершин e, d и z; подграф 3-го пути есть пустой граф, подграф 4-го пути состоит из вершины z. И так как все они не имеют контуров, их определители равны единице: $\Delta_i = 1$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Граф системы управления имеет четыре простых контура. Их передаточные функции имеют вид

$$W_{01} = -W_1W_2,\ W_{02} = W_3W_5,\ W_{03} = -W_1W_3W_6,\ W_{04} = -W_1W_4W_6. \tag{3.14}$$

Несоприкасающихся пар контуров нет. Поэтому определитель графа имеет вид

$$\Delta = 1 - (W_{01} + W_{02} + W_{03} + W_{04}). \qquad (3.15)$$

Для искомой передаточной функции получаем

$$W_{yg} = \frac{W_{п1}+W_{п2}+W_{п3}+W_{п4}}{\Delta} = \frac{W_0W_3W_6+W_0W_4W_6+W_1W_3W_6+W_1W_4W_6}{1+W_1W_2-W_3W_5+W_1W_3W_6+W_1W_4W_6}. \qquad (3.16)$$

Задание 3.2. Построить граф системы управления (рис. 3.14–3.17) и определить по теореме Мейсона следующие передаточные функции (ПФ):

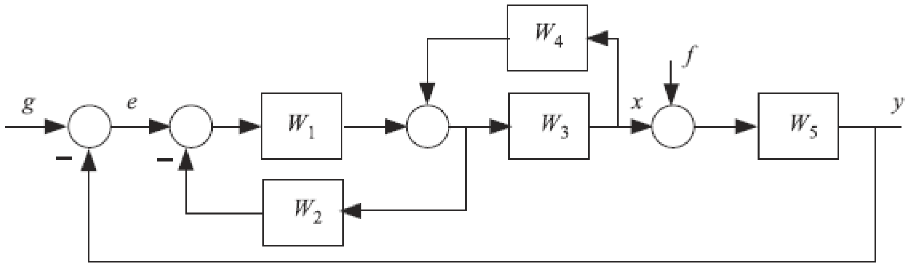


Рис. 3.14. Структурная схема многоконтурной САУ

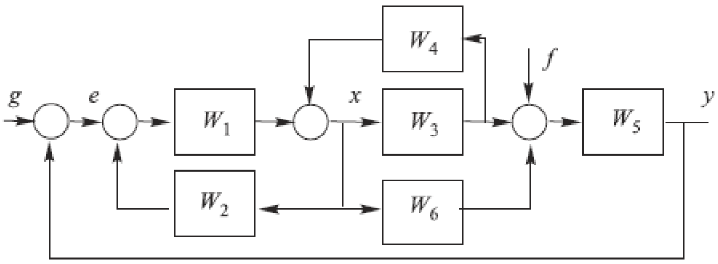


Рис. 3.15. Структурная схема многоконтурной САУ

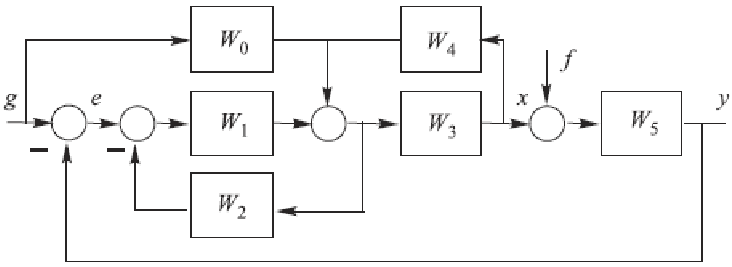


Рис. 3.16. Структурная схема многоконтурной САУ

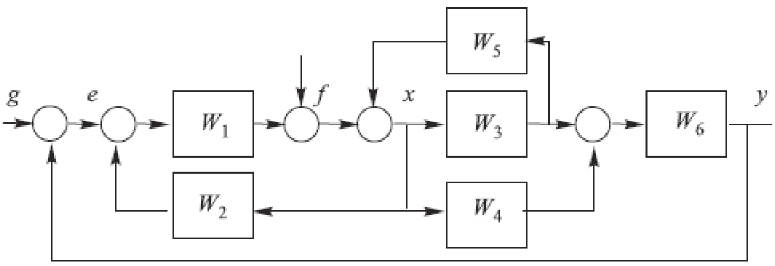


Рис. 3.17. Структурная схема многоконтурной САУ

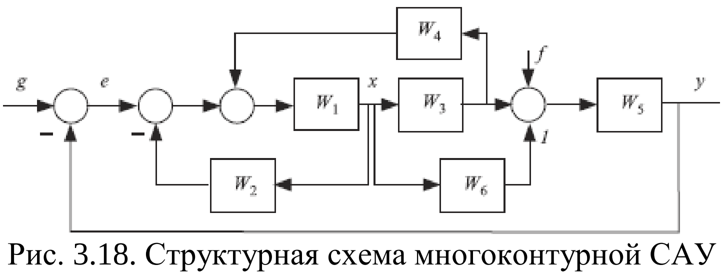


Рис. 3.18. Структурная схема многоконтурной САУ

1. W_{yg} – ПФ относительно входа g и выхода y (рис. 3.14);
W_{eg} – ПФ относительно входа g и выхода e (рис. 3.14);
W_{xf} – ПФ относительно входа f и выхода x (рис. 3.14);
2. W_{xg} – ПФ относительно входа g и выхода x (рис. 3.14);
W_{yf} – ПФ относительно входа f и выхода y (рис. 3.14);
W_{ef} – ПФ относительно входа f и выхода e (рис. 3.14);
3. W_{yg} – ПФ относительно входа g и выхода y (рис. 3.15);
W_{eg} – ПФ относительно входа g и выхода e (рис. 3.15);
W_{xf} – ПФ относительно входа f и выхода x (рис. 3.15);
4. W_{xg} – ПФ относительно входа g и выхода x (рис. 3.15);
W_{yf} – ПФ относительно входа f и выхода y (рис. 3.15);
W_{ef} – ПФ относительно входа f и выхода e (рис. 3.15);
5. W_{yg} – ПФ относительно входа g и выхода y (рис. 3.16);
W_{eg} – ПФ относительно входа g и выхода e (рис. 3.16);
W_{xf} – ПФ относительно входа f и выхода x (рис. 3.16);
6. W_{xg} – ПФ относительно входа g и выхода x (рис. 3.16);
W_{yf} – ПФ относительно входа f и выхода y (рис. 3.16);
W_{ef} – ПФ относительно входа f и выхода e (рис. 3.16);
7. W_{yg} – ПФ относительно входа g и выхода y (рис. 3.17);
W_{eg} – ПФ относительно входа g и выхода e (рис. 3.17);
W_{xf} – ПФ относительно входа f и выхода x (рис. 3.17);
8. W_{xg} – ПФ относительно входа g и выхода x (рис. 3.17);
W_{yf} – ПФ относительно входа f и выхода y (рис. 3.17);
W_{ef} – ПФ относительно входа f и выхода e (рис. 3.17).
9. W_{yg} – ПФ относительно входа g и выхода y (рис. 3.18);
W_{eg} – ПФ относительно входа g и выхода e (рис. 3.18);
W_{xf} – ПФ относительно входа f и выхода x (рис. 3.18);
10. W_{xg} – ПФ относительно входа g и выхода x (рис. 3.18);
W_{yf} – ПФ относительно входа f и выхода y (рис. 3.18);
W_{ef} – ПФ относительно входа f и выхода e (рис. 3.18).