ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНЫХ САУ

Содержание практического занятия:

2.1. Определение частотных характеристик
2.2. Определение реакции системы на входное гармоническое воздействие
2.3. Построение асимптотических ЛАЧХ

2.1. Определение частотных характеристик

Преобразование временной функции $f(t)$ в частотную $F(j\omega)$ осуществляется с помощью интеграла Фурье

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt, \tag{2.1}$$

где ω – угловая частота, [рад/с]; $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Кроме того, существует и обратное преобразование Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega. \tag{2.2}$$

Интегралы Лапласа и Фурье очень похожи и отличаются лишь аргументами p и $j\omega$, поэтому переход к частотным характеристикам может быть выполнен путем формальной замены p на $j\omega$ или $F(p)$ на $F(j\omega)$. Пусть для объекта или системы известно выражение передаточной функции

$$W(p) = \frac{b_0p^m + b_1p^{m-1} + \cdots + b_{m-1}p + b_m}{a_0p^n + a_1p^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p + a_n}. \tag{2.3}$$

в котором осуществим замену p на $j\omega$ и получим комплексный коэффициент передачи или обобщенную частотную характеристику

$$W(j\omega) = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \cdots + b_{m-1}(j\omega) + b_m}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(j\omega) + a_n}. \tag{2.4}$$

Комплексный коэффициент передачи $W(j\omega)$ графически можно представить в виде амплитудно-фазовой частотной характеристики (АФЧХ)

$$W(j\omega) = Re(\omega) + jIm(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}. \tag{2.5}$$

где $Re(\omega)$ – вещественная частотная характеристика (ВЧХ); $Im(\omega)$ – мнимая частотная характеристика (МЧХ);

– модуль АФХ или амплитудная частотная характеристика (АЧХ);

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{Re^2(\omega) + Im^2(\omega)}, , \tag{2.6}$$

– аргумент АФХ или фазовая частотная характеристика (ФЧХ), [рад].

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = arctg\,\frac{Im(\omega)}{Re(\omega)}. \tag{2.7}$$

Пример 2.1. Для передаточной функции объекта $W(p) = \frac{2}{p+2}$ получим:

1) комплексный коэффициент передачи, заменяя p на $j\omega$

$$W(j\omega) = \frac{2}{j\omega + 2}; \tag{2.8}$$

2) вещественную $Re(\omega)$ и мнимую $Im(\omega)$ частотные характеристики, умножая числитель и знаменатель $W(j\omega)$ на комплексное сопряженное выражение $-j\omega + 2$:

$$W(j\omega) = \frac{2(-j\omega+2)}{(j\omega+2)(-j\omega+2)} = \frac{4}{\omega^2+4} - j\frac{2\omega}{\omega^2+4}, \tag{2.8}$$

$$Re(\omega) = \frac{4}{\omega^2+4},\ Im(\omega) = -\frac{2\omega}{\omega^2+4};$$

3) амплитудную частотную характеристику

$$A(\omega) = \sqrt{Re^2(\omega) + Im^2(\omega)} = \sqrt{\frac{16}{(\omega^2+4)^2} + \frac{4\omega^2}{(\omega^2+4)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\omega^2+4}}; \tag{2.9}$$

4) фазовую частотную характеристику

$$\varphi(\omega) = arctg\,\frac{Im(\omega)}{Re(\omega)} = -arctg\,\frac{2\omega(\omega^2+4)}{(\omega^2+4)4} = -arctg\left(\frac{\omega}{2}\right); \tag{2.10}$$

5) амплитудно-фазовую частотную характеристику в показательной форме

$$W(j\omega) = \frac{2}{\sqrt{\omega^2+4}}e^{-arctg\left(\frac{\omega}{2}\right)} \tag{2.11}$$

Правило вычисления модуля и аргумента. При вычислении амплитудной и фазовой частотной функций полезно следующее правило вычисления модуля и аргумента произведения и частного комплексных чисел (функций).

1) Модуль произведения $Z = z_1 z_2 \dots z_n$ комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей:

$$|Z| = |z_1||z_2| \dots |z_n|, \tag{2.12}$$

а аргумент — сумме аргументов сомножителей:

$$\arg Z\ = \arg z_1 + \arg z_2 + \ldots + \arg z_n. \tag{2.13}$$

2) Модуль частного комплексных чисел (функций) $Z = z_1/z_2$ равен отношению модулей

$$|Z| = |z_1|/|z_2|, \tag{2.14}$$

а аргумент — разности аргументов числителя и знаменателя:

$$\arg Z\ = \arg z_1 - \arg z_2. \tag{2.15}$$

Задание 2.1. Для приведенных ниже передаточных функций объектов рассчитать АФЧХ, ВЧХ, МЧХ, АЧХ, ФЧХ, АФЧХ в показательной форме.

1. $W(s) = \frac{s+1}{4s+1}$
2. $W(s) = \frac{5}{(s+1)(s+2)}$
3. $W(s) = \frac{p+2}{s^2+4s+3}$
4. $W(s) = \frac{4}{s(s+2)}$
5. $W(s) = \frac{2}{2s+1}$
6. $W(s) = \frac{s}{s+1}$
7. $W(s) = \frac{3}{2s^2+s}$
8. $W(s) = \frac{s+1}{3s+1}$
9. $W(s) = \frac{4}{(s+3)(s+4)}$
10. $W(s) = \frac{p+5}{s^2+7s^2+12}$
11. $W(s) = \frac{3}{s(s+1)}$
12. $W(s) = \frac{3}{3s+1}$
13. $W(s) = \frac{2s}{s+5}$
14. $W(s) = \frac{2}{3s^2+s}$
15. $W(s) = \frac{3s+1}{2s+2}$

2.2. Определение реакции системы на входное гармоническое воздействие

Пример 2.2. На вход системы подается сигнал $u = 2\sin 3t$. Определить в установившемся режиме реакцию системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{p+4}{(p+1)(0{,}04p^2+0{,}2p+1)}. \quad (2.16)$$

Решение. В данном случае частотная передаточная функция имеет вид

$$W(p) = \frac{j\omega+4}{(j\omega+1)(-0{,}04\omega^2+0{,}2j\omega+1)}. \quad (2.17)$$

и $\omega = 3$, $\omega < 1/T = 1/0{,}2 = 5$. Поэтому

$$A(3) = \frac{\sqrt{9+16}}{\sqrt{9+1}\sqrt{(1-0{,}36)^2+0{,}36}} \approx 1{,}8, \quad (2.18)$$

$$\varphi(3) = arctg\,(3/4) - arctg\,(3/1) - arctg\,(0{,}6/(1-0{,}36)) \approx -1{,}36,$$

и, соответственно, $u = 3{,}6\sin(3t - 1{,}36)$.

Задание 2.2. На вход системы подается сигнал $u = 0{,}5\sin 6t$. Определить в установившемся режиме реакцию систем при следующих передаточных функциях:

а) $W(s) = \dfrac{s+1}{(s+2)(0{,}04s^2+0{,}2s+1)}$;

б) $W(s) = \dfrac{2(s+2)}{(s+1)(0{,}09s^2+0{,}3s+1)}$;

в) $W(s) = \dfrac{3(s+1)}{(s+3)(0{,}16s^2+0{,}4s+1)}$;

г) $W(s) = \dfrac{4(s+3)}{(s+1)(0{,}25s^2+0{,}5s+1)}$;

д) $W(s) = \dfrac{5(s+3)}{(s+1)(0{,}36s^2+0{,}6s+1)}$;

е) $W(s) = \dfrac{6(s+4)}{(s+1)(0{,}49s^2+0{,}7s+1)}$;

ж) $W(s) = \dfrac{7(s+4)}{(s+2)(0{,}64s^2+0{,}8s+1)}$;

з) $W(s) = \dfrac{8(s+5)}{(s+3)(0{,}25s^2+0{,}7s+1)}$;

и) $W(s) = \dfrac{9(s+5)}{(s+2)(0{,}16s^2+0{,}56s+1)}$;

к) $W(s) = \dfrac{10(s+5)}{(s+4)(0{,}36s^2+0{,}84s+1)}$.

2.3. Построение асимптотических ЛАЧХ

Логарифмические амплитудные частотные характеристики (ЛАЧХ) пропорционального, дифференцирующего и интегрирующего звеньев являются прямыми и их легко построить. Построение ЛАЧХ других элементарных звеньев требует трудоемких вычислений. Поэтому на практике часто ограничиваются построением приближенных асимптотических ЛАЧХ.

При построении асимптотической ЛАЧХ апериодического звена в выражении $L(\omega) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{(T\omega)^2+1}$ при $\omega \le 1/T$ под корнем пренебрегают слагаемым $(T\omega)^2$, меньшим единицы, а при $\omega > 1/T$ – единицей. Поэтому уравнение асимптотической ЛАЧХ имеет вид

$$L(\omega) \cong \begin{cases} 20\lg k \ \text{при}\ \omega \le 1/T, \\ 20\lg k - 20\lg T\omega \ \text{при}\ \omega > 1/T. \end{cases} \tag{2.19}$$

При построении асимптотической ЛАЧХ колебательного звена в выражении

$$L(\omega) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{[1-(T\omega)^2]^2 + (2dT\omega)^2} \tag{2.20}$$

при $\omega \le 1/T$ под корнем оставляют только единицу, а при $\omega > 1/T$ – только наибольшее слагаемое $(T\omega)^4$. Поэтому уравнение асимптотической ЛАЧХ имеет вид

$$L(\omega) \cong \begin{cases} 20\lg k \ \text{при}\ \omega \le 1/T, \\ 20\lg k - 40\lg T\omega \ \text{при}\ \omega > 1/T. \end{cases} \tag{2.21}$$

Аналогично поступают при построении асимптотических ЛАЧХ форсирующих звеньев. Частоты, на которых асимптотические ЛАЧХ претерпевают излом, называются *сопрягающими частотами*.

Для построения ЛАЧХ и ЛФЧХ звена с произвольной дробно-рациональной передаточной функцией $W(p)$ нужно ее числитель и знаменатель разложить на элементарные множители и представить $W(p)$ в виде произведения передаточных функций элементарных звеньев

$$W(p) = \prod_i W_i(p) \tag{2.22}$$

или в виде

$$W(p) = \frac{k}{s^\nu} W^0(p), \tag{2.23}$$

где $W^0(p)$ представляет собой отношение произведений элементарных множителей 1-го и 2-го порядка с единичным передаточным коэффициентом, т. е. множителей вида $Tp \pm 1$ и $ap^2 \pm bp + 1$ $(b^2 - 4a < 0)$. Из (2.22) имеем:

$$L(\omega) = 20\lg|W(j\omega)| = 20\sum_i |W_i(j\omega)|, \tag{2.24}$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \sum_i \arg W_i(j\omega). \tag{2.25}$$

Из (2.24) следует, что для построения ЛАЧХ произвольного звена достаточно построить ЛАЧХ элементарных звеньев, на которые оно разлагается, а затем их геометрически сложить. Однако для построения асимптотических ЛАЧХ можно использовать несколько иное, более простое правило. Проиллюстрируем это сначала на частном примере.

Пример 2.3. Построить асимптотическую ЛАЧХ для звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{100p+100}{(p^2+0{,}1p)(0{,}1p^2+p+10)}. \tag{2.26}$$

Решение. Преобразуем передаточную функцию к виду

$$W(p) = \frac{100(p+1)}{p(10p+1)(0{,}01p^2+0{,}1p+1)}. \tag{2.27}$$

Логарифмическая амплитудная частотная функция

$$L(\omega) = 40 + 20\lg\sqrt{\omega^2+1} - 20\lg\omega - 20\lg\sqrt{(10\omega)^2+1} - \\ -20\lg\sqrt{(1-0{,}01\omega^2)^2 + (0{,}1\omega)^2} \tag{2.28}$$

Вычислим сопрягающие частоты и пронумеруем их в порядке возрастания:

$$\omega_1 = \frac{1}{10} = 0{,}1;\ \omega_2 = 1;\ \omega_3 = \frac{1}{0.1} = 10. \qquad (2.29)$$

Здесь ω_1, ω_2 и ω_3 – сопрягающие частоты апериодического, форсирующего и колебательного звеньев соответственно.

Напомним, что при построении асимптотических ЛАЧХ при частотах, меньших сопрягающей частоты, под корнем оставляют только единицу (остальными членами пренебрегают), при частотах, больших сопрягающей частоты, – член с наивысшей степенью ω. Поэтому в рассматриваемом примере при $\omega < \omega_1$ имеем

$$L(\omega) \cong 40 - 20\lg\omega. \qquad (2.30)$$

Это уравнение прямой, которая проходит через точку с координатами $\omega = 1$ и $L = 40$ с наклоном −20 дб/дек. Прямая имеет наклон −20 дб/дек (20 дб/дек) – это означает, что при увеличении частоты на декаду (т. е. в 10 раз) $L(\omega)$ уменьшается (увеличивается) на 20 дБ (рис. 2.1, а). Первая асимптота заканчивается на первой сопрягающей частоте (рис. 2.1, б).

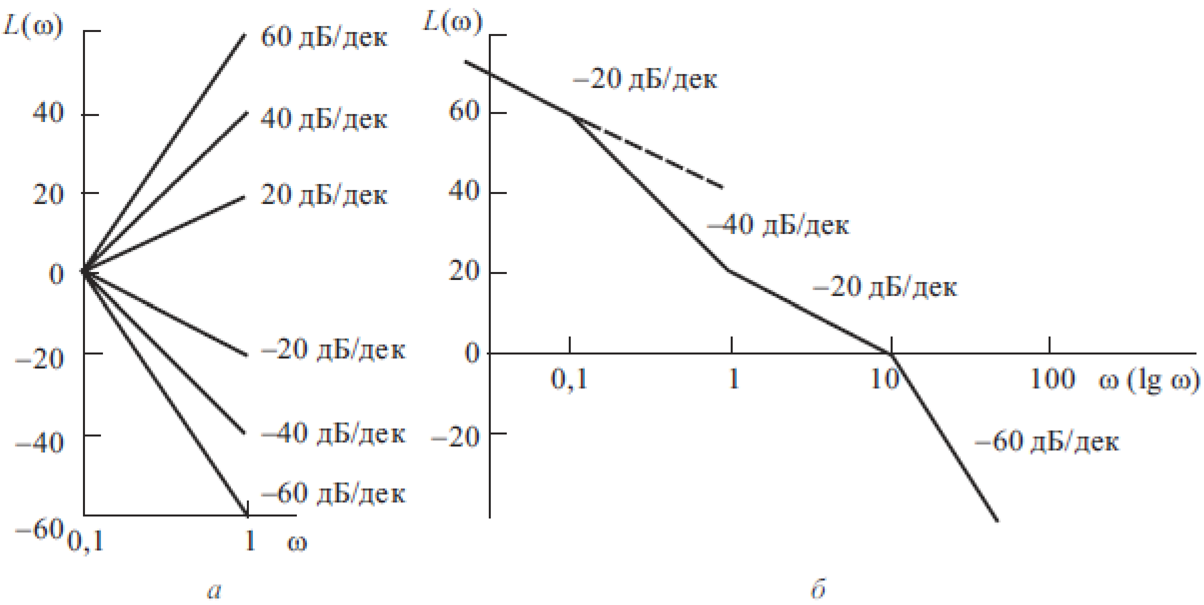

Рис. 2.1. Построение ЛАЧХ для примера 2.3

При $\omega_1 \le \omega < \omega_2$ аналогично имеем

$$L(\omega) \cong 40 - 20\lg\omega - 20\lg(10\omega) = 20 - 40\lg\omega. \qquad (2.31)$$

Это уравнение второй асимптоты. Ее наклон по отношению к первой асимптоте изменяется на −20 дб/дек и обусловливается апериодическим звеном, т. е. множителем первого порядка в знаменателе рассматриваемой передаточной функции. Вторую асимптоту проводят от конца первой асимптоты до второй сопрягающей частоты под наклоном −40 дб/дек.

При $\omega_2 \le \omega < \omega_3$

$$L(\omega) \cong 20 - 40\lg\omega + 20\lg\omega = 20 - 20\lg\omega. \qquad (2.32)$$

Это уравнение третьей асимптоты. Ее наклон по отношению ко второй асимптоте изменяется на 20 дб/дек и обусловливается форсирующим звеном, т.е. множителем первого порядка в числителе. Третью асимптоту проводят от конца второй асимптоты до третьей сопрягающей частоты под наклоном −20 дб/дек.

При $\omega \geq \omega_3$

$$L(\omega) \cong 20 - 20\lg\omega - 20\lg(0{,}1\omega)^2 = 60 - 60\lg\omega. \qquad (2.33)$$

Это уравнение последней, четвертой, асимптоты. Ее наклон изменяется по отношению к третьей асимптоте на −40 дб/дек и обусловливается множителем второго порядка в знаменателе.

Правило построения асимптотических ЛАЧХ

1) Пользуясь представлением (2.23), вычислить $20\lg k$ и сопрягающие частоты $\omega_i = 1/T_i$, которые следует пронумеровать в порядке возрастания: $\omega_1 < \omega_2 < \cdots$.

2) На оси абсцисс отметить сопрягающие частоты, а на координатной плоскости – точку $(1,\ 20\lg k)$. Построить первую асимптоту – прямую под наклоном $-v20$ дБ/дек, проходящую через отмеченную точку на координатной плоскости. Первая асимптота заканчивается на первой сопрягающей частоте ω_1.

3) Построить вторую асимптоту, которая начинается с конца первой асимптоты и проводится до второй сопрягающей частоты ω_2. Его наклон изменяется на ±20 дБ/дек или ±40 дБ/дек в зависимости от того, обусловливается ли ω_1 элементарным множителем первого или второго прядка соответственно. Принимается положительный знак, если указанный множитель находится в числителе, и отрицательный знак, если этот множитель находится в знаменателе.

4) Построить остальные асимптоты, которые строятся аналогично второй асимптоте: i-я асимптота начинается с конца предыдущей $(i-1)$ -й асимптоты и проводится до сопрягающей частоты ω_i. Ее наклон определяется сопрягающей частотой ω_{i-1}.

Последняя асимптота представляет собой прямую, которая начинается в конце асимптоты, соответствующей последней сопрягающей частоте, и уходит в бесконечность.

Пример 2.4. Построить асимптотическую ЛАЧХ звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{10p+10}{p^v(p+0{,}1)(0{,}1p^2+p+10)},\ v = 0, -1. \qquad (2.34)$$

Решение. Преобразуем передаточную функцию к виду

$$W(p) = \frac{10(p+1)}{p^v(10p+1)(0{,}01p^2+0{,}1p+1)}. \qquad (2.35)$$

1) $v = 0$. Вычислим $20\lg k$ и сопрягающие частоты:

$$20\lg k = 20\lg 10 = 20,\ \omega_1 = \frac{1}{10} = 0{,}1;\ \omega_2 = 1;\ \omega_3 = \frac{1}{0.1} = 10. \qquad (2.36)$$

Проводим через точку с координатами (1, 20) первую асимптоту под наклоном 0 дБ/дек (т. е. параллельно оси абсцисс) до первой сопрягающей частоты $\omega_1 = 0{,}1$ (рис. 2.2, а).

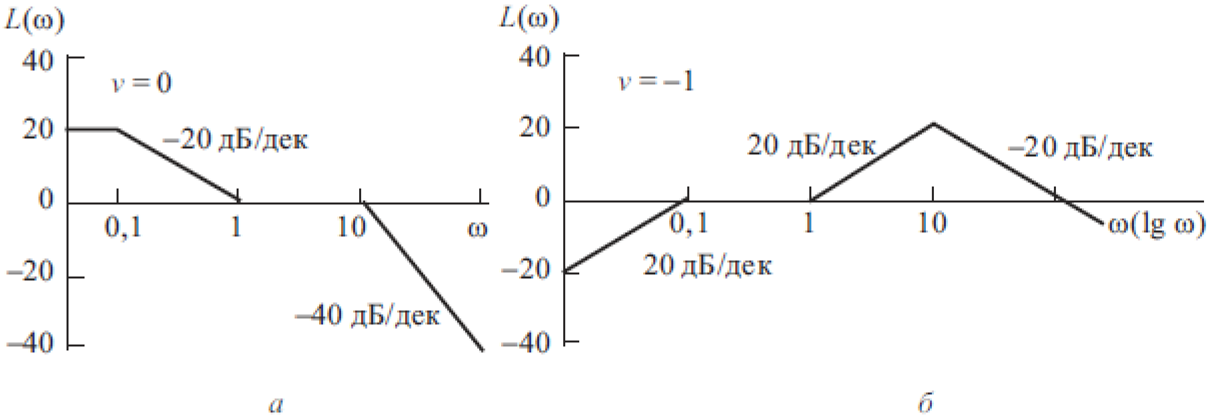

Рис. 2.2. Построение ЛАЧХ для примера 2.4

Так как первая сопрягающая частота ω_1 обусловлена множителем первого порядка $(10p + 1)$, расположенным в знаменателе, наклон второй асимптоты изменяется на −20 дБ/дек. Поэтому вторую асимптоту проводим от конца первой асимптоты до сопрягающей частоты $\omega_2 = 1$ под наклоном −20 дБ/дек.

Сопрягающая частота ω_2 обусловлена элементарным множителем $(p + 1)$, расположенным в числителе. Поэтому наклон третьей асимптоты отличается от наклона второй на 20 дБ/дек и составляет 0 дБ/дек. Третью асимптоту проводим от конца второй асимптоты до сопрягающей частоты $\omega_3 = 10$.

Сопрягающая частота ω_3 обусловлена элементарным множителем $(0{,}01p^2 + 0{,}1p + 1)$, расположенным в знаменателе. Поэтому наклон четвертой асимптоты отличается от наклона третьей асимптоты на −40 дБ/дек. Последнюю асимптоту проводим от конца третьей асимптоты до бесконечности.

2) $v = -1$. Значения $20\lg k$ и сопрягающих частот те же, что и в предыдущем случае. Первую асимптоту проводим через точку с координатами (1, 20) с наклоном −v20 дБ/дек = 20 дБ/дек до первой сопрягающей частоты (рис. 2.2, б). Все последующие асимптоты строятся так же, как и в предыдущем случае.

Задание 2.3. Построить асимптотические ЛАЧХ звеньев со следующими передаточными функциями:

а) $W(s) = \dfrac{250s + 1000}{(s+1)(0{,}1s^2 + s + 10)}$; б) $W(s) = \dfrac{10s + 10}{s(0{,}02s^2 + 0{,}3s + 1)}$;

в) $W(s) = \dfrac{500s + 50}{(s+0{,}5)(s^2 + s + 1)}$; г) $W(s) = \dfrac{6s + 30}{s(0{,}01s^2 + 0{,}4s + 3)}$;

д) $W(s) = \dfrac{100s + 300}{(s+1)(0{,}03s^2 + 0{,}3s + 3)}$; е) $W(s) = \dfrac{10s + 1}{s(0{,}1s^2 + 1{,}1s + 1)}$;

ж) $W(s) = \dfrac{50s + 5}{(s+0{,}5)(0{,}04s^2 + 0{,}2s + 1)}$; з) $W(s) = \dfrac{10s + 100}{s(0{,}0002s^2 + 0{,}03s + 1)}$;

и) $W(s) = \dfrac{5000s + 2500}{(s+5)(0{,}02s^2 + s + 50)}$; к) $W(s) = \dfrac{2s + 1}{s(0{,}1s^2 + 1{,}1s + 1)}$.

Задание 2.4. Записать передаточные функции звеньев, если их асимптотические ЛАЧХ имеют следующий вид: