# ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 5

# УСТОЙЧИВОСТЬ НЕПРЕРЫВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ САУ

Содержание практического занятия:



## 5.1. Основные понятия

**Основное условие устойчивости.** Д*ля того чтобы непрерывная система управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения имели отрицательную вещественную часть*.

На комплексной плоскости корни, имеющие отрицательную вещественную часть, располагаются в левой полуплоскости и поэтому называются *левыми*, корни, имеющие положительную вещественную часть, располагаются в правой полуплоскости и называются *правыми*, а корни, расположенные на мнимой оси, – *нейтральными*. Поэтому основное условие устойчивости можно также сформулировать еще так: *для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения были левыми*.

**Необходимое условие устойчивости.** *Для того чтобы система была устойчива, необходимо, чтобы все коэффициенты ее характеристического уравнения*

$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n = 0. \tag{5.1}$$

*были строго одного знака*:

$$a_0 > 0,\ a_1 > 0, \ldots, a_n > 0 \text{ или } a_0 < 0, a_1 < 0, \ldots, a_n < 0. \tag{5.2}$$

**Характеристический полином.** Если дана передаточная функция, то характеристический полином совпадает с ее знаменателем.

При исследовании замкнутой системы нет необходимости находить ее передаточную функцию, если известна передаточная функция $W_0(p) = \frac{B_0(p)}{A_0(p)}$ разомкнутой системы. Ее характеристический полином равен сумме операторов числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой системы: $A(p) = A_0(p) + B_0(p)$.

## 5.2. Алгебраические критерии устойчивости

**Критерий Гурвица** (Hurwitz, 1895). *Для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все определители Гурвица, составленные из коэффициентов ее характеристического уравнения, при* $a_0 > 0$ *были больше нуля*:

$a_0 > 0$, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, …, $\Delta_n > 0$. (5.3)

**Критерий Льенара-Шипара** (Lienard, Chipard, 1914). *При выполнении необходимого условия* $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, …, $a_n > 0$ *для устойчивости системы управления необходимо и достаточно, чтобы все ее определители Гурвица с четными индексами или все ее определители Гурвица с нечетными индексами* $a_0 > 0$ *были положительными*:

$\Delta_2 > 0$, $\Delta_4 > 0$, $\Delta_6 > 0$, … (5.4)

или

$\Delta_3 > 0$, $\Delta_5 > 0$, $\Delta_7 > 0$, … (5.5)

Для уменьшения вычислений целесообразно при нечетном $n$ использовать условие (5.4), а при четном $n$ – условие (5.5).

Выпишем необходимые и достаточные условия устойчивости для $n = 1, 2, 3$:

$n = 1$: $a_0 > 0$, $a_1 > 0$;

$n = 2$: $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$;

$n = 3$: $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$.

**Пример 5.1**. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид $W(p) = \frac{k}{p^3 + 0.5p^2 + 4p + 1}$, $k = 0{,}5; 2$.

Исследовать устойчивость разомкнутой и замкнутой систем.

Решение

Характеристический полином разомкнутой системы имеет вид

$p^3 + 0.5p^2 + 4p + 1$.

Все коэффициенты больше нуля и определитель

$\Delta_2 = 0{,}5 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 1 > 0$.

Поэтому по критерию Льенара-Шипара разомкнутая система устойчива.

Характеристический полином замкнутой системы

$A(p) = p^3 + 0.5p^2 + 4p + 1 + k$.

Все коэффициенты этого полинома при обоих значениях $k$ положительны, а определитель $\Delta_2$ при $k = 0{,}5$

$\Delta_2 = 0{,}5 \cdot 4 - 1 \cdot 1{,}5 = 0{,}5 > 0$,

а при $k = 2$

$\Delta_2 = 0{,}5 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = -1 < 0$.

Следовательно, замкнутая система при $k = 0{,}5$ устойчива, а при $k = 2$ неустойчива.

**Задание 5.1**. Исследовать устойчивость систем управления, которые описываются следующими уравнениями ($y$ – выход, $u$ – вход):

а) $\frac{d^4y}{dt^4}+3\frac{d^3y}{dt^3}+3\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=\frac{du}{dt}+3u;$

б) $\frac{d^4y}{dt^4}+3\frac{d^3y}{dt^3}+5\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+2y=2\frac{du}{dt}+u;$

в) $\frac{d^4y}{dt^4}+4\frac{d^3y}{dt^3}+5\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=3\frac{du}{dt}+u;$

г) $\frac{d^4y}{dt^4}+4\frac{d^3y}{dt^3}+7\frac{d^2y}{dt^2}+8\frac{dy}{dt}+4y=3u;$

д) $\frac{d^4y}{dt^4}+4\frac{d^3y}{dt^3}+5\frac{d^2y}{dt^2}+6\frac{dy}{dt}+4y=5\frac{du}{dt}+3u;$

е) $\frac{d^4y}{dt^4}+4\frac{d^3y}{dt^3}+5\frac{d^2y}{dt^2}+9\frac{dy}{dt}+7y=2\frac{du}{dt}+5u;$

ж) $\frac{d^4y}{dt^4}+5\frac{d^3y}{dt^3}+8\frac{d^2y}{dt^2}+8\frac{dy}{dt}+8y=4u;$

з) $\frac{d^4y}{dt^4}+5\frac{d^3y}{dt^3}+8\frac{d^2y}{dt^2}+11\frac{dy}{dt}+14=6\frac{du}{dt}+3u;$

и) $\frac{d^4y}{dt^4}+5\frac{d^3y}{dt^3}+5\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+3y=5\frac{du}{dt}+3u;$

к) $\frac{d^4y}{dt^4}+5\frac{d^3y}{dt^3}+6\frac{d^2y}{dt^2}+12\frac{dy}{dt}+10y=7u.$

**Задание 5.2**. Исследовать устойчивость замкнутых систем при следующих передаточных функциях разомкнутой системы:

а) $\frac{2s^2+3s+1}{s^4+4s^3+s^2+2s+3};$ б) $\frac{3s^2+4s+3}{s^4+3s^3+2s^2+s-1};$

в) $\frac{4s^2+3s+1}{s^4+4s^3+s^2+s+3};$ г) $\frac{6s^2+9s+9}{s^4+5s^3+5s^2+10s+9};$

д) $\frac{3s^2+10s+9}{s^4+3s^3+4s^2+9s+9};$ е) $\frac{2s^2+5s+2}{s^4+4s^3+3s^2+s+2};$

ж) $\frac{3s^2+5s+3}{s^4+4s^3+2s^2+4s+4};$ з) $\frac{7s^2+3s+1}{s^4+6s^3+4s^2+4s+2};$

и) $\frac{s^2+3s+2}{s^4+4s^3+4s^2+4s+1};$ к) $\frac{2s^2+3s+5}{s^4+5s^3+5s^2+2s+1}.$

## 5.3. Частотный критерий устойчивости Михайлова

Пусть замкнутая автоматическая система представлена своим характеристическим многочленом

$A(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p+a_n=0,\ a_0>0.$

*Определение.* Кривую $D(j\omega)=A(p)|_{p=j\omega}$, $\omega\geq 0$ называют *годографом Михайлова* многочлена $A(p)$.

Критерий Михайлова формулируется так: *система устойчива, если годограф $D(j\omega)$, начинаясь на действительной положительной полуоси, огибает* *против часовой стрелки начало координат, проходя последовательно $n$ квадрантов, где $n$ – порядок системы.*

**Пример 5.2**. Определить устойчивость замкнутой САУ, характеристический полином которой имеет вид

$$A(p) = p^4 + 2p^3 + 3p^2 + 2p + 1.$$

Решение

Годограф Михайлова задается функцией:

$$D(j\omega) = \omega^4 - 3\omega^2 + 1 - j2\omega(\omega^2 - 1).$$

Для построения кривой Михайлова находим первоначально пересечения с осями: с мнимой осью пересечение имеет место при условии $\omega^4 - 3\omega^2 + 1 = 0$, с действительной – при условии $\omega(\omega^2 - 1) = 0$. Из первого уравнения с учетом того, что $\omega \geq 0$, определяем, что пересечение мнимой оси будет иметь место на частотах 0,618 $с^{-1}$ и 1,618 $с^{-1}$, действительной оси на частотах 0 $с^{-1}$ и 1,0 $с^{-1}$.

Таким образом, при изменении частоты от нуля до бесконечности годограф Михайлова, начиная с действительной положительной полуоси, последовательно против часовой стрелки проходит, как показано на рис. 5.1, через четыре квадранта, что доказывает асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

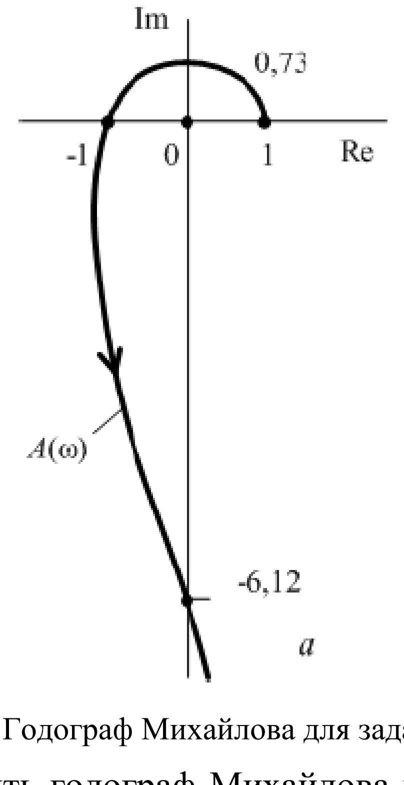



Рис. 5.1. Годограф Михайлова для задания 5.2

**Задание 5.3**. Построить годограф Михайлова и дать суждение об устойчивости системы, для которой известен характеристический полином:

$$A(p) = 0{,}002p^5 + 0{,}234p^4 + 3{,}76p^3 + 19{,}6p^2 + 36p + 140.$$

**Задание 5.4**. Характеристический многочлен замкнутой системы имеет вид:

$$A(p;\ \theta) = (5p^2 + 6p + 1)(0{,}1p^2 + \theta p + 1) + 6.$$

Исследовать, используя критерий Михайлова, устойчивость системы для случая:

а) $\theta = 1$; б) $\theta = 0{,}01$.

Подсказка: Годографы Михайлова для задания 5.4 приведены на рис. 5.2.

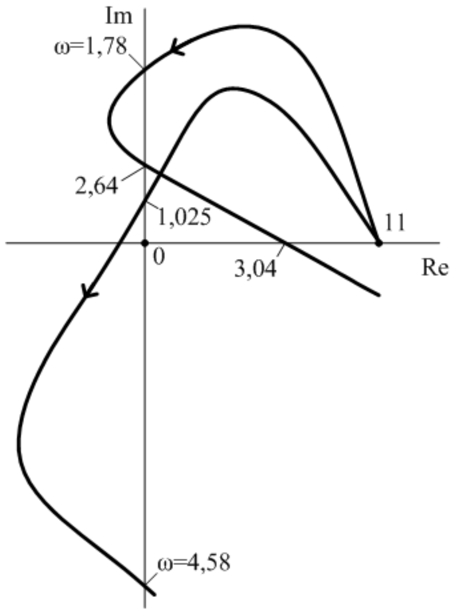



Рис. 5.2. Годографы Михайлова для задания 5.4

## 5.4. Частотный критерий устойчивости Найквиста

**Критерий Найквиста** (Nyqvist, 1932). *Для того чтобы замкнутая система (с отрицательной обратной связью) была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) разомкнутой системы охватывала $l/2$ раз в положительном направлении точку $(-1, j0)$, где $l$ — число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.*

*Если разомкнутая система устойчива* $(l = 0)$, *для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы не охватывала точку* $(-1, j0)$.

Если характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет нулевые корни, т. е. ее передаточная функция может быть представлена в виде

$W(p) = \frac{k}{p^r} W_0(p), W_0(p) = 1, r \geq 1,$

то АФЧХ при $\omega \to 0$ уходит в бесконечность (рис. 5.3). В этом случае АФЧХ дополняются дугой $-r(\pi/2)$ окружности большого радиуса (на рис. 5.3 – штрихпунктирная линия). И для устойчивости замкнутой системы дополненная АФЧХ должна охватывать $l/2$ раз или при $l = 0$ не охватывать точку $(-1, j0)$.

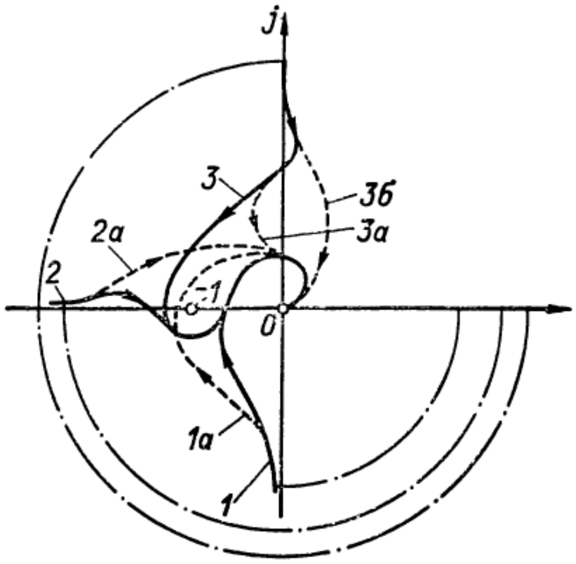



Рис. 5.3. Критерий устойчивости Найквиста для астатических систем

**Пример 5.3**. Исследовать устойчивость замкнутой системы, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

а) $W(p) = \frac{5}{p-1}$; б) $W(p) = \frac{10}{(p+1)^3}$.

Решение

Частотные передаточные функции и вещественные и мнимые частотные функции имеют вид:

$$\text{а) } W(j\omega) = \frac{5}{j\omega - 1} = \frac{5(-j\omega - 1)}{1+\omega^2} = U(\omega) + jV(\omega),$$

$$U(\omega) = -\frac{5}{1+\omega^2}, \quad V(\omega) = -\frac{5\omega}{1+\omega^2};$$

$$\text{б) } W(j\omega) = \frac{10}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + 3j\omega + 1} = \frac{10[1 - 3\omega^2 - j(3\omega - \omega^3)]}{(1-3\omega^2)^2 + (3\omega - \omega^3)^2},$$

$$U(\omega) = -\frac{10(1-3\omega^2)}{(1-3\omega^2)^2 + (3\omega-\omega^3)^2}, \quad V(\omega) = -\frac{10\omega(3-\omega^2)}{(1-3\omega^2)^2 + (3\omega-\omega^3)^2}.$$

Для построения АФЧХ нужно определить координаты точек ее пересечения с осями координат и соединить эти точки плавной кривой. Необходимые расчетные данные приведены в табл. 5.1. На основе этих данных построены АФЧХ (рис. 5.4).

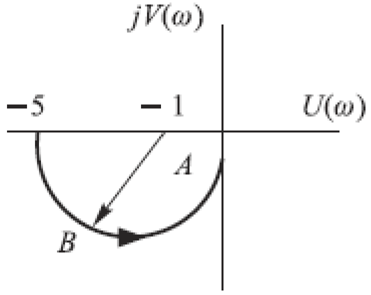
Таблица 5.1

Расчетные данные к примеру 5.3, а

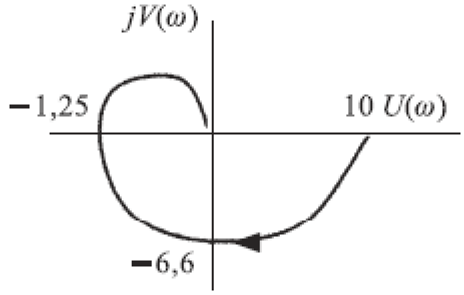
| $\omega$ | 0 | $0 < \omega < \infty$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|
| $U(\omega)$ | –5 | $< 0$ | 0 |
| $V(\omega)$ | 0 | $< 0$ | 0 |

Расчетные данные к примеру 5.3, б

| $\omega$ | 0 | $0<\omega<1/\sqrt{3}$ | $1/\sqrt{3}$ | $1/\sqrt{3}<\omega<\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}$ | $\omega>\sqrt{3}$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $U(\omega)$ | 10 | $>0$ | 0 | $<0$ | $-1{,}25$ | $<0$ | 0 |
| $V(\omega)$ | 0 | $<0$ | $-6{,}6$ | $<0$ | 0 | $>0$ | 0 |




*а*




*б*

Рис. 5.4. АФЧХ для примера 5.3

В случае а) замкнутая система устойчива, так как $l = 1$ и АФЧХ охватывает точку $(-1, j0)$ $1/2$ раз в положительном направлении (рис. 5.4, *а*). В случае б) замкнутая система неустойчива, так как разомкнутая система устойчива ($l = 0$), а АФЧХ охватывает точку $(-1, j0)$ (рис. 5.4, *б*).

**Задание 5.5**. По критерию Найквиста исследовать устойчивость замкнутых систем, у которых передаточная функция в разомкнутом состоянии имеет следующий вид:

а) $W(s) = \dfrac{s+1}{s^3+2s^2+s+1}$; б) $W(s) = \dfrac{2s+1}{s^3+3s^2+s+2}$;

в) $W(s) = \dfrac{s+4}{s^3+2s^2+s+1}$; г) $W(s) = \dfrac{s+1}{s^3+3s^2+s}$;

д) $W(s) = \dfrac{s+2}{s^3+0{,}5s^2+s+1}$; е) $W(s) = \dfrac{s+3}{s^3+6s^2+3s+2}$;

ж) $W(s) = \dfrac{s+3}{s^3+2s^2+3s}$; з) $W(s) = \dfrac{s+10}{s^3+3s^2+2s}$;

и) $W(s) = \dfrac{s+5}{s^3+2s^2+s}$; к) $W(s) = \dfrac{s+5}{s^3+2s^2+3s}$;

## 5.5. Определение области устойчивости

Структура системы определяется составом элементов (звеньев) и связями между ними. При заданной структуре какие-либо параметры могут быть не фиксированными, т. е. их можно изменять. Такие параметры называют *варьируемыми*. *Областью устойчивости* в пространстве параметров называют множество всех значений варьируемых параметров, при которых система устойчива.

Если существует область устойчивости в пространстве параметров, то система называется *структурно устойчивой* (*относительно заданных варьируемых параметров*). В противном случае система называется *структурно неустойчивой* (*относительно заданных варьируемых параметров*).

Область устойчивости можно определить с помощью алгебраических критериев устойчивости. Рассмотрим это на примере.

**Пример 5.4**. Передаточная функция разомкнутой системы $W(p) = \frac{k}{(Tp+1)^3}$. Определить область устойчивости замкнутой системы на плоскости параметров $(k, T)$.

Решение

Характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$A(p) = T^3p^3 + 3T^2p^2 + 3Tp + 1 + k.$

По критерию Льенара-Шипара имеем

$T^3 > 0, 3T^2 > 0, 3T > 0, 1 + k > 0,$

$\Delta_2 = 3T^2 \cdot 3T - T^3 \cdot (1 + k) = T^3(8 - k) > 0.$

Очевидно, эти неравенства будут выполнены, если

$T > 0, -1 < k < 8.$

Эта система неравенств определяет область устойчивости.

**Задание 5.6**. Определить на плоскости параметров $\alpha$ и $\beta$ область устойчивости (ОУ) замкнутой системы при условии, что ее передаточная функция в разомкнутом состоянии имеет следующий вид:

а) $\frac{\alpha s + \beta}{s^3 + s^2 + 3s}$; б) $\frac{\alpha s + \beta}{4s^3 + 2s^2 + s}$; в) $\frac{\alpha s + \beta}{s^3 + 4s^2 + 2s}$;

г) $\frac{\alpha s + 4}{\beta s^3 + 2s^2 + 3s}$; д) $\frac{\alpha s + 3}{\beta s^3 + 6s^2 + 2s}$; е) $\frac{\alpha s + 6}{\beta s^3 + 6s^2 + 3s}$;

ж) $\frac{s + \alpha}{3s^3 + 3s^2 + \beta s}$; з) $\frac{s + \alpha}{2s^3 + 4s^2 + \beta s}$; и) $\frac{s + \alpha}{3s^3 + 3s^2 + \beta s}$;

к) $\frac{2s + \alpha}{2s^3 + \beta s^2 + 4s}$.

### 5.6. Варианты заданий

Таблица 5.2

Варианты заданий

| Вариант | Задание 1 | Задание 2 | Задание 3 | Задание 4 | Задание 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.1, а | 5.2, а | 5.3 | 5.5, а | 5.6, а |
| 2 | 5.1, б | 5.2, б | 5.4, а | 5.5, б | 5.6, б |
| 3 | 5.1, в | 5.2, в | 5.4, б | 5.5, в | 5.6, в |
| 4 | 5.1, г | 5.2, г | 5.3 | 5.5, г | 5.6, г |
| 5 | 5.1, д | 5.2, д | 5.4, а | 5.5, д | 5.6, д |
| 6 | 5.1, е | 5.2, е | 5.4, б | 5.5, е | 5.6, е |
| 7 | 5.1, ж | 5.2, ж | 5.3 | 5.5, ж | 5.6, ж |
| 8 | 5.1, з | 5.2, з | 5.4, а | 5.5, з | 5.6, з |
| 9 | 5.1, и | 5.2, и | 5.4, б | 5.5, и | 5.6, и |
| 10 | 5.1, к | 5.2, к | 5.3 | 5.5, к | 5.6, к |