Введение

В контрольной работе студенты решают две задачи:

1. Расчет разветвленной цепи постоянного тока.
2. Расчет линейной электрической цепи однофазного переменного тока символическим методом.

Решению контрольной работы обязательно должно предшествовать изучение теоретического материала в соответствии с утвержденной программой учебного курса. В ходе изучения материала следует решать задачи. Это поможет запомнить методы решения и расчетные формулы. Диаграммы желательно размещать на листе формата основного текста.

Задача 1

Расчет разветвленной цепи постоянного тока

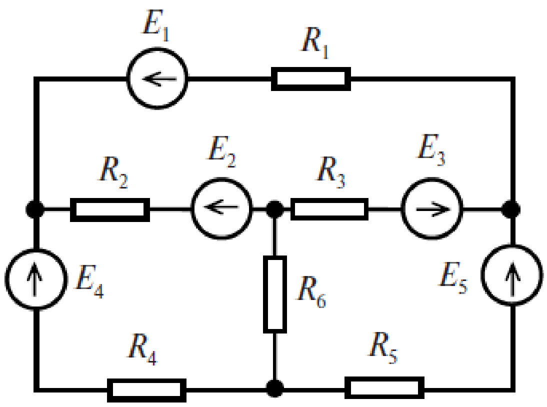
Для электрической цепи, соответствующей номеру варианта, выполнить следующее:

1. Написать уравнения по законам Кирхгофа (решать полученную систему не требуется).
2. Выполнить расчет токов во всех ветвях методом контурных токов.
3. Проверить правильность решения по второму закону Кирхгофа по двум контурам.
4. Составить баланс мощностей.
5. Построить потенциальную диаграмму для внешнего контура.
6. Определить ток в одной из ветвей (по своему выбору) по методу эквивалентного генератора. Определение токов в цепи после размыкания выбранной ветви выполнить методом узловых потенциалов.

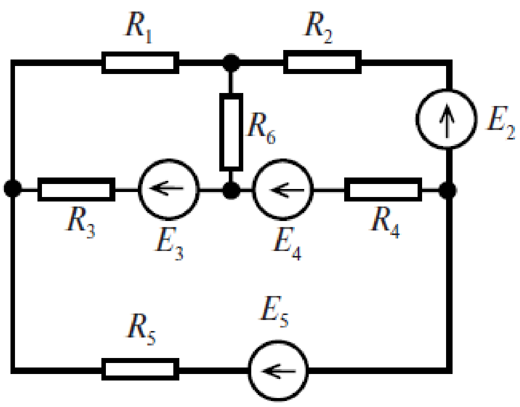
Исходные данные приведены в табл.1.1 (выбираются по предпоследней цифре шифра), схемы показаны на рис.1.1. (выбирается по последней цифре шифра) ЭДС источников даны в Вольтах, сопротивления – в Омах. Если при выборе значений ЭДС и сопротивлений попадаются те, которых нет на схеме (R_6, E_6), то они в расчетах не участвуют.

Таблица 1.1 – Исходные данные

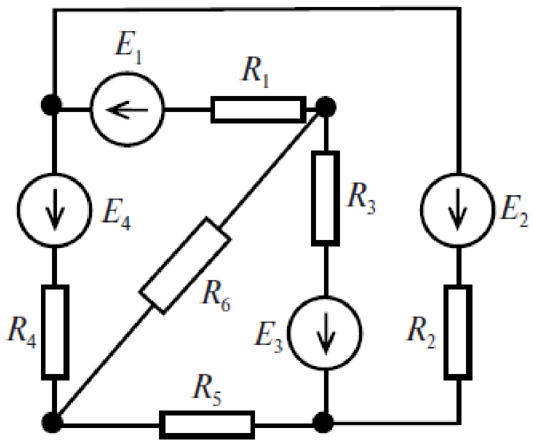
№ строки	E1	E2	E3	E4	E5	E6	R1	R2	R3	R4	R5	R6
1	40	20	70	50	60	30	5	8	15	4	6	9
2	20	20	60	60	75	40	80	90	6	12	8	15
3	90	100	30	75	50	120	15	12	6	8	10	14
4	60	50	70	80	100	40	25	10	12	6	20	8
5	100	30	60	90	40	80	15	6	10	18	8	5
6	20	40	90	30	60	50	10	4	16	8	12	25
7	80	100	60	50	90	30	16	10	20	6	18	22
8	40	120	80	90	30	50	12	15	10	8	3	9
9	90	80	120	50	75	60	18	6	20	12	15	9
0	80	60	75	100	50	90	20	15	25	10	5	14



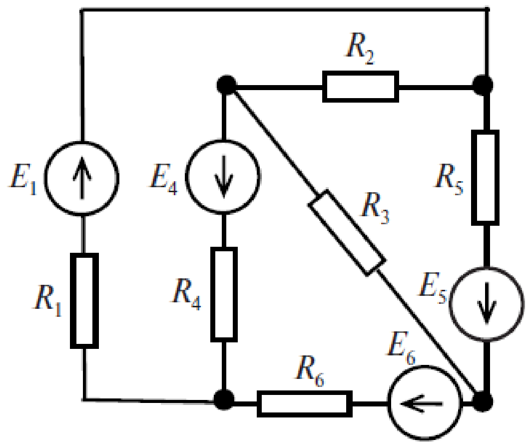
1



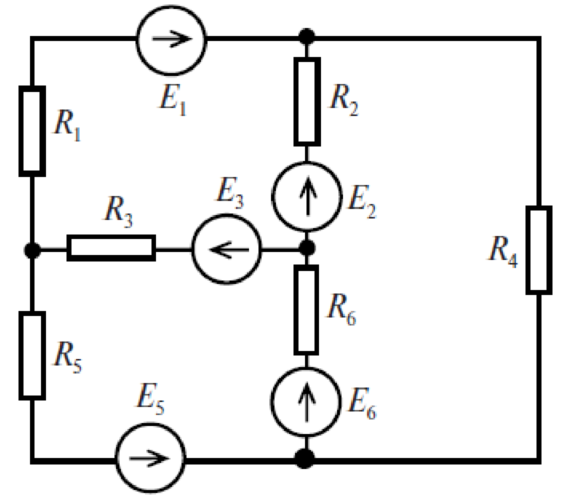
2



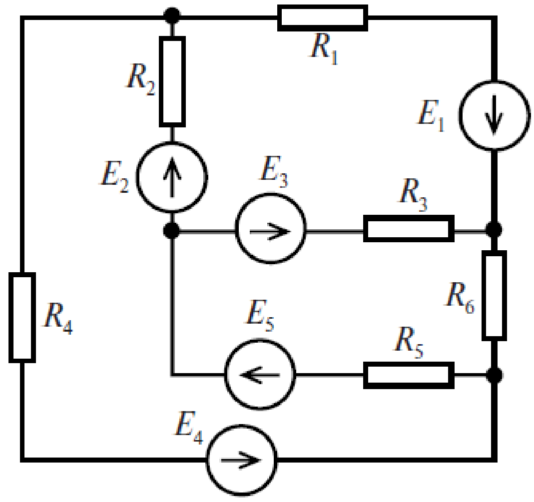
3



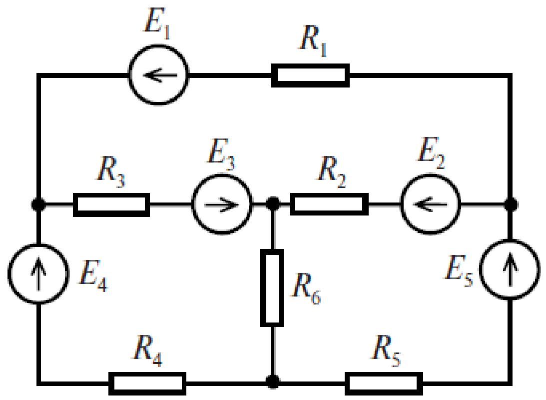
4



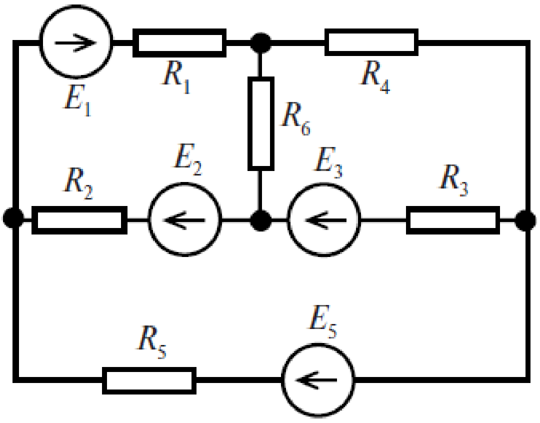
5



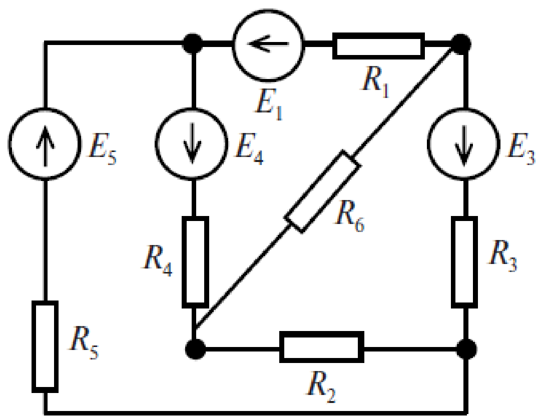
6



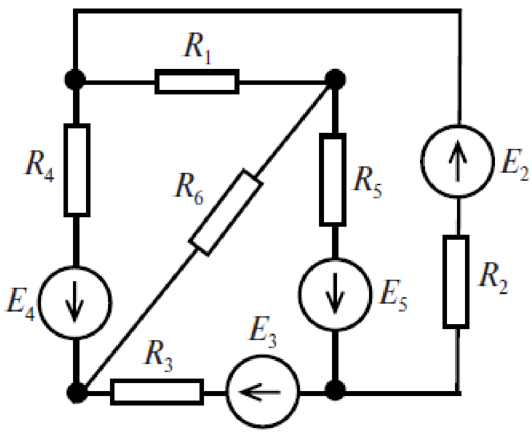
7



8



9



0

Рисунок 1.1 – Схемы к задаче 1

Общие указания и рекомендации к задаче 1

Исходная электрическая цепь, представленная в виде схемы, содержит источники ЭДС, источник тока, различные сопротивления. Пример расчетной цепи приведен на рис.1.2.

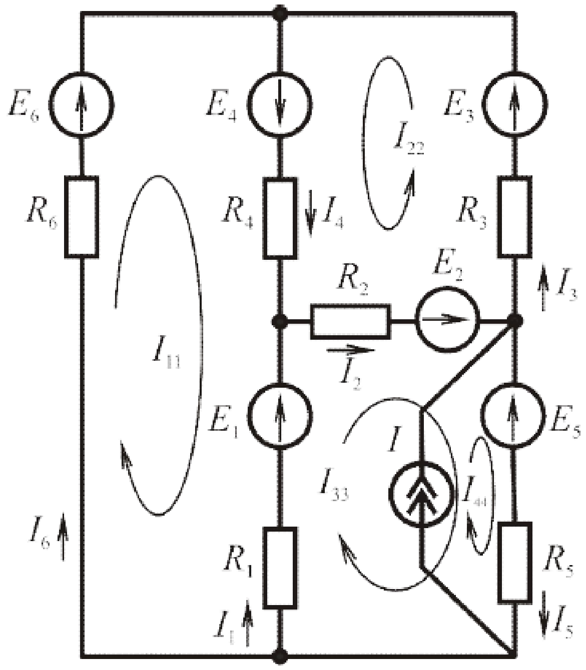


Рисунок 1.2 – Пример расчетной схемы

Для расчета линейных электрических цепей используется метод законов Кирхгофа, но данный метод не всегда является рациональным, особенно в разветвленных цепях. При применении данного метода необходимо составить (N – 1) уравнений по первому закону Кирхгофа, где N – число узлов электрической цепи, и (M) уравнений по второму закону Кирхгофа, где M – число независимых электрических контуров. Необходимо отметить, что ветви с источниками тока не могут создавать новые независимые контуры (для них нельзя составить уравнения по второму закону Кирхгофа). Например, для схемы на рис.1.2 необходимо составить шесть уравнений, из них три по первому закону Кирхгофа (N – 1 = 3) и три – по второму закону Кирхгофа, хотя по формальным признакам в схеме четыре независимых контура.

Действительно, ток в ветви с идеальным источником тока равен току самого источника I, поэтому число неизвестных токов составит шесть, т. е. число равное уравнениям. К этим уравнениям можно отнести следующие (предварительно выбирают положительные направления токов в ветвях и направления обхода каждого независимого контура):

для узлов	для контуров
$I_6-I_4+I_3=0$	$I_6R_6+I_4R_4-I_1R_1=E_6+E_4-E_1$
$I_1-I_2+I_4=0$	$I_2R_2+I_4R_4+I_3R_3=E_2+E_3+E_4$
$-I_1+I_5-I_6=-I$	$I_1R_1+I_2R_2+I_5R_5=E_1+E_2-E_5$

Расчет цепи методом контурных токов:

Из теоретического курса известно, что электрическая цепь любой сложности может быть рассчитана методом контурных токов, для этого необходимо ввести фиктивные контурные токи (по числу независимых контуров) и составить систему уравнений вида:

$$\begin{cases} I_{11}\cdot R_{11}+I_{22}\cdot R_{12}+I_{33}\cdot R_{13}+I_{44}\cdot R_{14}+\ldots=E_{11} \\ I_{11}\cdot R_{21}+I_{22}\cdot R_{22}+I_{33}\cdot R_{23}+I_{44}\cdot R_{24}+\ldots=E_{22} \\ I_{11}\cdot R_{31}+I_{22}\cdot R_{32}+I_{33}\cdot R_{33}+I_{44}\cdot R_{34}+\ldots=E_{33} \\ I_{11}\cdot R_{41}+I_{22}\cdot R_{42}+I_{33}\cdot R_{43}+I_{44}\cdot R_{44}+\ldots=E_{44} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Эта система содержит число уравнений, равное числу независимых контуров. Принятые обозначения:

$I_{11}; I_{22}; I_{33}; I_{44}\ldots.$ – неизвестные фиктивные контурные токи соответствующих контуров

$R_{11}; R_{22}; R_{33}; R_{44}\ldots$ – собственные сопротивления соответствующих контуров (1; 2; 3; 4…);

$R_{12}; R_{13}; R_{14}; R_{21}\ldots$ – взаимные сопротивления соответствующих контуров (1 и 2; 1 и 3 и т п.);

$E_{11}; E_{22}; E_{33}; E_{44}\ldots$ – собственные контурные ЭДС соответствующих контуров (1; 2; 3; 4…).

Необходимо отметить, что независимым является любой электрический контур (замкнутая часть цепи), содержащий хотя бы одну ветвь. При расчете электрической цепи методом контурных токов необходимо учесть следующее:

1. Число контурных токов должно быть равно числу независимых контуров. Направление контурных токов выбирается в общем случае произвольно, например, по часовой стрелке или против часовой стрелки. Знак перед искомым током (после решения системы уравнений) укажет правильность выбора направления этого тока.

2. По ветви с источником тока может протекать только один контурный ток. В этом случае величина контурного тока становится известной и равной значению тока I источника тока. Следовательно, число неизвестных токов и число необходимых уравнений уменьшаются на единицу.

3. Величина R_{11}; R_{22} и т. д. включает все сопротивления, входящие в соответствующие контуры. При этом внутренним сопротивлением источников ЭДС пренебрегают.

4. Величины $R_{12} = R_{21}$; $R_{13} = R_{31}$ и т. д. являются общими сопротивлениями соответствующих контуров и записываются со знаком (+), если контурные токи совпадают по направлению, со знаком (-), если не совпадают по направлению и равны нулю, если соответствующие контуры не имеют общих ветвей.

5. Величины E_{11} ; E_{22} и т. д. учитывают значения и направления всех источников ЭДС, входящих в соответствующие контуры. Знак у каждого источника определяется путем сопоставления направления ЭДС и основного контурного тока. При совпадении этих направлений записывается знак (+) и наоборот.

Выберем в расчетной схеме (рис. 1.2) независимые контуры и контурные токи в них. Тогда с учетом, что $I=I_{44}$, система уравнений может быть представлена в следующем виде:

$$I_{11}\cdot(R_1+R_4+R_6)+I_{22}\cdot(R_4)+I_{33}\cdot(-R_1)=E_6+E_4-E_1-I\cdot(0),$$

$$I_{11}\cdot(R_4)+I_{22}\cdot(R_2+R_3+R_4)+I_{33}\cdot(R_2)=E_2+E_3+E_4-I\cdot(0),$$

$$I_{11}\cdot(-R_1)+I_{22}\cdot(R_2)+I_{33}(R_1+R_2+R_5)=E_1+E_2-E_5-I\cdot(R_5).$$

Примечание. Составляющая напряжения, обусловленная током $I = I_{44}$, перенесена в правую часть с противоположным знаком как известная. В скобках приведено реальное значение взаимных сопротивлений.

Решение системы уравнений может быть выполнено методом Гаусса или другим методом с использованием ЭВМ. В результате расчета получаем искомые токи: I_{11}, I_{22}, I_{33}.

Реальные токи ветвей определяются как алгебраическая сумма соответствующих контурных токов. Если принять, что в результате расчета направления контурных токов оказались истинными, то можно записать:

$$I_1=I_{33}-I_{11},\quad I_2=I_{22}+I_{33},\quad I_3=I_{22},\quad I_4=I_{11}+I_{22},$$
$$I_5=I_{33}+I_{44}.\quad I_6=I_{11}\quad (\text{если } I_3>I_{11}).$$

Если в результате расчета какой-либо контурный ток получен со знаком (-), целесообразно указать на схеме истинное направление этого тока и соответствующим образом определить реальные токи в ветвях.

Проверка решения по первому закону Кирхгофа выполняется для всех электрических узлов. Проверку решения по второму закону Кирхгофа необходимо выполнить для тех же контуров, для которых составлялись уравнения системы.

Решение считается правильным, если относительная погрешность при расчетах не превышает 5 %. Однако следует учитывать, что проверка по первому закону Кирхгофа обычно выполняется даже при ошибках в расчетах. Поэтому основное внимание необходимо уделить проверке по второму закону Кирхгофа.

В некоторых случаях проверка может выполняться для двух контуров из трех возможных. Это связано, как правило, с ошибками, допущенными при составлении уравнения для этого контура на стадии расчета контурных токов или с ошибками при расчете реальных токов ветвей. Допущенная ошибка в первом случае требует повторного расчета цепи.

Составление баланса мощностей

Уравнение баланса мощностей в общем случае имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n} E_i \cdot I_i + \sum_{i=1}^{n} U_i \cdot I_i = \sum_{i=1}^{n} I_i^2 \cdot R_i ,$$

где в левой части записывается мощность, вырабатываемая всеми источниками энергии, а в правой части – мощность , потребляемая всеми приемниками энергии. Для конкретной схемы (рис. 1.2) это уравнение имеет вид:

$$E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3 + E_4 \cdot I_4 - E_5 \cdot I_5 + E_6 \cdot I_6 + U \cdot I =$$
$$I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3 + I_4^2 \cdot R_4 + I_5^2 \cdot R_5 + I_6^2 \cdot R_6.$$

При составлении уравнения баланса мощностей необходимо учесть следующие рекомендации:

1. Мощность источника ЭДС считается положительной, если направление ЭДС и тока совпадают в нем по направлению. Следовательно, если в ветви 5 направления не совпадают, то источник E_5 работает в режиме потребления энергии, поэтому величина мощности $E_5 \cdot I_5$ записана со знаком (-).

2. Напряжение U на источнике тока является в общем случае переменной величиной и может быть определено как разность потенциалов на ветви, включенной параллельно источнику. В данном случае справедливо записать

$$U = E_5 + I_5 \cdot R_5.$$

3. Допустимая погрешность при проверке не должна превышать 5 %.

Построение потенциальной диаграммы

При построении потенциальных диаграмм необходимо установить нулевой потенциал в любой точке схемы (например, между E_6 и R_6).

На оси абсцисс (рис. 1.3) в определенном масштабе откладываются последовательно (один за другим) все сопротивления, которые необходимо учесть при построении.

Например, выберем путь обхода по цепи:

$$0 \to E_6 \to E_4 \to R_4 \to R_2 \to E_2 \to R_3 \to E_3.$$

На оси ординат после вычислений указываются потенциалы каждой цепи в той же последовательности. Наклонная часть потенциальной кривой определяется падением напряжения на соответствующем активном сопротивлении цепи. Зная потенциалы каждой точки цепи относительно заземленной (φ = 0), легко определить из рис. 1.3. значения напряжений, между любыми точками схемы.

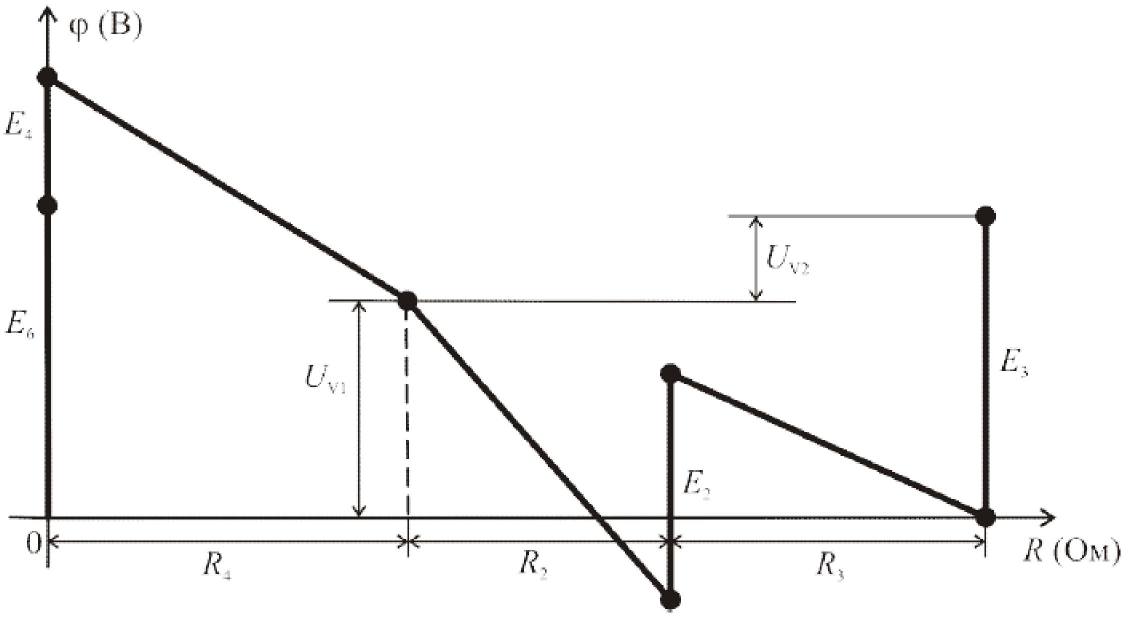


Рисунок 1.3 – Потенциальная диаграмма

Определение тока в ветви методом эквивалентного генератора

Метод эквивалентного генератора применяется в тех случаях, когда необходимо определить ток только в одной ветви. В данной работе подлежит расчету ток I_2. Для расчета тока используется уравнение вида

$$I_2 = \frac{E_0}{R_{вн} + R_2}$$

где E_0 – ЭДС эквивалентного генератора или разность потенциалов между концами резистора R_2 после размыкания ветви;

$R_{вн}$ – внутреннее сопротивление эквивалентного генератора относительно разомкнутой ветви R_2 после исключения всех источников энергии;

В данной работе значение E_0 следует найти, используя метод узловых потенциалов, хотя в общем случае для этого могут быть использованы и другие известные методы расчета.

Определение ЭДС эквивалентного генератора

Разомкнем ветвь R_2 «а – б» и изобразим расчетную схему на рис. 1.4. Обозначим узловые точки в полученной схеме через 1; 2; 3 и соответствующие им потенциалы как φ_1, φ_2, φ_3.

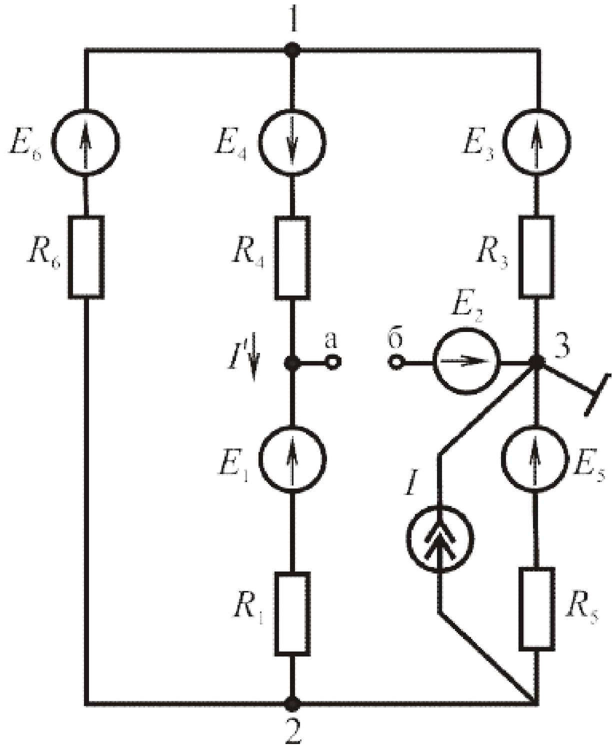


Рисунок 1.4 – Схема для расчета ЭДС эквивалентного генератора

Система уравнений по методу узловых потенциалов в общем случае может быть записана в следующем виде:

$$
\begin{cases}
\varphi_1 \cdot G_{11} - \varphi_2 \cdot G_{12} - \varphi_3 \cdot G_{13} - \varphi_4 \cdot G_{14} \ldots = \sum^{1} E_i \cdot G_i + \sum^{1} J_i \\
-\varphi_1 \cdot G_{21} + \varphi_2 \cdot G_{22} - \varphi_3 \cdot G_{23} - \varphi_4 \cdot G_{24} \ldots = \sum^{2} E_i \cdot G_i + \sum^{2} J_i \\
-\varphi_1 \cdot G_{31} - \varphi_2 \cdot G_{32} + \varphi_3 \cdot G_{33} - \varphi_4 \cdot G_{34} \ldots = \sum^{3} E_i \cdot G_i + \sum^{3} J_i \\
-\varphi_1 \cdot G_{41} - \varphi_2 \cdot G_{42} - \varphi_3 \cdot G_{43} + \varphi_4 \cdot G_{44} \ldots = \sum^{4} E_i \cdot G_i + \sum^{4} J_i .
\end{cases}
$$

Количество составляемых уравнений определяется числом искомых потенциалов узловых точек схемы. Необходимо учесть, что после размыкания ветви «а– б» число узловых точек обычно уменьшается.

В левой части уравнений по методу узловых потенциалов со знаком (+) записывается только одна составляющая токов, имеющая отношение к конкретному расчетному узлу. Составляющие токов в правой части записываются со знаком (+), если эти ЭДС и источники тока направлены к данному расчетному узлу. В любом другом случае необходимо записывать знак (-) перед отдельными слагаемыми уравнения.

Принятые обозначения:

G_{11}, G_{22}, G_{33}, G_{44}… – собственные проводимости всех ветвей, примыкающих соответственно к узлам 1, 2, 3, 4…

$G_{12} = G_{21}$, $G_{13} = G_{31}$ – взаимные проводимости ветвей, связывающих 1 и 2 узлы, 1 и 3 узлы и т. д.

$\overset{1}{\sum} E_i \cdot G_i$, $\overset{2}{\sum} E_i \cdot G_i$ …– составляющие токов, создаваемых в соответствующих ветвях источниками ЭДС;

$\overset{1}{\sum} J_i$, $\overset{2}{\sum} J_i$ … – значения источников тока, связанных с соответствующими узлами 1; 2 …

Если в размыкаемой электрической цепи нет других заземленных точек или узлов то, очевидно, можно заземлить один из узлов, т. е. принять его потенциал за нулевой. Тогда число узлов с неизвестными потенциалами уменьшается на единицу и, соответственно, уменьшается число необходимых уравнений.

Приняв, например, $\varphi_3 = 0$, необходимо записать только два уравнения.

$$\varphi_1\left(\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_1+R_4}+\frac{1}{R_3}\right)-\varphi_2\left(\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_1+R_4}\right)=\frac{E_6}{R_6}+\frac{E_1-E_4}{R_1+R_4}+\frac{E_3}{R_3};$$

$$-\varphi_1\left(\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_1+R_4}\right)+\varphi_2\left(\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_1+R_4}+\frac{1}{R_5}\right)=-\frac{E_6}{R_6}-\frac{E_1-E_4}{R_1+R_4}-\frac{E_5}{R_5}-I.$$

После определения потенциалов точек φ_1 и φ_2 расчет токов можно выполнить по закону Ома для ветви. В данной конкретной схеме для определения ЭДС эквивалентного генератора достаточно найти ток в ветви $E_4 - R_4 - E_1 - R_1$. Выберем положительное направление этого тока (Указано на схеме) и составим уравнение

$$\varphi_1 + E_4 - I' \cdot (R_4 + R_1) - E_1 = \varphi_2 \text{ или}$$

$$I' = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + (E_4 - E_1)}{R_4 + R_1}.$$

После расчета тока I' потенциал точки «а» можно определить из уравнения

$$\varphi_a = \varphi_1 + E_4 - I' \cdot R_4,$$

а потенциал точки «б» удобнее найти следующим образом:

$$\varphi_б = \varphi_3 - E_2.$$

Таким образом, $\varphi_a - \varphi_б = E_0 = \varphi_1 + E_4 - I' \cdot R_4 - \varphi_3 + E_2.$

Определение внутреннего сопротивления эквивалентного генератора

Для определения внутреннего сопротивления цепи относительно зажимов «а – б» достаточно воспользоваться схемой рис. 1.4, мысленно закоротив все источники ЭДС и разомкнув источник тока. Образовавшаяся схема получит следующий вид (рис. 1.5):

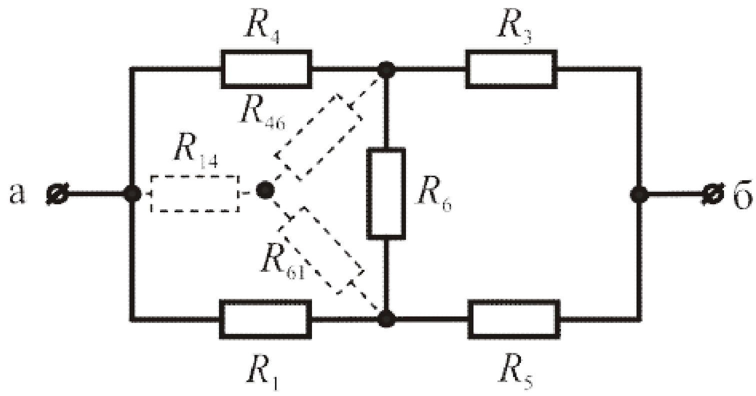


Рисунок 1.5 – Схема расчета сопротивления

Сопротивления цепи имеют сложные соединения типа «трехлучевая звезда» или «треугольник» (рис. 1.5) и не позволяют вычислить $R_{вн}$ без дополнительных эквивалентных преобразований цепи. В данном случае можно воспользоваться, например, приемом эквивалентного преобразования треугольника сопротивлений в «трехлучевую звезду», что показано на рис. 1.5.

$$R_{14} = \frac{R_1 \cdot R_4}{R_1 + R_4 + R_6}; \quad R_{46} = \frac{R_4 \cdot R_6}{R_1 + R_4 + R_6}; \quad R_{61} = \frac{R_6 \cdot R_1}{R_1 + R_4 + R_6}.$$

Соотношения (1.6) позволяют определить R_{14}, R_{46}, R_{61}. В литературе [1] можно найти примеры обратного преобразования «трехлучевой звезды» в «треугольник». После подобных преобразований достаточно легко вычислить значение:

$$R_{внутр.} = R_{14} + \frac{(R_{46} + R_3) \cdot (R_{61} + R_5)}{R_{46} + R_3 + R_{61} + R_5}.$$

Таким образом, с учетом величин E_0 и $R_{вн}$, полученных из уравнений, величина искомого тока I_2 определяется, как и было отмечено ранее, при помощи уравнения.

Необходимо иметь в виду, что результаты расчета тока I_2 по методу контурных токов и по методу эквивалентного генератора не могут отличаться более, чем на 5 %.

Задача 2

Расчет разветвленной цепи синусоидального тока с двумя источниками

В соответствии с вариантом необходимо выбрать расчётную схему электрической цепи (рис.2.1 – по последней цифре шифра), выписать её параметры (табл.2.1 – по предпоследней цифре шифра) и произвести расчёт.

Порядок расчёта:

1) Составить уравнения по наиболее оптимальному методу и найти токи во всех ветвях (***без учета взаимоиндукции***).

2) Определить баланс активных и реактивных мощностей в цепи.

3) Вычислить напряжение на всех элементах цепи.

4) Построить векторную диаграмму токов и топографическую диаграмму напряжений, показав на ней векторы напряжений на всех элементах цепи.

Краткие теоретические сведения

Целью расчёта электрической цепи переменного тока так же, как и для постоянного, является нахождение токов в ветвях и напряжения на участках цепи. В общем случае, при расчете линейных электрических цепей однофазного синусоидального тока, используют те же приемы, которые были применены для линейных электрических цепей постоянного тока, включая метод преобразований, метод законов Кирхгофа, метод узловых потенциалов, метод контурных токов и т.п. Однако наибольшее распространение в последние годы они получили в сочетании с символическим, или комплексным, методом расчета, при котором выполняют условный переход от дифференциальных или интегральных уравнений к символам в алгебраической, показательной или тригонометрической форме.

Как известно, любое комплексное число (a1 + ja2) можно изобразить на комплексной плоскости точкой. Каждой точке соответствует радиус-вектор (A), проведенный от начала координат. Угол, образованный вектором и вещественной осью, называется аргументом. Он отсчитывается против часовой стрелки.

Длина вектора называется модулем, а проекции – действительной и мнимой частями комплексного числа соответственно. При этом:

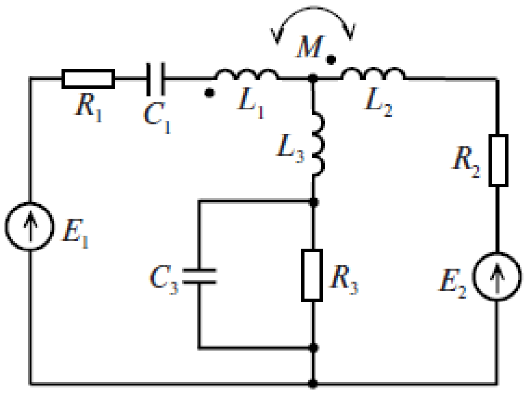
$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}; \quad \alpha = \mathrm{arctg}\,(a_2/a_1).$$

Если проекции выразить через тригонометрические функции

$$a_1 = A\cos\alpha; \; a_2 = A\sin\alpha,$$

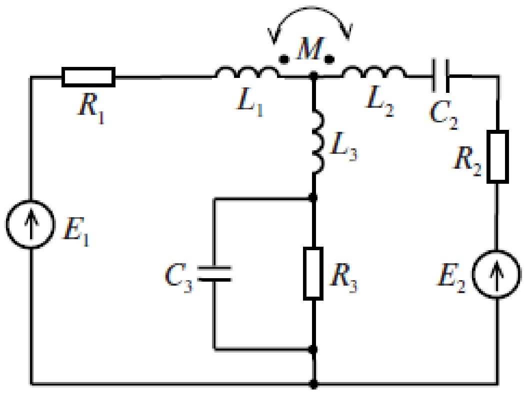
то получим тригонометрическую форму записи комплексного числа

$$a_1 + ja_2 = A(\cos\psi + j\sin\psi).$$



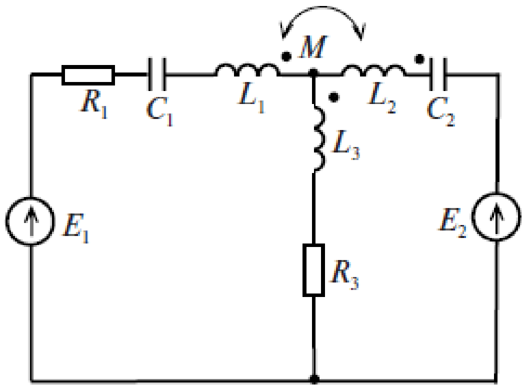
M
R_1
C_1
L_1
L_2
L_3
R_2
E_1
C_3
R_3
E_2

1



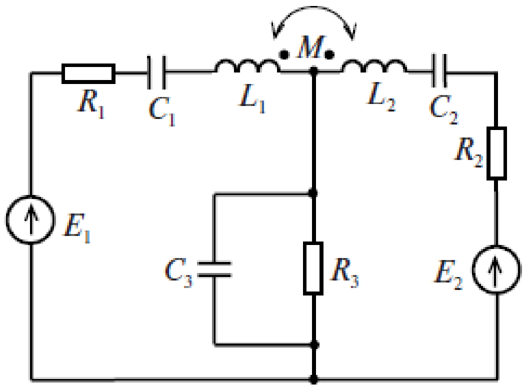
M
R_1
L_1
L_2
C_2
L_3
R_2
E_1
C_3
R_3
E_2

2



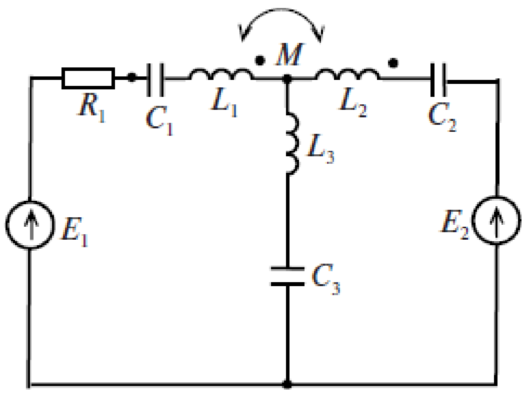
M
R_1
C_1
L_1
L_2
C_2
L_3
E_1
E_2
R_3

3



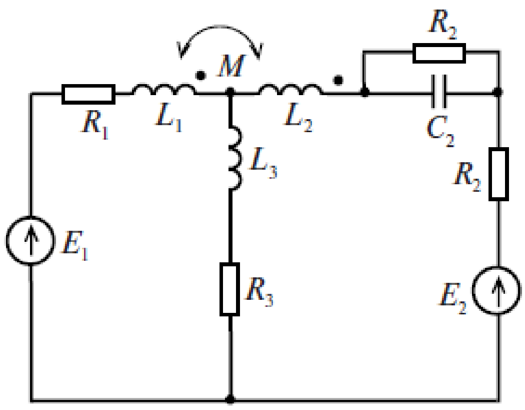
M
R_1
C_1
L_1
L_2
C_2
R_2
E_1
C_3
R_3
E_2

4



M
R_1
C_1
L_1
L_2
C_2
L_3
E_1
E_2
C_3

5



R_2
M
R_1
L_1
L_2
C_2
L_3
R_2
E_1
R_3
E_2

6

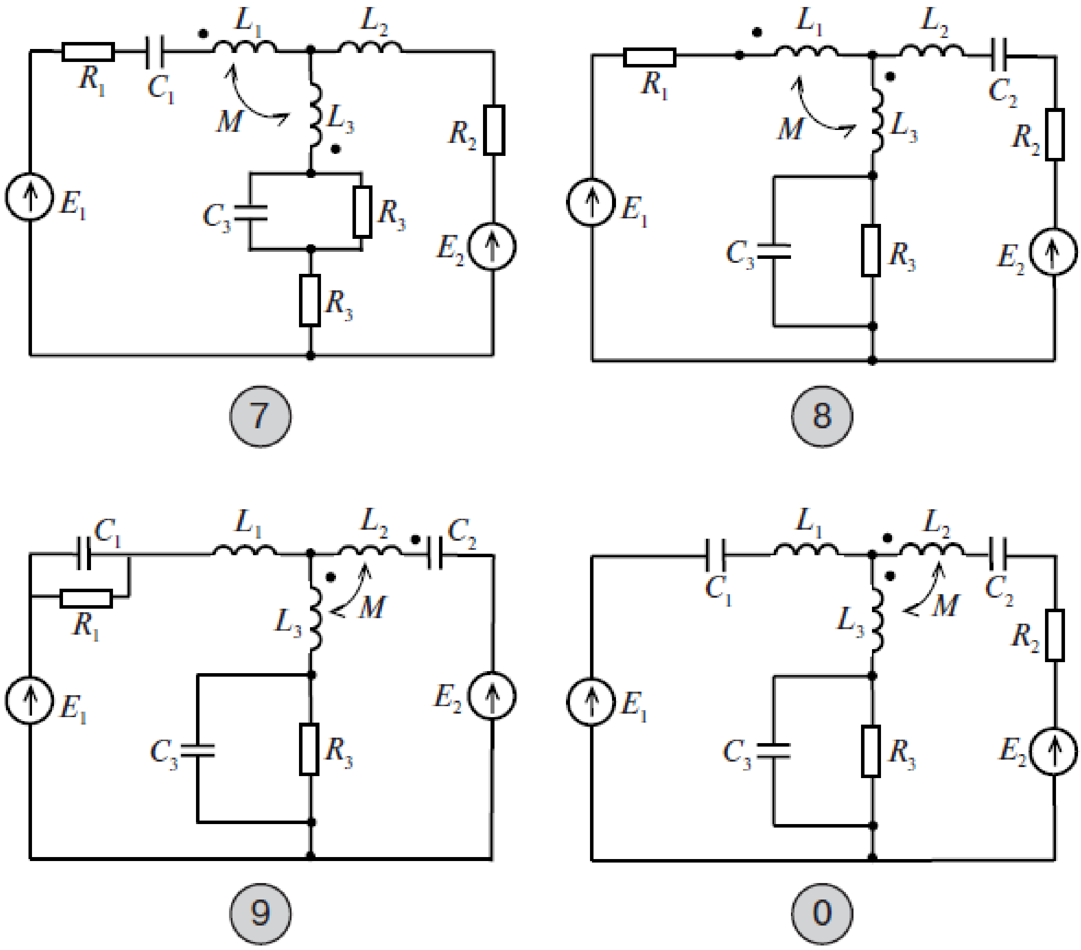


Рисунок 2.1 – Расчетные схемы

Таблица 2.1 – Исходные данные

	E1, В	E2, В	α, рад	R1, Ом	L1, мГн	C1, мкФ	R2, Ом	L2, мГн	C2, мкФ	R3, Ом	L3, мГн	C3, мкФ	k 12	k 13	k 23	f, Гц
1	100	100	π/6	4	20	200	5	30	250	2	10	400	0	0,6	0,8	50
2	100	120	π/4	6	30	200	4	50	300	4	20	300	0,6	0	0,8	50
3	220	140	π/3	6	40	300	8	10	200	6	60	200	0,6	0,8	0	50
4	200	200	π/2	5	4	40	8	6	80	6	4	36	0	0,6	0,8	400
5	200	220	π/6	10	6	30	12	4	40	8	8	18	0,8	0,6	0	400
6	200	240	π/4	12	2	20	14	8	100	4	5	50	0,6	0,8	0	500
7	240	280	π/3	20	10	50	24	8	30	16	4	10	0,8	0	0,6	500
8	280	240	π/2	40	30	100	30	10	140	24	20	200	0	0,6	0,8	50
9	400	100	π/6	3	30	300	4	40	200	3	20	400	0,6	0	0,8	50
0	50	60	π/4	40	10	100	20	50	200	10	30	300	0	0,7	0,8	50

Примечание: α – угол, на который E_2 отстает от E_1.

Воспользовавшись формулой Эйлера, можно получить показательную форму записи

$$a_1 + ja_2 = Ae^{j\psi}, \; a_1 - ja_2 = Ae^{-j\psi}.$$

Пусть имеется синусоидальная величина, которая определяется выражением $i = I_m sin(\omega t + \Psi)$. Это выражение соответствует проекции вращающегося вектора Im на вертикальную ось. С другой стороны, рассмотрим комплексное число.

$$I_m e^{j\psi} = I_m \cos\psi + jI_m \sin\psi.$$

Если положить, что $\alpha = \omega t + \Psi$, то синусоидальной функции будет соответствовать мнимая часть комплексного числа

$$i = \text{М.ч}\,[I_m e^{j(\omega t + \Psi)}] = \text{М.ч}\,[I_m e^{j\Psi} e^{j\omega t}],$$

где М.ч – сокращенное название «мнимая часть».

Такой формализованный переход существенно облегчает расчет цепей однофазного тока, особенно сложных или разветвленных цепей. При этом легко показать, что в символической форме будут справедливы те же законы Кирхгофа:

$$\sum_{i=0}^{n} \dot{I}_i = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} \dot{E}_i = \sum \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_i \,,$$

где $\dot{I}_1, \dot{E}_i, \underline{Z}_i$ – соответственно комплексы действующих значений тока, ЭДС и сопротивлений участков цепи.

Формулировка законов Кирхгофа при данной форме записи может быть озвучена следующим образом:

1. Алгебраическая сумма комплексов действующих токов, сходящихся в узел, равна нулю. Таким образом, при записи этого закона в символической форме используют те же правила учета направления каждого тока по отношению к узлу, как и для цепей постоянного тока.

2. Алгебраическая сумма комплексов действующих значений ЭДС в контуре равна алгебраической сумме падений напряжений на комплексных сопротивлениях этого контура.

При использовании символического метода расчета однофазных цепей синусоидального тока за активное сопротивление переменному току принимают омическое сопротивление постоянному току (при этом пренебрегают эффектом вытеснения тока к поверхности проводника). Модули реактивных сопротивлений цепи определяют по формулам, Ом:

$$X_L = \omega \cdot L \quad \text{и} \quad X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \,,$$

где L и C – соответственно индуктивность (Гн) и емкость (Ф) реактивного элемента.

Комплексы этих сопротивлений в различных формах записи имеют вид:

$$\underline{Z}_L = j \cdot \omega \cdot L = j \cdot X_L = X_L \cdot I^{j90^\circ} \quad \text{и} \quad \underline{Z}_C = -\frac{j}{\omega \cdot C} = -j \cdot X_C = X_C \cdot I^{-j90^\circ}.$$

Пример. На рис.2.2 приведена цепь, для которой известны параметры $\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dot{R}_1, L_1, f$ и т.д. Необходимо привести основные уравнения при использовании различных методов.

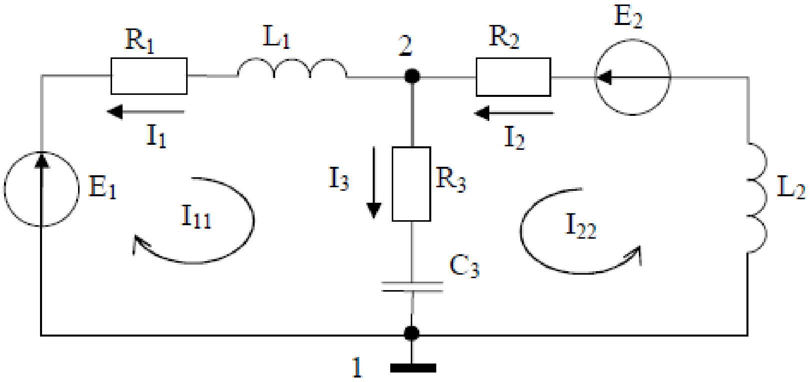


Рис.2.2. Расчетная схема

Решение.

1) Если выбрать положительные направления токов в ветвях и направления каждого независимого контура, то можно записать:

$$\begin{cases} \dot{E}_1 = \dot{I}_1 \cdot R_1 + \dot{I}_1 \cdot j \cdot \omega \cdot L_1 + \dot{I}_3 \cdot R_3 + I_3\left(-j\dfrac{1}{\omega C_3}\right); \\ \dot{E}_1 = \dot{I}_2 \cdot R_2 + \dot{I}_2 \cdot j \cdot \omega \cdot L_2 + \dot{I}_3 \cdot R_3 + I_3\left(-j\dfrac{1}{\omega C_3}\right); \\ \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_3. \end{cases}$$

2) По методу контурных токов для внутренних контуров (использованы контурные токи $\dot{I}_{11}$ и $\dot{I}_{22}$) можно записать:

$$\begin{cases} \dot{I}_{11}\left(R_1 + j\omega \cdot L_1 + R_3 - j\dfrac{1}{\omega C_3}\right) + \dot{I}_{22}\left(R_3 - j\dfrac{1}{\omega C_3}\right) = \dot{E}_1; \\ \dot{I}_{11}\left(R_3 - j\dfrac{1}{\omega C_3}\right) + \dot{I}_{22}\left(R_2 + j\omega \cdot L_2 + R_3 - j\dfrac{1}{\omega C_3}\right) = \dot{E}_3. \end{cases}$$

3) По методу узловых потенциалов, если заземлить, например, узел 1, получим:

$$\dot{\varphi}_1 = 0;$$

$$\dot{\varphi}_2 \cdot \left(\frac{1}{R_1 + j\omega \cdot L_1} + \frac{1}{R_3 - j\dfrac{1}{\omega C_3}} + \frac{1}{R_2 + j\omega \cdot L_2}\right) = \frac{\dot{E}_1}{R_1 + j\omega \cdot L_1} + \frac{\dot{E}_2}{R_2 + j\omega \cdot L_2}.$$

Далее, используя закон Ома для каждой ветви, определяют ток в каждой ветви:

$$\dot{\varphi}_2 + I_1(R_1 + j\omega \cdot L) - \dot{E}_1 = \dot{\varphi}_1 = 0$$

или

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1 - \dot{\varphi}_2}{R_1 + j\omega \cdot L_1} \text{ и т.д.}$$

В качестве примера используется цепь, электрическая схема которой приведена на рис.2.3.

Пример. Заданы параметры цепи:

$R_1 = 8\,Ом$; $L_1 = 15\,мГн$; $C_1 = 200\,мкФ$; $R_2 = 10\,Ом$; $L_2 = 75\,мГн$;

$C_2 = 600\,мкФ$; $R_3 = 14\,Ом$; $L_3 = 30\,мГн$; $f = 50\,Гц$; $U_{mg} = 50 \cdot \sqrt{2}\,В$; $\psi_и = 60°$,

где $\psi_и$ – начальная фаза напряжения на участке mg.

Необходимо найти токи и напряжения на всех участках цепи, выполнить проверки решения по законам Кирхгофа, составить баланс мощностей, построить волновые и векторные диаграммы.

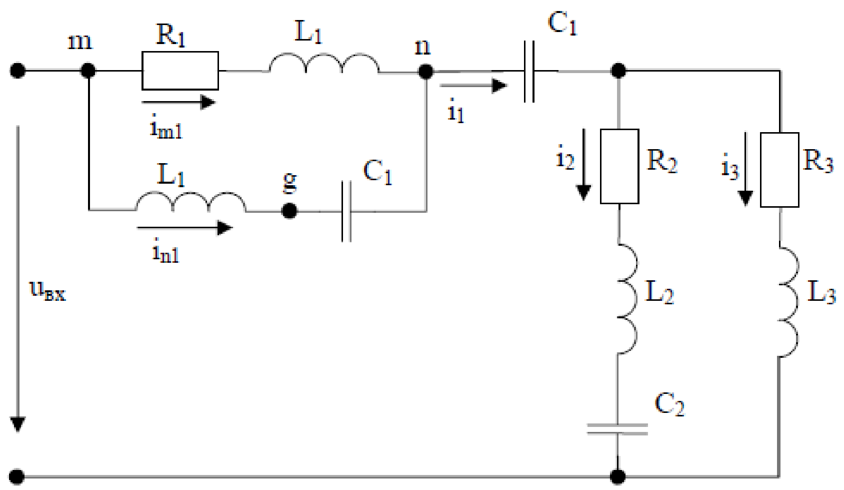


Рис.2.3. Расчетная схема

Решение.

1) Определим модули и комплексы сопротивлений отдельных участков и всей цепи.

$$X_{L_1} = \omega \cdot L_1 = 2\pi \cdot f \cdot L_1 = 6{,}28 \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 4{,}71\,Ом;$$

$$X_{C_1} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C_1} = \frac{1}{314 \cdot 200 \cdot 10^{-6}} = 15{,}92\,Ом;$$

$$X_{L_2} = 23{,}55\,Ом; \quad X_{L_3} = 9{,}42\,Ом; \quad X_{C_2} = 5{,}31\,Ом.$$

$$\underline{Z}_{mn} = R_1 + jX_{L_1} = 8 + j \cdot 4{,}71 = 9{,}28 \cdot e^{j30{,}49°}\,Ом;$$

$$\underline{Z}_{mgn} = jX_{L_1} - jX_{C_1} = -j \cdot 11{,}21 = 11{,}21 \cdot e^{-j90°}\,Ом;$$

$$\underline{Z}^1 = \frac{\underline{Z}_{mn} \cdot \underline{Z}_{mgn}}{\underline{Z}_{mn} + \underline{Z}_{mgn}} = 10{,}1 \cdot e^{-j20{,}5°} = (9{,}46 - j3{,}53)\,Ом;$$

$$\underline{Z}_1 = Z^1 - jX_{C_1} = 21{,}63 e^{-j64{,}1°}\,Ом;$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j\left(X_{L_2} - X_{C_2}\right) = 10 + j18{,}24 = 20{,}8 e^{+j61{,}27°}\,Ом;$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + jX_{L_3} = 14 + j9{,}42 = 16{,}87 e^{j33{,}93°}\,Ом;$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 9{,}57 \cdot e^{j46{,}15^\circ} = (6{,}63 + j6{,}71)\,\text{Ом};$$

$$\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} = 20{,}41 e^{-j37{,}06^\circ} = (16{,}09 - j12{,}55)\,\text{Ом}.$$

2) Расчет комплексов токов и напряжений. Если учесть, что $u_{mg} = 50 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(314t + 60^\circ)$, то для действующего значения этого напряжения в символической форме можно записать:

$$\dot{U}_{mg} = 50 \cdot e^{j60^\circ}\,\text{В},$$

тогда

$$\dot{I}_{1n} = \frac{\dot{U}_{mg}}{jX_{L_1}} = 10{,}62 \cdot e^{-j60^\circ}; \quad U_{mn} = \dot{I}_{1n} \cdot \underline{Z}_{mgn} = 119 \cdot e^{-j120^\circ}\,\text{В};$$

$$\dot{I}_{1v} = \frac{\dot{U}_{mn}}{\underline{Z}_{1m}} = 12{,}82 \cdot e^{-j150{,}48^\circ}; \quad \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{mn}}{\underline{Z}_1} = 11{,}79 \cdot e^{-j99{,}5^\circ};$$

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 = 255 \cdot e^{-j163{,}6^\circ}\,\text{В}; \quad \dot{U}_{23} = \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_{23} = 112{,}9 \cdot e^{-j53{,}35^\circ}\,\text{В};$$

$$\dot{U}_{ВХ} = \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_{ВХ} = 240{,}6 \cdot e^{-j13764^\circ}\,\text{В};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{23}}{\underline{Z}_2} = 5{,}43 \cdot e^{-j114{,}6^\circ}\,\text{А}; \quad \dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{23}}{\underline{Z}_3} = 6{,}72 \cdot e^{-j87{,}3^\circ}\,\text{А}.$$

Необходимо отметить, что при расчете токов и напряжений не рекомендуется использовать уравнения по первому и второму законам Кирхгофа, которые должны применяться лишь для проверки правильности решения задачи.

Мгновенные значения этих величин:

$$u_{mn} = 119{,}2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(314t - 120^\circ),\ \text{В};$$

$$i_{1n} = 10{,}62 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(314t - 60^\circ),\ \text{А};$$

$$i_{1m} = 12{,}82 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(314t - 150{,}48^\circ),\ \text{А};$$

$$i_1 = 11{,}79 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(314t - 99{,}5^\circ),\ \text{А}.$$

и т.д.

3) Проверка по законам Кирхгофа может быть выполнена как в символической форме записи, так и для мгновенных значений, например:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 \ \text{ и } \ \dot{I}_1 = \dot{I}_{1m} + \dot{I}_{1n} \ \text{ или}$$

$$i_{1(0)} = i_{2(0)} + i_{3(0)} \ \text{ и } \ i_{1(0)} = i_{1m(0)} + i_{1n(0)}.$$

Аналогично по второму закону Кирхгофа можно записать:

$$\dot{U}_{ВХ} = \dot{U}_1 + \dot{U}_{23} \ \text{ или } \ u_{ВХ(0)} = u_{1(0)} + u_{2(0)}.$$

4) При использовании решения по уравнению баланса мощностей можно записать:

$$\dot{U}_{вх} \cdot \overset{*}{I}_{вх} = I_1^2 \cdot \underline{Z}_1 + I_2^2 \cdot \underline{Z}_2 + I_3^2 \cdot \underline{Z}_3,$$

Необходимо отметить, что $\overset{*}{I}$ – комплекс сопряженного тока на входе цепи, а I_1, I_2, I_3 – соответственно модули токов на участках цепи. В результате расчета получим:

$$2236{,}1 - j1744{,}6 = 2238{,}5 - j1743{,}3.$$

Однако на практике принято сравнивать отдельно баланс активных и баланс реактивных мощностей.

Таким образом, в результате расчета следует подтвердить справедливость двух тождеств:

$$P_{ист} \approx P_{пр} \quad и \quad Q_{ист} \approx Q_{пр},$$

где $P_{ист}$ и $Q_{ист}$ – активная и реактивная составляющие полной мощности источника соответственно;

$P_{пр}$ и $Q_{пр}$ – активная и реактивная составляющие полной мощности приемника соответственно.

Тогда

$$2236{,}1\,Вт \approx 2238{,}5\,Вт \ \text{и} \ -1744{,}6\,Вар \approx -1743{,}3\,Вар.$$

5) Мгновенные значения входных параметров могут быть представлены в виде:

$$u_{ВХ} = 11{,}79 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(314t - 99{,}5°), В;$$

$$P_{ВХ} = u_{ВХ} \cdot i_{ВХ} = U_{ВХ} \cdot I_1[\cos(\psi_{Uвх} - \psi_{i1}) - \cos(2 \cdot \omega t + \psi_{Uвх} + \psi_{i1})] =$$

$$= 240{,}6 \cdot 11{,}7 \cdot [\cos(-37{,}9°) - \cos(628t - 236{,}96°)] =$$

$$= 2236{,}1 + 2836{,}17 \cdot \sin(628t + 33{,}04°), Вт.$$

6) Для построения векторных диаграмм токов и напряжений необходимо использовать п.2, а также выполнить расчет составляющих напряжений, например на первой и третьих ветвях (на диаграмме не приведена). Пример такой диаграммы показан на рис.2.4.

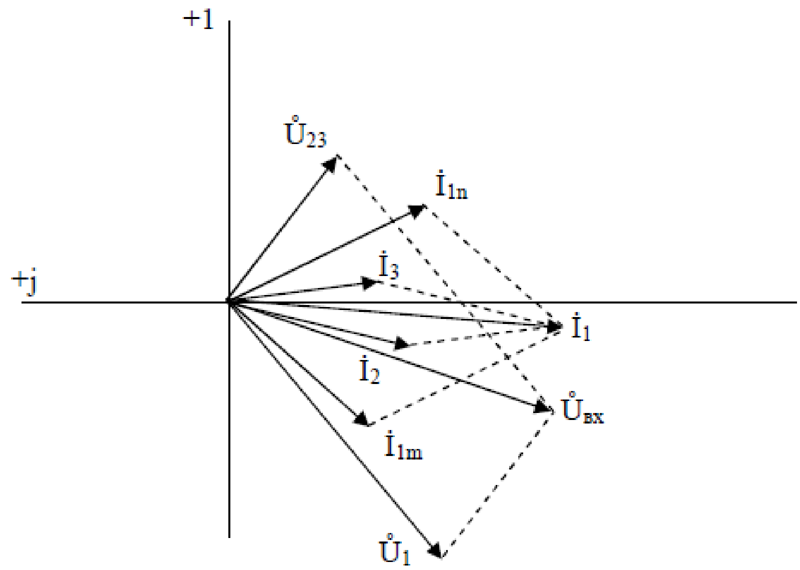


Рис.2.4. Векторная диаграмма токов и напряжений

Библиографический список

1. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. В 2 т. Том 1. Электрические цепи [] : Учебник / Бессонов Л. А. - 12-е изд., испр. и доп. - Электрон. дан.col. - Москва : Юрайт, 2019. - 831 с.

2. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи в 2 ч. Часть 1. [] : Учебник / Бессонов Л. А. - 12-е изд., испр. и доп. - Электрон. дан.col. - Москва : Юрайт, 2018. - 364 с.

3. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Сборник задач [] : Учебное пособие для бакалавров / под ред. Бессонова Л.А. - 5-е изд., испр. и доп. - Электрон. дан.col. - Москва : Юрайт, 2019. - 527 с.

4. Сухогузов, А. П. Расчетно-графические работы по теоретическим основам электротехники: метод. указания / А. П. Сухогузов, И. Б. Падерина. – Екатеринбург : УрГУПС, 2010. – 68 с.

5. Сулейманов, Р. Я. Теоретические основы электротехники : сб. заданий / Р. Я. Сулейманов, Е. П. Никитина. – Екатеринбург : УрГУПС, 2017. – 75, [1] с.