Образцы решения задачи 1

<u>Задача</u>
Даны три функции:

a) $f(x) = x$ b) $f(x) = \pi - |x|$ c) $f(x) = \pi\left(\left(\frac{x}{\pi}\right)^2 - 1\right)^2$

Для каждой функции:

1. Построить график функции $f(x)$ и график периодического продолжения функции $f(x)$ с промежутка $(-\pi;\pi]$ на всю числовую прямую.

2. Составить для функции $f(x)$ ряд Фурье на промежутке $[-\pi;\pi]$.

3. Провести теоретический анализ сходимости получившего ряда Фурье:
   3a. Определить, чему равна сумма ряда $S(x)$ в каждой точке $x \in R$, построить график $S(x)$.
   3b. Составить разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье с указанием области сходимости и вида сходимости (поточечная или равномерная).
   3c. Определить скорость равномерной сходимости (в случае ее наличия).

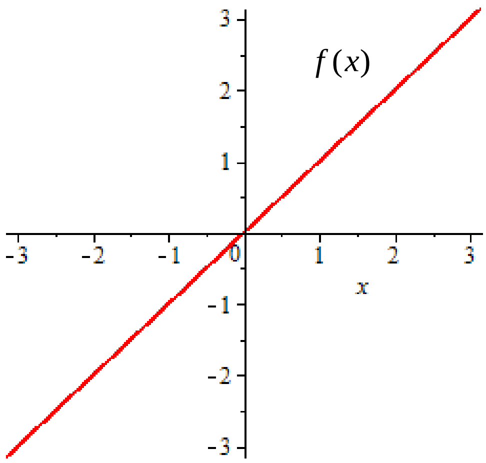
4. Проиллюстрировать графически сходимость ряда Фурье: построить графики нескольких частичных сумм ряда Фурье и функции $f(x)$ на промежутке $[-3\pi;3\pi]$.

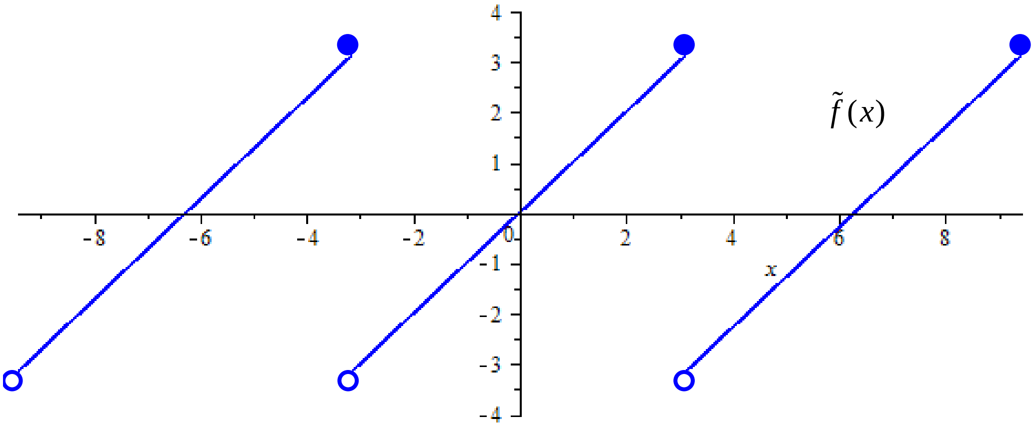
5. Указать свойства функции $f(x)$, которые заметным образом ухудшают качество сходимости ряда Фурье: какие именно свойства и как ухудшают сходимость (если такие свойства есть).

Решения выполнены с использованием математического пакета Maple.

Решение a) $f(x) = x$

1. Построим графики функций $f(x)$ и $\tilde{f}(x)$ – периодического продолжения функции $f(x)$ с промежутка $(-\pi;\pi]$ на всю числовую прямую.





2. Вычислим для функции $f(x)$ коэффициенты Фурье на промежутке $[-\pi;\pi]$.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0\,,\quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx dx = 0\,,\; k = 1, 2, \dots;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx dx = -\frac{2(-\sin\pi k + \pi k\cos\pi k)}{\pi k^2} = -2\frac{(-1)^k}{k}\,,\; k = 1, 2, \dots.$$

Составим для функции $f(x)$ ряд Фурье:

$$-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin kx\ .$$

3. Проведем теоретический анализ сходимости ряда Фурье.

3а. Сумма ряда.

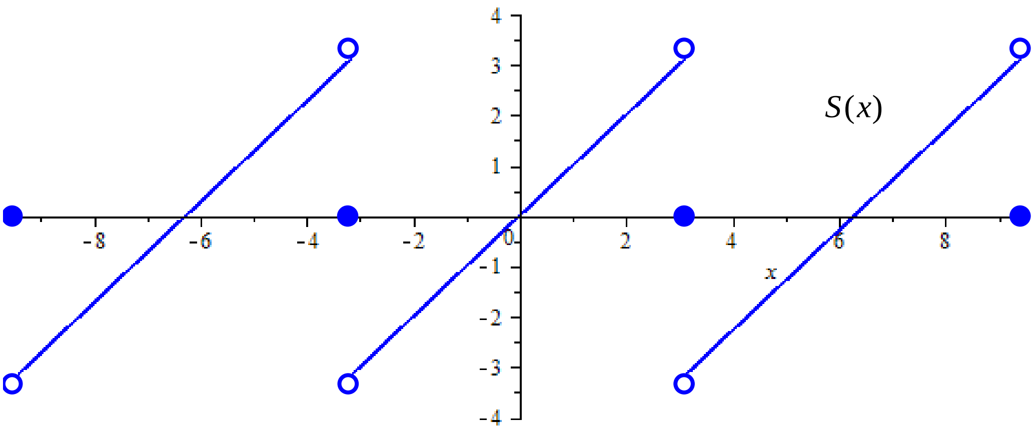
Выполняются условия поточечной сходимости ряда Фурье[1]:

функции $f(x)$, $f'(x)$ непрерывны на $[-\pi;\pi]$.

Ряд Фурье сходится в каждой точке $x \in R$ к значению

$$S(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x), & x \neq \pi + 2\pi k,\; k \in Z \\ 0, & x = \pi + 2\pi k,\; k \in Z \end{cases}.$$

График суммы ряда:



[1] См. конспект лекций, Теорема 4.6

3b. Значения функции $f(x) = x$ и суммы ряда Фурье $S(x)$ совпадают только на промежутке $(-\pi;\pi)$. Следовательно, имеется разложение:

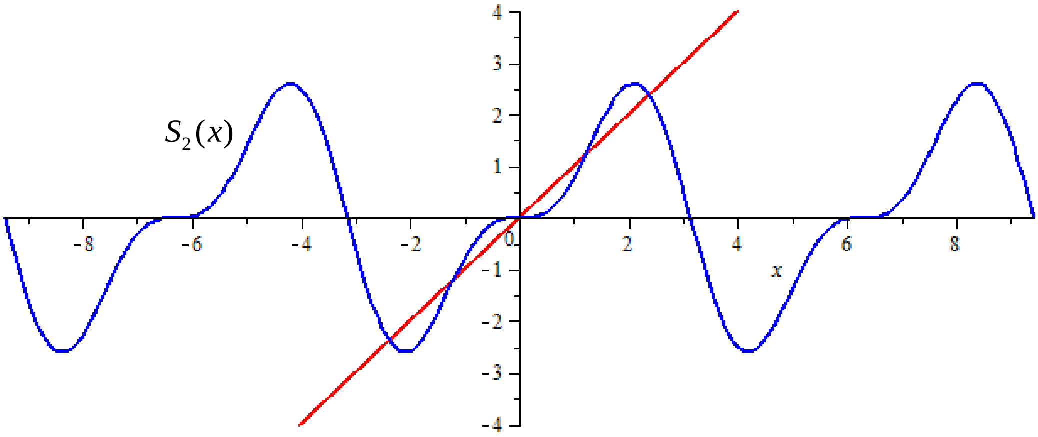
$$f(x) = x = -2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin kx, \quad x \in (-\pi;\pi). \qquad \text{(a)}$$

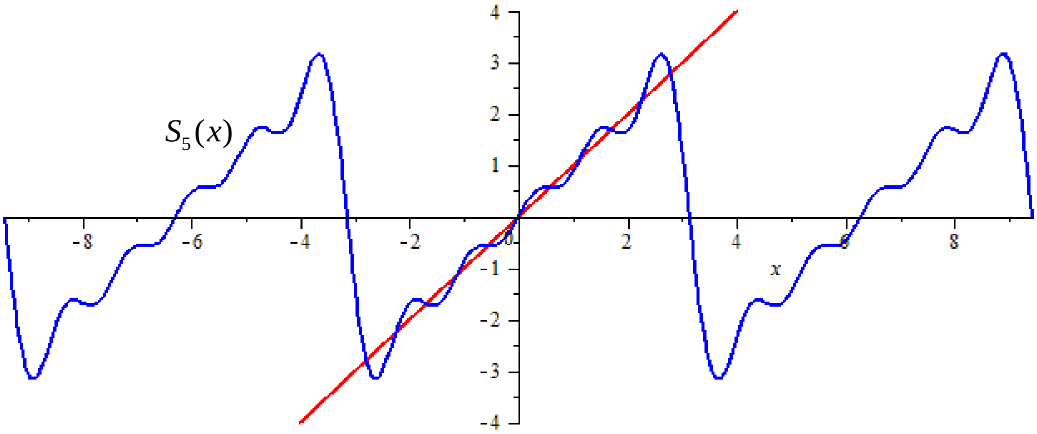
Не выполняется необходимое условие равномерной сходимости[2]:

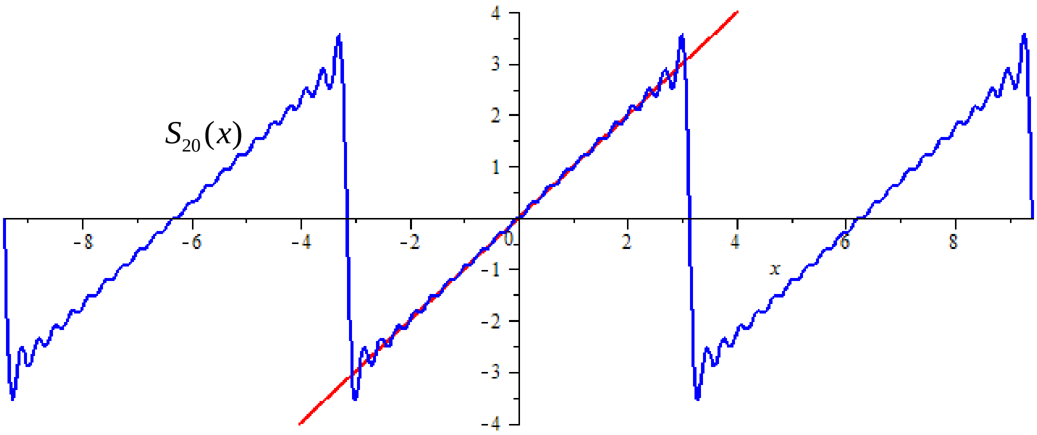
$f(-\pi) \neq f(\pi)$, иначе говоря, функция $\tilde{f}(x)$ не является непрерывной на R.

Сходимость ряда (а) только поточечная.

4. Проиллюстрируем сходимость ряда Фурье графически, построив графики нескольких частичных сумм и функции $f(x) = x$ на промежутке $[-3\pi;3\pi]$.





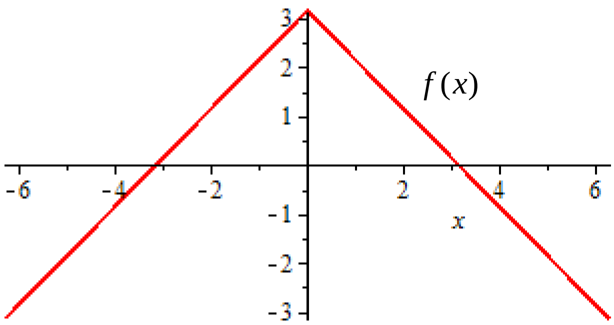


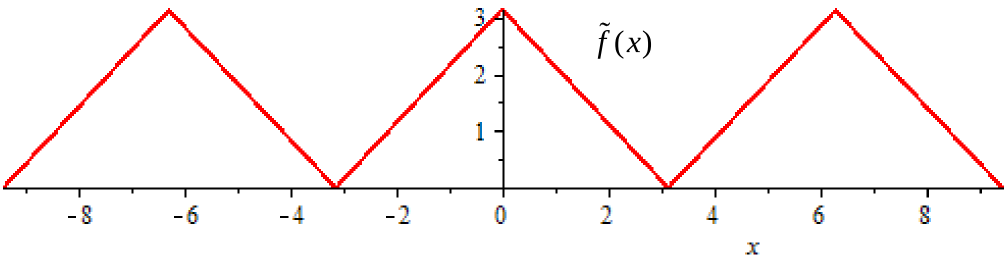
[2] См. конспект лекций, Теорема 4.7

5. По графикам видна поточечная сходимость ряда Фурье к $f(x)$ на промежутке $(-\pi;\pi)$. Вблизи краев промежутка $(-\pi;\pi)$ наблюдается эффект Гиббса – усиленные колебания $S_n(x)$, замедляющие поточечную сходимость и делающие графики $f(x)$ и $S_n(x)$ визуально различимыми при любом *n*. Эффект Гиббса появился из-за разрывов периодического продолжения функции $f(x)$, причина которых в данном случае – $f(-\pi) \neq f(\pi)$.

Решение b) $f(x) = \pi - |x|$

1. Построим графики функций $f(x)$ и $\tilde{f}(x)$ – периодического продолжения функции $f(x)$ с промежутка $(-\pi;\pi]$ на всю числовую прямую.





2. Вычислим для функции $f(x)$ коэффициенты Фурье на промежутке $[-\pi;\pi]$.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - |x|)dx = \frac{\pi}{2},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - |x|)\cos kx dx = -\frac{2(\cos \pi k - 1)}{\pi k^2} = -\frac{2((-1)^k - 1)}{\pi k^2}, \quad k = 1, 2, \ldots;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - |x|)\sin kx dx = 0, \; k = 1, 2, \ldots.$$

Составим для функции $f(x)$ ряд Фурье:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\cos kx \; .$$

3. Проведем теоретический анализ сходимости ряда Фурье.

3a. Сумма ряда.

Выполняются условия поточечной сходимости ряда Фурье[3]:

функция $f(x)$ непрерывна, функция $f'(x)$ кусочно непрерывна на $[-\pi;\pi]$.

Ряд Фурье сходится в каждой точке $x \in R$ к значению $S(x) = \tilde{f}(x)$, так как функция $\tilde{f}(x)$ непрерывна.

График суммы ряда $S(x)$ совпадает с графиком $\tilde{f}(x)$ (см. выше).

3b. Значения функции $f(x) = \pi - |x|$ и суммы ряда Фурье $S(x)$ совпадают только на промежутке $[-\pi;\pi]$. Следовательно, имеется разложение:

$$f(x) = \pi - |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\cos kx, \quad x \in [-\pi;\pi]. \qquad \text{(b)}$$

Выполняются условия равномерной сходимости[4]:

$f(x)$ непрерывна на $[-\pi;\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ (т.е. функция $\tilde{f}(x)$ непрерывна на R);

$f'(x)$ кусочно непрерывна на $[-\pi;\pi]$.

Сходимость ряда (b) равномерная.

3c. Определим скорость равномерной сходимости[5].

Найдем наибольшее целое число m, такое что:

$f^{(m)}(x)$ непрерывна на $[-\pi;\pi]$, $f^{(m)}(-\pi) = f^{(m)}(\pi)$;

$f^{(m+1)}(x)$ кусочно непрерывна на $[-\pi;\pi]$.

Тогда будет верна оценка:

$$\boxed{\left| f(x) - S_n(x) \right| < \frac{c}{n^{m+1/2}}}$$

В данном случае $m = 0$:

$f^{(0)}(x) = f(x)$ непрерывна на $[-\pi;\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$;

$f'(x)$ кусочно непрерывна на $[-\pi;\pi]$.

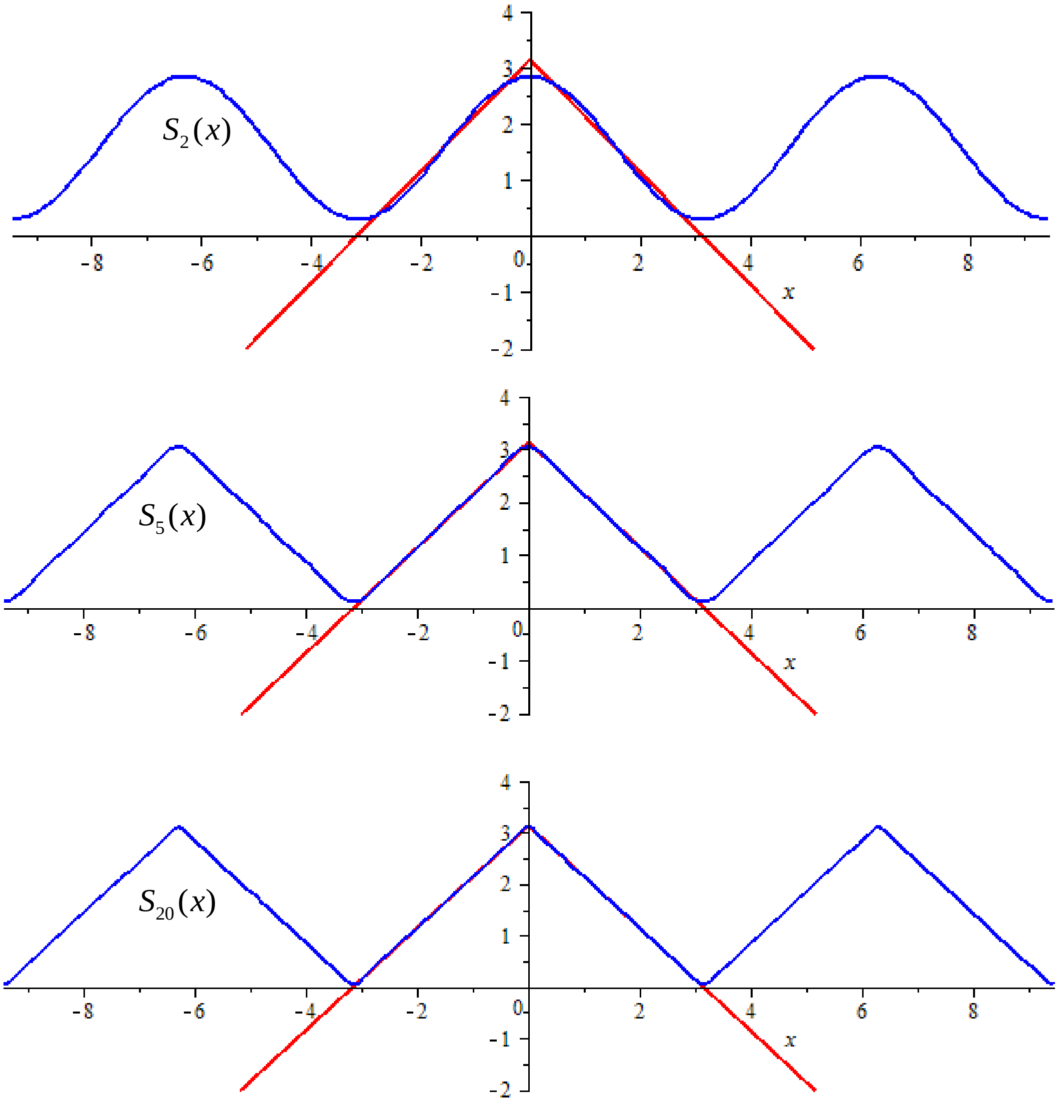
Скорость равномерной сходимости минимальная: $\left| f(x) - S_n(x) \right| < \dfrac{c}{\sqrt{n}}$.

4. Проиллюстрируем сходимость ряда Фурье графически, построив графики нескольких частичных сумм и функции $f(x) = \pi - |x|$ на промежутке $[-3\pi;3\pi]$.

[3] См. конспект лекций, Теорема 4.6

[4] См. конспект лекций, Теорема 4.7

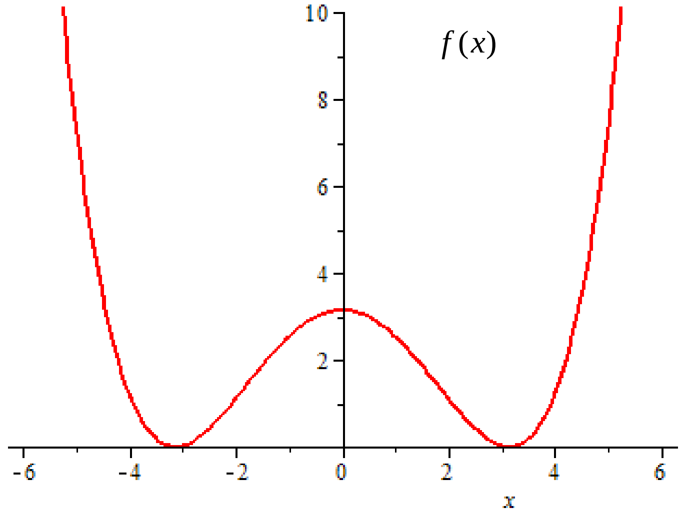
[5] См. конспект лекций, Теорема 4.8

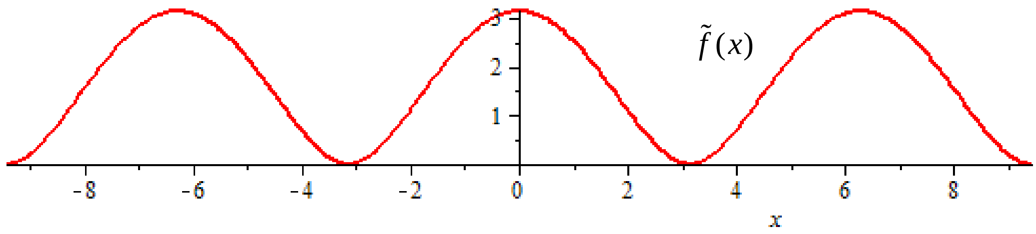


5. По графикам видна равномерная сходимость ряда Фурье к $f(x)$ на промежутке $[-\pi;\pi]$: $f(x)$ и $S_{20}(x)$ на промежутке $[-\pi;\pi]$ визуально неразличимы. Равномерная сходимость замедляется вблизи точек $-\pi, 0, \pi$, в которых периодическое продолжение функции $f(x)$ имеет изломы. Причем излом в точке 0 имеется у самой функции $f(x)$, а изломы (разрывы производной) в точках $-\pi, \pi$ появились у периодического продолжения из-за того, что $f'(-\pi) \neq f'(\pi)$.

Решение c) $f(x) = \pi\left(\left(\dfrac{x}{\pi}\right)^2 - 1\right)^2$

1. Построим графики функций $f(x)$ и $\tilde{f}(x)$ – периодического продолжения функции $f(x)$ с промежутка $(-\pi;\pi]$ на всю числовую прямую.





2. Вычислим для функции $f(x)$ коэффициенты Фурье промежутке на $[-\pi;\pi]$.

$$a_0 = \frac{8\pi}{15}, \quad a_k = -\frac{48}{\pi^3 k^4}(-1)^k, \quad b_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Составим для функции $f(x)$ ряд Фурье:

$$\frac{8\pi}{15} - \frac{48}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^4}\cos kx \ .$$

3. Проведем теоретический анализ сходимости ряда Фурье.

3a. Сумма ряда.

Выполняются условия поточечной сходимости ряда Фурье[6]:

функции $f(x)$, $f'(x)$ непрерывны на $[-\pi;\pi]$.

Ряд Фурье сходится в каждой точке $x \in R$ к значению

$S(x) = \tilde{f}(x)$, так как функция $\tilde{f}(x)$ непрерывна.

График суммы ряда $S(x)$ совпадает с графиком $\tilde{f}(x)$ (см. выше).

3b. Значения функции $f(x)$ и суммы ряда Фурье $S(x)$ совпадают только на промежутке $[-\pi;\pi]$. Следовательно, имеется разложение:

[6] См. конспект лекций, Теорема 4.6

$$f(x)=\pi\left(\left(\frac{x}{\pi}\right)^2-1\right)^2=\frac{8\pi}{15}-\frac{48}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^4}\cos kx,\quad x\in[-\pi;\pi]. \qquad \text{(c)}$$

Выполняются условия равномерной сходимости[7]:

$f(x)$ непрерывна на $[-\pi;\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$ (т.е. функция $\tilde{f}(x)$ непрерывна на R);

$f'(x)$ непрерывна на $[-\pi;\pi]$.

Сходимость ряда (c) равномерная.

3c. Определим скорость равномерной сходимости[8].

Найдем наибольшее целое число m, такое что:

$f^{(m)}(x)$ непрерывна на $[-\pi;\pi]$, $f^{(m)}(-\pi)=f^{(m)}(\pi)$;

$f^{(m+1)}(x)$ кусочно непрерывна на $[-\pi;\pi]$.

Тогда будет верна оценка:

$$\boxed{|f(x)-S_n(x)|<\frac{c}{n^{m+1/2}}}$$

В данном случае:

$f(x)=\pi\left(\left(\frac{x}{\pi}\right)^2-1\right)^2$ непрерывна на $[-\pi;\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$;

$f'(x)=\frac{4x}{\pi}\left(\left(\frac{x}{\pi}\right)^2-1\right)$ непрерывна на $[-\pi;\pi]$, $f'(-\pi)=f'(\pi)$;

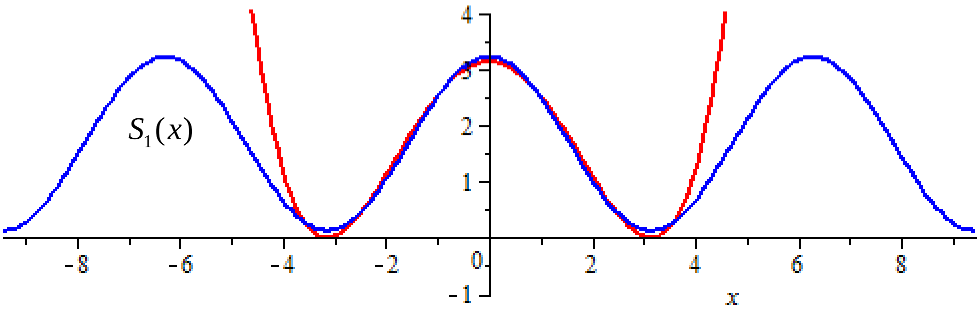
$f''(x)=\frac{12x^2}{\pi^3}-\frac{4}{\pi}$ непрерывна на $[-\pi;\pi]$, $f''(-\pi)=f''(\pi)$;

$f'''(x)=\frac{24x}{\pi^3}$ непрерывна на $[-\pi;\pi]$, $f'''(-\pi)\neq f'''(\pi)$.

Значит, $m=2$ и скорость сходимости ряда (c) выше, чем была у ряда (b):

$$|f(x)-S_n(x)|<\frac{c}{\sqrt{n^5}}.$$

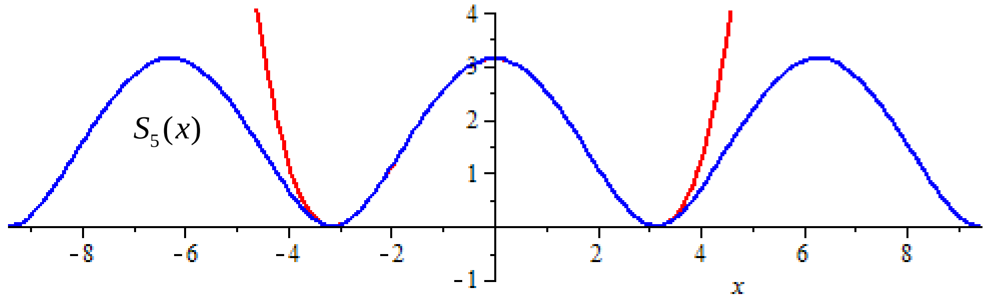
4. Проиллюстрируем сходимость ряда Фурье графически, построив графики нескольких частичных сумм и функции $f(x)$ на промежутке $[-3\pi;3\pi]$.



---

[7] См. конспект лекций, Теорема 4.7

[8] См. конспект лекций, Теорема 4.8



5. По графикам видна равномерная сходимость ряда Фурье к $f(x)$ на промежутке $[-\pi;\pi]$, причем достаточно быстрая: $S_5(x)$ и $f(x)$ на промежутке $[-\pi;\pi]$ визуально неразличимы. Поэтому нет смысла приводить графики частичных сумм более высокого порядка, они также будут визуально неразличимы с $f(x)$ на $[-\pi;\pi]$. Свойств функции, которые бы заметно ухудшали качество сходимости, нет.