Ряды

Н. В. Филимоненкова

Содержание

Введение

Пусть $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ – бесконечная последовательность элементов некоторого множества. *Рядом* называется суммирование бесконечной последовательности элементов, т. е. суммирование бесконечного числа пронумерованных слагаемых:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k + \ldots .$$

В математическом анализе встречаются ряды следующих типов.

1. Числовые ряды: $u_k \in \mathbb{R}$ – числа.
2. Функциональные ряды: $u_k = u_k(x), x \in \mathbb{R},$ – функции. Среди функциональных рядов наиболее распространены
   - степенные ряды: $u_k(x) = a_k(x - x_0)^k$, $x_0, a_k \in \mathbb{R}$;
   - тригонометрические ряды: $u_k(x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

Терминология:

u_k – *общий член* ряда;

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ – *частичная сумма* ряда порядка n.

Основная идея – интерпретировать суммирование бесконечного числа слагаемых как предел последовательности частичных сумм, каждая из которых содержит конечное число слагаемых:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

1. Числовые ряды

1.1. Понятие сходимости и суммы ряда

Определение 1.1. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, его частичную сумму $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ порядка n и последовательность его частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Суммой ряда называется предел

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Числовой ряд называется *сходящимся*, если этот предел существует и конечный. Числовой ряд называется *расходящимся*, если этот предел бесконечный или не существует.

Коротко говоря, сходящийся ряд – это ряд с конечной суммой, расходящийся ряд – это ряд с бесконечной суммой или вообще без суммы.

Типичные задачи для числовых рядов:

- найти (точную) сумму ряда;
- если это трудно или невозможно, то установить, имеет ли ряд конечную сумму (сходится или расходится);
- в случае сходимости найти приближенную сумму ряда.

Примеры вычисления суммы ряда по определению 1.1.

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$

   Вычислим частичную сумму ряда и предел последовательности частичных сумм:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = n, \quad S = \lim_{n\to\infty} n = +\infty.$$

   Ряд имеет бесконечную сумму, ряд расходится.

2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$

   Здесь $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, $u_3 = -1$ и т.д.. Вычислим частичную сумму ряда и предел последовательности частичных сумм:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 1, \ n = 0, 2, 4, \ldots \\ 0, \ n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}, \quad \lim_{n\to\infty} S_n \text{ не существует.}$$

   Сумма ряда не существует, ряд расходится.

3. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$

   В данном примере сумму ряда можно найти из геометрической модели: как показано на рис. 1, прямоугольник со сторонами 1 и 2 можно разбить на бесконечное число фрагментов площадью 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 и т. д. Тогда сумма данного ряда равна площади всего прямоугольника:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 2.$$

   Ряд имеет конечную сумму, ряд сходится.

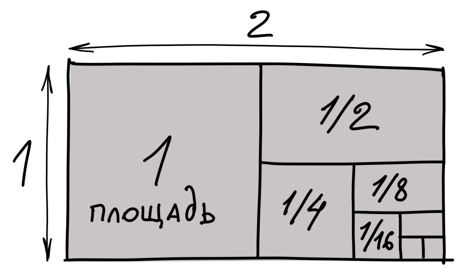

Рис. 1

Рассмотрим ряд, который является обобщением рассмотренных примеров, и называется *бесконечной геометрической прогрессией*:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots, \quad q \in \mathbb{R}.$$

Поскольку случаи $q = 1$ и $q = -1$ разобраны в примерах 1 и 2, то полагаем далее $q \neq \pm 1$. Из курса элементарной математики известна формула для суммы нескольких первых членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Предел последовательности частичных сумм зависит от значения q:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \text{ при } |q| < 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \infty \text{ при } |q| > 1.$$

Объединяя эту информацию с результатами примеров 1 и 2, приходим к следующему выводу: бесконечная геометрическая прогрессия сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geqslant 1$. Причем в случае сходимости известна сумма ряда

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1 - q}, \quad |q| < 1. \qquad (1.1)}$$

Простейшие свойства рядов, которые следуют непосредственно из определения 1.1 и свойств пределов:

- числовой множитель можно вынести из-под знака суммы: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c u_k = c \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k, \ \ c \neq 0;$

- если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ сходятся, то сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_k + v_k)$, причем $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_k + v_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$;
- ряд останется сходящимся (расходящимся), если к нему добавить конечное число слагаемых или из него убрать конечно число слагаемых; в частности, сходимость ряда не зависит от его начальных слагаемых.

Лемма 1.2 (Необходимое условие сходимости ряда)**.** Для того чтобы ряд сходился, необходимо, чтобы общий член ряда стремился к нулю:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad \text{сходится} \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} u_k = 0.$$

Доказательство. Поскольку ряд сходится, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}.$$

Ясно также, что сдвиг порядка частичной суммы на единицу не изменит предела:

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S.$$

Чтобы доказать утверждение леммы, надо выразить общий член ряда как разность двух частичных сумм и воспользоваться свойством конечных пределов:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0.$$

□

Замечание 1. В необходимом условии сходимости ряда можно заменить u_k на $|u_k|$:

$$\lim_{k\to\infty} u_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} |u_k| = 0.$$

Применение леммы 1.2 является результативным, когда необходимое условие не выполнено:

$$\lim_{k\to\infty} u_k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad \text{расходится.}$$

Если же необходимое условие сходимости выполнено, то ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Примеры использования необходимого условия сходимости.

1. Примеры рядов, у которых не выполнено необходимое условие сходимости:
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{k+1},\quad \lim_{k\to\infty}\sqrt{k+1}=+\infty;\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k^2}{k^2+1},\quad \lim_{k\to\infty}\frac{2k^2}{k^2+1}=2;$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{k},\quad \lim_{k\to\infty}\cos\frac{\pi}{k}=1;\qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k,\quad \lim_{k\to\infty}(-1)^k k=\infty;$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sin k,\quad \lim_{k\to\infty}\sin k\quad \text{не существует.}$$
Каждый их этих рядов расходится.

2. Пример сходящегося ряда, у которого выполнено необходимое условие сходимости:
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k=\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\ldots,\quad \lim_{k\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k=0.$$
Выполнение необходимого условия не дает информации о сходимости ряда, но данный ряд действительно сходится, так как является бесконечной геометрической прогрессией с $q=2/3<1$. Согласно формуле (1.1) сумма ряда равна 2:
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k-1=\frac{1}{1-2/3}-1=2.$$

3. Пример расходящегося ряда, у которого выполнено необходимое условие сходимости:
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots,\quad \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}=0.$$
Этот ряд называется *гармоническим.* Выполнение необходимого условия не дает информации о сходимости этого ряда, однако далее будет показано, что гармонический ряд расходится и его сумма равна $+\infty$.

1.2. Знакоположительные ряды

Числовой ряд называется *знакоположительным*, если все его слагаемые положительны. В этом разделе изложены достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов, т. е. условия, которые гарантируют сходимость.

Заметим, что последовательность частичных сумм знакоположительного ряда возрастает, а, как известно, любая монотонно возрастающая последовательность имеет предел. Следовательно, у любого знакоположительного ряда есть сумма – число или плюс-бесконечность:
$$u_k>0\quad\Rightarrow\quad S_{n+1}>S_n\ \forall n\quad\Rightarrow\quad \exists S=\lim_{n\to\infty}S_n,\ S\in\mathbb{R}\text{ или }S=+\infty.$$

Поскольку имеются только две эти возможности, то сходимость или расходимость знакоположительного ряда можно записывать формально:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k < +\infty \text{ – знакоположительный ряд сходится,}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = +\infty \text{ – знакоположительный ряд расходится.}$$

Напомним два знакоположительных ряда, которые были приведены в качестве примеров в предыдущем разделе:

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \ldots = 2,$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = +\infty.$$

В обоих случаях выполнено необходимое условие сходимости: $u_k \to 0$. Это значит, что возрастание последовательности частичных сумм S_n замедляется, но во втором случае замедляется недостаточно сильно, чтобы предел S_n конечным (рис.2)

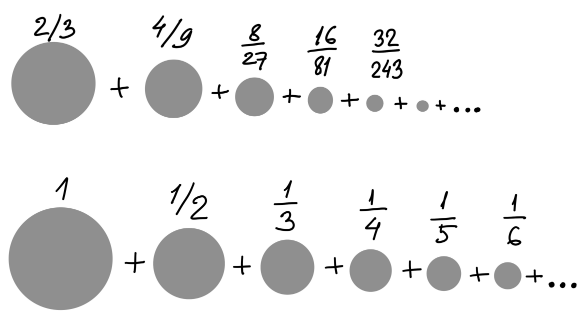

Рис. 2

Таким образом, сходимость знакоположительного ряда зависит от скорости стремления к нулю общего члена ряда, т. е. от порядка малости u_k. Чем выше порядок малости величины u_k, тем больше вероятность, что ряд сходится.

Для выявления порядка малости u_k можно использовать сравнение знакоположительного ряда с другим, более простым, рядом. На этой идее основана следующая лемма.

Лемма 1.3 (Признаки сравнения)**.** Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ – знакоположительные ряды, для которых выполнено необходимое условие сходимости.
I. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится и $u_k \leqslant v_k$ при $\forall k \geqslant 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ тоже сходится.
II. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ расходится и $u_k \geqslant v_k$ при $\forall k \geqslant 1$,то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ тоже расходится.
III. Если $u_k \sim v_k$ при $k \to \infty$, то ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Доказательство. Утверждения леммы вполне очевидны, исходя из предварительного описания сходимости знакоположительных рядов, с которого начинается этот раздел. Тем не менее, проведем формально строгое доказательство I и II пункта.

Обозначим частичные суммы рядов следующими символами:

$$S_n^u = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad S_n^v = \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

Поскольку оба ряда знакоположительные, то у каждого из них существует сумма – предел последовательности частичных сумм. Как известно, предельный переход сохраняет знак неравенства. В случае I получаем:

$$u_k \leqslant v_k \quad \Rightarrow \quad S_n^u \leqslant S_n^v \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} S_n^u \leqslant \lim_{n\to\infty} S_n^v < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} v_k < +\infty.$$

Из последней цепочки неравенств вытекает, что сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ конечная.

В случае II получаем:

$$u_k \geqslant v_k \quad \Rightarrow \quad S_n^u \geqslant S_n^v \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} S_n^u \geqslant \lim_{n\to\infty} S_n^v = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} v_k = +\infty.$$

Из последней цепочки неравенств вытекает, что сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ бесконечная. $\square$

Замечание 2. В пунктах I и II неравенство между u_k и v_k не обязательно должно выполняться для всех $k \geqslant 1$. Поскольку сходимость ряда не зависит от начальных слагаемых, то достаточно выполнения неравенства для всех $k \geqslant k_0 \geqslant 1$, т. е. начиная с некоторого номера.

Замечание 3. Напомним, что бесконечно малые u_k и v_k эквиваленты, если $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{u_k}{v_k} = 1$, и это означает, что u_k и v_k стремятся к нулю с одинаковой скоростью. Утверждение пункта III также верно, если u_k и v_k – бесконечно малые одного порядка, т. е. $u_k \sim \alpha v_k,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0$.

Лемма 1.4 (Интегральный признак)**.** Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ – знакоположительный ряд. Рассмотрим функцию $u(x)$, такую что $u(k) = u_k$. Пусть функция $u(x)$ непрерывна и убывает на промежутке $[1; +\infty)$. Тогда

$$\text{ряд } \sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ и несобственный интеграл } \int_1^{\infty} u(x)dx$$

либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Доказательство. Заметим, что функция $u(x)$, удовлетворяющая условиям леммы, является положительной: $u(x) > 0$ при $x \in [1; +\infty)$. Несобственный интеграл от положительной функции, как и знакоположительный ряд, может иметь либо конечное значение (сходится), либо бесконечно большое положительное значение (расходится).

Доказательство основано на геометрической интерпретации несобственного интеграла от положительной функции и ряда с положительными слагаемыми (рис.3, 4).

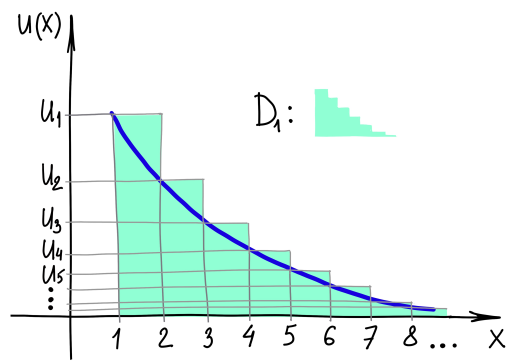

Рис. 3

Обозначим символом D фигуру, ограниченную графиком функции $u(x)$, осью абсцисс и прямой $x = 1$. Площадь этой фигуры вычисляется как несобственный интеграл

$$S_D = \int_1^{\infty} u(x)dx.$$

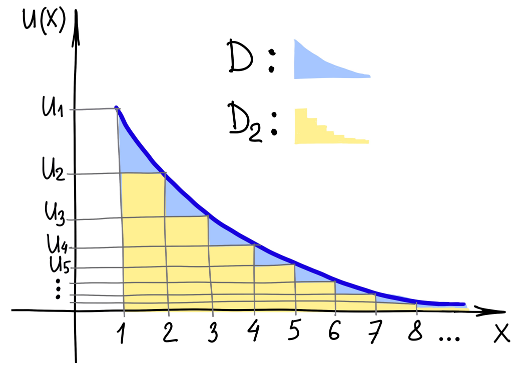

Рис. 4

Отметим на графике функции $u(x)$ значения $u(k) = u_k$ и построим две ступенчатые фигуры $D_1 \supset D$ и $D_2 \subset D$. Эти фигуры состоят из бесконечного числа прямоугольников ширины 1, поэтому их площади выражаются в виде ряда:

$$S_{D_1} = u_1 \cdot 1 + u_2 \cdot 1 + u_3 \cdot 1 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad S_{D_2} = u_2 \cdot 1 + u_3 \cdot 1 + u_4 \cdot 1 + \ldots = \sum_{k=2}^{\infty} u_k.$$

По построению $S_{D_2} \leqslant S_D \leqslant S_{D_1}$:

$$\sum_{k=2}^{\infty} u_k \leqslant \int_1^{\infty} u(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} u_k.$$

Из этой двойной оценки видно, что если несобственный интеграл расходится, то и ряд расходится, а если несобственный интеграл сходится, то и ряд сходится. $\square$

Замечание 4. Поскольку сходимость ряда не зависит от начальных слагаемых, то лемма верна даже в том случае, если функция $u(x)$ непрерывна и убывает на промежутке $[x_0; +\infty)$ с некоторым $x_0 \geqslant 1$. В этом случае сходимость ряда сводится к сходимости несобственного интеграла $\int_{x_0}^{\infty} u(x)dx$.

Проанализируем при помощи интегрального признака ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots.$$

Такой знакоположительный ряд называется *обобщенным гармоническим*. При $p = 1$ – просто *гармоническим*. Если $p \leqslant 0$, то не выполняется необходимое условие сходимости:

$$p \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^p} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{ряд расходится.}$$

Для $p > 0$ используем интегральный признак:

$$p > 0 \quad \Rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{x^p} \text{ непрерывна и убывает на } [1; +\infty).$$

Как известно, несобственный интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} \quad \begin{matrix} \text{сходится при } p > 1, \\ \text{расходится при } p \leqslant 1. \end{matrix}$$

То же самое справедливо для ряда. Объединяя все данные, запишем общий вывод для обобщенного гармонического ряда.

$$\boxed{\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^p} \quad \begin{matrix} \text{сходится при } p > 1, \\ \text{расходится при } p \leqslant 1. \end{matrix}}$$

В частности, гармонический ряд расходится:

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = +\infty.$$

Лемма 1.5 (Признак Даламбера)**.** Пусть $\sum\limits_{k=1}^\infty u_k$ – знакоположительный ряд. Пусть существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = c \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Тогда верно следующее:

$$c < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^\infty u_k \quad \text{сходится;}$$

$$c > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^\infty u_k \quad \text{расходится.}$$

Доказательство. Заметим, что в любом случае $c \geqslant 0$, поскольку ряд знакоположительный.

Докажем сходимость ряда в случае $c < 1$. Поскольку $c \in [0; 1)$, то по определению конечного предела

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = c \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists k_0(\varepsilon) : \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} - c \right| \leqslant \varepsilon \;\; \forall k \geqslant k_0$$

$$\Rightarrow \quad c-\varepsilon \leqslant \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant c+\varepsilon \ \ \forall k \geqslant k_0.$$

Нам понадобится только правая часть этого двойного неравенства. Возьмем столь малое $\varepsilon > 0$, что $c+\varepsilon < 1$ (такое ε существует, так как $c < 1$). Обозначим $q = c+\varepsilon < 1$:

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant q \ \ \forall k \geqslant k_0.$$

Подставляя в это неравенство значения $k = k_0, k_0+1, k_0+2 ...$, получим:

$u_{k_0} \leqslant u_{k_0}$ (тривиальное неравенство),
$u_{k_0+1} \leqslant qu_{k_0}$ (подстановка $k = k_0$),
$u_{k_0+2} \leqslant qu_{k_0+1} \leqslant q^2 u_{k_0}$ (подстановка $k = k_0+1$),
$u_{k_0+3} \leqslant qu_{k_0+2} \leqslant q^3 u_{k_0}$ (подстановка $k = k_0+2$) и так далее.

Рассмотрим суммы левых и суммы правых частей всех неравенств.
Справа получается ряд

$$u_{k_0} + qu_{k_0} + q^2u_{k_0} + q^3u_{k_0} + \ldots = u_{k_0}\sum_{k=0}^{\infty} q^k,$$

который сходится как бесконечная геометрическая прогрессия с $0 < q < 1$.
Тогда, согласно признаку сравнения, ряд, который получился слева

$$u_{k_0} + u_{k_0+1} + u_{k_0+2} + u_{k_0+3} + ... = \sum_{k=k_0}^{\infty} u_k$$

тоже сходится. То же самое верно для исходного ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, поскольку сходимость ряда не зависит от него начальных слагаемых.

Докажем расходимость ряда в случае $c > 1$ (в том числе может быть $c = +\infty$). Вновь используя определение предела, легко показать, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} > 1 \quad \Rightarrow \quad \exists k_0 : \frac{u_{k+1}}{u_k} > 1 \ \ \forall k \geqslant k_0.$$

Это значит, что $u_{k+1} > u_k$, т. е. положительная последовательность u_k возрастает, начиная с номера k_0, и не может стремиться к нулю. Не выполнено необходимое условие сходимости, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ расходится. $\square$

Замечание 5. Если $c = 1$, то признак Даламбера не дает информации о сходимости ряда, ряд может оказаться как сходящимся, так и расходящимся. Приведем пример расходящегося гармонического ряда и сходящегося обобщенного гармонического ряда, у которых $c = 1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} = 1.$$

Лемма 1.6 (Радикальный признак)**.** Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ – знакоположительный ряд. Пусть существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} = c \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Тогда верно следующее:

$$c < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad \text{сходится;}$$

$$c > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad \text{расходится.}$$

Как и признак Даламбера, радикальный признак не дает информации о сходимости ряда, если $c = 1$.

Упражнение. Доказать радикальный признак сходимости знакоположительных рядов (способ доказательства аналогичен признаку Даламбера).

1.3. Знакопеременные ряды

Числовой ряд называется *знакопеременным*, если в нем есть слагаемые разного знака. Говоря точнее, "настоящим" знакопеременным рядом является такой ряд, в котором бесконечно много положительных и бесконечно много отрицательных слагаемых (в противном случае ряд станет знакопостоянным после отбрасывания конечного числа начальных членов).

В отличие от знакоположительных рядов, сумма знакопеременного ряда может быть конечной, бесконечной (с тем или иным знаком или без знака), а может также вообще не существовать.

Рассмотрим частный случай знакопеременного ряда – *знакочередующийся* ряд и сравним его с аналогичным знакоположительным рядом. Пусть $u_k > 0$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k u_k.$$

Допустим, выполнено необходимое условие сходимости: $u_k \to 0$, т. е. приращение частичных сумм замедляется. Но у второго ряда оно дополнительно еще замедляется переменой знаков (соседние слагаемые частично "гасят" друг друга, рис.5).

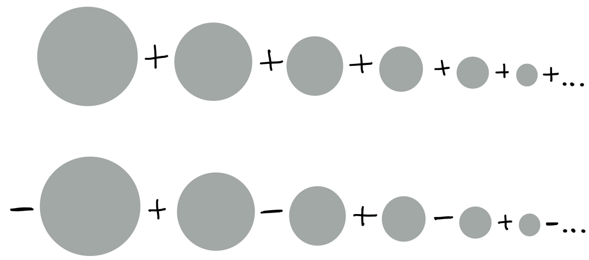

Рис. 5

Поэтому вероятность сходимости второго ряда выше, чем первого, а значит, достаточные условия для сходимости должны быть слабее.

Оказывается, что у знакочередующегося ряда с убывающими по абсолютной величине слагаемыми необходимое условие сходимости является одновременно и достаточным.

Лемма 1.7 (Признак Лейбница)**.** Пусть $u_k > 0$, последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ убывает и $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$. Тогда знакочередующийся ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k u_k$ сходится.

Доказательство. Докажем сходимость знакочередующегося ряда непосредственно по определению сходимости. Рассмотрим частичные суммы с четным и нечетным числом слагаемых.

1. Рассмотрим частичную сумму с четным числом слагаемых:

$$S_{2n} = -u_1+u_2-u_3+u_4-\ldots-u_{2n-1}+u_{2n} = \underbrace{(-u_1+u_2)}_{\leqslant 0}+\underbrace{(-u_3+u_4)}_{\leqslant 0}+\ldots+\underbrace{(-u_{2n-1}+u_{2n})}_{\leqslant 0}.$$

Каждое число в скобках отрицательно (точнее, $\leqslant 0$), так как u_k убывает. Поэтому $S_{2n} \geqslant S_{2n+2}$, последовательность $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ убывает. Покажем, что она ограничена снизу числом $-u_1$:

$$S_{2n} = -u_1 + \underbrace{(u_2-u_3)}_{\geqslant 0} + \underbrace{(u_4-u_5)}_{\geqslant 0} + \ldots + \underbrace{(u_{2n-2}-u_{2n-1})}_{\geqslant 0} + \underbrace{u_{2n}}_{\geqslant 0} \geqslant -u_1.$$

По свойствам монотонных последовательностей заключаем, что $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ имеет конечный предел:

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \in \mathbb{R}.$$

2. Рассмотрим частичную сумму с нечетным числом слагаемых. Воспользуемся арифметическими свойствами конечных пределов и условием леммы:

$$S_{2n+1} = S_{2n} - u_{2n+1} \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} - u_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = S + 0 = S.$$

□

Определение 1.8. Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ называется сходящимся *абсолютно*, если сходится ряд с модулями $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$.

Заметим, что данное определение применимо к ряду любого типа. Если ряд знакоположительный, то он ничем не отличается от ряда с модулями, а значит, для него абсолютная сходимость совпадает с обычной сходимостью.

Если же ряд знакопеременный, то нетрудно предположить, что абсолютная сходимость – более сильное свойство, чем обычная сходимость.

Лемма 1.9 (Из абсолютной сходимости вытекает обычная сходимость)**.**

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \quad \text{сходится} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad \text{сходится.}$$

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$ сходится. Выделим положительную и отрицательную часть последовательности $\{u_k\}$:

$$u_k^+ = \frac{|u_k| + u_k}{2} = \begin{cases} u_k, \ u_k > 0 \\ 0, \ u_k \leqslant 0 \end{cases}, \quad 0 \leqslant u_k^+ \leqslant |u_k|.$$

$$u_k^- = \frac{|u_k| - u_k}{2} = \begin{cases} -u_k, \ u_k < 0 \\ 0, \ u_k \geqslant 0 \end{cases}, \quad 0 \leqslant u_k^- \leqslant |u_k|.$$

Ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k^+, \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k^-$$

являются знакоположительными (не считая нулевых слагаемых) и сходятся по признаку сравнения с рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ тоже сходится как разность двух сходящихся рядов (по свойству линейности):

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k^+ - u_k^-) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} u_k^-.$$

□

В ходе доказательства получили свойство абсолютно сходящихся рядов: такой ряд можно разбить на два ряда – с положительными слагаемыми и с отрицательными слагаемыми.

Поскольку абсолютная сходимость – более сильное свойство, чем обычная сходимость, то отсутствие абсолютной сходимости еще не значит, что нет обычной сходимости:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \quad \text{расходится} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad \text{может сходиться или расходиться.}$$

Определение 1.10. Знакопеременный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ называется сходящимся *условно*, если он сходится, но не абсолютно.

Абсолютная сходимость обусловлена высокой скоростью стремления к нулю общего члена ряда. Условная сходимость означает, что недостаточно высокая скорость стремления к нулю общего члена ряда компенсируется тем, что члены ряда разного знака частично "гасят" друг друга.

Примеры исследования знакопеременных рядов.

1. Пример абсолютно сходящегося ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}.$$

Ряд с модулями сходится по признаку сравнения со сходящимся обобщенным гармоническим рядом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\sin k}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin k|}{k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

2. Пример условно сходящегося ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Ряд с модулями (гармонический ряд) расходится:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^k}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = +\infty.$$

Значит, абсолютной сходимости нет. Проверим обычную сходимость по признаку Лейбница:

$$u_k = \frac{1}{k} \quad \text{убывает}, \quad \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k} \quad \text{сходится}.$$

Следовательно, ряд сходится условно.

3. Пример расходящегося ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k+1}{k}.$$

Не выполнено необходимое условие сходимости:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k} = 1 \neq 0.$$

1.4. Некоторые свойства бесконечного суммирования

Напомним свойства суммы конечно числа слагаемых, позволяющие менять порядок суммирования.

Ассоциативность сложения, группировка слагаемых:

$$(a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c.$$

Коммутативность сложения, перестановка слагаемых:

$$a+b = b+a.$$

Дистрибутивность сложения и умножения и ее следствие:

$$(a+b)c = ac+bc \quad \Rightarrow (a+b)(c+d) = ac+bc+ad+bd.$$

При определенных условиях эти свойства переносятся на суммирование бесконечного числа слагаемых.

1. Если ряд сходится (не обязательно абсолютно), то допустима группировка слагаемых. Любые группы слагаемых можно заключить в скобки , просуммировать слагаемые в скобках, получить новый ряд, он также будет сходящимся и его сумма равна сумме исходного ряда:

$$u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+u_6+u_7+u_8+u_9+u_{10}+u_{11}+\ldots =$$

$$= (\underbrace{u_1 + u_2 + u_3}_{v_1}) + (\underbrace{u_4 + u_5}_{v_2}) + (\underbrace{u_6 + u_7 + u_8 + u_9}_{v_3}) + (\underbrace{u_{10} + u_{11}}_{v_4}) + \ldots =$$
$$= v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \ldots.$$

Рассмотрим сходящийся ряд (сходится условно, по признаку Лейбница):

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \ldots.$$

Найдем сумму ряда по определению:

$$\begin{cases} S_{2n+1} = 1, \\ S_{2n} = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

Однако проще найти сумму, сгруппировав слагаемые по парам и вычислив сначала значения в скобках:

$$1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \ldots = 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots = 1.$$

Группировка слагаемых расходящегося ряда запрещена. Например,

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \neq (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0.$$

Обратное действие, т. е. раскрытие скобок для слагаемых сходящегося ряда допустимо, только если после этого вновь получается сходящийся ряд. Это подтверждает предыдущий пример, "прочитанный" справа налево.

2. Если ряд сходится абсолютно, то допустима перестановка слагаемых: любой ряд, полученный из него перестановкой слагаемых, тоже сходится абсолютно и его сумма совпадает с суммой исходного ряда. Под перестановкой слагаемых понимается следующее: пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – биективное (взаимно однозначное) отображение множества натуральных чисел в себя, тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} u_{f(k)}.$$

Перестановка слагаемых условно сходящегося ряда может привести к изменению его суммы или вообще к расходимости:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots.$$

Рассмотрим следующий вариант перестановки и последующей группировки слагаемых:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \ldots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots\right).$$

Получился исходный условно сходящийся ряд с коэффициентом $1/2$, т. е. его сумма в два раза меньше первоначальной.

Приведем без доказательства теорему Римана: если ряд сходится условно, то в нем можно так изменить порядок суммирования, что суммой ряда будет любое наперед заданное число или бесконечность.

3. Абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать аналогично конечным суммам: каждый член одного ряда умножается на каждый член другого ряда. В результате получается также абсолютно сходящийся ряд и его сумма равна произведению сумм перемножаемых рядов.

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} v_l = \sum_{k,l=0}^{\infty} u_k v_l.$$

Поскольку ряд, составленный из произведений, сходится абсолютно, то неважно, в каком порядке производить их суммирование. Наиболее популярные варианты:

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} u_k v_l = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} u_k v_l = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} u_k v_l = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k} u_k v_{l-k}.$$

Таким образом, свойства конечного суммирования в полной мере переносятся только на абсолютно сходящиеся ряды.

Упражнение. Доказать свойства 1, 2 бесконечного суммирования.

1.5. Приближенное вычисление суммы ряда

Допустим, числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится, но его сумму S вычислить невозможно или трудно. В качестве приближенного значения суммы ряда естественно брать его частичную сумму:

$$S \approx S_n.$$

Погрешность этого приближенного равенства равна

$$|S - S_n| = |R_n|, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \text{ – остаток ряда.}$$

Поскольку $S_n \to S$, то $R_n \to 0$ и при достаточно больших номерах n значение частичной суммы S_n становится сколь угодно близким к сумме ряда S, а остаток становится сколь угодно малым.

Чтобы вычислить приближенное значение суммы ряда с точностью ε, надо подобрать такой порядок n, что $|R_n| \leqslant \varepsilon$. Для этого используются следующие оценки остатка.

Лемма 1.11 (Оценки остатка сходящегося ряда)**.** Пусть $u_k > 0$.

I. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k u_k$ сходится по признаку Лейбница, то

$$|R_n| \leqslant u_{n+1}.$$

II. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится по интегральному признаку, то

$$R_n \leqslant \int_n^{\infty} u(x)dx, \quad u(k) = u_k.$$

III. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится по признаку Даламбера, то, начиная с некоторого номера n_0, верна оценка

$$R_n \leqslant u_n \frac{1+c}{1-c}, \quad c = \lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k}, \quad n \geqslant n_0.$$

Номер n_0 зависит от конкретного ряда. А именно, это номер, начиная с которого выполняется

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{c+1}{2}.$$

Доказательство. Докажем утверждение I. Оценку остатка ряда, сходящегося по признаку Лейбница, можно вывести с помощью методов рассуждения, аналогичных доказательству самого признака Лейбница.

Пусть знакочередующийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k u_k = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots$$

сходится по признаку Лейбница к сумме S. Следовательно выполнены условия этого признака, в частности u_k убывает.

Рассмотрим последовательности частичных сумм четного и нечетного порядка:

$$S_{2n} = \underbrace{(-u_1 + u_2)}_{\leqslant 0} + \underbrace{(-u_3 + u_4)}_{\leqslant 0} + \ldots + \underbrace{(-u_{2n-1} + u_{2n})}_{\leqslant 0} \quad \Rightarrow \quad \{S_{2n}\} \text{ убывает;}$$

$$S_{2n+1} = -u_1 + \underbrace{(u_2 - u_3)}_{\geqslant 0} + \underbrace{(u_4 - u_5)}_{\geqslant 0} + \ldots + \underbrace{(u_{2n} - u_{2n+1})}_{\geqslant 0} \quad \Rightarrow \quad \{S_{2n+1}\} \text{ возрастает.}$$

Значит, $S = \inf\{S_{2n}\}$, $S = \sup\{S_{2n+1}\}$. Отсюда можно получить оценку остатка ряда четного и нечетного порядка:

$$S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n} \quad \Leftrightarrow \quad S_{2n+1} - S_{2n} \leqslant S - S_{2n} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad -u_{2n+1} \leqslant R_{2n} \leqslant 0;$$

$$S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n+2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant S - S_{2n+1} \leqslant S_{2n+2} - S_{2n+1} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant R_{2n+1} \leqslant u_{2n+2}.$$

В любом случае получается $|R_n| \leqslant u_{n+1}$. □

Замечание 6. Последние неравенства, выведенные в доказательстве, показывают, что у знакочередующегося ряда знак остатка R_n определяется знаком его первого слагаемого $(-1)^{n+1}u_{n+1}$ и по абсолютной величине не превосходит u_{n+1}. Поскольку всю сумму ряда можно считать его остатком нулевого порядка, то сумма имеет тот же знак, что первое слагаемое u_1, и по модулю не превосходит u_1.

Упражнение. На основе методов доказательства интегрального признака и признака Даламбера, доказать утверждения II и III леммы.

Примеры приближенного вычисления суммы ряда.

1. Найти приближенное значение суммы ряда с точностью $\varepsilon = 0,1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}.$$

Этот ряд знакочередующийся, и для него выполнены условия признака Лейбница:

$$u_k = \frac{1}{k^2} \text{ убывает}, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^2} = 0.$$

Значит, ряд сходится по признаку Лейбница. Согласно замечанию 6 сумма этого ряда контролируется первым слагаемым: она положительна и не превосходит 1.

Вычислим приближенную сумму этого ряда с помощью частичной суммы: $S \approx S_n$. Найдем подходящий порядок частичной суммы из оценки остатка ряда (лемма 1.11, пункт I).

Поскольку $|R_n| \leqslant u_{n+1}$, то найдя номер n, удовлетворяющий неравенству $u_{n+1} \leqslant \varepsilon$, мы гарантируем $|R_n| \leqslant u_{n+1} \leqslant \varepsilon$:

$$u_{n+1} \leqslant \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 0,1 \quad \Leftrightarrow \quad n \geqslant \sqrt{10} - 1 \approx 2,16.$$

Следовательно, достаточно взять $n = 3$. Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \approx S_3 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{31}{36} \approx 0,86 \quad \text{с точностью } \varepsilon = 0,1.$$

2. Найти приближенное значение суммы ряда с точностью $\varepsilon = 0,1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Этот ряд знакоположительный, и для него выполнены условия интегрального признака:

$$u(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{непрерывна и убывает на } [1;+\infty), \qquad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \quad \text{сходится.}$$

Значит, ряд сходится по интегральному признаку. Вычислим приближенную сумму этого ряда с помощью частичной суммы: $S \approx S_n$. Найдем подходящий порядок частичной суммы из оценки остатка ряда (лемма 1.11, пункт II).

Поскольку $R_n \leqslant \displaystyle\int_n^{\infty} u(x)dx$, то найдя номер n, удовлетворяющий неравенству $\displaystyle\int_n^{\infty} u(x)dx \leqslant \varepsilon$, мы гарантируем $R_n \leqslant \varepsilon$:

$$\int_n^{\infty} u(x)dx \leqslant \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} \leqslant 0,1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} \leqslant 0,1 \quad \Leftrightarrow \quad n \geqslant 10.$$

Следовательно, достаточно взять $n = 10$. Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \approx S_{10} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \frac{1}{81} + \frac{1}{100} =$$

$$= \frac{1968329}{1270080} \approx 1,55 \quad \text{с точностью } \varepsilon = 0,1.$$

Рассмотренные примеры показывают: для приближенного вычисления суммы ряда из обратных квадратов требуется гораздо больше слагаемых, чем для приближенного вычисления с той же точностью суммы аналогичного знакочередующегося ряда. Это значит, что скорость сходимости знакопеременного ряда выше, чем скорость его же абсолютной сходимости.

2. Функциональные последовательности и ряды

2.1. Функциональные последовательности

Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – бесконечная последовательность числовых функций одной вещественной переменной, функциональная последовательность. При конкретном значении переменной x получается последовательность конкретных чисел, числовая последовательность.

Определение 2.1 (Сходимость в точке)**.** Последовательность функций f_n сходится к функции f в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, если числовая последовательность $f_n(x_0)$ сходится к числу $f(x_0)$.

Определение 2.2 (Поточечная сходимость на множестве)**.** Пусть $X \subset \mathbb{R}$.
Последовательность функций f_n сходится к функции f *поточечно* на множестве X, если f_n сходится к f в каждой точке $x \in X$.
Поточечную сходимость можно записать одним из следующих способов:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X;$$

$$f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \in X;$$

$$|f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad \forall x \in X.$$

Из определения предела получаем следующее формальное описание поточечной сходимости:

$$\forall x \in X \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon, x) : \; n \geqslant n_0 \; \Rightarrow \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Определение 2.3 (Равномерная сходимость на множестве)**.** Пусть $X \subset \mathbb{R}$.
Последовательность функций f_n сходится к функции f *равномерно* на множестве X, если наибольшее отклонение между значениями f_n и f на множестве X стремится к нулю.
Равномерную сходимость можно записать одним из следующих способов:

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ на } X;$$

$$\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0.$$

Из определения предела получаем следующее формальное описание равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) : \; n \geqslant n_0 \; \Rightarrow \; \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

А поскольку

$$\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \; \forall x \in X,$$

то окончательно получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) : \; n \geqslant n_0 \; \Rightarrow \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \; \forall x \in X.$$

Равномерная сходимость – более сильное свойство, чем поточечная:

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad \forall x \in X.$$

Определения поточечной и равномерной сходимости сформулированы для произвольного множества $X \subset \mathbb{R}$, но чаще всего используются, когда X – числовой промежуток. Далее считаем $X = [a; b]$.

Сравним свойства поточечной и равномерной сходимости. Произвольно выберем $\varepsilon > 0$. Если f_n сходится к функции f равномерно на промежутке $[a; b]$, то, начиная с номера $n_0(\varepsilon)$, графики функций $f_n(x)$ попадают в ε-коридор графика $f(x)$ (рис.6). Другими словами, справедлива аппроксимация $f_n(x) \approx f(x)$ с точностью ε сразу для всех точек $x \in [a; b]$. Это, в частности, означает, что для достаточно больших n графики $f_n(x)$ и $f(x)$ визуально неразличимы.

Если же сходимость поточечная, но не равномерная, то подходящий номер n_0 зависит не только от ε, но и от точки $x \in [a; b]$. Нет такого номера, начиная с которого графики $f_n(x)$ целиком попадают в ε-коридор графика $f(x)$ на промежутке $[a; b]$. Аппроксимация $f_n(x) \approx f(x)$ с точностью ε достигается в разных точках $x \in [a; b]$ при различных номерах n, причем множество таких номеров не ограничено сверху (иначе можно было бы взять верхнюю границу в качестве единого подходящего номера).

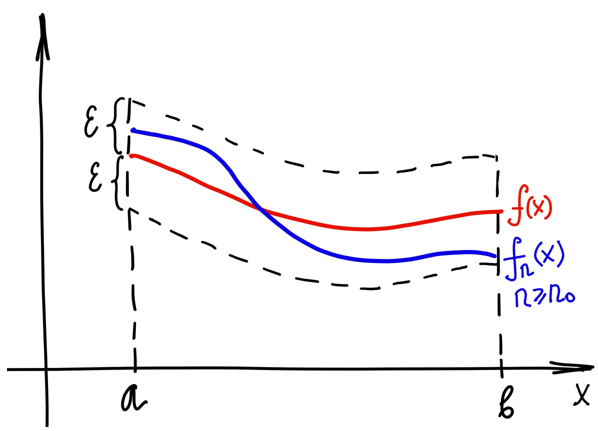

Рис. 6

Примеры исследования типа сходимости.

1. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \; f(x) = 0, \; [a; b] = [0; 1].$

   Проверим наличие поточечной сходимости. Фиксируем точку $x \in [a; b]$.

   Если $x = 0$ или $x = 1$, то $f_n(x) = 0$.

   Если $0 < x < 1$, то

$$x^n \to 0, x^{n+1} \to 0 \quad \Rightarrow \quad f_n(x) = x^n - x^{n+1} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Значит, $f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \in [0;1]$.

Проверим наличие равномерной сходимости. Рассмотрим

$$\sup_{x\in[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0;1]} |x^n - x^{n+1} - 0| = \sup_{x\in[0;1]} (x^n - x^{n+1}) = \max_{x\in[0;1]} (x^n - x^{n+1}).$$

Супремум можно заменить на максимум:промежуток $[0;1]$ замкнутый и функция $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ непрерывна, поэтому она имеет наибольшее значение на этом промежутке. Наибольшее значение функции достигается либо в точках локального экстремума внутри промежутка, либо на концах промежутка.

Из условия $(x^n - x^{n+1})' = nx^{n-1} - (n+1)x^n = 0$ находим точку, в которой может быть локальный экстремум:

$$x_0 = 1 - \frac{1}{n+1} \in (0;1).$$

Сравним значения функции $f_n(x)$ в точке x_0 и на концах промежутка $[0;1]$:

$$f_n(0) = f_n(1) = 0, \quad f_n(x_0) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Последнее значение является наибольшим на промежутке $[0;1]$:

$$\max_{x\in[0;1]} (x^n - x^{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = e^{-1} \cdot 0 = 0.$$

Таким образом, $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[0;1]$.

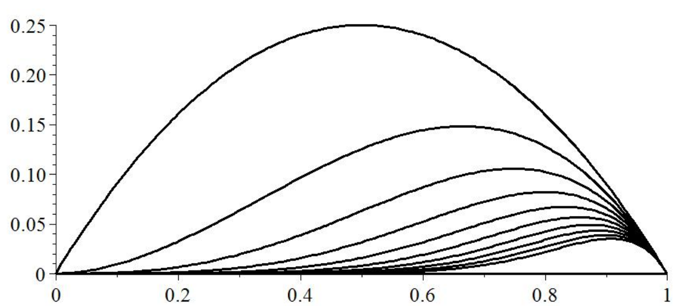

Рис. 7

На рис. 7 изображены графики первых нескольких членов последовательности $f_n(x)$ и график функции $f(x) = 0$ (совпадает с осью абсцисс). Как видно, наибольшее отклонение между графиками функции $f_n(x)$ и функции $f(x) = 0$ последовательно сокращается при $n \to \infty$. Это подтверждает наличие равномерной сходимости.

2. $f_n(x) = x^n - x^{2n},\ f(x) = 0,\ [a;b] = [0;1]$. Поточечная сходимость проверяется точно так же, как в примере 1: $f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \in [0;1]$.

   Проверка равномерной сходимости, как и в примере 1, сводится к анализу величины
$$\sup_{x\in[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[0;1]} (x^n - x^{2n}).$$
   Из условия $(x^n - x^{2n})' = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = 0$ находим точку, в которой может быть локальный экстремум функции $f_n(x) = x^n - x^{2n}$:
$$x_0 = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \in (0;1).$$
   Сравним значения функции $f_n(x)$ в точке x_0 и на концах промежутка $[0;1]$:
$$f_n(0) = f_n(1) = 0, \quad f_n(x_0) = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n - \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^{2n} = \frac{1}{4}.$$
   Последнее значение является наибольшим на промежутке $[0;1]$:
$$\max_{x\in[0;1]} (x^n - x^{2n}) = \frac{1}{4} \nrightarrow 0.$$
   Таким образом, $f_n(x) \to f(x)$ поточечно на $[0;1]$, но не равномерно.

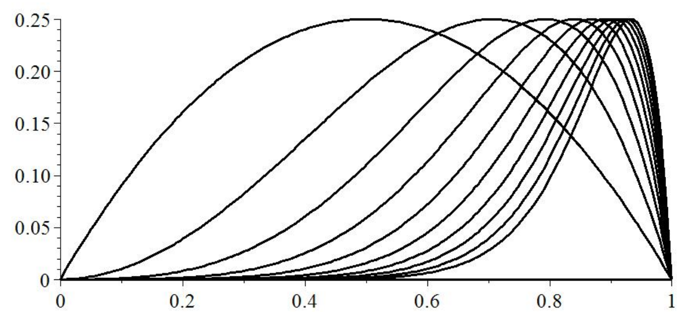

Рис. 8

На рис. 8 изображены графики первых нескольких членов последовательности $f_n(x)$ и график функции $f(x) = 0$ (совпадает с осью абсцисс). Как видно, наибольшее отклонение между графиками функции $f_n(x)$ и функции $f(x) = 0$ остается постоянным, оно не сокращается при $n \to \infty$. Это подтверждает отсутствие равномерной сходимости.

Теорема 2.4 (Свойства равномерно сходящихся последовательностей)**.** Пусть $[a;b] \subset \mathbb{R}$.

I. Если функции $f_n(x)$ непрерывны и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на промежутке $[a;b]$, то функция $f(x)$ тоже непрерывна на $[a;b]$.

II. Если функции $f_n(x)$ непрерывны и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на промежутке $[a;b]$, то

$$\int_a^x f_n(t)dt \rightrightarrows \int_a^x f(t)dt \text{ на } [a;b].$$

$$\left(\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt\right)$$

В частности

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx.$$

III. Если функции $f_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на промежутке $[a;b]$, $f_n(x) \to f(x)$ и последовательность производных $f_n'(x)$ сходится равномерно на промежутке $[a;b]$, то функция $f(x)$ также непрерывно дифференцируема

$$f_n'(x) \rightrightarrows f'(x) \text{ на } [a;b].$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = (\lim_{n\to\infty} f_n(x))'\right)$$

Доказательство. I. Пусть $x_0 \in [a;b]$. Необходимо доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По условию теоремы $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на промежутке $[a;b]$, тогда

$$\exists n_0(\varepsilon) : \ n \geqslant n_0 \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \ \ \forall x \in [a;b].$$

Выберем и зафиксируем произвольное $n \geqslant n_0$. По условию теоремы функция $f_n(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b]$, в том числе в точке x_0. Тогда для данного ε

$$\exists \delta(\varepsilon) : \ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Именно это значение δ можно взять в (2.1). Действительно, по неравенству треугольника для модуля

$$|f(x) - f(x_0)| < |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

II. Из непрерывности функций $f_n(x)$ (а также предельной функции $f(x)$ по пункту I) вытекает их интегрируемость[1]. Необходимо доказать, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon):\ n \geqslant n_0\ \Rightarrow\ \left|\int_a^x f_n(t)dx - \int_a^x f(t)dt\right| < \varepsilon\ \ \forall x \in [a;b]. \tag{2.2}$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По условию теоремы $f_n(t) \rightrightarrows f(t)$ на промежутке $[a;b]$, тогда

$$\exists n_0(\varepsilon):\ n \geqslant n_0\ \Rightarrow\ |f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\ \ \forall t \in [a;b].$$

Именно это значение n_0 можно взять в (2.2). Действительно, по свойствам определенного интеграла

$$\left|\int_a^x f_n(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right| = \left|\int_a^x (f_n(t) - f(t))dt\right| \leqslant \int_a^x |f_n(t) - f(t)|dt < \frac{\varepsilon}{b-a}(x-a) \leqslant \varepsilon.$$

III. По условию теоремы $f_n'(x)$ непрерывны, а следовательно интегрируемы на промежутке $[a;b]$. Обозначим символом $g(x)$ ту функцию, к которой сходится последовательность $f_n'(x)$: $f_n'(x) \rightrightarrows g(x)$ на $[a;b]$. Согласно свойству I функция $g(x)$ тоже непрерывна на промежутке $[a;b]$, а по свойству II

$$\int_a^x f_n'(t)dt = f_n(x) - f_n(a) \rightrightarrows \int_a^x g(t)dt \text{ на } [a;b].$$

Однако по условию теоремы $f_n(x) \to f(x)$, а значит, $f_n(x) - f_n(a) \to f(x) - f(a)$ в каждой точке $x \in [a;b]$. Из единственности предела заключаем, что

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt.$$

По теореме Барроу $f'(x) = g(x)$. Отсюда вытекают утверждения III: функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема и $f_n'(x) \rightrightarrows f'(x)$. Попутно получаем, что и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$. □

Примеры, иллюстрирующие важность условий теоремы 2.4.

1. В пунктах I и II теоремы 2.4 существенно наличие равномерной сходимости $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$. Если заменить это требование на поточечную сходимость, то утверждения перестанут быть верными.

   Рассмотрим последовательность непрерывных функций $f_n(x) = x^n$ (рис.9). На промежутке $[0;1]$ она сходится к разрывной функции

   $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

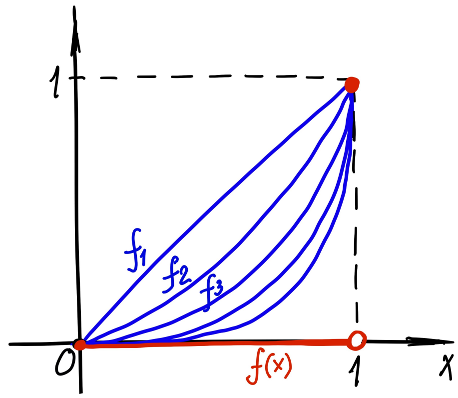

Рис. 9

Сходимость поточечная, но не равномерная, так как

$$\sup_{x\in[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0;1]} x^n = 1 \nrightarrow 0.$$

Следовательно, при отсутствии равномерной сходимости предельная функция может оказаться разрывной.

Пример, показывающий, что поточечная сходимость может не выдержать интегрирования, имеется в учебнике [1], стр.300.

2. В пункте III теоремы 2.4 важно предположение, что последовательность производных $f_n'(x)$ сходится равномерно. Из сходимости самих функций $f_n(x)$ не следует сходимость производных, т. е. дифференцирование не сохраняет сходимость (в отличие от интегрирования). Иначе говоря: функции могут принимать близкие значения и при этом иметь существенно различные производные (это очевидно из геометрического смысла производной).

   Рассмотрим последовательность непрерывно дифференцируемых функций, сходящихся (и даже равномерно) к функции $f(x) = 0$:

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n} \rightrightarrows f(x) = 0 \text{ на } [0;\pi],$$

$$\sup_{x\in[0;\pi]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0;\pi]} \frac{|\sin nx|}{n} \leqslant \frac{1}{n} \to 0.$$

   После дифференцирования сходимость (даже поточечная) не сохраняется:

$$f_n'(x) = \cos nx \nrightarrow f'(x) = 0 \text{ на } [0;\pi].$$

[1]Утверждение II теоремы 2.4 останется верным, если требование непрерывности ослабить до интегрируемости, но доказательство при этом усложнится, см. учебник [1]

2.2. Функциональные ряды

Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots .$$

При каждом конкретном значении $x \in \mathbb{R}$ получается числовой ряд.

Рассмотрим частичную сумму ряда:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x).$$

Сходимость функционального ряда сводится к сходимости функциональной последовательности $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Определение 2.5. Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$

- сходится в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, если $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в точке $x_0 \in \mathbb{R}$;
- сходится поточечно на множестве $X \subset \mathbb{R}$, если $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится поточечно на множестве $X \subset \mathbb{R}$;
- сходится равномерно на множестве $X \subset \mathbb{R}$, если $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на множестве $X \subset \mathbb{R}$.

Областью сходимости функционального ряда называется наиболее широкое множество $X \subset \mathbb{R}$, на котором ряд сходится хотя бы поточечно. Иными словами, это множество

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \text{ сходится} \right\}.$$

В области сходимости функциональный ряд имеет *сумму*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x) = S(x) \quad \forall x \in X. \tag{2.3}$$

Заметим, что равенство (2.3) не дает информации о типе сходимости, по умолчанию подразумевается поточечная сходимость.

Функциональный ряд сходится равномерно либо на всей области сходимости, либо на каком-либо ее подмножестве (возможно, пустом).

Пример. Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-kx}}{k(x+1)}.$$

Общий член ряда:

$$u_k(x) = \frac{2^{-kx}}{k(x+1)}.$$

Ряд не определен в точке $x = -1$. В точке $x = 0$ ряд является гармоническим и расходится:

$$u_k(0) = \frac{1}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

При отрицательных значениях x (кроме $x = -1$) ряд расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости:

$$x < 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to+\infty} u_k(x) = \lim_{k\to+\infty} \frac{2^{-kx}}{k(x+1)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{k\to+\infty} \frac{(2^{-kx})'_k}{(k(x+1))'_k} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{-x2^{-kx}}{x+1} = -\frac{x}{x+1} \lim_{k\to+\infty} 2^{-kx} = \infty.$$

При положительных значениях x ряд является знакоположительным и сходится по признаку Даламбера:

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2^{-(k+1)x}k(x+1)}{(k+1)(x+1)2^{-kx}} = 2^{-x} \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{k+1} = 2^{-x} < 1.$$

Таким образом, область сходимости ряда – промежуток $(0; +\infty)$.

Лемма 2.6 (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда)**.** Пусть $X \subset \mathbb{R}$. Если $|u_k(x)| \leqslant v_k$ для всех $x \in X$ и числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится, то функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно (и абсолютно) на множестве X.

Доказательство. Для каждой конкретной точки $x \in X$ числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится абсолютно по признаку сравнения. Следовательно, на множестве X функциональный ряд сходится поточечно и имеет некоторую сумму $S(x)$. Докажем, что имеется равномерная сходимость $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на X. Используем свойства супремума, неравенство треугольника для модуля и условия леммы:

$$\sup_{x\in X}|S(x)-S_n(x)| = \sup_{x\in X}|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+u_{n+3}(x)+\ldots| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x\in X}|u_{n+1}(x)| + \sup_{x\in X}|u_{n+2}(x)| + \sup_{x\in X}|u_{n+3}(x)| + \ldots \leqslant v_{n+1}+v_{n+2}+v_{n+3}+\ldots \to 0.$$

Последняя сумма стремится к нулю как остаток сходящегося ряда. □

Примеры использования признака Вейерштрасса.

1. Ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^2}$ сходится равномерно на всей числовой прямой:

$$\frac{|\sin kx|}{k^2} \leqslant \frac{1}{k^2}\ \ \forall x\in\mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < +\infty.$$

2. Как уже было установлено ранее, ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{-kx}}{k(x+1)}$ имеет область сходимости $(0;+\infty)$.

   Покажем, что на промежутке $[1;+\infty)$ он сходится равномерно:

$$\frac{2^{-kx}}{k(x+1)} \leqslant 2^{-kx} \leqslant \frac{1}{2^k}\ \ \forall x\in[1;+\infty), \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} < +\infty.$$

   Тем же способом можно показать, что ряд сходится равномерно на любом промежутке вида $[\varepsilon;+\infty)$, $\varepsilon>0$.

На равномерно сходящиеся функциональные ряды можно перенести свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей.

Теорема 2.7 (Свойства равномерно сходящихся рядов)**.** Пусть $[a;b] \subset \mathbb{R}$.

I. Если функции $u_k(x)$ непрерывны и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на промежутке $[a;b]$, то его сумма тоже непрерывная функция на $[a;b]$.

II. Если функции $u_k(x)$ непрерывны и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на промежутке $[a;b]$, то его можно почленно интегрировать:

$$\int_a^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x u_k(t)dt, \quad x \in [a;b].$$

III. Если функции $u_k(x)$ непрерывно дифференцируемы на промежутке $[a;b]$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$ сходится равномерно на промежутке $[a;b]$, тогда исходный ряд можно почленно дифференцировать:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x), \quad x \in [a;b].$$

Доказательство. Сходимость ряда понимается как сходимость последовательности его частичных сумм:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)}_{S(x)} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} u_k(x)}_{S_n(x)}.$$

Доказательство этой теоремы опирается на теорему 2.4 о свойствах равномерно сходящихся последовательностей.

I. Функция $S_n(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b]$ как сумма конечного числа непрерывных функций $u_k(x)$. Поскольку $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$, то по теореме 2.4, пункт I, функция $S(x)$ тоже непрерывна на промежутке $[a;b]$.

II. Функции $u_k(x)$, $S_n(x)$ и $S(x)$ непрерывны (последняя – по только что доказанному), а следовательно интегрируемы на промежутке $[a;b]$. Тогда по теореме 2.4, пункт II

$$\int_a^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\right) dt = \int_a^x S(t)dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} S_n(t)dt \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_a^x S_n(t)dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_a^x \sum_{k=1}^{n} u_k(t)dt \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^x u_k(t)dt \overset{(3)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x u_k(t)dt.$$

III. Предположения этого пункта можно интерпретировать следующим образом: функции $S_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на промежутке $[a;b]$, $S_n(x) \to S(x)$ и последовательность $S_n'(x)$ сходится равномерно на промежутке $[a;b]$. Тогда по теореме 2.4, пункт III, функция $S(x)$ тоже непрерывно дифференцируема на промежутке $[a;b]$ и

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = (S(x))' = \left(\lim_{n\to\infty} S_n(x)\right)' \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} S_n'(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right)' \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k'(x) \overset{(3)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x).$$

Дадим одновременный комментарий к цепочке равенств в доказательстве II, III. Равенство (1) вытекает из условия $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ и теоремы 2.4. Равенство (2) обеспечено линейностью интегрирования (дифференцирования): интеграл (производная) от суммы конечного числа слагаемых равен сумме интегралов (производных) от этих слагаемых. Равенство (3) лишь отражает тот факт, что сумма ряда есть предел последовательности его частичных сумм. $\square$

Свойства II, III означают, что принципы "интеграл суммы равен сумме интегралов" и "производная суммы равна сумме производных" при определенных условиях можно распространить и на сумму бесконечного числа функций.

3. Степенные ряды

3.1. Свойства степенных рядов

Пусть $x_0, \{a_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ – фиксированные числа. Функциональный ряд вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$, называется степенным рядом или рядом по степеням $(x - x_0)$.

Частный случай степенного ряда: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ – ряд по степеням x, $x_0 = 0$.

Степенной ряд общего вида сводится к случаю $x_0 = 0$ заменой $t = x - x_0$. Поэтому для простоты изложения рассмотрим теорию степенных рядов в случае $x_0 = 0$, для степенных рядов общего вида результаты аналогичны.

Основные задачи для степенных рядов: найти область сходимости ряда; разложить функцию $f(x)$ в степенной ряд.

Пример. Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.$$

Этот ряд является бесконечной геометрической прогрессией, известна его область сходимости и сумма:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1; 1).$$

Эту формулу можно также считать разложением функции $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ в степенной ряд на промежутке $(-1; 1)$.

Теорема 3.1 (Теорема Абеля)**.** Рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

I. Если ряд сходится в точке $x_1 \in \mathbb{R}$, то он абсолютно сходится во всех точках $x \in \mathbb{R}$, таких что $|x| < |x_1|$ (рис. 10).

II. Если ряд расходится в точке $x_2 \in \mathbb{R}$, то он расходится во всех точках $x \in \mathbb{R}$, таких что $|x| > |x_2|$ (рис. 10).

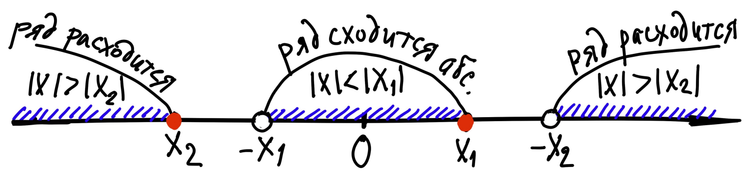

Рис. 10

Доказательство. I. Числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k$ сходится, значит выполнено необходимое условие сходимости:

$$\lim_{k\to\infty} a_k x_1^k = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists c > 0: \ |a_k x_1^k| \leqslant c \ \ \forall k.$$

Зафиксируем точку x: $|x| < |x_1|$. Степенной ряд абсолютно сходится в этой точке x по признаку сравнения со сходящейся геометрической прогрессией:

$$u_k = \left|a_k x^k\right| = \left|a_k x_1^k\right| \left|\frac{x}{x_1}\right|^k \leqslant c\left|\frac{x}{x_1}\right|^k = v_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{x}{x_1}\right|^k < +\infty.$$

II. Используем метод рассуждения от противного. Допустим, степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ расходится в точке $x_2 \in \mathbb{R}$ и при этом существует точка x, $|x| > |x_2|$, в которой ряд сходится. Но тогда согласно пункту I он сходится и в точке x_2, что противоречит предположению. $\square$

Следствие 3.2 (Устройство области сходимости степенного ряда)**.** Для каждого степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ существует такое значение $R \geqslant 0$ (возможно $+\infty$), что ряд сходится абсолютно при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$ (рис.11). Значение R называется *радиусом сходимости* степенного ряда.

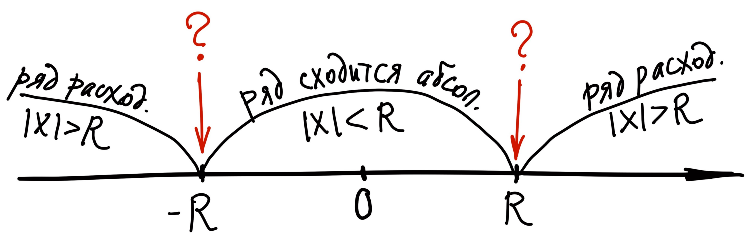

Рис. 11

Любой степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, очевидно, сходится в точке $x = 0$.

Если $R = 0$, то степенной ряд сходится только в точке $x = 0$.

Если $R = +\infty$, то степенной ряд сходится в любой точке $x \in \mathbb{R}$.

Если $0 < R < +\infty$, то степенной ряд сходится, причем абсолютно, на промежутке $(-R; R)$ и расходится на множестве $(-\infty; -R) \cup (R; +\infty)$. В точках $x = \pm R$ степенной ряд может как сходиться (абсолютно или условно), так и расходиться – это зависит от конкретного ряда и требует отдельного анализа.

Лемма 3.3 (Формулы радиуса сходимости)**.** Радиус сходимости степенного ряда может быть вычислен по одной из формул

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}, \tag{3.1}$$

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}, \tag{3.2}$$

если соответствующий предел существует.

Доказательство. Докажем формулу (3.1). Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Исходя из устройства области сходимости, для вычисления радиуса сходимости достаточно выявить наиболее широкий интервал $(-R; R)$, на котором ряд сходится абсолютно. Рассмотрим ряд с модулями:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|a_k x^k\right| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k||x|^k \text{ – знакоположительный ряд.}$$

Используем признак Даламбера. Допустим, существует предел (обозначим его c):

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}||x|^{k+1}}{|a_k||x|^k} = |x| \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = c.$$

Если $c < 1$, то ряд с модулями сходится, если $c > 1$, то ряд с модулями расходится. Следовательно, наиболее широкий интервал абсолютной сходимости задается условием

$$|x| \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}.$$

Отсюда получаем формулу (3.1) радиуса сходимости.

Формула (3.2) выводится аналогичным образом на основе радикального признака. □

Упражнение. Доказать формулу (3.2).

Замечание 7. Формулы (3.1), (3.2) не применимы к степенным рядам, в которых бесконечно много нулевых коэффициентов a_k, а также к рядам, у которых соответствующий предел не существует. В этих случаях радиус сходимости следует вычислять другими способами.

Теорема 3.4 (Равномерная сходимость степенного ряда и следствия)**.** Рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ и R – его радиус сходимости.

I. Степенной ряд сходится равномерно на любом замкнутом промежутке $[-\rho;\rho] \subset (-R;R)$. Его сумма является непрерывной функцией на $(-R;R)$.

II. Внутри промежутка $(-R;R)$ степенной ряд можно почленно интегрировать, при этом радиус сходимости сохраняется:

$$\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x a_k t^k dt, \quad x \in (-R;R).$$

III. Внутри промежутка $(-R;R)$ степенной ряд можно почленно дифференцировать, при этом радиус сходимости сохраняется:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k x^k)', \quad x \in (-R;R).$$

Поскольку операцию дифференцирования можно повторять сколько угодно раз, то сумма степенного ряда является не только непрерывной, но и бесконечно дифференцируемой функцией на $(-R;R)$, т. е. принадлежит классу $C^{\infty}(-R;R)$.

Доказательство. Степенной ряд абсолютно сходится на промежутке $(-R;R)$. Пусть $[-\rho;\rho] \subset (-R;R)$.

I. Для всех $x \in [-\rho;\rho]$ справедлива оценка $|a_k x^k| \leqslant |a_k|\rho^k$. Числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\rho^k$$

сходится, так как исходный степенной ряд сходится абсолютно в точке $x = \rho$. Значит, по признаку Вейерштрасса степенной ряд сходится равномерно на промежутке $[-\rho;\rho]$.

Из свойств равномерно сходящихся рядов (теорема 2.7) известно, что сумма ряда, составленного из непрерывных функций, является непрерывной на отрезке равномерной сходимости. Степенной ряд составлен из непрерывных функций (натуральных степеней x). Любая точка $x \in (-R;R)$ попадает в некоторый промежуток вида $[-\rho;\rho]$, $0 < \rho < R$, где степенной ряд сходится равномерно. Значит, сумма степенного ряда непрерывна в любой точке $x \in (-R;R)$.

II, III. Заметим, что после почленного интегрирования и дифференцирования получаются вновь степенные ряды:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x a_k t^k dt = \int_0^x a_0 dt + \int_0^x a_1 t dt + \int_0^x a_2 t^2 dt + \ldots =$$

$$= a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k-1}}{k}x^k. \tag{3.3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k x^k)' = (a_0)' + (a_1 x)' + (a_2 x^2)' + \ldots =$$

$$= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k. \tag{3.4}$$

Обозначим радиус сходимости ряда (3.3) символом R_1, ряда (3.4) символом R_2. Проверим, что эти радиусы сходимости совпадают с R. В общем случае эта проверка достаточно громоздкая, поэтому ограничимся случаем, когда радиус сходимости R может быть вычислен хотя бы по одной из формул леммы 3.3. Допустим значение R можно вычислить по первой формуле леммы 3.3. Тогда

$$R_1 = \lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k-1}(k+1)|}{|ka_k|} = \lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k-1}|}{|a_k|}\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k} = \lim_{k\to\infty}\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = R;$$

$$R_2 = \lim_{k\to\infty}\frac{|(k+1)a_{k+1}|}{|(k+2)a_{k+2}|} = \lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_{k+2}|}\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k+2} = \lim_{k\to\infty}\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = R.$$

Для второй формулы леммы 3.3 вычисления аналогичные.

Возможность почленного интегрирования и дифференцирования степенного ряда вытекает окончательно из доказанного пункта I и теоремы 2.7, условия которой выполнены. $\square$

Важно понимать, что почленное интегрирование и дифференцирование степенного ряда сохраняют радиус сходимости, но область сходимости может измениться. Точнее говоря, ряд остается абсолютно сходящимся на интервале $(-R; R)$ и расходящимся на $(-\infty; -R) \cup (R; +\infty)$, но в точках $\pm R$ сходимость может измениться. Глядя на формулы (3.3) и (3.4) можно сказать, в какую сторону возможны изменения: после интегрирования сходимость ряда в точках $\pm R$ может улучшиться, после дифференцирования сходимость ряда в точках $\pm R$ может ухудшиться. Для каждого конкретного ряда это нужно выяснять отдельно.

Замечание 8. Утверждения теоремы 3.4 можно усилить в тех случаях, когда в область сходимости ряда попадают еще и концы промежутка $(-R; R)$. Довольно просто доказать, что если в точках $\pm R$ есть абсолютная сходимость, то во всех утверждениях теоремы 3.4

можно заменить открытый промежуток $(-R; R)$ на замкнутый $[-R; R]$. Непросто доказывается (см. учебник [1]), что если в точке R есть условная сходимость, то в утверждениях I, II теоремы 3.4 можно заменить промежуток $(-R; R)$ на $(-R; R]$ (аналогично, если ряд условно сходится в точке $-R$).

Пример исследования степенного ряда.

Рассмотрим степенной ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k5^{k-1}}, \quad x_0 = 0, \quad a_k = \frac{1}{k5^{k-1}}. \tag{3.5}$$

Найдем радиус сходимости по одной из формул леммы 3.3:

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)5^k}{k5^{k-1}} = 5 \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = 5.$$

Следовательно, ряд сходится, причем абсолютно, на интервале $(-5; 5)$ и расходится на $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$. Проверим отдельно точки ± 5.

$x = 5 \quad \Rightarrow \quad 5\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ – гармонический ряд, расходится.

$x = -5 \quad \Rightarrow \quad 5\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ сходится условно по признаку Лейбница.

Таким образом, область сходимости степенного ряда (3.5) – промежуток $[-5; 5)$, причем на интервале $(-5; 5)$ сходимость абсолютная, а в точке -5 сходимость условная.

Согласно теореме 3.4 на промежутке $(-5; 5)$ ряд (3.5) имеет непрерывную и бесконечно дифференцируемую сумму, допустимо почленное интегрирование и дифференцирование с сохранением радиуса сходимости.

Проведем почленное интегрирование ряда (3.5):

$$\int_0^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k5^{k-1}}\right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x \frac{t^k}{k5^{k-1}} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)k5^{k-1}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k(k-1)5^{k-2}}. \tag{3.6}$$

Радиус сходимости этого ряда прежний, значит ряд точно сходится (причем абсолютно) на промежутке $(-5; 5)$. Проверим отдельно точки ± 5:

$x = 5 \quad \Rightarrow \quad 25\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ – положительный ряд, сходится по признаку сравнения:

$$\frac{1}{k(k-1)} \sim \frac{1}{k^2}, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

$x = -5 \quad \Rightarrow \quad 25\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k-1)}$ – знакочередующийся ряд, сходится абсолютно.

Таким образом, область сходимости степенного ряда (3.6) – промежуток $[-5;5]$ (сходимость абсолютная).

Проведем почленное дифференцирование ряда (3.5):

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k5^{k-1}}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k5^{k-1}}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{5^{k-1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{5^k}. \tag{3.7}$$

Радиус сходимости этого ряда прежний, значит ряд точно сходится (причем абсолютно) на промежутке $(-5;5)$. Проверим отдельно точки ± 5:

$x=5 \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} 1$ расходится (не выполнено необходимое условие сходимости);

$x=-5 \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ расходится (не выполнено необходимое условие сходимости).

Таким образом, область сходимости степенного ряда (3.7) – промежуток $(-5;5)$ (сходимость абсолютная).

Все факты, изложенные в этом разделе, легко переносятся на степенной ряд общего вида:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k.$$

Существует такое значение $R \geqslant 0$ (радиус сходимости), что ряд сходится абсолютно при $|x-x_0|<R$ и расходится при $|x-x_0|>R$ (рис.12). Радиус сходимости можно вычислить по формулам Леммы 3.3. В точках $x = x_0 \pm R$ может быть как сходимость (абсолютная или условная), так и расходимость – это зависит от конкретного ряда. На любом замкнутом промежутке $[x_0-\rho; x_0+\rho] \subset (x_0-R; x_0+R)$ ряд сходится равномерно. Внутри промежутка $(x_0-R; x_0+R)$ степенной ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать, при этом радиус сходимости сохраняется. Сумма ряда принадлежит классу $C^\infty(x_0-R; x_0+R)$.

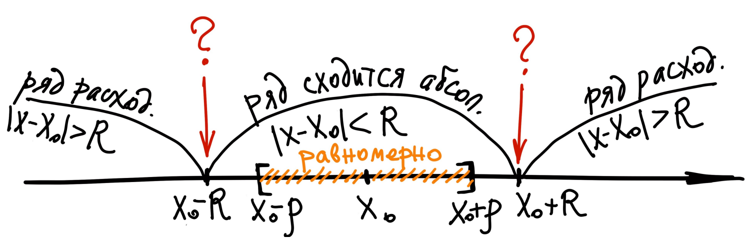

Рис. 12

3.2. Разложение функции в степенной ряд

Определение 3.5 (Разложение функции в степенной ряд)**.** Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$.
Говорят, что функция $f(x)$ *раскладывается в степенной ряд* в окрестности точки x_0, если существуют коэффициенты a_k и положительное число $r > 0$, такие что справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad x \in (x_0 - r; x_0 + r). \tag{3.8}$$

В этом случае функция $f(x)$ называется *аналитической* в точке x_0.

Равенство (3.8) означает, что степенной ряд сходится и его сумма равна $f(x)$ в каждой точке $x \in (x_0 - r; x_0 + r)$. Заметим, что $r \leqslant R$, где R – радиус сходимости ряда (3.8).

Лемма 3.6 (Бесконечная гладкость, единственность разложения в степенной ряд)**.** Пусть функция $f(x)$ раскладывается в степенной ряд в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда она бесконечно дифференцируема в этой окрестности и коэффициенты степенного ряда (3.8) задаются формулой

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Следовательно, разложение единственно.

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из теоремы 3.4: сумма степенного ряда бесконечно дифференцируема.

Для доказательства второго утверждения леммы выразим в явном виде коэффициенты a_k степенного ряда (3.8). Нулевой коэффициент получается из подстановки $x = x_0$ в равенство (3.8):

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + a_4(x - x_0)^4 + \ldots \quad \Rightarrow \quad a_0 = f(x_0).$$

Далее дифференцируем равенство (3.8) и вновь подставляем $x = x_0$. При этом степенной ряд (3.8) дифференцируется почленно (теорема 3.4):

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + \ldots \quad \Rightarrow \quad a_1 = f'(x_0);$$

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x - x_0) + 3 \cdot 4a_4(x - x_0)^2 + \ldots \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2};$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(x - x_0) + \ldots \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{f'''(x_0)}{2 \cdot 3} \text{ и так далее.}$$

□

Определение 3.7. Пусть функция $f(x)$ определена и имеет производные любого порядка в точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Степенной ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \tag{3.9}$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + \dots$$

называется *рядом Те́йлора* для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0. Частичная сумма ряда Тейлора называется *многочленом Тейлора* и обозначается

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

В случае $x_0 = 0$ ряд и многочлен Тейлора также называются *рядом* и *многочленом Макло́рена*.

Ряд (3.9) называется рядом Тейлора независимо от того, совпадает ли его сумма с $f(x)$ в окрестности точки x_0. Заметим, что в любом случае ряд Тейлора совпадает с $f(x)$ в точке x_0.

Из леммы 3.6 следует, что если функция $f(x)$ раскладывается в степенной ряд в окрестности точки x_0, то это ряд Тейлора. Разложение функции в степенной ряд и разложение функции в ряд Тейлора – одно и то же.

Из леммы 3.6 следует необходимое условие разложения функции в ряд Тейлора в окрестности точки x_0:

$$\exists r > 0 : \ f(x) \in C^{\infty}(x_0 - r; x_0 + r).$$

Причем разложение справедливо именно на промежутке $(x_0 - r; x_0 + r)$.

Если это условие не выполнено, то функция в окрестности точки x_0 в степенной ряд не раскладывается. Однако это условие не является достаточным: существуют примеры бесконечно дифференцируемых функций, которые не раскладываются в степенной ряд.

Упражнение. Проверить, что функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, \ x \neq 0 \\ 0, \ x = 0 \end{cases}$$

является бесконечно дифференцируемой (на всей числовой прямой), но при этом не раскладывается в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ (сумма ряда Тейлора не равна $f(x)$ в окрестности точки $x_0 = 0$).

Напомним, что если функция $(n + 1)$ раз дифференцируема на промежутке

$(x_0 - r; x_0 + r)$, то ее можно разложить по формуле Тейлора:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{P_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\tilde{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}, \quad x \in (x_0 - r; x_0 + r), \tag{3.10}$$

где $\tilde{x}$ – некая точка, расположенная между x_0 и x. Выражение $R_n(x)$ называется остатком формулы Тейлора в форме Лагранжа. Если функция бесконечно дифференцируема на промежутке $(x_0 - r; x_0 + r)$, то справедлива формула (3.10) для любого порядка n. Ясно, что предельный переход в формуле Тейлора при $n \to \infty$ приведет к разложению функции в ряд Тейлора, только если остаток стремится к нулю. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.8. Функция $f(x)$ раскладывается в ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \quad x \in (x_0 - r; x_0 + r),$$

тогда и только тогда, когда $f(x) \in C^{\infty}(x_0 - r; x_0 + r)$ и остаток формулы Тейлора (3.10) стремится к нулю:

$$R_n(x) \to 0 \quad \forall x \in (x_0 - r; x_0 + r).$$

3.3. Стандартные разложения в ряд Тейлора

В этом разделе выведены разложения некоторых элементарных функций $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ (ряд Маклорена).

Эти разложения называются стандартными, они соответствуют списку стандартных разложений по формуле Тейлора.

1. $f(x) = e^x$.

   Найдем коэффициенты ряда Тейлора, вычислив значения функции $f(x) = e^x$ и ее производных в точке 0:

   $$(e^x)^{(k)}|_{x=0} = 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad \Rightarrow \quad a_k = \frac{1}{k!}.$$

   Составим ряд Тейлора:

   $$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Найдем радиус сходимости степенного ряда по формуле (3.1):

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k\to\infty}(k+1) = +\infty.$$

Значит, область сходимости ряда – промежуток $(-\infty; +\infty)$. Докажем, что на этом промежутке ряд Тейлора сходится к функции $f(x) = e^x$ (теорема 3.8). Во-первых, выполнено необходимое условие: функция $f(x) = e^x$ является бесконечно дифференцируемой на всей числовой прямой. Во-вторых, покажем, что при каждом конкретном значении $x \in (-\infty; +\infty)$ остаток формулы Тейлора (3.10) стремится к нулю:

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\tilde{x})}{(n+1)!}x^{n+1}\right| = \frac{e^{\tilde{x}}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Это следует из того, что $(n+1)!$ – бесконечно большая величина более высокого порядка роста, чем показательная величина $|x|^n$.

Таким образом, получено разложение экспоненты в ряд Тейлора:

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in (-\infty; +\infty).}$$

По свойству степенных рядов, сходимость абсолютная на всей числовой прямой.

2. $f(x) = \sin x$.

Найдем коэффициенты ряда Тейлора, вычислив значения функции $f(x) = \sin x$ и ее производных в точке 0:

$$(\sin x)|_{x=0} = 0, \quad (\sin x)'|_{x=0} = \cos 0 = 1, \quad (\sin x)''|_{x=0} = -\sin 0 = 0,$$

$$(\sin x)'''|_{x=0} = -\cos 0 = -1, \quad (\sin x)''''|_{x=0} = \sin 0 = 0\ldots$$

$$\Rightarrow \quad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!},\ a_{2k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Составим ряд Тейлора:

$$0 + x + 0\cdot x^2 - \frac{x^3}{6} + 0\cdot x^4 + \frac{x^5}{120} + 0\cdot x^6 - \frac{x^7}{5040} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Каждое слагаемое этого ряда по модулю не превосходит абсолютную величину соответствующего слагаемого ряда Тейлора для экспоненты, который сходится абсолютно на всей числовой прямой. По признаку сравнения заключаем, что такую же область абсолютной сходимости имеет и ряд Тейлора для синуса. Доказательство того, что ряд Тейлора сходится именно к функции $f(x) = \sin x$ на $(-\infty; +\infty)$, проводится тоже по аналогии с рядом Тейлора для экспоненты.

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in (-\infty; +\infty).}$$

3. $f(x) = \cos x$. Разложение косинуса получается так же, как разложение синуса:

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in (-\infty; +\infty).}$$

4. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

   Разложение в ряд Тейлора этой функции представляет собой известную формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии:

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad x \in (-1; 1).}$$

5. $f(x) = \ln(1+x)$.

   Для разложения этой функции в ряд Тейлора воспользуемся разложением предыдущего пункта, сделав в нем подстановку $x = -t$:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k, \quad -t \in (-1; 1) \Leftrightarrow t \in (-1; 1).$$

   Согласно теореме 3.4 этот степенной ряд можно почленно интегрировать внутри промежутка $(-1; 1)$:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^k t^k dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}, \quad x \in (-1; 1).$$

   При интегрировании степенного ряда его радиус сходимости сохраняется, однако поведение ряда может измениться на краях промежутка сходимости. Проверим отдельно точки $x = \pm 1$:

$x=-1 \quad \Rightarrow \quad -\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k}$ – гармонический ряд, расходится;

$x=1 \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}$ сходится условно (по признаку Лейбница).

Необходимо убедиться, что в точке $x=1$ ряд Тейлора сходится именно к значению функции $f(1)=\ln 2$. Для этого покажем, что остаток формулы Тейлора (3.10) в точке $x=1$ стремится к нулю:

$$R_n(1)=\frac{f^{(n+1)}(\tilde{x})}{(n+1)!}=\frac{(-1)^n}{(1+\tilde{x})^{n+1}(n+1)}, \quad 0<\tilde{x}<1$$

$$\Rightarrow \quad |R_n(1)|\leqslant\frac{1}{n+1}\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Таким образом, логарифм раскладывается в ряд Тейлора на промежутке $(-1;1]$:

$$\boxed{\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}, \quad x\in(-1;1].}$$

Сходимость на $(-1;1)$ абсолютная, в точке $x=1$ условная.

6. $f(x)=\operatorname{arctg} x$.

   Для разложения этой функции в ряд Тейлора воспользуемся вновь разложением 4, сделав в нем подстановку $x=-t^2$:

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-t^6+t^8-\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}, \quad -t^2\in(-1;1) \Leftrightarrow t\in(-1;1).$$

   Согласно теореме 3.4 этот степенной ряд можно почленно интегрировать внутри промежутка $(-1;1)$:

$$\operatorname{arctg} x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^k t^{2k}dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x\in(-1;1).$$

   При интегрировании степенного ряда его радиус сходимости сохраняется, однако поведение ряда может измениться на краях промежутка сходимости. Легко убедиться, что полученный степенной ряд условно сходится в точках $x = \pm 1$, однако доказательство того, что ряд сходится именно к значениям $\operatorname{arctg}(\pm 1)$ является весьма трудоемким. Приведем итоговое разложение без этого доказательства:

$$\boxed{\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x \in [-1; 1].}$$

7. $f(x) = (1+x)^m$, $m \in \mathbb{R}$.

   Приведем без доказательства[2] разложение этой функции в ряд Тейлора, известное под названием "биномиальный ряд".

$$\boxed{\begin{aligned} (1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{6}x^3 + \ldots = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}x^k, \quad x \in (-1; 1). \end{aligned}}$$

   Выделим частный случай этого разложения. Если $m \in \mathbb{N}$, то ряд превращается в сумму конечного числа слагаемых, так как, начиная с номера $k = m+1$, коэффициенты ряда равны нулю (содержат нулевой множитель). При этом первые m коэффициентов можно записать в виде биномиальных коэффициентов:

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = C_m^k, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

   Таким образом, при натуральной степени m биномиальный ряд совпадает с известной формулой "бином Ньютона", которая справедлива для любых значений x:

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^k, \quad x \in \mathbb{R}, \ m \in \mathbb{N}.$$

Упражнение. Для большинства "хороших" функций $f(x)$ промежуток разложения в степенной ряд совпадает с областью сходимости этого ряда. Приведите пример функции (или опишите свойства такой функции), у которой область сходимости ряда Тейлора шире, чем промежуток, на котором ряд Тейлора сходится к $f(x)$.

На основе стандартных разложений в ряд Тейлора можно получить разложения и некоторых других элементарных функций.

Примеры. Разложим следующие функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0, пользуясь стандартными разложениями.

[2]Доказательство этого разложения есть в учебниках [1], [2].

1. $f(x) = \sin^2 x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$

   Сначала понизим степень:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

   Поскольку $x_0 = \pi/4$, то в результате разложения должен получиться ряд по степеням $(x - \pi/4)$.

   Обозначим $t = x - \pi/4$:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin 2t$$

   Осталось разложить функцию $\sin 2t$ в Тейлора в окрестности точки $t_0 = x_0 - \pi/4 = 0$. Для этого используем стандартное разложение $\sin z$ с подстановкой $z = 2t$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin 2t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2t)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad t \in (-\infty; +\infty)$$

   Вернемся к исходной переменной:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k+1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

2. $f(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$, $x_0 = 0$

   Разложение этой функции можно получить при помощи биномиального ряда, но есть и другой способ. Заметим, что данная функция является производной более простой функции:

$$\frac{x}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'$$

   Воспользуемся стандартным разложением функции $\dfrac{1}{1-z}$ с подстановкой $z = -x^2$ и проведем почленное дифференцирование степенного ряда внутри интервала сходимости:

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(x^{2k}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2k x^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 2k x^{2k-1}.$$

Пересчитаем промежуток, на котором справедливо разложение:

$$z \in (-1; 1),\ z = -x^2 \quad \Rightarrow \quad x \in (-1; 1).$$

Известно, что после дифференцирования радиус сходимости остается тем же, на краях промежутка сходимость может ухудшиться. В данном случае до дифференцирования и так сходимости не было на краях промежутка, следовательно, после дифференцирования ничего не изменится. Таким образом,

$$\frac{x}{(1+x^2)^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k x^{2k-1}, \quad x \in (-1; 1).$$

3.4. Некоторые приложения ряда Тейлора

Аппроксимация функции многочленами Тейлора

Пусть функция $f(x)$ является аналитической в точке x_0, т.е. раскладывается в ряд Тейлора в некоторой окрестности точки x_0:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \quad x \in (x_0 - r; x_0 + r),\ r > 0.$$

Рассмотрим аппроксимацию функции многочленом Тейлора:

$$f(x) \approx P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \quad x \in (x_0 - r; x_0 + r) \tag{3.11}$$

Классические особенности аппроксимации функции многочленом Тейлора: приближенное равенство становится точным при $x = x_0$; погрешность аппроксимации стремится к нулю при $x \to x_0$.

Из сходимости ряда Тейлора вытекает еще одно качество – аппроксимацию (3.11) можно сделать сколь угодно точной за счет увеличения порядка n:

$$\forall x \in (x_0 - r; x_0 + r)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon, x):\ |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

Поскольку ряд Тейлора (степенной ряд) сходится равномерно на любом отрезке $[x_0 - \rho; x_0 + \rho] \subset (x_0 - r; x_0 + r)$ (теорема 3.4), то функцию $f(x)$ можно аппроксимировать некоторым многочленом Тейлора с заранее заданной точностью ε сразу во всех точках этого отрезка:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon):\ |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon\ \ \forall x \in [x_0 - \rho; x_0 + \rho].$$

На рис.13 продемонстрирован типичный вид аппроксимации (3.11).

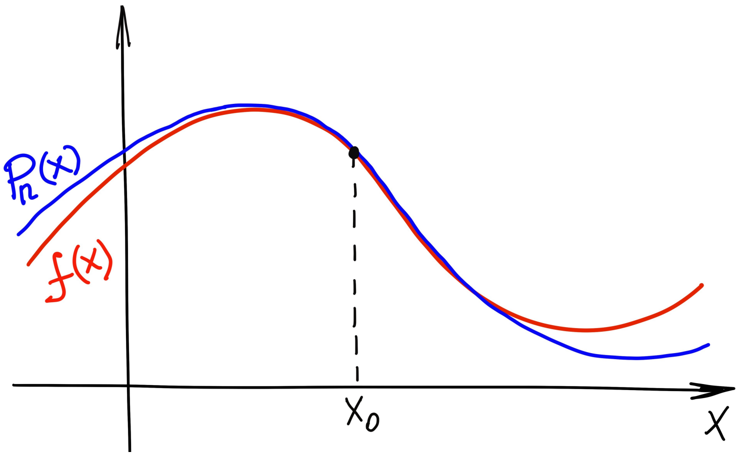

Рис. 13

Вычисление неберущихся интегралов

Разложение функции в ряд Тейлора полезно для упрощения математических операций над функцией: например, после разложения функции в ряд Тейлора ее несложно дифференцировать и интегрировать (как бесконечную сумму степенных функций). При этом в любой момент можно заменить точный расчет приближенным, отбросив члены ряда, начиная с некоторого номера, т. е. заменив ряд Тейлора на многочлен Тейлора.

Через разложение функции в степенной ряд решается проблема неберущихся интегралов. Напомним, что интеграл от функции $f(x)$ называется неберущимся, если первообразная $f(x)$ не может быть представлена в виде элементарной функции.

Пример 1. Следующий неберущийся интеграл называется интегральным синусом:

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Интегральный синус вычисляется путем разложения подынтегральной функции в степенной ряд. Воспользуемся стандартным разложением для синуса и возможностью почленного интегрирования степенных рядов внутри интервала сходимости:

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)}.$$

Значение интегрального синуса в любой точке выражается как сумма числового ряда, например:

$$\mathrm{Si}(2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)} = 2 - \frac{8}{6 \cdot 3} + \frac{32}{120 \cdot 5} - \frac{128}{5040 \cdot 7} + \ldots.$$

Найдем приближенное значение $\mathrm{Si}(2)$ с точностью $\varepsilon = 0,01$. Данный знакочередующийся числовой ряд сходится по признаку Лейбница, следовательно, для его остатка верна оценка $|R_n| < u_{n+1}$. Найдем наименьший номер n, такой что $u_{n+1} \leqslant \varepsilon$. В данном случае это несложно сделать подбором:

$$u_0 = 2 > 0,01, \quad u_1 = \frac{8}{6 \cdot 3} > 0,01, \quad u_2 = \frac{32}{120 \cdot 5} \approx 0,05 > 0,01, \quad u_3 = \frac{128}{5040 \cdot 7} \approx 0,004 < 0,01.$$

Таким образом, $n + 1 = 3$, т.е. $n = 2$:

$$\mathrm{Si}(2) \approx S_2 = 2 - \frac{8}{6 \cdot 3} + \frac{32}{120 \cdot 5} = \frac{362}{225} \approx 1,609 \quad \text{с точностью} \quad 0,01.$$

Вычисление Si(2) в мат.пакете дает $\mathrm{Si}(2) = 1,6054...$, при этом компьютерный расчет также основан на приближенном вычислении суммы ряда, только с заведомо более высокой точностью.

Кроме интегрального синуса, есть и другие известные неберущиеся интегралы, выражаемые в виде ряда. Они имеют специальные обозначения и названия, относятся к семейству специальных функций в математике, т.е. функций, определяемых каким-то специфическим образом (обычно через интегралы и ряды):

$$\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt = \gamma + \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!(2k)}, \ \gamma \approx 0,577, \quad \text{– интегральный косинус;}$$

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t} = \gamma + \ln\ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^k}{k!k}, \ \gamma \approx 0,577, \quad \text{– интегральный логарифм;}$$

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)} \quad \text{– функция ошибок, функция Лапласа.}$$

Последняя функция широко используется в теории вероятностей и статистике.

4. Тригонометрические ряды

4.1. Свойства тригонометрической системы и тригонометрического ряда

Зафиксируем число $l > 0$ и рассмотрим тригонометрическую систему:

$$\left\{1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{k\pi x}{l}, \sin\frac{k\pi x}{l}, \ldots\right\}. \tag{4.1}$$

Наиболее распространенный частный случай этой системы – при $l = \pi$:

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos kx, \sin kx, \ldots\}. \tag{4.2}$$

Исследуем основные свойства системы (4.1).

Определение 4.1. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются ортогональными на промежутке $(a;b)$, если $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$.

Лемма 4.2 (Ортогональность тригонометрической системы)**.** Любые две различные функции из системы (4.1) взаимно ортогональны на промежутке $(-l;l)$.

Доказательство. Для любого натурального k

$$\int_{-l}^{l} 1\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{l}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} = \frac{l}{k\pi}\left(\sin(k\pi)+\sin(k\pi)\right) = 0; \tag{1}$$

$$\int_{-l}^{l} 1\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}dx = -\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} = -\frac{l}{k\pi}\left(\cos(k\pi)-\cos(k\pi)\right) = 0. \tag{2}$$

Из того, что каждый косинус и синус ортогонален единице, вытекает взаимная ортогональность косинусов и синусов. Для любых натуральных k_1, k_2

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{k_1\pi x}{l}\cos\frac{k_2\pi x}{l}dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\sin\frac{(k_1+k_2)\pi x}{l}dx + \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\sin\frac{(k_1-k_2)\pi x}{l}dx \overset{(2)}{=} 0.$$

Для любых натуральных $k_1 \neq k_2$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{k_1\pi x}{l}\cos\frac{k_2\pi x}{l}dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{(k_1+k_2)\pi x}{l}dx + \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{(k_1-k_2)\pi x}{l}dx \overset{(1)}{=} 0;$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{k_1\pi x}{l}\sin\frac{k_2\pi x}{l}dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{(k_1-k_2)\pi x}{l}dx - \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{(k_1+k_2)\pi x}{l}dx \overset{(1)}{=} 0.$$

□

Возвращаясь к анализу свойств системы (4.1), рассмотрим сумму функций $\cos\frac{k\pi x}{l}$, $\sin\frac{k\pi x}{l}$ с некоторыми коэффициентами:

$$a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l} = \underbrace{\sqrt{a_k^2+b_k^2}}_{A}\left(\underbrace{\frac{a_k}{\sqrt{a_k^2+b_k^2}}}_{\sin\varphi}\cos\frac{k\pi x}{l} + \underbrace{\frac{b_k}{\sqrt{a_k^2+b_k^2}}}_{\cos\varphi}\sin\frac{k\pi x}{l}\right) =$$

$$= A\left(\sin\varphi\cos\frac{k\pi x}{l} + \cos\varphi\sin\frac{k\pi x}{l}\right) = A\sin\left(\varphi + \frac{k\pi}{l}x\right).$$

Функции вида $A\sin(\varphi+\omega x)$ описывают простые гармонические колебания точечной массы и называются простыми гармониками. При этом A – амплитуда, φ – начальная фаза, ω – частота, $\dfrac{2\pi}{\omega}$ – период гармонического колебания.

Таким образом, тригонометрическая система (4.1) включает разбитые на компоненты простые гармоники с частотами $\dfrac{k\pi}{l}$ и периодами $\dfrac{2l}{k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Единичная функция соответствует простой гармонике с нулевой частотой.

Рассмотрим сумму всех этих гармоник с некоторыми коэффициентами:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Такая сумма называется **тригонометрическим рядом**. Знак суммирования по индексу k распространяется как на косинусы, так и на синусы, но по традиции скобки в данном случае не ставят.

Поскольку наименьшее общее кратное периодов всех этих гармоник равно $2l$, то легко показать, что **сумма тригонометрического ряда (в случае его сходимости) является $2l$-периодической функцией**.

Простейший случай тригонометрического ряда соответствует системе (4.2):

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

и если сходится, то к 2π-периодической функции.

При этом сумма тригонометрического ряда в общем случае не является вновь простой гармоникой. В результате наложения простых колебательных движений получается периодический, но более сложный процесс. Возникает обратная задача – представить сложный процесс в виде суммы простых колебаний.

Определение 4.3 (Разложение функции в тригонометрический ряд)**.** Говорят, что функция $f(x)$ *раскладывается в тригонометрический ряд* на множестве $X \subset \mathbb{R}$, если существуют коэффициенты a_k, b_k, такие что справедливо равенство

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad x \in X. \tag{4.3}$$

Равенство (4.3) означает, что тригонометрический ряд сходится и его сумма равна $f(x)$ в каждой точке $x \in X$. Если функция $f(x)$ не является $2l$-периодической, то нельзя рассчитывать на $X = \mathbb{R}$. Далее будет показано, что естественным множеством разложения является промежуток $X = [-l; l]$, возможно, за вычетом некоторых его точек.

Лемма 4.4 (Единственность разложения)**.** Пусть функция $f(x)$ раскладывается в равномерно сходящийся тригонометрический ряд (4.3) на промежутке $[-l; l]$. Тогда коэффициенты ряда (4.3) задаются формулами

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \quad a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx, \quad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Следовательно, разложение единственно.

Доказательство. Поскольку ряд сходится равномерно на промежутке $[-l; l]$, то равенство (4.3) можно на этом промежутке интегрировать, причем ряд интегрируется почленно. Из ортогональности тригонометрической системы (4.1) следует, что интегралы почти всех членов ряда равны нулю:

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{-l}^{l}\left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)dx =$$

$$= a_0\int_{-l}^{l} dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\underbrace{\int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi x}{l}dx}_{=0} + b_k\underbrace{\int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi x}{l}dx}_{=0}\right) = a_0 \cdot 2l.$$

Отсюда вытекает формула для a_0.

Умножим обе части равенства (4.3) на $\cos\dfrac{k\pi x}{l}$ и снова проинтегрируем на промежутке $[-l; l]$. Из ортогональности тригонометрической системы (4.1) вновь следует, что интегралы почти всех членов ряда равны нулю:

$$\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx = \int_{-l}^{l}\left(a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j\cos\frac{j\pi x}{l} + b_j\sin\frac{j\pi x}{l}\right)\cos\frac{k\pi x}{l}dx =$$

$$= a_0\underbrace{\int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi x}{l}dx}_{=0} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(a_j\underbrace{\int_{-l}^{l}\cos\frac{j\pi x}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}dx}_{=0 \text{ при } j\neq k} + b_j\underbrace{\int_{-l}^{l}\sin\frac{j\pi x}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}dx}_{=0}\right) =$$

$$= a_k\int_{-l}^{l}\cos^2\frac{k\pi x}{l}dx = a_k\left(\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}dx + \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-l}^{l}\cos\frac{2k\pi x}{l}dx}_{=0}\right) = a_k \cdot l.$$

Отсюда вытекает формула для a_k. Формула для b_k выводится аналогичным образом. $\square$

4.2. Ряд Фурье на промежутке $[-l; l]$

Определение 4.5. Пусть функция $f(x)$ определена и абсолютно интегрируема на промежутке $[-l; l]$ (это значит, что $\int_{-l}^{l} |f(x)|dx < +\infty$). Тригонометрический ряд

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \tag{4.4}$$

с коэффициентами

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \quad a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx, \quad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,$$

называется *рядом Фурьé* для функции $f(x)$ на промежутке $[-l; l]$. Числа a_0, a_k, b_k называются *коэффициентами Фурье* для функции $f(x)$ на промежутке $[-l; l]$.
Как обычно, символом $S_n(x)$ обозначается частичная сумма ряда:

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Ряд Фурье называется так независимо от того, совпадает ли его сумма с $f(x)$ на промежутке $[-l; l]$. Заметим, что ряд Фурье определен только для функций, интегрируемых на промежутке $[-l; l]$, чтобы коэффициенты ряда имели конечные числовые значения.

Разложение функции в тригонометрический ряд и разложение функции в ряд Фурье – одно и то же.

Чтобы сформулировать условия сходимости ряда Фурье, напомним некоторые термины.

Функция $f(x)$ называется непрерывной на замкнутом промежутке $[-l; l]$, если она непрерывна в каждой точке $x \in (-l; l)$ и $\lim\limits_{x\to -l+0} f(x) = f(-l)$ (непрерывна справа в точке $-l$), $\lim\limits_{x\to l-0} f(x) = f(l)$ (непрерывна слева в точке l). Класс непрерывных функций обозначается символом $C[-l; l]$ или $C^0[-l; l]$. Символами $C^m[-l; l]$, $m = 1, 2, \ldots$, обозначаются классы гладких функций или m раз непрерывно дифференцируемых функций на промежутке $[-l; l]$:

$$f(x) \in C^m[-l; l] \quad \Leftrightarrow \quad \exists f^{(m)}(x) \in C[-l; l].$$

Функция $f(x)$ называется кусочно непрерывной на промежутке $[-l; l]$, если она непрерывна на этом промежутке за исключением, возможно, конечного числа точек, в которой она имеет разрывы I рода.

Обозначим символом $\tilde{f}(x)$ $2l$-**периодическое продолжение** функции $f(x)$ с промежутка $(-l;l]$ на всю числовую прямую $\mathbb{R}$. Периодическое продолжение играет главную роль в анализе сходимости ряда Фурье.

Теорема 4.6 (Поточечная сходимость ряда Фурье (рис.14), без доказательства)**.** Пусть функция $f(x)$ кусочно непрерывна и имеет кусочно непрерывную производную $f'(x)$ на промежутке $[-l;l]$. Тогда ряд Фурье (4.4) сходится в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ и его сумма равна

$$S(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x), \ x - \text{ точка непрерывности } \tilde{f}(x) \\ \dfrac{\tilde{f}(x-0)+\tilde{f}(x+0)}{2}, \ x - \text{ точка разрыва I рода } \tilde{f}(x) \end{cases},$$

где

$$\tilde{f}(x-0) = \lim_{t\to x-0} \tilde{f}(t), \quad \tilde{f}(x+0) = \lim_{t\to x+0} \tilde{f}(t).$$

Основные выводы из теоремы 4.6 и рис.14:

- Ряд Фурье сходится к $\tilde{f}(x)$ всюду, кроме точек разрыва $\tilde{f}(x)$. Заметим, что в условиях теоремы 4.6 функция $f(x)$ кусочно непрерывна, а значит, может иметь разрывы только I рода, поэтому и $\tilde{f}(x)$ может иметь разрывы только I рода (“скачки”).

- В точках “скачка” $\tilde{f}(x)$ ряд Фурье сходится к полусумме пределов справа и слева, т.е. на графике $S(x)$ соответствующая точка расположена ровно по середине “скачка” (рис.14). Таким образом, если $\tilde{f}(x)$ имеет разрывы, то и $S(x)$ имеет разрывы в тех же точках, но другие значения.

- Если функция $f(x)$ не является периодической (не совпадает со своим периодическим продолжением), то на равенство $f(x) = S(x)$ можно рассчитывать только на промежутке $[-l;l]$ и то за исключением точек разрыва $\tilde{f}(x)$ – это и есть множество, на котором функция $f(x)$ раскладывается в ряд Фурье:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad x \in [-l;l] \setminus \{\text{точки разрыва } \tilde{f}(x)\}.$$

  Например, функция $f(x)$, изображенная на рис.14, раскладывается в ряд Фурье при $x \in (-l;l)$.

Замечание 9. Существуют и другие достаточные условия поточечной сходимости ряда Фурье. Например, теорема 4.6 останется верной, если вместо кусочной непрерывности $f'(x)$ потребовать кусочную монотонность $f(x)$ на промежутке $[-l;l]$ (это значит, что функция на этом промежутке конечное число раз меняет возрастание на убывание или наоборот).

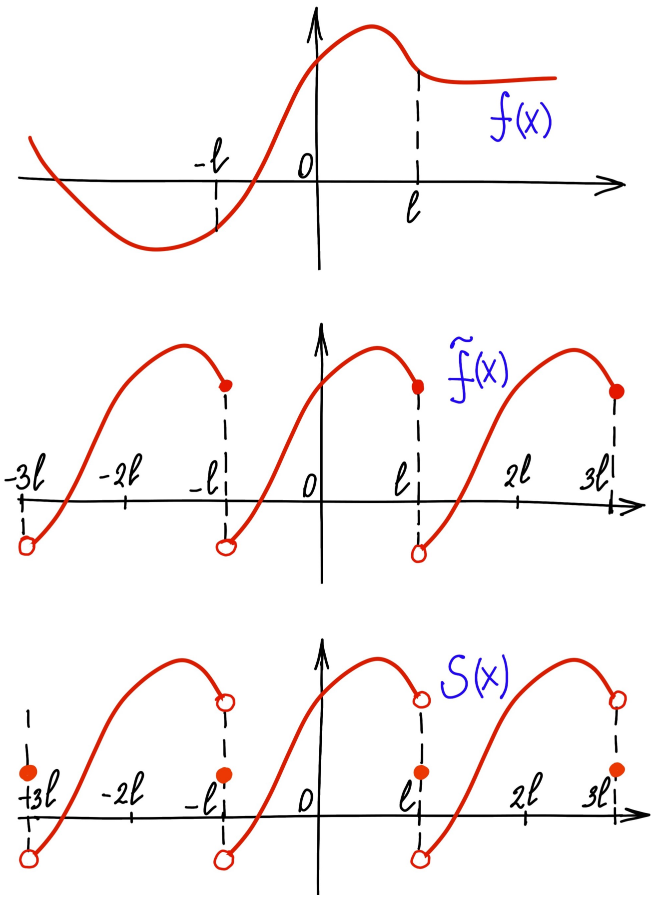

Рис.14

Теорема 4.7 (Равномерная сходимость ряда Фурье (рис.15), без доказательства)**.** Пусть

1. $f(x) \in C[-l;l]$, $f(-l) = f(l)$,
2. $f'(x)$ кусочно непрерывна на промежутке $[-l;l]$.

Тогда ряд Фурье (4.4) сходится равномерно на $\mathbb{R}$ и $S(x) = \tilde{f}(x)$. В частности, функция $f(x)$ раскладывается в равномерно сходящийся ряд Фурье на $[-l;l]$.
Причем условие 1 является необходимым для равномерной сходимости.

Условие 1 теоремы 4.7 равносильно тому, что функция $\tilde{f}(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Необходимость этого условия обусловлена тем, что сумма равномерно сходящегося ряда, составленного из непрерывных функций, тоже является непрерывной (теорема 2.7).

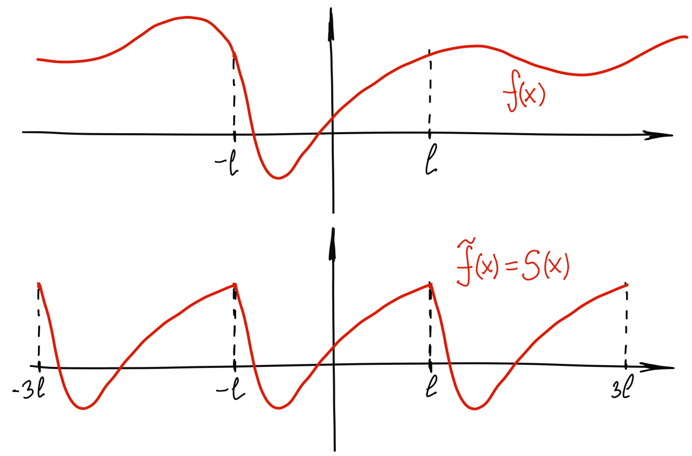

Рис. 15

Теорема 4.8 (Скорость равномерной сходимости, без доказательства)**.** Пусть m – целое число, $m \geqslant 0$ и

1. $f(x) \in C^m[-l;l]$, $f^{(j)}(-l) = f^{(j)}(l)$ при $j = 0, 1, 2, \ldots, m$,
2. $f^{(m+1)}(x)$ кусочно непрерывна на промежутке $[-l;l]$.

Тогда скорость равномерной сходимости ряда Фурье (4.4) оценивается соотношением

$$|f(x) - S_n(x)| \leqslant \frac{c}{n^{m+1/2}}, \quad x \in [-l;l],$$

где $S_n(x)$ – частичная сумма ряда Фурье.

Условие 1 теоремы 4.8 равносильно тому, что функция $\tilde{f}(x)$ имеет m непрерывных производных на $\mathbb{R}$. Чем больше непрерывных производных имеет функция $\tilde{f}(x)$, тем выше скорость сходимости ряда Фурье.

Основные выводы из теорем 4.6-4.8 и рис.14-15:

- Сходимость ряда Фурье зависит не только от качества функции $f(x)$ на промежутке $[-l;l]$, но и от качества ее периодического продолжения с этого промежутка на всю числовую прямую. Сама функция $f(x)$ может быть даже бесконечно дифференцируемой, но это не гарантирует высокое качество ее периодического продолжения.

- Разрывы и изломы периодического продолжения наиболее заметным образом ухудшают качество сходимости ряда Фурье. Разрывы $\tilde{f}(x)$ препятствуют равномерной сходимости ряда Фурье (остается только поточечная, рис.14), причем она замедляется в окрестностях точек разрыва за счет эффекта Гиббса (см.ниже). Если разрывов у $\tilde{f}(x)$ нет, но есть изломы (рис.15), то имеется равномерная сходимость, но теорема 4.8 верна только при $m = 0$, т.е. скорость равномерной сходимости минимальна: $|f(x) - S_n(x)| \leqslant \dfrac{c}{\sqrt{n}}$.

Аппроксимация функции частичной суммой ряда Фурье.

Рассмотрим вновь функцию $f(x)$ и $\tilde{f}(x)$ – ее периодическое продолжение с промежутка $(-l;l]$ на всю числовую прямую. Пусть для них выполнены условия теоремы 4.6, в частности, кусочная непрерывность.

Согласно теореме 4.6 ряд Фурье, построенный для функции $f(x)$, сходится к $\tilde{f}(x)$ всюду, кроме точек разрыва $\tilde{f}(x)$. Частичные суммы этого ряда служат для аппроксимации $\tilde{f}(x)$ на всей числовой прямой и для аппроксимации $f(x)$ на промежутке $[-l;l]$ (опять же за вычетом точек разрыва $\tilde{f}(x)$):

$$\tilde{f}(x) \approx S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\text{точки разрыва } \tilde{f}(x)\}. \tag{4.5}$$

$$f(x) \approx S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad x \in [-l;l] \setminus \{\text{точки разрыва } \tilde{f}(x)\}. \tag{4.6}$$

Формула (4.6) является следствием (4.5). Опишем и проиллюстрируем графически особенности аппроксимации (4.5) в двух случаях. Такие же особенности есть и у аппроксимации (4.6).

Случай I. Функция $\tilde{f}(x)$ имеет разрывы.

Разрывы $\tilde{f}(x)$ могут быть спровоцированы, во-первых, разрывами исходной функции $f(x)$ внутри промежутка $[-l;l]$, во-вторых, имеются в точках $\pm l$, $\pm 3l$, $\pm 5l$ и т.д., если $f(l) \neq f(-l)$. На рис.16 показан как раз второй вариант.

Сумма ряда Фурье $S(x)$ тоже разрывна в этом случае (см. рис.14). При этом частичные суммы $S_n(x)$ в любом случае непрерывны, так как являются суммами конечного числа непрерывных тригонометрических функций с числовыми коэффициентами. Форма графиков $S_n(x)$ волнистая, как и положено конечной сумме простых гармоник (колебаний).

На рис. 16 изображен типичный вид аппроксимации $\tilde{f}(x) \approx S_n(x)$ в этом случае: $\tilde{f}(x)$ (красная линия), $S_n(x)$ (фиолетовая линия).

Попытка аппроксимировать разрывную $\tilde{f}(x)$ непрерывными $S_n(x)$ приводит к явлению, которое называется **эффектом Гиббса**. Эффект состоит в том, что вблизи точек разрыва $\tilde{f}(x)$ наблюдаются усиленные колебания $S_n(x)$, более заметные, чем в остальных точках. Амплитуда этих колебаний пропорциональна величине “скачка” функции $\tilde{f}(x)$ в точке разрыва. При увеличении n сужается окрестность распространения этих колебаний, но амплитуда не сокращается. Иными словами, эффект Гиббса нельзя подавить увеличением порядка n, графики $S_n(x)$ и $\tilde{f}(x)$ никогда не становятся визуально неразличимы. Это признак отсутствия равномерной сходимости $S_n(x)$ к $\tilde{f}(x)$ – и действительно, согласно теореме 4.7 в этом случае есть только поточечная сходимость.

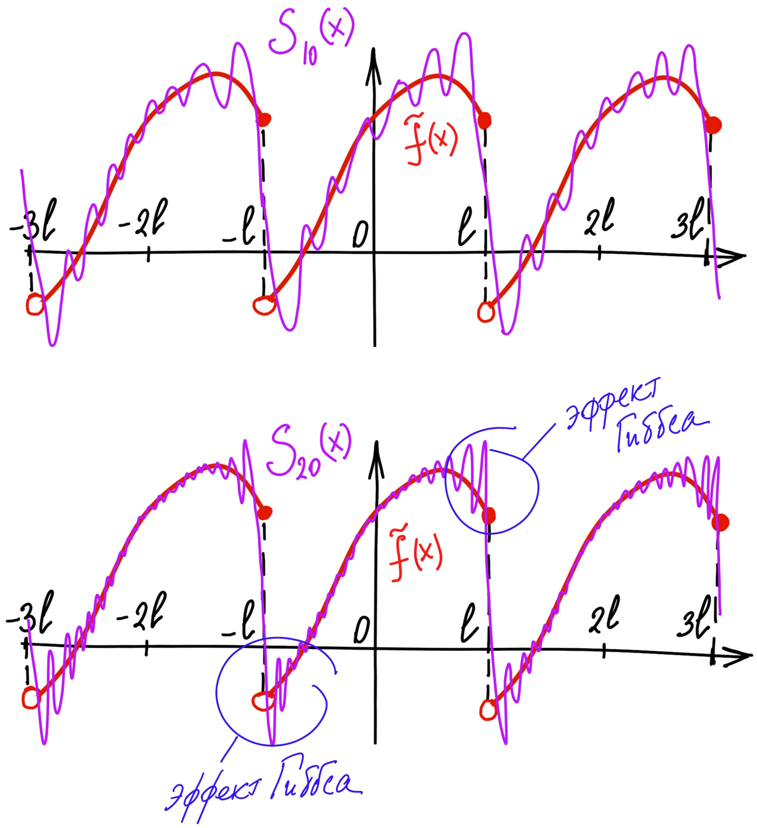

Рис. 16

Замечание 10. Эффект Гиббса можно наблюдать при сохранении изображений в формате jpeg. Грубо говоря, технология jpeg основана на том, что изображение кодируется некоторой функцией (задающей, например, яркость каждого пикселя) и сжимается путем замены этой функции на частичную сумму ряда Фурье. Если изображение содержит контрастные переходы, то оно кодируется функцией, имеющей скачки, и после сжатия jpeg вблизи линий контраста появляется рябь. Это и есть проявление эффекта Гиббса (рис.17).

Рис. 17

Случай II. Функция $\tilde{f}(x)$ непрерывна.

В этом случае на графиках частичных сумм $S_n(x)$ эффект Гиббса отсутствует (рис.18). Графики $S_n(x)$ имеют всюду одинаковую “волнистость”, без специфических всплесков. При больших n графики $S_n(x)$ и $\tilde{f}(x)$ становятся визуально неразличимы – так выражается равномерная сходимость $S_n(x)$ к $\tilde{f}(x)$, которая согласно теореме 4.7 имеется в данном случае.

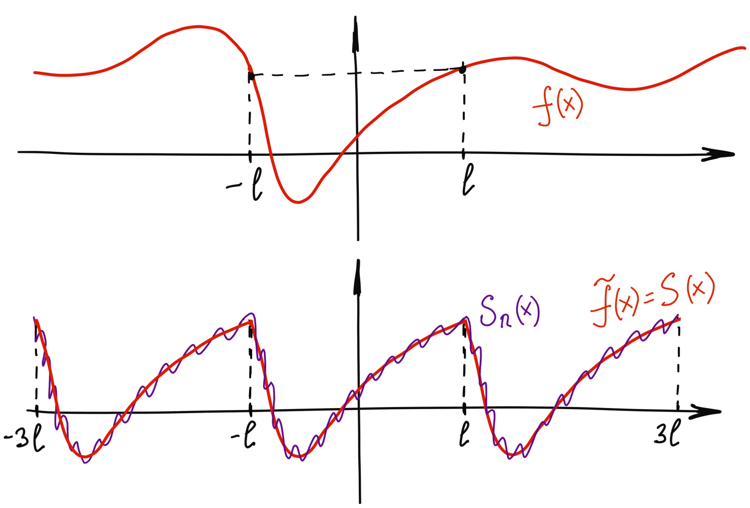

Рис. 18

При этом, как было замечено после теоремы 4.8, на скорость равномерной сходимости, а значит, и на качество аппроксимации $\tilde{f}(x) \approx S_n(x)$ плохо влияют изломы $\tilde{f}(x)$. Погрешность аппроксимации $\tilde{f}(x) \approx S_n(x)$ выше в окрестности точек излома.

Сравнение методик разложения функции в степенной ряд (ряд Тейлора) и тригонометрический ряд (ряд Фурье).

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad x \in (x_0 - r; x_0 + r). \tag{4.7}$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad x \in [-l; l] \setminus \{\text{точки разрыва } \tilde{f}(x)\}. \tag{4.8}$$

Чтобы функция $f(x)$ раскладывалась в степенной ряд (4.7), необходимо, чтобы она была бесконечно дифференцируема на промежутке $(x_0 - r; x_0 + r)$ (и даже это только необходимое условие, но не достаточное). При этом ряд (4.7) сходится к $f(x)$ равномерно на любом отрезке $[x_0 - \rho; x_0 + \rho] \subset (x_0 - r; x_0 + r)$, причем вместе со всеми производными (равномерная сходимость сохраняется и после дифференцирования).

Чтобы функция $f(x)$ раскладывалась в тригонометрический ряд (4.8), достаточно, чтобы $f(x)$, $f'(x)$ были кусочно непрерывны на промежутке $[-l; l]$. В общей ситуации сходимость поточечная.

Таким образом, в степенной ряд раскладываются функции только очень высокого качества и сходимость ряда получается сильная; в тригонометрический ряд можно разложить гораздо больше функций, годятся функции сравнительного низкого качества (даже разрывные), но сходимость ряда может быть слабой.

Методики разложения в степенной и тригонометрический ряд существенно различны. Коэффициенты степенного ряда (4.7) получаются путем дифференцирования функции $f(x)$ в точке x_0. Разложение в степенной ряд основано на идее прогнозирования (поэтому чем ближе x к x_0, тем выше скорость сходимости ряда). Коэффициенты тригонометрического ряда (4.8) получаются путем интегрирования на промежутке $[-l; l]$ функции $f(x)$, умноженной на элементы ортогональной тригонометрической системы. В основе этого разложения – идея ортогонального проектирования.

Ряд Фурье в комплексной форме.

Комплексная форма записи ряда Фурье основана на формулах Эйлера, выражающих косинус и синус через экспоненту мнимого аргумента:

$$\cos \frac{k\pi x}{l} = \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{k\pi x}{l}} + e^{-i\frac{k\pi x}{l}}\right), \quad \sin \frac{k\pi x}{l} = \frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{k\pi x}{l}} - e^{-i\frac{k\pi x}{l}}\right) = \frac{i}{2}\left(e^{-i\frac{k\pi x}{l}} - e^{i\frac{k\pi x}{l}}\right).$$

Подставляем эти формулы в ряд Фурье, группируем слагаемые и вводим новые обозначения для коэффициентов:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} =$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{k\pi x}{l}} + e^{-i\frac{k\pi x}{l}}\right) + b_k \frac{i}{2}\left(e^{-i\frac{k\pi x}{l}} - e^{i\frac{k\pi x}{l}}\right) =$$

$$= \underbrace{a_0}_{c_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{a_k - ib_k}{2}}_{c_k} e^{i\frac{k\pi x}{l}} + \underbrace{\frac{a_k + ib_k}{2}}_{c_{-k}} e^{-i\frac{k\pi x}{l}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\frac{k\pi x}{l}}, \quad c_k = \begin{cases} a_0, \ k = 0 \\ \dfrac{a_k - ib_k}{2}, \ k > 0 \\ \dfrac{a_{-k} + ib_{-k}}{2}, \ k < 0 \end{cases}.$$

Формулы для коэффициентов c_k выражаем также через экспоненту мнимого аргумента:

1. $k > 0 \quad \Rightarrow \quad c_k = \dfrac{a_k - ib_k}{2} = \dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx - \frac{i}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx =$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\left(\cos\frac{k\pi x}{l} - i\sin\frac{k\pi x}{l}\right)dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{k\pi x}{l}}dx;$$

2. $k < 0 \quad \Rightarrow \quad c_k = \dfrac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} = \dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{-k\pi x}{l}dx + \frac{i}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{-k\pi x}{l}dx =$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\left(\cos\frac{k\pi x}{l} - i\sin\frac{k\pi x}{l}\right)dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{k\pi x}{l}}dx;$$

3. $k = 0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = a_0 = \dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{0\pi x}{l}dx}.$

Таким образом, все коэффициенты c_k вычисляются по одной и той же формуле. Получаем комплексную форму ряда Фурье для функции $f(x)$ на промежутке $[-l; l]$:

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\frac{k\pi x}{l}}, \quad c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{k\pi x}{l}}dx.}$$

4.3. Ряд Фурье на промежутке $[0; l]$

Напомним известные свойства интеграла от четной и нечетной функции по симметричному промежутку:

$$\varphi(-x) = -\varphi(x) \quad \Rightarrow \quad \int_{-l}^{l} \varphi(x)dx = 0$$

$$\varphi(-x) = \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad \int_{-l}^{l} \varphi(x)dx = 2\int_{0}^{l} \varphi(x)dx$$

Рассмотрим ряд и коэффициенты Фурье (4.4) в двух случаях: когда функция $f(x)$ четная и когда функция $f(x)$ нечетная.

Пусть функция $f(x)$ четная, тогда все коэффициенты $b_k = 0$ и ее ряд Фурье включает только косинусы:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l}, \quad a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x)dx, \; a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx. \tag{4.9}$$

Пусть функция $f(x)$ нечетная, тогда все коэффициенты $a_k = 0$ и ее ряд Фурье включает только синусы:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \tag{4.10}$$

Рассмотрим теперь произвольную функцию $f(x)$ и составим для нее тригонометрические ряды, используя формулы (4.9), (4.10).

Определение 4.9. Пусть функция $f(x)$ определена и абсолютно интегрируема на промежутке $[0; l]$.
Тригонометрический ряд (4.9) называется *рядом Фурье по косинусам* для функции $f(x)$ на промежутке $[0; l]$.
Тригонометрический ряд (4.10) называется *рядом Фурье по синусам* для функции $f(x)$ на промежутке $[0; l]$.

Для построения ряда Фурье по косинусам (по синусам) используется информация о функции $f(x)$ на промежутке $[0; l]$ (коэффициенты Фурье вычисляются через интегралы по промежутку $[0; l]$). При этом функция воспринимается как четная (нечетная). Отсюда вытекает модификация теоремы 4.6 о поточечной сходимости.

Теорема 4.10 (Поточечная сходимость ряда Фурье по косинусам (по синусам), без доказательства)**.** Пусть функция $f(x)$ кусочно непрерывна и имеет кусочно непрерывную производную $f'(x)$ на промежутке $[0; l]$. Тогда ряд Фурье по косинусам (по синусам) сходится в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ и его сумма равна

$$S(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x), \; x - \text{ точка непрерывности } \tilde{f}(x) \\ \dfrac{\tilde{f}(x-0) + \tilde{f}(x+0)}{2}, \; x - \text{ точка разрыва I рода } \tilde{f}(x) \end{cases},$$

где $\tilde{f}(x)$ – четное (нечетное) $2l$-периодическое продолжение функции $f(x)$ с промежутка $[0; l]$ на всю числовую прямую $\mathbb{R}$.

Четным периодическим продолжением функции $f(x)$ называем результат следующих действий: сначала строится четное отображение функции $f(x)$ с промежутка $x > 0$ на промежуток $x \leqslant 0$ (симметричное отражение графика $f(x)$, $x > 0$, относительно оси ординат), затем для получившейся четной функции строится $2l$-периодическое продолжение с промежутка $(-l; l]$ на всю числовую прямую (рис. 19).

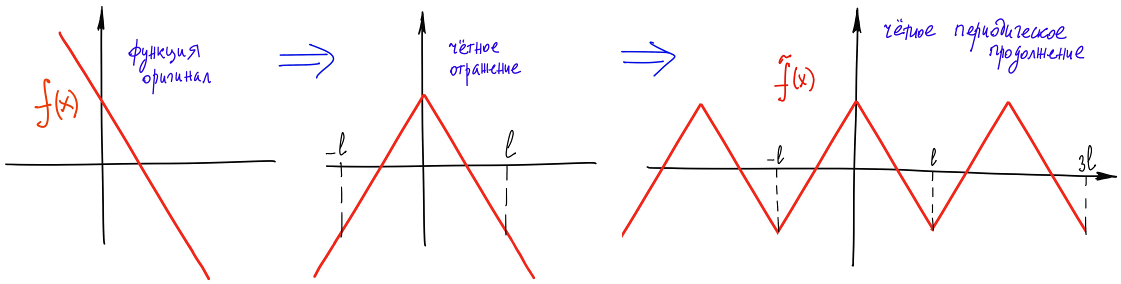

Рис. 19

Нечетным периодическим продолжением функции $f(x)$ называем результат следующих действий: сначала строится нечетное отображение функции $f(x)$ с промежутка $x > 0$ на промежуток $x \leqslant 0$ (симметричное отражение графика $f(x)$, $x > 0$, относительно начала координат, при этом неважно – какое именно значение функции в точке 0 принять, а какое выколоть), затем для получившейся нечетной функции строится $2l$-периодическое продолжение с промежутка $(-l; l]$ на всю числовую прямую (рис. 20).

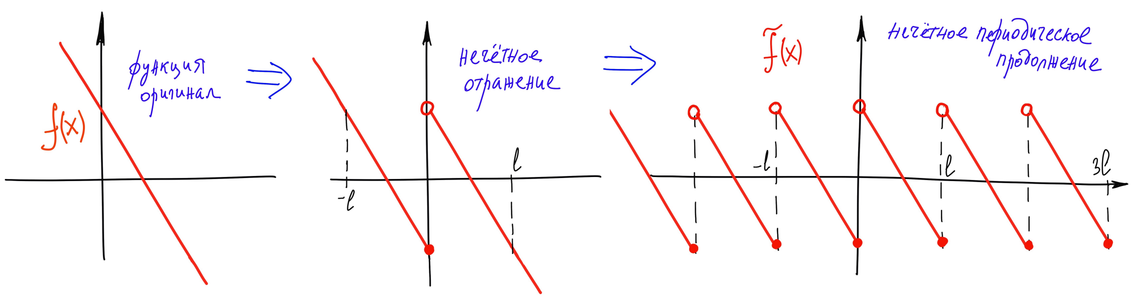

Рис. 20

Сопоставляя теорему 4.10 с рисунками, приходим к выводу: в общей ситуации $f(x)$ раскладывается в ряд Фурье по косинусам (синусам) на промежутке $[0; l]$, кроме точек разрыва $\tilde{f}(x)$.

Теоремы 4.7, 4.8 о равномерной сходимости ряда Фурье можно также перенести на ряд по косинусам и ряд по синусам с соответствующими изменениями. Для равномерной сходимости ряда по косинусам (по синусам), очевидно, требуется добавить условия, гарантирующие непрерывность четного (нечетного) периодического продолжения функции $f(x)$. При этом непрерывность четного периодического продолжения устроить гораздо проще, чем нечетного:

- если в дополнение к условиям теоремы 4.10 функция $f(x)$ непрерывна на $[0;l]$, то она раскладывается в равномерно сходящийся ряд по косинусам (4.9) на промежутке $[0;l]$;

- если в дополнение к условиям теоремы 4.10 функция $f(x)$ непрерывна на $[0;l]$ и $f(l) = f(0) = 0$, то она раскладывается в равномерно сходящийся ряд по синусам (4.10) на промежутке $[0;l]$.

Пример разложения функции в ряд Фурье разного типа.

Рассмотрим функцию $f(x) = (x+1)^2$ и число $l = 1$. Следовательно, для разложения будет использоваться тригонометрическая система

$$\{1, \cos\pi x, \sin\pi x, \cos 2\pi x, \sin 2\pi x, \ldots, \cos k\pi x, \sin k\pi x, \ldots\}.$$

Построим ряд Фурье на промежутке $[-1;1]$ по всей этой системе и ряды Фурье на промежутке $[0;1]$ по синусам и по косинусам, т.е. при участии половины этой системы.

1. Ряд Фурье на промежутке $[-1;1]$.

   Вычисляем коэффициенты Фурье по определению 4.5:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x+1)^2dx = \frac{4}{3},$$

$$a_k = \int_{-1}^{1}(x+1)^2\cos k\pi x dx = \frac{4(-1)^k}{k^2\pi^2},$$

$$b_k = \int_{-1}^{1}(x+1)^2\sin k\pi x dx = -\frac{4(-1)^k}{k\pi}.$$

   Составляем ряд Фурье (4.4):

$$\frac{4}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2\pi^2}\cos k\pi x - \frac{(-1)^k}{k\pi}\sin k\pi x.$$

   По теореме 4.6 ряд Фурье сходится в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ и его сумма равна

$$S(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x), \ x \neq 2n+1, \\ 2, \ x = 2n+1 \end{cases}, \ n \in \mathbb{Z},$$

   где $\tilde{f}(x)$ – периодическое продолжение функции $f(x) = (x+1)^2$ с промежутка $(-1;1]$ на числовую прямую (см. на рис.21: обычное периодическое продолжение). Значения

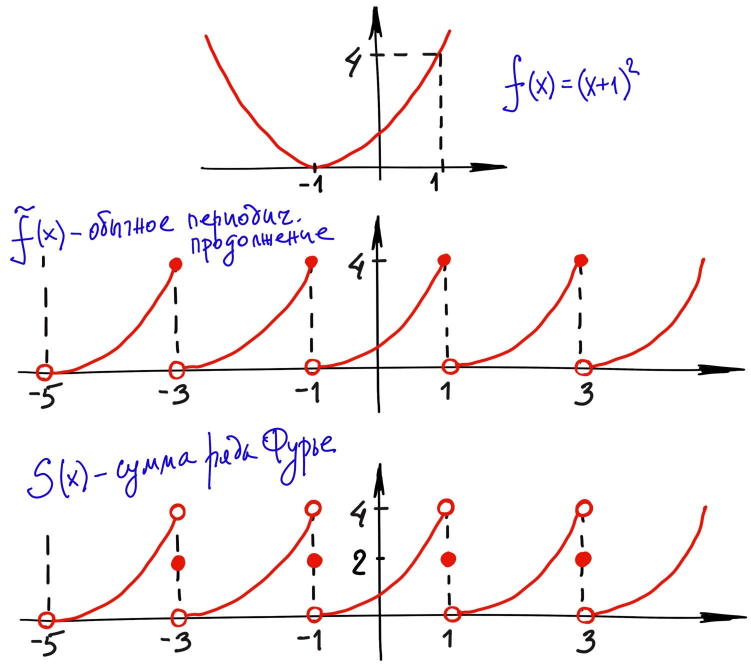

Рис. 21

функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ совпадают на промежутке $(-1;1)$. Значит, получаем следующее разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье:

$$(x+1)^2 = \frac{4}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2\pi^2} \cos k\pi x - \frac{(-1)^k}{k\pi} \sin k\pi x, \quad x \in (-1;1).$$

Сходимость ряда поточечная, так как не выполнено необходимое условие равномерной сходимости, указанное в теореме 4.7: функция $\tilde{f}(x)$ не является непрерывной.

2. Ряд Фурье по косинусам на промежутке $[0;1]$.

Вычисляем коэффициенты Фурье по формулам (4.9):

$$a_0 = \int_0^1 (x+1)^2 dx = \frac{7}{3},$$

$$a_k = 2\int_0^1 (x+1)^2 \cos k\pi x dx = \frac{4\left(2(-1)^k - 1\right)}{k^2\pi^2}.$$

Составляем ряд Фурье по косинусам (4.9):

$$\frac{7}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k - 1}{k^2\pi^2} \cos k\pi x.$$

По теореме 4.10 ряд Фурье сходится в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ и его сумма $S(x) = \tilde{f}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, так как $\tilde{f}(x)$ – четное периодическое продолжение – является непрерывной функцией на числовой прямой (см. рис.22).

Значения функции $f(x)$ и суммы ряда $S(x)$ совпадают на промежутке $[0;1]$. Значит, получаем следующее разложение функции $f(x)$ по косинусам:

$$(x+1)^2 = \frac{7}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k - 1}{k^2\pi^2} \cos k\pi x, \quad x \in [0;1].$$

Сходимость ряда равномерная, так как $\tilde{f}(x)$ является непрерывной функцией.

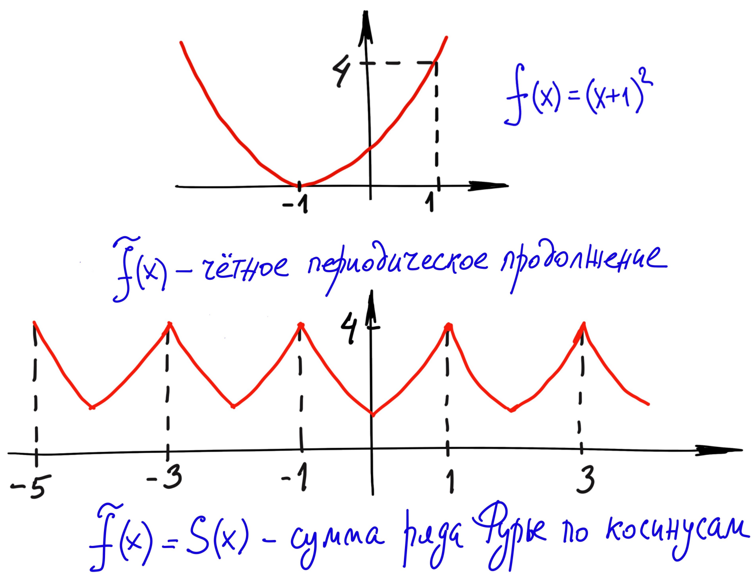

Рис. 22

3. Ряд Фурье по синусам на промежутке $[0;1]$.

   Вычисляем коэффициенты Фурье по формулам (4.10):

$$b_k = 2\int_0^1 (x+1)^2 \sin k\pi x dx = \frac{-2\left(4k^2\pi^2(-1)^k - 2(-1)^k - k^2\pi^2 + 2\right)}{k^3\pi^3}.$$

   Составляем ряд Фурье по синусам (4.10):

$$-2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2\pi^2(-1)^k - 2(-1)^k - k^2\pi^2 + 2}{k^3\pi^3} \sin k\pi x.$$

   По теореме 4.10 ряд Фурье сходится в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ и его сумма равна

$$S(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x), \ x \neq n, \\ 0, \ x = n \end{cases}, \ n \in \mathbb{Z},$$

где $\tilde{f}(x)$ – нечетное периодическое продолжение функции $f(x) = (x+1)^2$ с промежутка $[0;1]$ на числовую прямую (см. рис.23).

Значения функции $f(x)$ и суммы ряда $S(x)$ совпадают на промежутке $(0;1)$. Значит, получаем следующее разложение функции $f(x)$ по синусам:

$$(x+1)^2 = -2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2\pi^2(-1)^k - 2(-1)^k - k^2\pi^2 + 2}{k^3\pi^3} \sin k\pi x, \quad x \in (0;1).$$

Сходимость ряда поточечная, так как не выполнено необходимое условие равномерной сходимости: функция $\tilde{f}(x)$ не является непрерывной.

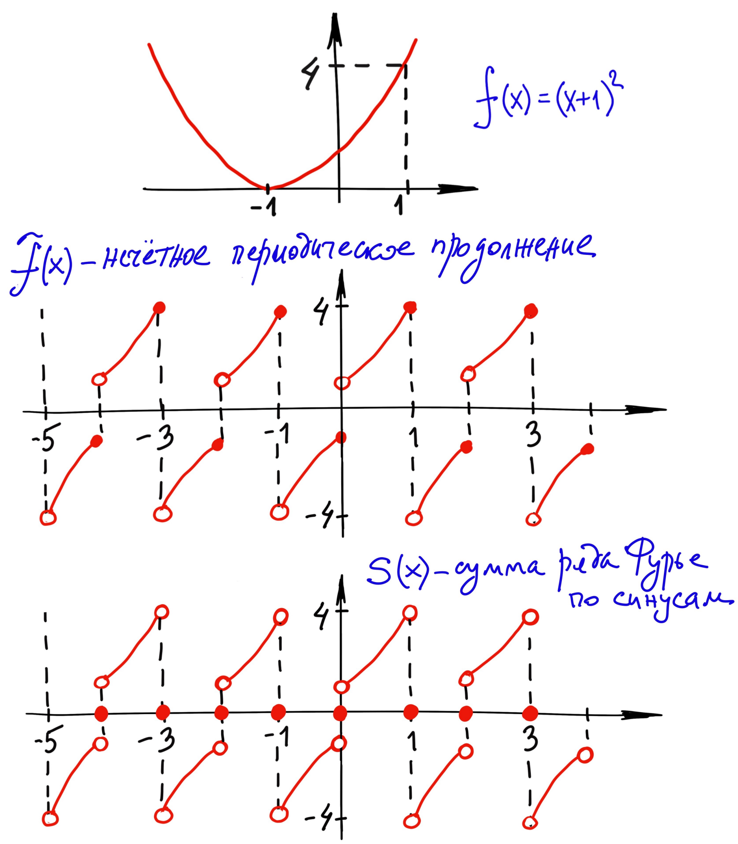

Рис. 23

Заметим, что для анализа сходимости ряда Фурье (для выяснения, чему равна сумма ряда и на каком промежутке $f(x)$ раскладывается в ряд Фурье) вовсе не обязательно вычислять коэффициенты Фурье и составлять ряд. Достаточно построить и проанализировать $\tilde{f}(x)$.

Другие примеры анализа ряда Фурье см. в приложении к конспекту лекций (в конце).

4.4. Интеграл и преобразования Фурье

Поставим следующий вопрос: можно ли функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье на всей числовой прямой $\mathbb{R}$, т.е. построить тригонометрический ряд, сходящийся к $f(x)$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}$? Такое возможно только для периодических функций, поскольку сумма тригонометрического ряда является периодической.

Если функция $f(x)$ не является периодической, то ее нельзя представить в виде ряда Фурье на всей числовой прямой $\mathbb{R}$, но только на ограниченном промежутке $[-l; l]$ (за вычетом точек разрыва ее периодического продолжения).

Интеграл Фурье – это конструкция, аналогичная ряду Фурье, но предназначенная для представления непериодической функции $f(x)$ на всей числовой прямой.

В этом разделе приведена упрощенная схема построения интеграла Фурье: краткая и наглядная, но недостаточно обоснованная. Математически строгий вывод интеграла Фурье можно найти в академических учебниках по математическому анализу.

Основная идея получения интеграла Фурье – предельный переход для ряда Фурье при $l \to +\infty$.

Допустим, функция $f(x)$ определена и абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$. Последнее означает, что следующий несобственный интеграл сходится:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty.$$

Тогда $f(x)$ абсолютно интегрируема и на любом ограниченном промежутке $[-l; l]$, $l > 0$, и для нее можно составить ряд Фурье:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega_k x) + b_k \sin(\omega_k x), \tag{4.11}$$

$$a_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos(\omega_k t) dt, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin(\omega_k t) dt.$$

Символом $\omega_k = \dfrac{k\pi}{l}$ обозначена частота k-той гармоники. Подставим формулы коэффициентов Фурье в ряд (4.11):

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos(\omega_k t) dt \cdot \cos(\omega_k x) + \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin(\omega_k t) dt \cdot \sin(\omega_k x) =$$

$$= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t) \left(\cos(\omega_k t) \cos(\omega_k x) + \sin(\omega_k t) \sin(\omega_k x) \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t) \cos\left(\omega_k (t - x) \right) dt. \tag{4.12}$$

Найдем предел выражения (4.12) при $l \to +\infty$. По линейности предельного перехода он равен сумме пределов первого и второго слагаемого.

1. Рассмотрим первое слагаемое в правой части равенства (4.12) при $l \to +\infty$:

$$\int_{-l}^{l} f(t)dt \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt.$$

Несобственный интеграл сходится, так как предполагается, что функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$. Тогда

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt \to 0.$$

2. Рассмотрим предел второго слагаемого в правой части равенства (4.12) при $l \to +\infty$. Выразим сумму ряда как предел последовательности частичных сумм. Не умаляя общности, считаем, что l – целое число (такую возможность дает определение предела по Гейне), и установим порядок частичной суммы в виде nl.

$$\lim_{l\to+\infty}\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\left(\omega_k(t-x)\right)dt = \lim_{l\to+\infty}\frac{1}{l}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{nl}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\left(\omega_k(t-x)\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\lim_{l\to+\infty}\left[\frac{\pi}{l}\sum_{k=1}^{nl}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\left(\omega_k(t-x)\right)dt.\right] \tag{4.13}$$

Покажем, что получившееся в квадратных скобках выражение можно интерпретировать как интегральную сумму Римана для функции

$$\varphi_l(\omega) = \int_{-l}^{l} f(t)\cos\left(\omega(t-x)\right)dt$$

и промежутка $[0;\pi n]$. Действительно, точки

$$\omega_k = \frac{k\pi}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots, nl,$$

разбивают промежуток $[0;\pi n]$ на nl частей (последняя точка совпадает с правым концом промежутка). Длины всех отрезков разбиения одинаковы (следовательно, равны рангу разбиения):

$$\Delta\omega_k = \omega_k - \omega_{k-1} = \frac{\pi}{l}.$$

Составим для функции $\varphi_l(\omega)$ интегральную сумму Римана, выбрав в качестве точек $\bar{\omega}_k \in [\omega_{k-1};\omega_k]$ правые концы этих отрезков:

$$\sum_{k=1}^{nl}\varphi_l(\omega_k)\Delta\omega_k = \frac{\pi}{l}\sum_{k=1}^{nl}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\left(\omega_k(t-x)\right)dt.$$

Если $l \to +\infty$, то ранг вышеописанного разбиения стремится к нулю и предел интегральных сумм Римана совпадает с определенным интегралом от функции $\varphi_l(\omega)$ по промежутку $[0; \pi n]$ (напомним, что определенный интеграл не зависит от способа разбиения и от выбора точек $\bar{\omega}_k$). Особенность данной ситуации заключается в том, что при $l \to +\infty$ меняется и сама функция $\varphi_l(\omega)$:

$$\varphi_l(\omega) = \int_{-l}^{l} f(t) \cos\left(\omega(t-x)\right) dt \quad \to \quad \varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\left(\omega(t-x)\right) dt.$$

Несобственный интеграл сходится, так как функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ и косинус по модулю ограничен единицей.

$$\lim_{l\to+\infty} \left[\frac{\pi}{l} \sum_{k=1}^{nl} \int_{-l}^{l} f(t) \cos\left(\omega_k(t-x)\right) dt \right] = \lim_{l\to+\infty} \sum_{k=1}^{nl} \varphi_l(\omega_k) \Delta\omega_k = \int_0^{n\pi} \varphi(\omega) d\omega.$$

Для окончательного выражения (4.13) осталось вычислить предел при $n \to +\infty$:

$$\frac{1}{\pi} \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \varphi(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \varphi(\omega) d\omega.$$

Таким образом, при $l \to +\infty$ выражение (4.12) стремится к значению

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\left(\omega(t-x)\right) dt d\omega =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt}_{a(\omega)} \cdot \cos(\omega x) + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt}_{b(\omega)} \cdot \sin(\omega x) \right) d\omega =$$

$$= \int_0^{+\infty} a(\omega) \cos(\omega x) + b(\omega) \sin(\omega x) d\omega.$$

Определение 4.11. Пусть функция $f(x)$ определена и абсолютно интегрируема на всей числовой прямой $\mathbb{R}$. Интеграл

$$\int_0^{+\infty} a(\omega)\cos(\omega x) + b(\omega)\sin(\omega x)d\omega, \tag{4.14}$$

где

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)dx, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)dx,$$

называется *интегралом Фурье* для функции $f(x)$.
Функция $a(\omega)$ называется *косинус-преобразованием* функции $f(x)$, функция $b(\omega)$ называется *синус-преобразованием* функции $f(x)$.

Заметим, что интеграл Фурье является несобственным и его значение зависит от переменной x. Поэтому к нему применима терминология функциональных рядов: интеграл может сходиться или расходиться в каждой конкретной точке x. В области сходимости его значение есть функция от переменной x.

Условия и результат сходимости интеграла Фурье вытекают из аналогичной информации для ряда Фурье. Если выполнены условия теоремы 4.6, то ряд (4.11) сходится в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ и его сумма на интервале $(-l; l)$ такова:

$$S(x) = \begin{cases} f(x), \ x - \text{ точка непрерывности } f(x) \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, \ x - \text{ точка разрыва I рода } f(x) \end{cases}, \quad x \in (-l; l).$$

Переходя в этой формуле к пределу при $l \to +\infty$, получаем результат сходимости интеграла Фурье на интервале $(-\infty; +\infty)$.

Теорема 4.12 (Поточечная сходимость интеграла Фурье (рис.24), без доказательства)**.** Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ и функции $f(x)$, $f'(x)$ кусочно непрерывны на $\mathbb{R}$ (это значит, что они имеют конечное число разрывов I рода на любом ограниченном отрезке $[-l; l]$, $l > 0$). Тогда интеграл Фурье сходится в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ к значению

$$S(x) = \begin{cases} f(x), \ x - \text{ точка непрерывности } f(x) \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, \ x - \text{ точка разрыва I рода } f(x) \end{cases}.$$

Таким образом, функция $f(x)$ может быть представлена интегралом Фурье на всей числовой прямой, за исключением точек разрыва $f(x)$.

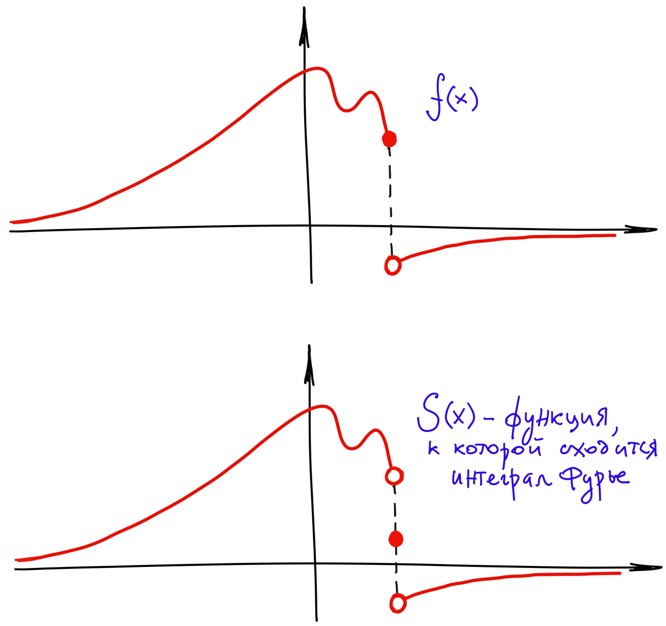

Рис. 24

Требование абсолютной интегрируемости $f(x)$ в теореме 4.12 накладывает существенные ограничения на функции, которые можно представить интегралом Фурье. Например, функции

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = e^x, \quad f_3(x) = \sin x, \quad f_4(x) = \operatorname{arctg} x$$

не являются абсолютно интегрируемыми на $\mathbb{R}$, для них $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = +\infty$.

Абсолютно интегрируемыми являются, например, такие функции:

$$f_5(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f_6(x) = e^{-|x|}, \quad f_7(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^4}}, \quad f_8(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}.$$

При этом функции f_5, f_6, f_8 являются также кусочно непрерывными и имеют кусочно непрерывные производные, поэтому эти функции можно представить интегралом Фурье (теорема 4.12). Функция f_7 не является кусочно непрерывной, так как имеет разрыв II рода в точке $x = 0$.

Необходимое (но не достаточное) условие абсолютной интегрируемости $f(x)$ на $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Ясно, что этому условию не может удовлетворять периодическая функция, поэтому интеграл Фурье принципиально предназначен для непериодических функций. Можно сказать, что интеграл Фурье – это инструмент разложения непериодической функции на гармонические колебания с непрерывно изменяющимися частотами (в отличие от ряда Фурье, где набор частот гармоник представляет собой дискретное множество).

Замечание 11. Заметим, что в этом параграфе все несобственные интегралы от $-\infty$ до $+\infty$ следует понимать в смысле главного значения, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots = \lim_{l \to +\infty} \int_{-l}^{l} \ldots$$

Интеграл и преобразование Фурье в комплексной форме.

По аналогии с комплексной формой ряда Фурье можно вывести комплексную форму интеграла Фурье:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.}$$

При этом $c(\omega)$ называется (комплексным) преобразованием Фурье.

Упражнение. Вывести комплексную форму интеграла Фурье.

Прямое и обратное преобразования Фурье.

Допустим, функция $f(x)$ может быть представлена интегралом Фурье, запишем его в комплексной форме:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx. \tag{4.15}$$

Перепишем (4.15) в "симметричном" виде:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx. \qquad (4.16)}$$

Запись (4.15) придает вспомогательное значение функции $c(\omega)$ как коэффициенту гармоники в интеграле Фурье. Запись (4.16) подчеркивает самостоятельное значение функции $\hat{f}(\omega)$, равнозначное функции $f(x)$, и связь между f и $\hat{f}$ воспринимается как взаимно однозначное отображение.

Отображение

$$f(x) \to \hat{f}(\omega), \quad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

называется *прямым преобразованием Фурье* функции f. Обратное отображение

$$\hat{f}(\omega) \to f(x), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

называется, соответственно, *обратным преобразованием Фурье* функции f.

В литературе можно встретить различные формулы преобразования Фурье, которые обычно отличаются только числовым коэффициентом перед интегралом, как $\hat{f}(\omega)$ из (4.16) и $c(\omega)$ из (4.15). Однако симметричная запись (4.16) используется чаще, поскольку в этом случае формулы прямого и обратного преобразования Фурье почти одинаковы.

Смысл прямого и обратного преобразований Фурье: если переменная x выражает время, $f(x)$ – функция от времени (сигнал), то $\hat{f}(\omega)$ – функция от частоты. Преобразования $f(x) \rightleftarrows \hat{f}(\omega)$ выражают переход из временнóго пространства в частóтное и обратно. В этом контексте функцию f называют оригиналом, функцию $\hat{f}$ называют изображением.

Некоторые свойства преобразования Фурье:

1. $f + g \to \hat{f} + \hat{g}, \quad \alpha f \to \alpha \hat{f},\ \alpha \in \mathbb{R}$ (линейность);
2. $f(\alpha x) \to \dfrac{1}{\alpha} \hat{f}\left(\dfrac{\omega}{\alpha}\right)$;
3. $f(x - \tau) \to e^{-i\omega\tau} \hat{f}(\omega)$;
4. $f^{(n)}(x) \to (i\omega)^n \hat{f}(\omega)$.

Упражнение. Доказать перечисленные свойства.

Эти и другие свойства преобразования Фурье показывают, что многие операции становятся проще после перехода от оригинала f к изображению $\hat{f}$. Отсюда идея решения некоторых задач: с помощью прямого преобразования Фурье перейти в частотное пространство, где задача становится проще, найти решение и восстановить по нему оригинал с помощью обратного преобразования Фурье. Например, под действием преобразования Фурье линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами превращается в алгебраическое:

$$y''(x) + y'(x) = f(x) \quad \to \quad (i\omega)^2 \hat{y}(\omega) + (i\omega)\hat{y}(\omega) = \hat{f}(\omega).$$

Дифференциальное уравнение относительно $y(x)$ преобразовалось к алгебраическому уравнению первой степени относительно $\hat{y}(\omega)$. Выразим из него $\hat{y}(\omega)$:

$$\hat{y}(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{i\omega - \omega^2}.$$

Далее осталось применить обратное преобразование Фурье, чтобы найти $y(x)$.

Список литературы

[1] Аксенов А. П. Математика. Математический анализ. Часть 2.

[2] Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа (в 2 ч.). Часть 1, 2.