Гиперболические функции — семейство элементарных функций, выражающихся через экспоненту e^z и e^{-z} , тесно связанных с тригонометрическими функциями.

Этих функций шесть:

- гиперболический синус

$$sh\ z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, (1)$$

- гиперболический косинус

$$ch\ z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, (2)$$

- гиперболический тангенс

$$th\ z = \frac{sh\ z}{ch\ z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, (3)$$

- гиперболический котангенс

$$cth\ z = \frac{ch\ z}{sh\ z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}, (4)$$

- гиперболический секанс

$$sch\ z = \frac{2}{e^z + e^{-z}}, (5)$$

- гиперболический косеканс

$$csch\ z = \frac{2}{e^z - e^{-z}}, (6)$$

где z – действительное число

Такое название этим функциям дано на основании того, что они обладают, свойствами гиперболы.

Чтобы объяснить, почему гиперболические функции получили такое название рассмотрим равностороннюю (равнобочную) гиперболу (рис. 1). Уравнение единичной равнобочной гиперболы имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2, (7)$$

где OA = a – вещественная полуось

Возьмем на гиперболе (см. рис. 1) точку P с координатами (x,y)

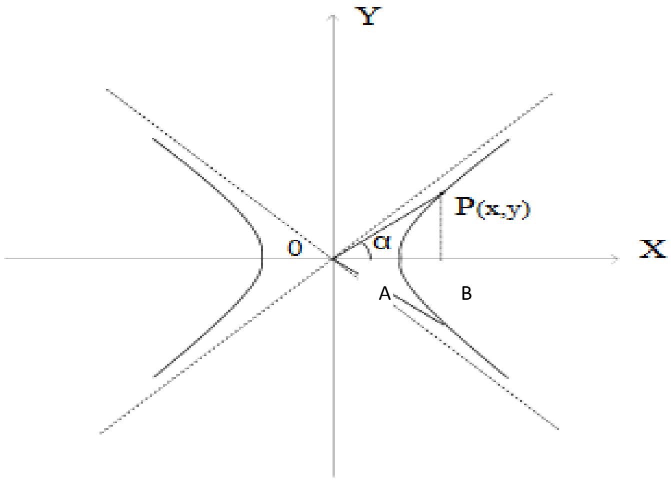

Рис. 1 Равносторонняя (равнобочная) гипербола

Отношение $x/_a$, т.е. отношение абсциссы точки Р к вещественной полуоси, есть гиперболический косинус *ch* α, а ординаты точки Р к вещественной полуоси, т.е. $y/_a$, есть гиперболический синус *sh* α. Аргумент α как синуса и косинуса в данном случае, принимается удвоенная площадь сектора АОР α = 2S = $\cup AP$ a, но не угол и не дуга $\cup AP$, на которую опирается угол α.

Если принять вещественную полуось равносторонней гиперболы за 1, то её уравнение примет вид:

$$x^2 - y^2 = 1. \quad (8)$$

Соответственно, выражения для гиперболического косинуса и гиперболического синуса примут вид:

$$ch\ \alpha = x \text{ и } sh\ \alpha = y. \quad (9)$$

Возводя обе части этих выражений в квадрат, и вычитая, получим , принимая во внимание равенство $x^2 - y^2 = 1$:

$$ch^2\alpha - sh^2\alpha = 1. \quad (10)$$

Из тождественности выражений (8) и (10) можно сделать вывод, что функции (9) описывают гиперболу, поэтому и были названы гиперболическими.

Из рис. 1 следует, что при $\alpha \to 0$, *ch* α убывает до 1, а *sh* α убывает до 0, т.е. *ch* 0 =1, *sh* 0 = 0.

Если точка Р будет перемещаться от вершины гиперболы до той части кривой, где ординаты отрицательны, то *ch* α будет величиной положительной и неограниченно возрастающей, а *sh* α будет отрицателен и неограниченно возрастает по абсолютной величине, т.е.

$$ch\ (-\alpha) = ch\ \alpha\ ,\ sh\ (-\alpha) = -\ sh\ \alpha$$

Изменение гиперболических функций в зависимости от α приведено в табл. 1

Таблица 1

a	$-\infty$	< 0	0	> 0	$+\infty$
sh α	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
ch α	$+\infty$	$+$	$+1$	$+$	$+\infty$
th α	-1	$-$	0	$+$	$+1$
cthα	-1	$-$	0	$+$	$+1$

Пусть $\underline{z} = x \pm jy = |z|e^{\pm jy}$, где x и y – действительные числа, то, выражение для экспоненты можно представить в виде

$$e^{\pm \underline{z}} = e^{x \pm jy} = e^{x}e^{\pm jy}, \, ( )$$

где $e^{x} = |z|$ – модуль комплексного числа $\underline{z}$;

$e^{\pm jy}$ – аргумент комплексного числа $\underline{z}$.

Воспользуемся формулой Эйлера

$$e^{\pm jy} = \cos \mathrm{y} \pm \mathrm{j}\sin \mathrm{y}, \, ( )$$

и найдем выражения для «синуса» и «косинуса».

Поскольку в самой формуле Эйлера присутствует знак «плюс минус» исходя из этого распишем формулу Эйлера в виде системы

$$\begin{cases} e^{jy} = \cos \mathrm{y} + \mathrm{j}\sin \mathrm{y} \\ e^{-jy} = \cos \mathrm{y} - \mathrm{j}\sin \mathrm{y} \end{cases}. \, ( )$$

Чтобы найти «косинус» прибавим к первому уравнению второе. При вычитании найдем «синус»

$$\begin{cases} e^{jy} = \cos \mathrm{y} + \mathrm{j}\sin \mathrm{y} \\ e^{-jy} = \cos \mathrm{y} - \mathrm{j}\sin \mathrm{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{jy} + e^{-jy} = \cos \mathrm{y} + \mathrm{j}\sin \mathrm{y} + \cos \mathrm{y} - \mathrm{j}\sin \mathrm{y} \\ e^{jy} - e^{-jy} = \cos \mathrm{y} + \mathrm{j}\sin \mathrm{y} - \cos \mathrm{y} - (-\mathrm{j}\sin \mathrm{y}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{jy} + e^{-jy} = 2\cos \mathrm{y} \\ e^{jy} - e^{-jy} = 2j\sin \mathrm{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \mathrm{y} = \frac{e^{jy} + e^{-jy}}{2} \\ \sin \mathrm{y} = \frac{e^{jy} - e^{-jy}}{2j} \end{cases}. \, ( )$$

Для того чтобы избавиться от мнимой единицы у «синуса» в знаменателе умножим числитель и знаменатель на «j». Вынеся минус в экспоненциальной записи, получим равенство определяющее гиперболический синус

$$\mathrm{jsin}\,(\mathrm{jy}) = \mathrm{j}\frac{e^{j(jy)} - e^{-j(jy)}}{2j} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2} = -\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = -\mathrm{sh}\ \mathrm{y}. \, ( )$$

Выражение для «косинуса» будет иметь вид

$$\cos\,(\mathrm{jy}) = \mathrm{j}\frac{e^{j(jy)} + e^{-j(jy)}}{2j} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} = \mathrm{ch}\ \mathrm{y}. \, ( )$$

В таблице 2 приведены гиперболические функции, выраженные через тригонометрические функции и наоборот

Таблица 2

Гиперболические функции, выраженные через тригонометрические	Тригонометрические функции, выраженные через гиперболические функции
sh x = − jsin (jx)	sin x =−sh (jx)
sh (−x) = jsin (jx)	sin (−x) = jsh (jx)
sh (jy) = j sin y	sin(jy) = jsh y
sh (−jy) = −j sin y	sin(−jy) = −jsh y
sh (x+jy) = jsin (y−jx)	sin (x+jy) = jsh (y−jx)
sh (x−jy) = −jsin (y+jx)	sin (x−jy) = − jsh (y+jx)
sh (−x+jy) = jsin (y+jx)	sin (−x+jy) = jsh (y+jx)
sh (−x−jy) = −jsin (y−jx)	sin (−x−jy) = − jsh (y−jx)
ch x = cos (jx)	cos x = ch (jx)
ch (−x) = cos (jx)	cos (−x) = ch (jx)
ch (jy) = cos y	cos (jy) = ch y
ch (−jy) = cos y	cos (−jy) = ch y
ch (x+jy) = cos (y−jx)	cos (x+jy) = ch (y−jx)
ch (x−jy) = cos (y+jx)	cos (x−jy) = ch (y+jx)
ch (−x+jy) = cos (y+jx)	cos (−x+jy) = ch (y+jx)
ch (−x−jy) = cos (y−jx)	cos (−x−jy) = ch (y−jx)

Продолжение таблицы 2

Гиперболические функции, выраженные через тригонометрические	Тригонометрические функции, выраженные через гиперболические функции
th x = −tg (jx)	tg x = −jth (jx)
th (−x) = jtg (jx)	tg (−x) = jth (jx)
th (jy) = jtg y	tg (jy) = jth y
th (−jy) = − jtg y	tg (−jy) = −jth y
th (x+jy) = jtg (y−jx)	tg (x+jy) = jth (y−jx)
th (x−jy) = − jtg (y+jx)	tg (x−jy) =−jth (y+jx)
th (−x+jy) = jtg (y+jx)	tg (−x+jy) = jth (y+jx)
th (−x−jy) = − jtg (y−jx)	tg (−x−jy) =−jth (y−jx)
cth x = jctg (jx)	ctg x = jcth (jx)
cth (−x) = −jctg (jx)	ctg (−x) = −jcth (jx)
cth (jy) = −jctg y	ctg (jy) = − jcth y
cth (−jy) = jctg y	ctg (−jy) = jcth y
cth (x+jy) = −jctg (y−jx)	ctg (x+jy) = − jcth (y−jx)
cth (x −jy) = jctg (y+jx)	ctg (x −jy) = jcth (y+jx)
cth (−x+jy) = −jctg (y+jx)	ctg (−x+jy) = − jcth (y+jx)
cth (−x−jy) = jctg (y−jx)	ctg (−x−jy) = jcth (y−jx)

Формулы сложения

sh (x+y) = sh x·ch y + ch x·sh y

sh (x−y) = sh x·ch y − ch x·sh y

ch (x+y) = ch x·ch y + sh x·sh y

ch (x−y) = ch x·ch y − sh x·sh y

th (x+y) = $\frac{th\, x + th\, y}{1 + th\, x \cdot th\, y}$

th (x−y) = $\frac{th\, x - th\, y}{1 - th\, x \cdot th\, y}$

cth (x+y) = $\frac{1 + cth\, x \cdot cth\, y}{cth\, x + cth\, y}$

cth (x−y) = $\frac{1 - cth\, x \cdot cth\, y}{cth\, x - cth\, y}$

Формулы удвоения

sh 2x = 2sh·ch x

ch 2x = $ch^2\, x$ +sh^2 x = 2sh^2 x + 1 = 2$ch^2\, x$ – 1

th 2x = $\frac{2th\, x}{1 +\, th^2\, x}$

cth 2x = $\frac{1 + cth^2\, x}{2cth\, x}$

Формулы возведения в квадрат

$$ch^2\, x = \frac{1 + ch\, 2x}{2}$$

sh^2 x = $\frac{ch\, 2x\, - 1}{2}$

Формулы суммы

sh x + sh y = 2sh $\frac{x+y}{2}$ ch $\frac{x-y}{2}$

sh x − sh y = 2sh $\frac{x-y}{2}$ ch $\frac{x+y}{2}$

ch x + ch y = 2ch $\frac{x+y}{2}$ ch $\frac{x-y}{2}$

ch x − ch y = 2sh $\frac{x+y}{2}$ sh $\frac{x-y}{2}$

th x ± th y = $\frac{sh\,(x \pm y)}{ch\,x \cdot ch\,y}$

cth x ± cth y = $\frac{sh\,(y \pm x)}{sh\,x \cdot sh\,y}$

Формулы произведения

sh x · sh y = $\frac{1}{2}\left(ch(x+y)\ - ch(x\ - y)\right)$

sh x · ch y = $\frac{1}{2}\left(sh(x+y) + sh(x\ - y)\right)$

ch x · ch y = $\frac{1}{2}\left(ch(x+y) + ch(x\ - y)\right)$

Формулы для тригонометрических и гиперболических функций $\underline{z}$ = (x + jy)

sin (x + jy) = sin x·ch y + jcos x ·sh y

cos (x + jy) = cos x ·ch y –jsin x ·sh y

tg (x + jy) = $\frac{\sin 2x + jsh\ 2y}{\cos 2x + ch\ 2y}$

ctg (x + jy) = $\frac{\sin 2x - jsh\ 2y}{-\cos 2x + ch\ 2y}$

sh (x + jy) = sh x·cos y + jch x·sin y

ch (x + jy) = ch x·cos y + jsh x·sin y

th (x + jy) = $\frac{sh\ 2x + jsin\ 2y}{ch\ 2x + \cos 2y}$

cth (x + jy) = $\frac{sh\ 2x\ - jsin\ 2y}{ch\ 2x\ - \cos 2y}$

sin (x–jy) = sin x·ch y –jcos x·sh y

cos (x–jy) = cos x·ch y + jsin x·sh y

tg (x–jy) = $\frac{\sin 2x\ - jsh\ 2y}{\cos 2x + ch\ 2y}$

ctg (x–jy) = $\frac{\sin 2x + jsh\ 2y}{-\cos 2x + ch\ 2y}$

sh (x–jy) = sh x·cos y – jch x·sin y

ch (x–jy) = ch x·cos y–jsh x·sin y

th (x–jy) = $\frac{sh\ 2x\ - jsin\ 2y}{ch\ 2x + \cos 2y}$

$$\text{cth}\,(x - jy) = \frac{sh\ 2x + j\sin 2y}{ch\ 2x - \cos 2y}$$