ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Электронный конспект лекций по дисциплине
«Математический анализ»
для студентов II курса

2009

Оглавление

Оглавление ... 2
ТЕМА I. Кратные интегралы ... 4
§1. Двойной интеграл: определение, свойства, ... 4
механическая и геометрическая трактовки ... 4
§2. Вычисление двойного интеграла в декартовых и в полярных координатах в двойном интеграле ... 10
§3. Тройные интегралы: определение, свойства, механическая трактовка, вычисление в декартовых, в цилиндрических и в сферических координатах ... 20
§ 4. Приложения двойных и тройных интегралов к задачам геометрии и механики ... 28
ТЕМА II. Криволинейные и поверхностные интегралы ... 41
§5. Криволинейные интегралы I рода: определение, основные свойства, вычисление, некоторые приложения ... 41
§6.Криволинейные интегралы II рода: определение, физическая трактовка, основные свойства, вычисление ... 48
§7. Формула Грина. Вычисление площади плоской фигуры с помощью криволинейного интеграла II рода ... 57
§ 8. Условия независимости криволинейного интеграла II рода от формы линии интегрирования ... 63
§9. Восстановление функции нескольких переменных по ее полному дифференциалу ... 71
§10. Поверхностный интеграл I рода: определение, основные свойства, вычисление, некоторые приложения ... 76
§11. Поверхностные интегралы II рода: определение, физическая трактовка, основные свойства, вычисление. Формулы Стокса и Остроградского-Гаусса ... 84
ТЕМА III. Элементы теории векторных полей ... 91
§ 12. Определение Векторного поля. Векторные линии. Поток векторного поля через поверхность: определения, основные свойства, формулы для вычисления ... 91

§13. Дивергенция и ротор векторного поля: определения, основные свойства, формулы для вычисления. формула Остроградского-Гаусса в векторной форме 97
§14. Векторный дифференциальный оператор Гамильтона. дифференциальные векторные операции первого и второго порядков .. 103
§ 15. Работа и Циркуляция векторного поля: определения, основные свойства циркуляции. 109
§ 16. Потенциальные, соленоидальные и гармонические векторные поля: определения и основные свойства. Нахождение потенциала потенциального векторного поля 113
Глоссарий 119
Вопросы для самопроверки 123

ТЕМА I. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ, СВОЙСТВА, МЕХАНИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТРАКТОВКИ

Содержание

1.1. Определение двойного интеграла 5
1.2. Основные свойства двойного интеграла 6
1.3. Механическая трактовка двойного интеграла 8
1.4. Геометрическая трактовка двойного интеграла 8

1.1. Определение двойного интеграла

Полное определение двойного интеграла

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$, заданную в замкнутой ограниченной области $D \subset \mathbf{R}^2$.

1. Разобьем область D на n малых элементарных частей произвольным образом. Обозначим через ΔS_i площадь i-ой части, а через d_i - диаметр i-ой части. Число $\lambda = max\ \{d_i\}$, где $i = 1,\ldots,n$, назовем ***рангом разбиения двумерной области D***.

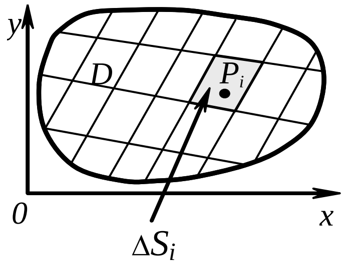


Рис. 1

2. В каждой части разбиения выберем произвольную точку $P_i\ (x_i,y_i)$ и вычислим значение функции f в ней: $f(x_i, y_i) = f(P_i)$, $i = 1, \ldots, n$, (*Рис. 1*)

3. Составим сумму парных произведений значений функции $f(P_i)$ на площади ΔS_i соответствующих частей разбиения:
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i)\cdot \Delta S_i \tag{1}$$
эта сумма называется ***двумерной интегральной суммой функции f(x,y) в области D*** (двумерной суммой Римана).

4. Вычислим предел интегральной суммы (1) при условии, что $\lambda \to 0$. Если этот предел существует, конечный и не зависит от способа разбиения области D на элементарные части и от выбора точек P_i в каждой части, то он называется ***двойным интегралом от функции f(x,y) по области D.***

Обозначение и терминология:
$$\iint_D f(x, y)\,dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\cdot \Delta S_i \tag{2}$$

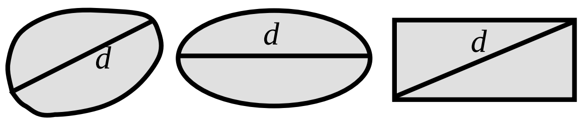
D — область интегрирования;
$f(x,y)$ — подынтегральная функция;
$f(x,y)dS$ — подынтегральное выражение;
dS — бесконечно малый элемент области интегрирования (дифференциал площади плоской области).

Краткая формулировка определения двойного интеграла

Двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области D называется конечный предел двумерной интегральной суммы, вычисленный при стремлении к нулю ранга разбиения, порождающего эту сумму.

Диаметр плоской фигуры

Диаметр d плоской геометрической фигуры — это длина наибольшей хорды этой фигуры, то есть наибольшее расстояние между двумя точками этой фигуры.



Достаточное условие существования двойного интеграла

Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области D, то двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области D существует.

1.2. Основные свойства двойного интеграла

(доказываются аналогично свойствам определенного интеграла)

Свойство 1 (о линейности двойного интеграла по подынтегральной функции)

Двойной интеграл от линейной комбинации функций равен аналогичной линейной комбинации двойных интегралов от каждой из функций:

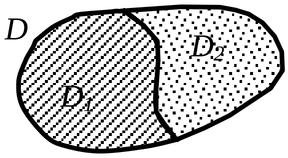
$$\iint_D \left(c_1 \cdot f_1(x,y) + c_2 \cdot f_2(x,y)\right) dS = c_1 \cdot \iint_D f_1(x,y)\,dS + c_2 \cdot \iint_D f_2(x,y)\,dS,$$

где c_1, c_2 — постоянные множители по x и по y.

Свойство 2 (об аддитивности двойного интеграла по области интегрирования)

Если $D = D_1 \cup D_2$,

то $\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dS$



Свойство 3 (о значении двойного интеграла от функции, тождественно равной единице)

Если подынтегральная функция $f(x,y) \equiv 1$ на области D, то двойной интеграл от функции $f(x,y)$ по области D равен площади (мере) S_D области интегрирования:

$$\iint_D 1 \cdot dS = \iint_D dS = S_D$$

Свойство 4 (оценки значения двойного интеграла)

1. Если m и M — наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y)$ в области D, то

$$m \cdot S_D \le \iint_D f(x,y) dS \le M \cdot S_D$$

2. Если $|f(x, y)| \le K$ при $\forall (x,y) \in D$, то

$$\left| \iint_D f(x,y) dS \right| \le K \cdot S_D$$

S_D - площадь области D

Свойство 5 (об интегрировании неравенств двойным интегралом)

Если при $\forall (x,y) \in D$ верно неравенство $f(x,y) \ge g(x,y)$, то $\iint_D f(x,y)dS \ge \iint_D g(x,y)dS$, то есть двойной интеграл от бо́льшей функции имеет бо́льшее значение (при условии, что оба интеграла существуют).

Свойство 6 (теорема о среднем)

Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области D, то существует хотя бы одна точка $P_0(x_0,y_0)\in D$, такая что

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS = f(P_0)\cdot S_D$$

Число $f(P_0)=\dfrac{\iint\limits_D f(x,y)\,dS}{S_D}$ называется ***средним значением функции f (x,y) в области D***.

1.3. Механическая трактовка двойного интеграла

Если область D занята тонкой пластинкой и функция $f(x,y)\geq 0$ задает поверхностную плотность распределения неоднородного материала (то есть величину массы на единицу площади), то двойной интеграл от функции $f(x,y)$ по области D равен массе тонкой пластинки: $\iint\limits_D f(x,y)dS = m$

▷ Действительно, в определении двойного интеграла по формуле (2) можно провести следующее механическое истолкование:

$f(P_i)\cdot\Delta S_i \approx \Delta m_i$ — это масса элементарной части, вычисленная приближенно как для однородного материала;

$m \approx \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta S_i$ — приближенное значение массы всех элементарных частей;

$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta S_i = m$ — это точное значение массы, так как при $\lambda\to 0$ все части разбиения неограниченно измельчаются и тем самым убирается погрешность, допущенная при вычислении Δm_i. ◁

1.4. Геометрическая трактовка двойного интеграла

Цилиндроид или цилиндрическое тело — это пространственное тело, ограниченное снизу областью $D\subset XOY$, сверху — частью поверхности $z = f(x,y)$, сбоку — цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OZ.

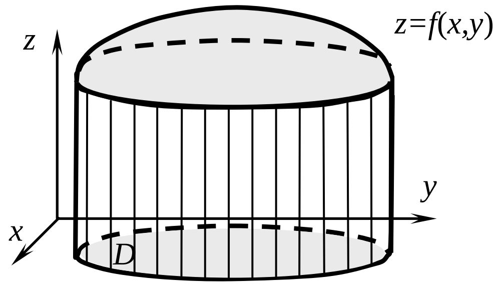
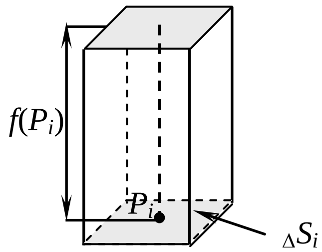


Рис. 2

Двойной интеграл от функции $f(x,y)$ по области D равен объему цилиндроида

$$\iint_D f(x,y)\,dS = V$$



▷ Для пояснения этого утверждения в определении двойного интеграла (2) проводим следующие геометрические истолкования:

$f(P_i)\cdot\Delta S_i = \Delta V_i$ — это объем элементарного цилиндра с основанием ΔS_i и высотой $f(P_i)$;

$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta S_i$ — это объем ступенчатого тела, составленного из элементарных цилиндров (цилиндр отличается от цилиндроида тем, что ограничен сверху плоскостью, параллельной нижнему основанию);

$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$ — это объем цилиндрического тела, ограниченного сверху частью поверхности

$z = f(x,y)$, проецируемой на область D, так как при $\lambda \to 0$ все площадки ΔS_i уменьшаются (стягиваются в точки) и тем самым «ступенчатость» объёма сверху сглаживается поверхностью $z = f(x,y)$. ◁

§2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВЫХ И В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Содержание

2.1. Две формулы для вычисления двойного интеграла в декартовых координатах 10
2.2. Задача об изменении порядка интегрирования в повторном интеграле14
2.3. Формула для вычисления двойного интеграла в полярных координатах16
2.4. Формула замены переменных в двойном интеграле............................ 18

2.1. Две формулы для вычисления двойного интеграла в декартовых координатах

Вычисление двойного интеграла сводится к вычислению повторных интегралов, причем, в декартовой системе координат это можно сделать двумя способами.

Вариант 1 (для области правильной в направлении оси OY)

Если область D — правильная в направлении оси OY, то ее можно записать системой неравенств

$$D:\begin{cases} a \le x \le b \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \end{cases}$$

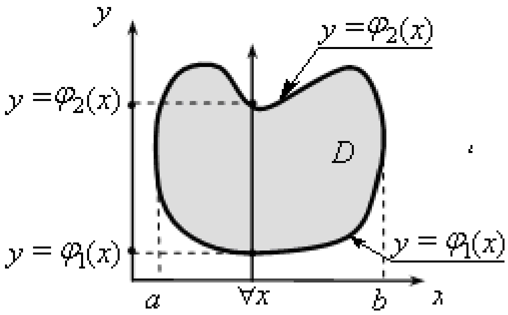


Рис. 3

в которой отражено, что переменная x изменяется в постоянных пределах, а переменная y изменяется, вообще говоря, в переменных пределах, зависящих от x; при этом геометрически отрезок $x \in [a;b]$ является проекцией области D на ось OX, линия $y = \varphi_1(x)$ ограничивает область D снизу и линия $y = \varphi_2(x)$ ограничивает область D сверху *(Рис.3)*.

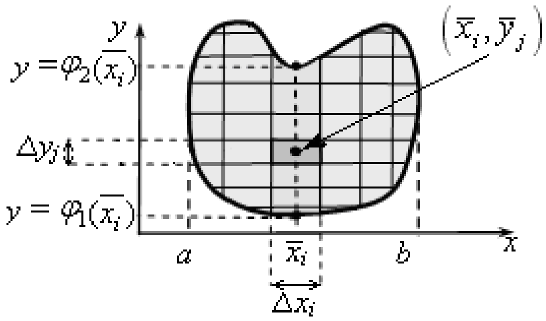
Тогда двойной интеграл сводится к повторному интегралу по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \qquad (1)$$

Справа стоит повторный интеграл, в котором внутренний интеграл вычисляется по переменной y в предположении, что x является постоянной; результатом вычисления внутреннего интеграла является некоторая функция $\Phi(x)$. Затем вычисляется внешний интеграл от $\Phi(x)$ по переменной x в постоянных пределах, в результате получается число.

Вывод формулы (1)

▷ Так как $\iint\limits_D f(x,y)dS$ не зависит от способа разбиения области D на элементарные части, то сделаем разбиение её горизонтальными и вертикальными прямыми на прямоугольные элементарные части.



Всего количество элементарных частей будет равным $n = n_1 \cdot n_2$, где n_1— количество частей по оси OX, n_2 - количество частей по оси OY (вообще говоря, $n_2 = n_2(i)$, т.е. разное при разных i).

Площадь каждой элементарной части вычисляем как площадь прямоугольника: $\Delta S_{ij} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$, а координаты произвольно выбранной точки на каждой элементарной части обозначим $(\overline{x}_i, \overline{y}_j)$.

Теперь работаем с определением двойного интеграла, учитывая такое разбиение области D:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_j \to 0}} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} f\left(\overline{x_i}, \overline{y_j}\right) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j \; =$$

используя механическую трактовку, выполним суммирование сначала по j, то есть по вертикальным элементарным частям при фиксированном $\overline{x}_i$, затем по i, то есть просуммируем массы вертикальных полосок

$=$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n_1} \underbrace{\left(\lim_{\max \ \Delta \ y_j \to 0} \sum_{j=1}^{n_2} f(\overset{\text{const}}{\bar{x}_i}, \bar{y}_j) \cdot \Delta y_j \right)}_{\textit{определённый интеграл по переменной } y} \cdot \Delta x_i = \left\{ \text{обозначим } \int_{\varphi_1(\bar{x}_i)}^{\varphi_2(\bar{x}_i)} f(\bar{x}_i, y) dy = \Phi\left(\bar{x}_i\right) \right\} =$$

$$= \underbrace{\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n_1} \Phi\left(\bar{x}_i\right) \cdot \Delta x_i}_{\textit{определенный интеграл по переменной } x} = \int_a^b \Phi\left(x\right) dx = \int_a^b \underbrace{\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f\left(x, y\right) dy \right)}_{x=\text{const}} dx .$$

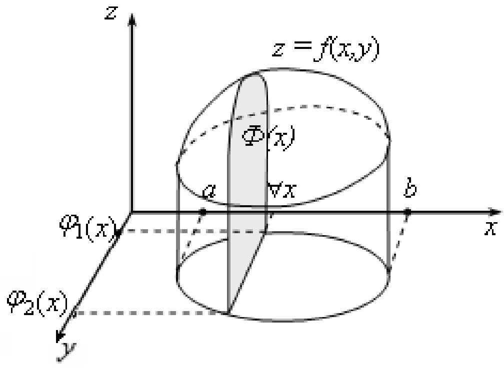
Таким образом, получена формула сведения двойного интеграла к повторному:
$$\iint_D f(x,y) dS = \left\{ \begin{matrix} \text{в декартовых координатах} \\ dS = dx \cdot dy \end{matrix} \right\} = \int_a^b \Big(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \Big) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy ,$$

в котором внутренний интеграл вычисляется по переменной y, а внешний – по переменной x.
◁

Геометрическая иллюстрация к формуле (1)

Смысл формулы (1) можно также проиллюстрировать вычислением объема цилиндроида, зная формулу для вычисления объема тела с известной площадью поперечного сечения:

$\mathit{\Phi}\left(x\right) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f\left(x, y\right) dy$ — это площадь поперечного сечения цилиндроида плоскостью $x = const$. Тогда с помощью определенного интеграла находим весь объем:



$$V = \int_{x=a}^{x=b} \Phi\left(x\right) dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f\left(x, y\right) dy \right) dx .$$

Пример 1 (вычисление двойного интеграла в декартовых координатах)

Вычислить $\iint_D (x + y) dS$, если область D ограничена линиями $y = x^2$ и $y = 2x$.

Решение

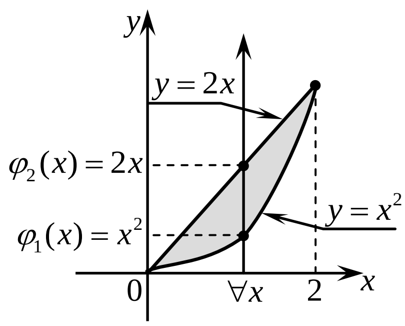
Строим область D, определяем её правильность в направлении оси OY и записываем системой неравенств

$$D:\begin{cases}0\le x\le 2\\ x^2\le y\le 2x.\end{cases}$$

Вычисляем данный двойной интеграл сведением его к повторному интегралу по формуле (1):

$$\iint\limits_D (x+y)dS=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x^2}^{2x}(x+y)dy=\int\limits_0^2 dx\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=2x}=$$

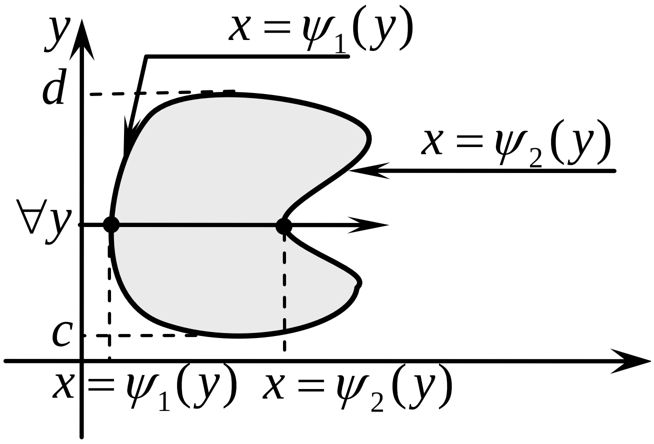
$$=\int\limits_0^2\left(4x^2-x^3-\frac{1}{2}x^4\right)dx=\left(\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{10}x^5\right)\Bigg|_0^2=\boxed{\frac{52}{15}}.$$



Вариант 2 (для области правильной в направлении оси *OX*)

Если область D — правильная в направлении оси OX, то она записывается системой неравенств

$$D:\begin{cases}c\le y\le d\\ \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y),\end{cases}$$



в которой отражено, что переменная y изменяется в постоянных пределах, а переменная x изменяется, вообще говоря, в переменных пределах, зависящих от y; при этом геометрически отрезок $y\in[c;d]$ является проекцией области D на ось OY, линия $x=\psi_1(y)$ ограничивает область D слева, линия $x=\psi_2(y)$ ограничивает область D справа *(Рис. 4)*.

Тогда двойной интеграл сводится к повторному по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dS=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \tag{2}$$

Справа стоит повторный интеграл, в котором внутренний интеграл вычисляется по переменной x в предположении, что y является постоянной; результатом вычисления внутреннего интеграла является некоторая функция $\Psi(y)$. Затем вычисляется внешний интеграл от $\Psi(y)$ по переменной y в постоянных пределах, в результате получается число.

Пример 2 (вычисление двойного интеграла в декартовых координатах)

Вычислить $\iint\limits_D (x+y)\,dS$, если область D ограничена линиями $y=2x$ и $y=x^2$.

Решение

Область D, уже построенная в предыдущем примере, является также правильной в направлении оси OX, поэтому может быть записана системой неравенств

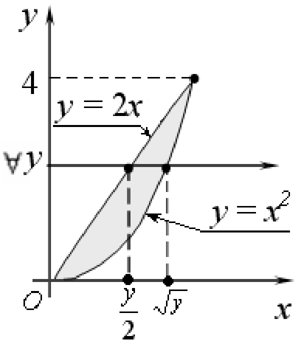
$$D:\begin{cases}0\le y\le 4\\ \dfrac{y}{2}\le x\le \sqrt{y}.\end{cases}$$

Вычисляем данный двойной интеграл сведением его к повторному по формуле (2):

$$\iint\limits_D (x+y)\,dS=\int\limits_0^4 dy\int\limits_{y/2}^{\sqrt{y}}(x+y)\,dx=\int\limits_0^4 dy\left(\frac{x^2}{2}+yx\right)\Bigg|_{x=y/2}^{x=\sqrt{y}}=$$

$$=\int\limits_0^4 dy\Big(\frac{y}{2}-\frac{y^2}{8}+y\sqrt{y}-\frac{y^2}{2}\Big)=\int\limits_0^4\left(\frac{1}{2}y-\frac{5}{8}y^2+y^{3/2}\right)dy=$$

$$=\left(\frac{1}{4}y^2-\frac{5}{24}y^3+\frac{2}{5}y^{5/2}\right)\Bigg|_0^4=\boxed{\frac{52}{15}}.$$



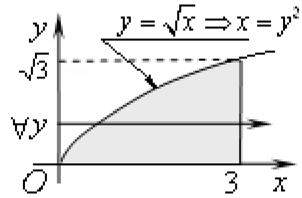
2.2. Задача об изменении порядка интегрирования в повторном интеграле

На применении формул (1) и (2) для одной и той же области основано решение задачи об изменении порядка интегрирования в повторном интеграле. Рассмотрим пример такой задачи.

Пусть дан повторный интеграл $\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$ и требуется изменить порядок интегрирования так, чтобы внешний интеграл вычислялся бы по переменной y, а внутренний – по переменной x.

По пределам в данном повторном интеграле восстанавливаем область D, записывая для нее систему неравенств

$$D:\begin{cases}0\le x\le 3\\ 0\le y\le \sqrt{x}\end{cases}$$



Далее строим область D по этой системе неравенств и записываем её неравенствами другим способом, так чтобы в постоянных пределах изменялась переменная y:

$$D:\begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{3} \\ y^2 \le x \le 3 \end{cases}$$

Теперь переходим от исходного повторного интеграла к двойному интегралу по области *D*, а затем снова сводим двойной интеграл к повторному, но с другим порядком интегрирования:

$$\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{\sqrt{3}} dy \int_{y^2}^3 f(x,y)dx$$

Ответ: $\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy = \int_0^{\sqrt{3}} dy \int_{y^2}^3 f(x,y)dx.$

Задача об изменении порядка интегрирования имеет практическое значение в связи с возможными трудностями при вычислении повторных интегралов от функции $f(x,y)$.

2.3. Формула для вычисления двойного интеграла в полярных координатах

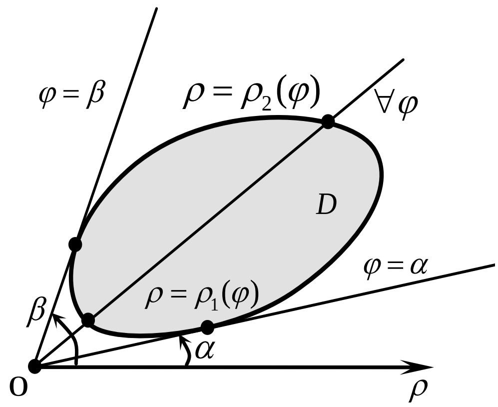


Рис. 5

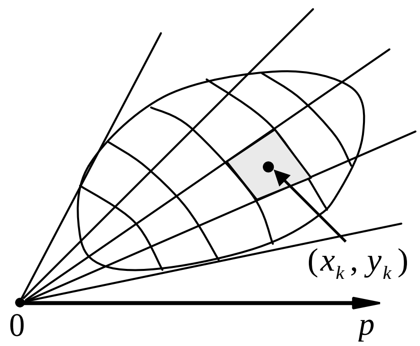
Пусть область D записывается системой неравенств в полярных координатах

$$D:\begin{cases}\alpha \le \varphi \le \beta \\ \rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi)\end{cases}$$

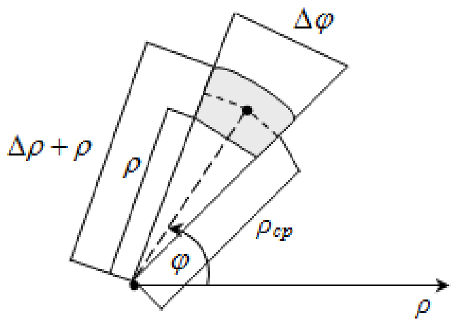
Область D называется ***правильной областью в полярной системе координат***, если каждый луч, выходящий из полюса, пересекает границу области не более чем в двух точках (за исключением тех участков границы, которые являются частью луча, идущего из полюса) *(Рис. 5)*.

По определению двойного интеграла имеем:

$$\iint\limits_D f(x,\, y) = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k, y_k\right)\cdot \Delta S_k \,.$$



Так как значение двойного интеграла не зависит от способа разбиения области D на элементарные части, то сделаем это разбиение координатными линиями полярной системы координат: лучами, выходящими из полюса, и концентрическими окружностями с центрами в полюсе. Тогда элементарная площадь dS вычисляется как разность площадей двух круговых секторов:



$$\Delta S = \frac{1}{2}\left(\rho+\Delta\rho\right)^2\cdot\Delta\varphi - \frac{1}{2}\rho^2\cdot\Delta\varphi = \frac{1}{2}\left(\rho^2+2\rho\cdot\Delta\rho+(\Delta\rho)^2-\rho^2\right)\cdot\Delta\varphi =$$
$$=\left(\rho+\frac{1}{2}\Delta\rho\right)\cdot\Delta\rho\cdot\Delta\varphi = \rho_{cp}\cdot\Delta\rho\cdot\Delta\varphi$$

Фиксированная точка (x, y) на каждой элементарной части тоже выбирается произвольно, поэтому ее декартовы координаты с учетом известных формул связи декартовых и полярных координат можно положить равными $x = \rho_{\text{ср}}\cdot\cos\varphi$,

$y=\rho_{\text{ср}}\cdot\sin\varphi$ (здесь значение угла φ можно произвольно зафиксировать на промежутке длиной $\Delta\varphi$). Тогда определение двойного интеграла запишется в следующем виде:

$$\iint_D f(x,y)dS=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{\substack{\text{по всем}\\ \text{частям}\\ \text{разбиения}}} f\left(\rho_{cp}\cos\varphi,\rho_{cp}\sin\varphi\right)\cdot\rho_{cp}\cdot\Delta\varphi\cdot\Delta\rho=\iint_D f\left(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi\right)\underbrace{\rho\cdot d\rho\cdot d\varphi}_{\substack{dS\ \text{в полярных}\\ \text{координатах}}}$$

Правило перевода двойного интеграла в систему полярных координат

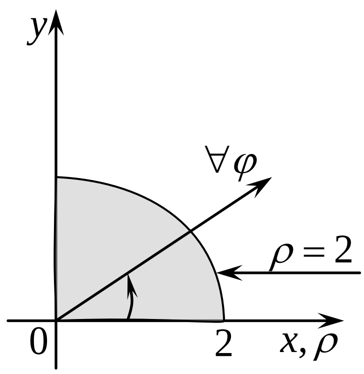
Чтобы перевести двойной интеграл $\iint_D f(x,y)dS$ из декартовой системы координат (x,y) в систему полярных координат (φ,ρ), нужно в подынтегральной функции сделать замену переменных $\begin{cases}x=\rho\cdot\cos\varphi\\ y=\rho\cdot\sin\varphi\end{cases}$ и бесконечно малый элемент площади записать по формуле $dS=\rho\cdot d\rho\cdot d\varphi$

Переведенный в полярные координаты двойной интеграл сводится к повторному интегралу по имеющейся записи области D неравенствами для переменных φ и ρ. В результате получается ***формула для вычисления двойного интеграла в полярных координатах***:

$$\iint_D f(x,y)dS=\iint_D f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\cdot d\rho\cdot d\varphi=\int_\alpha^\beta d\varphi\int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\cdot d\rho \tag{3}$$

Примеры 3 (вычисление двойных интегралов в полярных координатах)

1. Вычислить $\iint_D x^2ydS$, где $D=\{(x,y)/\,x\ge 0,\ y\ge 0,\ x^2+y^2\le 4\}$.



Решение

Строим область D и записываем ее системой неравенств в полярных координатах:

$$D:\begin{cases}0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\\0\le\rho\le 2\end{cases}$$

По формуле (3) получим:

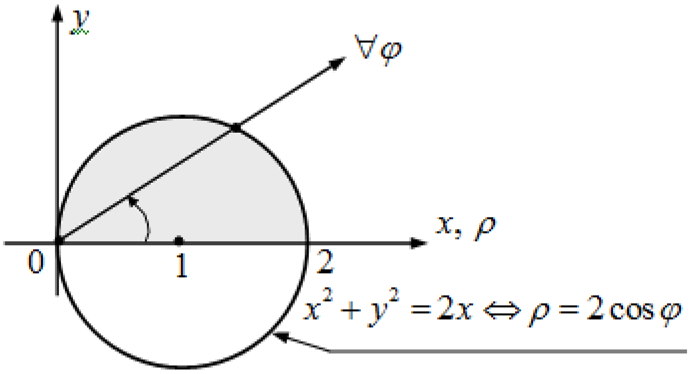
$$\iint\limits_D x^2ydS=\begin{Bmatrix}x=\rho\cdot\cos\varphi\\y=\rho\cdot\sin\varphi\\dS=\rho\cdot d\rho\cdot d\varphi\end{Bmatrix}=\iint\limits_D\rho^2\cos^2\varphi\cdot\rho\sin\varphi\cdot\rho\cdot d\rho\cdot d\varphi=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi\cdot d\varphi\int\limits_0^2\rho^4d\rho=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi\cdot d\varphi\cdot\frac{\rho^5}{5}\Bigg|_0^2=$$

$$=-\frac{32}{5}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\cdot d(\cos\varphi)=-\frac{32}{5}\cdot\frac{\cos^3\varphi}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{\frac{32}{15}}.$$

2. Вычислить $\iint\limits_D ydS$, где $D=\{(x,y)/\,x^2+y^2\le 2x \text{ и } y\ge 0\}$.

Решение

Строим область D и записываем ее неравенствами в полярных координатах



$$D:\begin{cases}0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\\0\le\rho\le 2\cos\varphi\end{cases}$$

При этом уравнение окружности со смещенным центром переведено в полярные координаты:
$x^2+y^2=2x\Leftrightarrow\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=2\rho\cos\varphi\Leftrightarrow\rho=2\cos\varphi$.

Теперь переводим данный двойной интеграл в полярные координаты по формуле (3) и сводим его к повторному интегралу в соответствии с записью области D неравенствами:

$$\iint\limits_D ydS=\iint\limits_D\rho\sin\varphi\cdot\rho\cdot d\rho\cdot d\varphi=\int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi\cdot d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^2d\rho=\int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi\cdot d\varphi\cdot\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{2\cos\varphi}=\frac{8}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi\cdot\cos^3\varphi\cdot d\varphi=$$

$$=-\frac{8}{3}\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\cdot d(\cos\varphi)=-\frac{8}{3}\cdot\frac{\cos^4\varphi}{4}\Bigg|_0^{\pi/2}=-\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}\left(\underbrace{\cos^4\frac{\pi}{2}}_{0}-\underbrace{\cos^4 0}_{1}\right)=\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}=\boxed{\frac{2}{3}}.$$

2.4. Формула замены переменных в двойном интеграле

Пусть точка $(x,y)\in D$ и переменные x, y являются функциями новых переменных u и v: $\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\end{cases}$, причем эти функции являются однозначными, непрерывными и имеющими непрерывные частные производные. Тогда существует ***формула замены переменных в двойном интеграле***, которая имеет следующий вид:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\underset{dS_{xy}}{dxdy} = \iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\cdot|I|\cdot \underset{dS_{uv}}{dudv} \qquad (4)$$

Здесь $I=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$ — это ***функциональный определитель Якоби (якобиан)***, с помощью которого пересчитывается дифференциал площади:

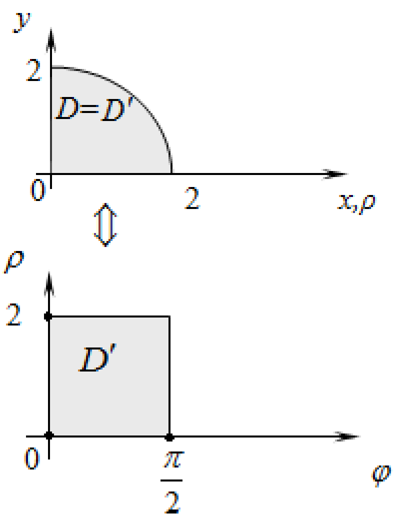
$$dS_{xy}=|I|\cdot dS_{uv}$$

Область D' совпадает с областью D, если рассматривать (u,v) как криволинейные координаты точки $M(x,y)\in XOY$. Если же (u,v) рассматривать как прямоугольные координаты в другой плоскости UOV, то $D'\subset UOV$ – это область, которая однозначно отображается в область $D\subset XOY$ функциями $x = x(u,v)$ и $y = y(u,v)$.

Замечание: К. Якоби (1804-1851) – немецкий математик, член ряда европейских академий, в частности, почетный член Петербургской Академии наук.

Пример 4 (применение формулы замены переменных в двойном интеграле)

$\iint\limits_{D} x^2y\,dxdy$, если $D:\begin{cases} x^2+y^2\le 2 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{cases}$



Выполним полярную замену переменных x, y:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi = x(\varphi,\rho) \\ y=\rho\sin\varphi = y(\varphi,\rho), \end{cases}$$

$$D:\begin{cases} 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2} \\ 0\le\rho\le 2, \end{cases}$$

$$I=\begin{vmatrix} x'_\varphi & x'_\rho \\ y'_\varphi & y'_\rho \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi & \cos\varphi \\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix}=$$

$$=-\rho\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)=-\rho\Rightarrow|I|=\rho$$

$$\iint\limits_{D} \underset{f(x,y)}{x^2y}\;\underset{dS_{xy}}{dxdy}=\iint\limits_{D'}\underbrace{\rho^2\cos^2\varphi\cdot\rho\sin\varphi}_{F(\varphi,\rho)}\cdot\underset{dS_{\varphi\rho}}{\rho\,d\rho d\varphi}$$

Здесь D' совпадает с D, если рассматривать полярные координаты $(\varphi,\ \rho)$ как криволинейные координаты точки $M(x,\ y)$ в совмещённых декартовой и полярной системах координат. Если же рассматривать координаты $(\varphi,\ \rho)$ как прямоугольные в другой плоскости, то область D' имеет другую форму, а именно форму прямоугольника.

Таким образом, выполненная полярная замена переменных хорошо иллюстрирует формулу (4).

§3. Тройные интегралы: определение, свойства, механическая трактовка, вычисление в декартовых, в цилиндрических и в сферических координатах

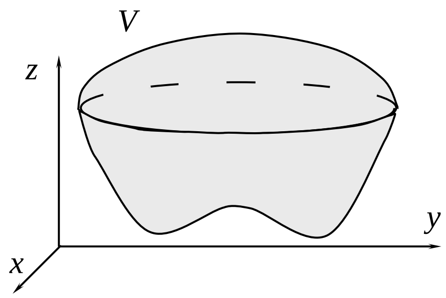
Содержание

3.1. Определение тройного интеграла и его основные свойства 20
3.2. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах 22
3.3. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах........ 24
3.4. Вычисление тройного интеграла в сферических координатах 26

3.1. Определение тройного интеграла и его основные свойства

Определение тройного интеграла

Пусть функция $f(x,y,z)$ задана в замкнутой ограниченной обласи $V\subset\mathbf{R}^3$.



Тройным интегралом от функции f(x, y, z) по области V называется предел трехмерной интегральной суммы при стремлении к нулю ранга разбиения, порождающего эту сумму (если этот предел существует, конечный и не зависит ни от способа разбиения области V на элементарные части, ни от выбора точек на каждой из этих элементарных частей):

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$$

здесь n – это количество элементарных частей разбиения области V;

$P_i\ (x_i,y_i,z_i)$ – произвольно выбранная точка на каждой элементарной части, $i=1,\ldots,n$;

$\lambda=\max\limits_{i=1,\ldots,n}\{d_i\}$ — ранг разбиения;

d_i – диаметр i-ой элементарной части.

Достаточное условие существования тройного интеграла

Если функция $f(x,y,z)$ непрерывная в замкнутой ограниченной области V, то $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV$ существует.

Механическая трактовка тройного интеграла

Если $f(x,y,z) \geq 0$ — это объемная плотность распределения вещества в области V, то $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = m$ — это масса всего вещества в трехмерной области V.

Основные свойства тройного интеграла

Аналогичны свойствам определенного интеграла по отрезку $[a,b]$ и двойного интеграла по области D.

Свойство 1 (линейность тройного интеграла по подынтегральной функции)

$$\iiint\limits_V \left(c_1 \cdot f_1(x,y,z) + c_2 \cdot f_2(x,y,z)\right)dV = c_1 \cdot \iiint\limits_V f_1(x,y,z)dV + c_2 \cdot \iiint\limits_V f_2(x,y,z)dV,$$

где c_1, c_2 — постоянные множители по x, y, z.

Свойство 2 (аддитивность тройного интеграла по области интегрирования)

Если $V = V_1 \cup V_2$, то $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dV + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dV$.

Свойство 3 (о значении тройного интеграла от функции, тождественно равной единице)

Если подынтегральная функция $f(x,y,z) \equiv 1$ для $\forall (x,y,z) \in V$, то тройной интеграл от неё по области V равен объему (мере) области интегрирования:

$$\iiint 1 \cdot dV = \iiint\limits_V dV = V$$

(здесь область V и её объём V обозначены одной буквой).

Свойство 4 (оценки значения тройного интеграла)

Если m и M — наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y,z)$ в замкнутой области V, то

$$m \cdot V \le \iiint\limits_V f(x,y,z)dV \le M \cdot V$$

Если $|f(x,y,z)| \le K$ при $\forall (x,y,z) \in V$, то

$$\left| \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV \right| \le K \cdot V$$

Свойство 5 (теорема о среднем значении подынтегральной функции)

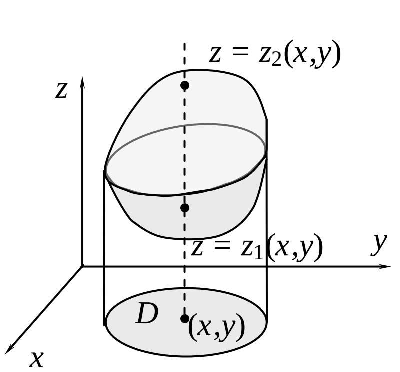
Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в области V, то существует хотя бы одна точка $P_0(x_0;y_0;z0) \in V$ такая, что

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = f(P_0) \cdot V$$

При этом число $f(P_0) = \dfrac{\iiint\limits_V f(x,y,z)dV}{V}$ называется ***средним значением функции f(x,y,z) по области V***.

3.2. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

Вычисление тройного интеграла сводится к вычислению трехкратного интеграла.



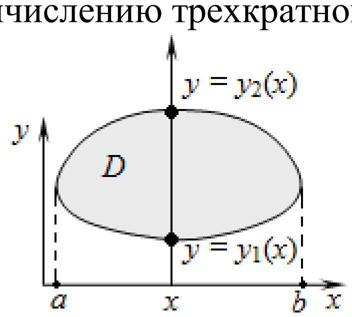


Рис. 6

В декартовых координатах область V, правильная в направлении оси OZ, записывается системой неравенств

$$V:\begin{cases}(x,y)\in D\\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\end{cases},$$

где D – это проекция области V на плоскость XOY, а поверхности $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$ ограничивают область V соответственно снизу и сверху *(Рис. 6)*.
Если двумерную область D также записать системой неравенств

$$D:\begin{cases}a\le x\le b\\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\end{cases},$$

то трехмерная область V запишется системой трех неравенств

$$V:\begin{cases}a\le x\le b\\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\end{cases}.$$

Тогда тройной интеграл сводится сначала к двойному, а затем к трёхкратному с учётом того, что в декартовых координатах $dV = dx\cdot dy\cdot dz$.

Формула сведения тройного интеграла к трехкратному интегралу имеет следующий вид:

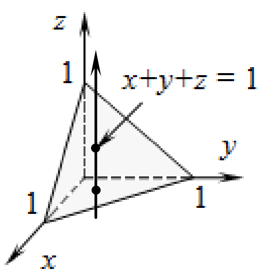
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\underset{dxdydz}{dV} = \iint\limits_D dxdy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz = \int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \qquad (1)$$

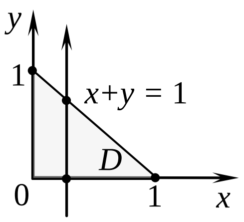
Существует всего 6 вариантов сведения тройного интеграла к трехкратному в декартовых координатах (в зависимости от выбранного порядка интегрирования).

Пример 1 (вычисление тройного интеграла в декартовых координатах)

Вычислить $\iiint\limits_V xyzdV$, где область V ограничена поверхностями $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$.

Решение





Запишем область V системой трёх неравенств:

$$V:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1-x\\ 0\le z\le 1-x-y\end{cases}$$

Сводим тройной интеграл к трехкратному по формуле (1) в соответствии с системой неравенств и вычисляем трехкратный интеграл:

$$\iiint_V xyz \underbrace{dV}_{dx\,dy\,dz} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} xyz \; dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(xy\frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_{z=0}^{z=1-x-y} = \frac{1}{2}\int_0^1 dx\cdot x \int_0^{1-x} \underbrace{y}_{u}\cdot \underbrace{(1-x-y)^2\, dy}_{dv} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u=y \Rightarrow du=dy \\ dv=(1-x-y)^2 \Rightarrow v=-\int (1-x-y)^2\, d(1-x-y) = -\dfrac{(1-x-y)^3}{3} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx\cdot x \left(-y\frac{(1-x-y)^3}{3}\Bigg|_{y=0}^{y=1-x} + \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^3}{3} dy \right) = \frac{1}{2}\int_0^1 dx\cdot x \left(-\frac{(1-x-y)^4}{12}\Bigg|_{y=0}^{y=1-x} \right) =$$

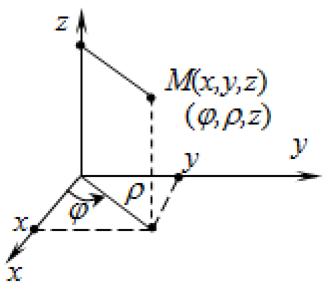
$$= \frac{1}{24}\int_0^1 \underbrace{x}_{u}\cdot \underbrace{(1-x)^4 dx}_{dv} = \left\{ \begin{array}{l} u=x \Rightarrow du=dx \\ dv=(1-x)^4 dx \Rightarrow v=-\dfrac{(1-x)^5}{5} \end{array} \right\} = \frac{1}{24}\left(-x\frac{(1-x)^5}{5}\Bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^5}{5} dx \right) = \frac{1}{120}\left(-\frac{(1-x)^6}{6} \right)\Bigg|_0^1 = \boxed{\frac{1}{120}}.$$

3.3. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах

Цилиндрические координаты точки в пространстве XOYZ— это ее полярные координаты (φ, ρ) в плоскости XOY и координата z.

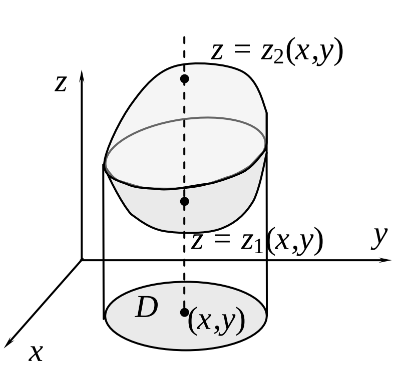
Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho\cdot\cos\varphi \\ y = \rho\cdot\sin\varphi \\ z = z \end{array} \right.$$



Границы изменения цилиндрических координат для всех точек пространства:

$\rho\in[0\,;+\infty)$, $\varphi\in[0\,;2\pi)$ или $\varphi\in(-\pi\,,\,\pi]$, $z\in(-\infty;+\infty)$



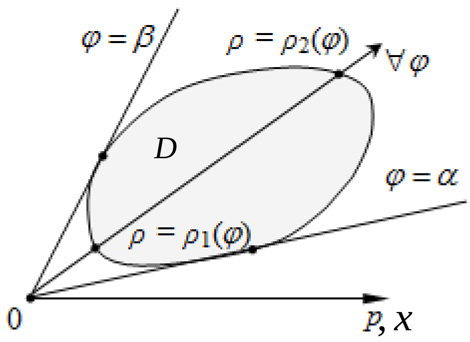


Рис. 7

Перевод тройного интеграла к цилиндрическим координатам и сведение его к повторному трехкратному интегралу осуществляется следующими действиями:

- объем V, правильный в направлении оси OZ, проектируется в область $D_{xy}\subset XOY$ и записывается системой неравенств:

$$V:\begin{cases}(x,y)\in D_{xy}\\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\end{cases};$$

• далее область D_{xy} записывается неравенствами в полярной системе координат *(Рис. 7)* и составляется бесконечно малый элемент плоской области в полярных координатах:

$$D:\begin{cases}\alpha\le\varphi\le\beta\\ \rho_1(\varphi)\le\rho\le\rho_2(\varphi)\end{cases}, \qquad dS=\rho\cdot d\varphi\cdot d\rho;$$

• в подынтегральной функции и в пределах интегрирования по z делается переход к переменным φ и ρ:

$$\begin{cases}x=\rho\cdot\cos\varphi\\ y=\rho\cdot\sin\varphi\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}&f(x,y,z)=f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)=\tilde f(\varphi,\rho,z);\\&z_1(x,y)=z_1(\rho\cdot\cos\varphi,\rho\cdot\sin\varphi)=\tilde z_1(\varphi,\rho);\\&z_2(x,y)=z_2(\rho\cdot\cos\varphi,\rho\cdot\sin\varphi)=\tilde z_2(\varphi,\rho).\end{aligned}$$

Если выполнить все указанные подстановки, то получится формула вычисления тройного интеграла в цилиндрических координатах:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\underbrace{dV}_{dS\cdot dz}=\iint\limits_{D_{xy}}dS\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz=\int\limits_\alpha^\beta d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}\rho d\rho\int\limits_{\tilde z_1(\varphi,\rho)}^{\tilde z_2(\varphi,\rho)}\tilde f(\varphi,\rho,z)dz \qquad (2)$$

Таким образом, бесконечно малый элемент объема в цилиндрических координатах получается следующим: $dV=\rho\cdot d\varphi\cdot d\rho\cdot dz$

Пример 2 (вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах)

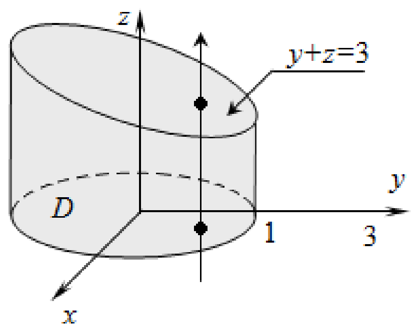
Вычислить $\iiint\limits_V zxdV$, если область V ограничена поверхностями

$$x^2+y^2=1,\quad y+z=3,\quad z=0.$$

Решение

Строим область V и записываем её системой неравенств в цилиндрических координатах:

$$V:\begin{cases}0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le\rho\le 1\\ 0\le z\le 3-y=3-\rho\sin\varphi\end{cases}$$



Теперь сводим тройной интеграл к трехкратному в соответствии с системой неравенств и вычисляем его:

$$\iiint\limits_V zxdv=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho d\rho\int\limits_{z=0}^{z=3-\rho\sin\varphi}\rho\cos\varphi\, z\,dz=$$

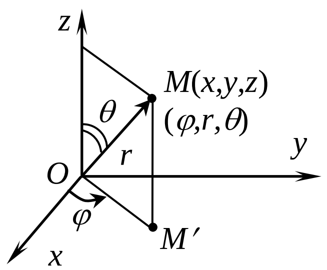
$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho d\rho\cdot\rho\cos\varphi\left.\frac{z^2}{2}\right|_{z=0}^{z=3-\rho\sin\varphi}=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\left(\rho^2\cos\varphi\frac{(3-\rho\sin\varphi)^2}{2}\right)d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi\cos\varphi\left(\int_0^1 9\rho^2 d\rho-6\sin\varphi\int_0^1 \rho^3 d\rho+\sin^2\varphi\int_0^1 \rho^4 d\rho\right)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(3\cos\varphi-\frac{6}{4}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{1}{5}\sin^2\varphi\cos\varphi\right)d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\left[3\sin\varphi\Big|_0^{2\pi}-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{2}\Bigg|_0^{2\pi}+\frac{1}{5}\cdot\frac{\sin^3\varphi}{3}\Bigg|_0^{2\pi}\right]=\boxed{0}.$$

3.4. Вычисление тройного интеграла в сферических координатах

Сферические координаты точки M пространства $XOYZ$ определяются следующим образом *(Рис. 8)*:



r — расстояние точки M от начала координат (длина радиус-вектора точки); r называют ***сферическим радиусом точки***;

θ — угол между радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ и положительным направлением оси OZ;

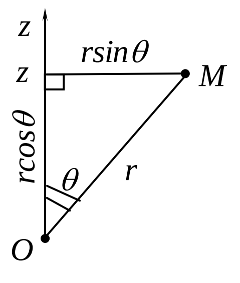
φ — угол между положительным направлением оси OX и проекцией радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ на плоскость XOY, отсчитываемый против часовой стрелки (полярный угол).

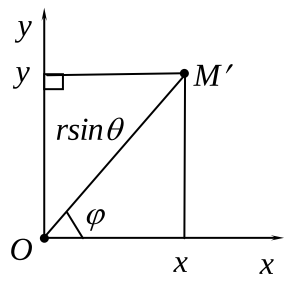
Границы изменения сферических координат для всех точек пространства:

$r\in[0;+\infty)$, $\varphi\in[0;2\pi)$ или $\varphi\in(-\pi;\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$.

Связь сферических и декартовых координат (выводится геометрически):

$$\begin{cases} x=r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi \\ y=r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi \\ z=r\cdot\cos\theta \end{cases}$$





Замена переменных в тройном интеграле осуществляется в общем случае по формуле, аналогичной формуле замены переменных в двойном интеграле. В частности, при переходе к сферическим координатам эта формула имеет вид:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\underbrace{dxdydz}_{dV_{xyz}}=\iiint\limits_V f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\cdot|I|\cdot\underbrace{drd\theta d\varphi}_{dV_{r\theta\varphi}},$$

I — это функциональный определитель Якоби третьего порядка:

$$I=\begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_r & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=\cos\theta\cdot\begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}+r\sin\theta\cdot\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}=$$

$$=\cos\theta \quad r^2\cos\theta\sin\theta\cdot\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}+r\sin\theta\sin\theta \quad r\sin\theta\cdot\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}=$$

$$=r^2\sin\theta\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=r^2\sin\theta\Rightarrow$$

$|I|=\left|r^2\sin\theta\right|=r^2\sin\theta$, так как $\theta\in[0;\pi]$ поэтому $\sin\theta\ge 0$.

Таким образом, $dxdydz=r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$.

Бесконечно малый элемент объема в сферических координатах имеет вид:

$$dV=r^2\cdot\sin\theta\cdot dr\cdot d\varphi\cdot d\theta;$$

формула перевода тройного интеграла к сферическим координатам имеет вид:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_V f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\cdot r^2\cdot\sin\theta\cdot dr\cdot d\varphi\cdot d\theta \qquad (3)$$

Далее тройной интеграл сводится к трехкратному в соответствии с неравенствами для области V в сферических координатах.

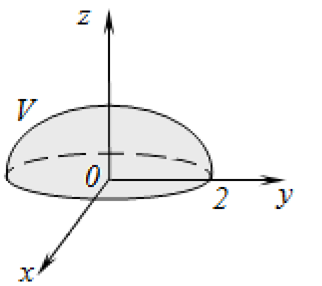
Эффективно переводить в сферические координаты тройной интеграл по областям, в границах которых есть сфера.

Пример 3 (вычисление тройного интеграла в сферических координатах)

Вычислить $\iiint\limits_V\left(x^2+y^2+z^2\right)dV$, где $V:\begin{cases} x^2+y^2+z^2\le 4 \\ z\ge 0 \end{cases}$

Решение

Область V представляет собой верхнюю половину шара радиуса 2 с центром в начале координат. Запишем неравенствами область V в сферических координатах:



$$V:\begin{cases} 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le r\le 2 \\ 0\le\theta\le\pi/2 \end{cases}$$

Переводим данный тройной интеграл в сферические координаты по формуле (3) и сводим его к трехкратному интегралу в соответствии с системой неравенств:

$$\iiint_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dV = \left\{\begin{matrix} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{matrix}\right. \left| \begin{matrix} x^2+y^2+z^2=r^2 \\ dV=r\cdot\sin\theta\cdot dr\cdot d\varphi\cdot d\theta \\ \end{matrix}\right\} =$$

$$= \iiint_V r^2r^2\sin\theta drd\varphi d\theta = \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\rho=0}^{2} r^4dr \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi/2}\sin\theta d\theta}_{-\cos\theta\big|_0^{\pi/2}=1} = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^2 r^4dr = 2\pi\cdot\frac{r^5}{5}\bigg|_0^2 = \boxed{\frac{64}{5}\pi}.$$

§ 4. Приложения двойных и тройных интегралов к задачам геометрии и механики

Содержание

4.1. Вычисление площади плоской фигуры, занимающей область D 28
4.2. Вычисление объемов с помощью двойного интеграла 29
4.3. Вычисление массы, статических моментов и моментов инерции тонких пластинок 31
4.4. Координаты центра масс пластинки 34
4.5. Приложения тройных интегралов 35

4.1. Вычисление площади плоской фигуры, занимающей область D

Если плоская фигура занимает область $D \subset XOY$, то ее площадь может быть вычислена с помощью двойного интеграла по его свойству о значении двойного интеграла от функции, тождественно равной единице на области интегрирования. В результате получается формула для вычисления площади плоской фигуры с помощью двойного интеграла:

$$S_D = \iint_D dS \tag{1}$$

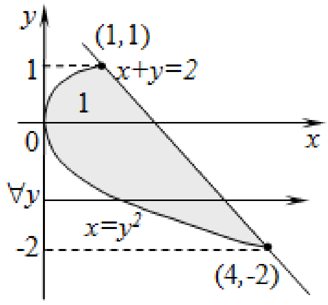
Пример 1 (вычисление площади плоской фигуры с помощью двойного интеграла)

Вычислить площадь фигуры, занимающей область D, ограниченную линиями
$x = y^2$ и $x + y = 2$.

Решение

Строим область D и записываем ее системой неравенств:

$$D:\begin{cases}-2\le y\le 1\\ y^2\le x\le 2-y\end{cases}$$



По формуле (1) вычисляем площадь:

$$S_D=\iint\limits_D dS=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_{-2}^{1}dy\int\limits_{y^2}^{2-y}dx=\int\limits_{-2}^{1}dy\cdot x\Big|_{y^2}^{2-y}=\int\limits_{-2}^{1}\left(2-y-y^2\right)dy=$$

$$=\left(2y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=2(1+2)-\frac{1}{2}(1-4)-\frac{1}{3}(1+8)=4{,}5$$

Ответ: S_D = 4,5 (единиц площади).

4.2. Вычисление объемов с помощью двойного интеграла

С помощью двойного интеграла, если воспользоваться его геометрической трактовкой, можно вычислить объем цилиндроида; ***формула для вычисления объема цилиндроида*** имеет вид:

$$V_{цилиндроида}=\iint\limits_D z\left(x,y\right)dS, \qquad (2)$$

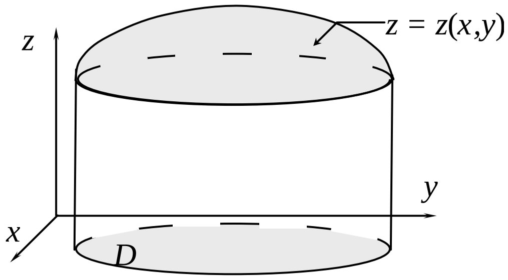


Рис. 9

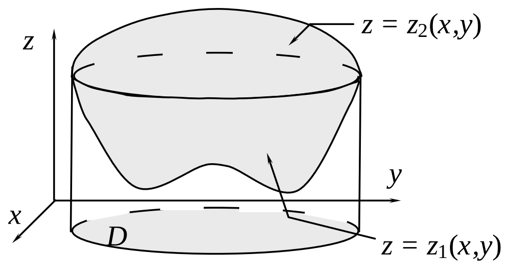


Рис. 10

где функция $z=z(x,y)$ задает поверхность, ограничивающую цилиндроид сверху *(Рис. 9)*

Более общая ***формула для вычисления объема тела с помощью двойного интеграла*** имеет вид:

$$V=\iint\limits_D\left(z_2\left(x,y\right)-z_1\left(x,y\right)\right)\ dS \qquad (3)$$

Она получается как разность объемов двух цилиндроидов (Рис. 10).

Объемы других тел вычисляются двойным интегралом только в случаях, когда эти объемы представляются как сумма или разность объемов цилиндроидов.

Напомним, что цилиндроидом называется геометрическое тело, которое в координатной системе *XOYZ* ограничено снизу областью $D \subset XOY$, сверху – частью некоторой поверхности $z = z(x,\ y)$, сбоку – цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси *OZ*.

Пример 2 (вычисление объема с помощью двойного интеграла)

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

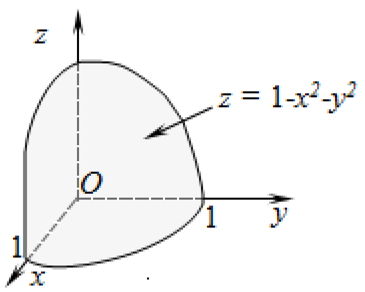
$1 - z = x^2 + y^2,\ x = 0,\quad y = 0,\ z = 0,$ где $x \ge 0$ и $y \ge 0$.

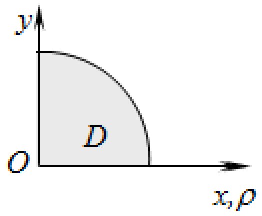
Решение

Построив данное тело как ограниченное параболоидом $z = 1 - x^2 - y^2$ и координатными плоскостями, находящееся в I октанте, видим, что оно является цилиндроидом, поэтому его объем вычисляем по формуле (2):

Так как область D ограничена частью окружности, то двойной интеграл по ней проще

$$D: \begin{Bmatrix} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le \rho \le 1 \end{Bmatrix} \quad ==>$$





вычислить в полярных координатах; тогда $x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,\ \ dS = \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi$,

$$V_{цилиндроида} = \iint\limits_D z(x,y)\,dS = \iint\limits_D \left(1 - x^2 - y^2\right) dS$$

$$V = \iint\limits_D \left(1 - \rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi\right)\rho \cdot d\rho \cdot d\varphi = \ = \iint\limits_D \left(1 - \rho^2\right)\rho \cdot d\rho \cdot d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \left(\rho - \rho^3\right) d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{1}{4}\varphi\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8} \approx \frac{3{,}14}{8} \approx 0{,}4.$$

Ответ: $V = \pi/8 \approx 0{,}4$ (единиц объема).

4.3. Вычисление массы, статических моментов и моментов инерции тонких пластинок

Чтобы вычислить механические характеристики тонких пластинок, занимающих область $D \subset XOY$, (массу, статические моменты, моменты инерции), нужно заметить, что все эти величины являются аддитивными, и применить общую методику приложений интегрального исчисления.

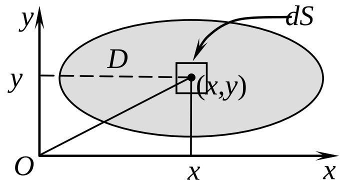
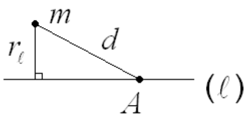


Рис. 11

Сначала нужно вспомнить простейшие формулы из физики:

1) $m = \gamma \cdot S$ - так вычислить массу m пластинки, площадь которой S, а поверхностная плотность материала γ является постоянной величиной;

2) 

если точечная масса m расположена на расстоянии r_ℓ от оси (ℓ), то её статический момент относительно оси (ℓ) вычисляется по формуле

$M_\ell = m \cdot r_\ell$;

при этом точки, расположенные по разные стороны от прямой (ℓ), имеют статические моменты разных знаков;

3) момент инерции точечной массы m относительно оси (ℓ) вычисляется по формуле $I_\ell = m \cdot r_\ell^2$, а относительно некоторой точки A - по формуле $I_A = m \cdot d^2$, где d - это расстояние от материальной точки до точки A.

Эти формулы нельзя применить к вычислению массы или моментов всей пластинки, занимающей конечную часть плоскости, так как есть неоднородность или по плотности $\gamma = \gamma(x, y) \neq const$ или по расстояниям r_ℓ и d для различных точек пластинки.

В соответствии с методикой приложения интегрального исчисления, разбиваем область D, занятую пластинкой, на малые (элементарные) части и составляем формулу для элементарного слагаемого искомой характеристики *(Рис. 11)*, используя физические упрощения (например, можно считать каждую элементарную часть однородной или заменить её точечной массой). Затем суммируем все элементарные слагаемые и переходим к пределу при условии, что все элементарные части неограниченно измельчаются, убирая этим погрешность, допущенную при составлении элементарных слагаемых. В результате выходим на определение двойного интеграла по области D от некоторой функции координат x, y:

$$dQ = q(x,y)\cdot dS \quad \Rightarrow \quad Q = \iint\limits_D q(x,y)\cdot dS\,,$$

где dS - это элементарная площадь

dQ - это элементарное слагаемое величины Q, аддитивной по области D .

Формула для вычисления массы неоднородной пластинки имеющей поверхностную плотность $\gamma(x,y)$:

каждую элементарную часть пластинки считаем однородной, тогда

$$\underbrace{dm}_{\substack{\text{бесконечно}\\ \text{малый}\\ \text{элемент}\\ \text{массы}}} = \gamma(x,y)dS \Rightarrow \boxed{m = \iint\limits_D dm = \iint\limits_D \gamma(x,y)dS} \tag{4}$$

Формула для вычисления статических моментов тонких пластинок относительно координатных осей:

считаем каждую элементарную часть точечной массой; тогда

$$\underbrace{dM_x}_{\substack{\text{б.м. элемент}\\ \text{стат. момента}\\ \text{относительно OX}}} = y\cdot dm = y\cdot\gamma\big(x,y\big)dS \Rightarrow M_x = \iint\limits_D dM_x = \iint\limits_D y\cdot\gamma(x,y)dS \tag{5}$$

$$dM_y = x\cdot dm = x\cdot\gamma(x,y)dS \Rightarrow M_y = \iint\limits_D dM_y = \iint\limits_D x\cdot\gamma(x,y)dS \tag{6}$$

Формулы для вычисления моментов инерции тонких пластинок относительно координатных осей:

$$\underbrace{dI_x}_{\substack{\text{б.м. элемент}\\ \text{момента}\\ \text{инерции}\\ \text{относительно}\\ \text{Ox}}} = y^2\cdot dm = y^2\cdot\gamma\big(x,y\big)dS \Rightarrow I_x = \iint\limits_D dI_x = \iint\limits_D y^2\cdot\gamma(x,y)dS \tag{7}$$

$$dI_y = x^2 dm = x^2\cdot\gamma(x,y)dS \Rightarrow I_y = \iint\limits_D dI_y = \iint\limits_D x^2\cdot\gamma(x,y)dS \tag{8}$$

Формула для вычислеия момента инерции пластинки относительно точки начала координат:

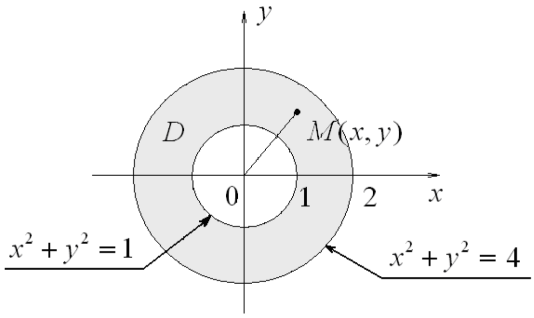
$$dI_0 = (x^2+y^2)\cdot dm = (x^2+y^2)\cdot\gamma(x,y)dS \Rightarrow I_0 = \iint\limits_D dI_0 = \iint\limits_D (x^2+y^2)\cdot\gamma(x,y)dS \tag{9}$$

Примеры 3 (вычисление механических характеристик тонких пластинок)

1. Вычислить массу тонкого кольца, занимающего область D: $1 \le x^2+y^2 \le 4$, если поверхностная плотность материала в точке (x,y) обратно пропорциональна

квадрату расстояния от этой точки до начала координат и в точке $(0;1)$ равна 1.

Решение



Составляем формулу для плотности:

$$\gamma(M)=\frac{k}{|OM|^2},$$

k -коэффициент пропорциональности

$\Rightarrow \gamma(x,y)=\dfrac{k}{x^2+y^2}$, так как $|OM|^2=x^2+y^2$;

если $M(0;1)$, то $\gamma=1$, то $1=\dfrac{k}{1^2+0^2}\Rightarrow k=1$;

окончательно получаем, что

$$\gamma(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Составляем формулу для массы кольца аналогично тому, как была составлена формула (4):

$$m=\iint_D \gamma(x,y)dS=\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dS.$$

Теперь вычисляем двойной интеграл в полярных координатах:

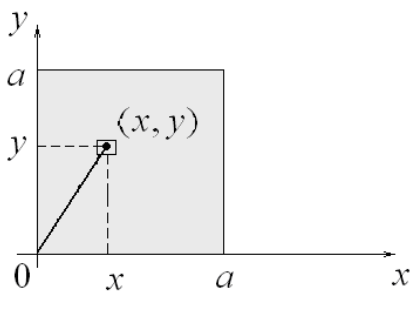
$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ dS=\rho\cdot d\rho\cdot d\varphi \end{cases} \Rightarrow \quad x^2+y^2=\rho^2, \qquad D:\begin{cases} 0\le\varphi\le 2\pi \\ 1\le\rho\le 2 \end{cases}$$

$$m=\iint_D \frac{1}{\rho^2}\rho\cdot d\rho\cdot d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_1^2\frac{1}{\rho}d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\ln\rho\Big|_1^2=\ln 2\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=2\pi\cdot\ln 2\approx 4{,}35.$$

Ответ: $m=2\pi\cdot\ln 2\approx 4{,}35$ (единиц массы).

2. Вычислить момент инерции *I* однородного квадрата со стороной *a* относительно его вершины.

Решение



Поместив квадрат в систему *XOY*, составляем формулу для искомого момента инерции: $dI_0=\left(x^2+y^2\right)\cdot dm$, где

$dm=\gamma\cdot dS,\ \gamma=const \quad \Rightarrow$

$$dI_0=\gamma\cdot\left(x^2+y^2\right)\cdot dS \quad\Rightarrow\quad I_0=\gamma\cdot\iint_D\left(x^2+y^2\right)dS.$$

Теперь вычисляем двойной интеграл в декартовых координатах, записав область *D* неравенствами $\begin{cases} 0\le x\le a \\ 0\le y\le a \end{cases}$ и учитывая, что $dS=dx\cdot dy$:

$$I_0=\gamma\int_0^a dx\int_0^a\left(x^2+y^2\right)dy=\gamma\int_0^a dx\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=a}=\gamma\int_0^a\left(x^2a+\frac{a^3}{3}\right)dx=\gamma\left(a\frac{x^3}{3}+\frac{a^3}{3}x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=a}=\gamma\left(\frac{a^4}{3}+\frac{a^4}{3}\right)=\frac{2}{3}\gamma a^4.$$

Ответ: $I=\frac{2}{3}\gamma a^4$ (единиц момента инерции).

4.4. Координаты центра масс пластинки

По свойству центра масс знаем, что механические характеристики материального тела можно вычислять, заменяя тело материальной точкой с массой, равной массе всего тела, но расположенной в центре масс.

Например, так можно вычислить статические моменты тела относительно координатных осей:

$M_x=y_c\cdot m,\ M_y=x_c\cdot m,$

где m — масса всей пластинки,

x_c — расстояние от ее центра масс до оси OY,

y_c — расстояние от ее центра масс до оси OX.

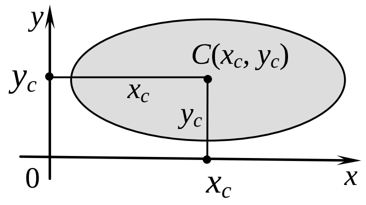


Рис. 12

Чтобы вычислить величины m, M_x и M_y нужно использовать формулы (4), (5) и (7). В результате получаем ***формулы для координат центра масс тонкой пластинки***:

$$x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{\iint\limits_D\gamma(x,y)\cdot xdS}{\iint\limits_D\gamma(x,y)dS};\ y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{\iint\limits_D\gamma(x,y)\cdot ydS}{\iint\limits_D\gamma(x,y)dS}\qquad(10)$$

В частности, если пластинка является однородной, то её плотность $\gamma(x,y)=const$ выносится за знаки интегралов в числителе и в знаменателе обеих дробей и сокращается. В результате получаются более ***простые формулы для координат центра масс однородной пластинки***:

$$x_c=\frac{\iint\limits_D xdS}{\iint\limits_D dS};\ y_c=\frac{\iint\limits_D ydS}{\iint\limits_D dS}\qquad(11)$$

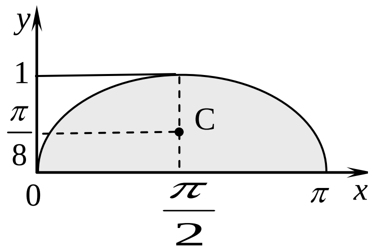
Пример 4 (вычисление координат центра масс однородной пластинки)

Найти координаты центра масс однородной фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$ и $y = 0$ $(0 \le x \le \pi)$.

Решение

Построив фигуру, замечаем, что геометрически она является симметричной относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$. Так как фигура изготовлена из однородного материала, то она имеет не только геометрическую, но и физическую симметрию, то есть масса её части, которая расположена слева от оси симметрии, равна массе части, которая расположена справа. Тогда по известным физическим свойствам центра масс заключаем, что он находится на оси симметрии, то есть $x_c = \frac{\pi}{2}$.

Чтобы вычислить y_c, составляем статический момент M_x и используем формулы (4) и (5):



$$M_x = y_c m \Rightarrow y_c = M_c / m;$$

$$m = \iint_D \gamma dS = \gamma \iint_D dS = \left\{ D: \begin{cases} 0 \le x \le \pi \\ 0 \le y \le \sin x \end{cases}; \quad dS = dxdy \right\} =$$

$$= \gamma \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} dy = \gamma \int_0^\pi dx \cdot \sin x = -\gamma \cos x \Big|_0^\pi = 2\gamma;$$

$$M_x = \iint_D \gamma \cdot y dS = \gamma \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} y dy = \gamma \int_0^\pi dx \left(\frac{y^2}{2} \Bigg|_0^{\sin x} \right) = \frac{\gamma}{2} \int_0^\pi \sin^2 x dx =$$

$$= \frac{\gamma}{2} \int_0^\pi \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\gamma}{4} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Bigg|_0^\pi = \frac{\gamma\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad y_c = \frac{\pi}{8} \approx 0,4.$$

Ответ: $C\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8} \right)$.

4.5. Приложения тройных интегралов

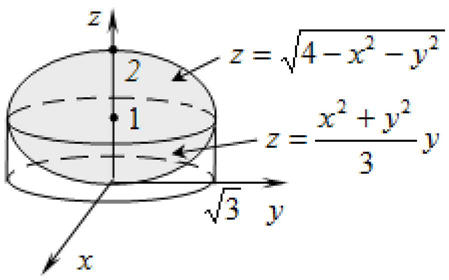
Приложения тройных интегралов аналогичны приложениям двойных интегралов, но только для трехмерных тел.

Если использовать одно из свойств тройного интеграла (о его значении от функции, тождественно равной единице), то получается ***формула для вычисления объема любого пространственного тела***:

$$V = \iiint_V dV \tag{12}$$

Пример 5 (вычисление объема с помощью тройного интеграла)

Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и $x^2 + y^2 = 3z$.



Решение

Находим линию пересечения поверхностей:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 3z \end{cases} \Rightarrow z^2 + 3z - 4 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = -4 \\ z_2 = 1 \end{array} \right.$$

$$z = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3 \Rightarrow$$

поверхности пересекаются по окружности радиуса $\sqrt{3}$, лежащей в плоскости $z = 1$, параллельной XOY.

Записываем формулу для объема через тройной интеграл и вычисляем тройной интеграл в цилиндрических координатах:

$$V = \iiint\limits_V dV = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z=\frac{x^2+y^2}{3}}^{z=\sqrt{4-x^2-y^2}} dz = \iint\limits_D dxdy \cdot z\Big|_{z=\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} = \iint\limits_D (\sqrt{4 - x^2 - y^2} - \frac{x^2 + y^2}{3})dxdy =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \\ dx \cdot dy = \rho d\rho \cdot d\varphi \\ x^2 + y^2 = \rho^2 \end{array} \right| D : \left\{ \begin{array}{l} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le \sqrt{3} \end{array} \right. \Bigg\} = \iint\limits_D \rho d\varphi d\rho (\sqrt{4 - \rho^2} - \frac{\rho^2}{3}) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \underbrace{\int\limits_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4 - \rho^2} - \frac{\rho^2}{3})\rho d\rho}_{\text{не зависит от } \varphi} =$$

$$= \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot (-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} (4 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} \cdot d(4 - \rho^2) - \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{\rho^3}{3} d\rho) = 2\pi \cdot (-\frac{1}{2}\frac{(4 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{\sqrt{3}}) =$$

$$= 2\pi \cdot (-\frac{1}{3}\underbrace{(1 - 4^{\frac{3}{2}})}_{-7} - \frac{1}{12} \cdot 9) = 2\pi \cdot (\frac{7}{3} - \frac{3}{4}) = 2\pi \cdot \frac{19}{12} = \frac{19}{6}\pi$$

Ответ: $V = \frac{19}{6}\pi$ (единиц объема).

Формула для вычисления массы трехмерного объекта, занимающего объем V, имеет вид:

$$m = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z)dV \qquad (13)$$

Здесь $\gamma(x, y, z)$ - это объемная плотность распределения массы.

Пример 6 (вычисление массы трехмерного тела)

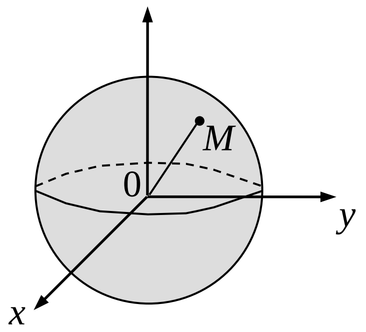
Найти массу шара радиуса R, если плотность пропорциональна кубу расстояния от центра и на единице расстояния равна k.

Решение

Расположим шар в системе координат $XOYZ$ с началом O в центре шара и составим формулу для плотности материала в любой точке $M(x, y, z)$:

z

$\gamma(M) = k \cdot |OM|^3 = k \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}.$



Теперь составим формулу (13) для массы шара:

$$m = \iiint\limits_V k \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}} dV.$$

Этот тройной интеграл удобно вычислить в сферических координатах, записав в них систему неравенств для области шара:

V: $\begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$, элементарный объем $dV = r^2 \sin\theta \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta$ и $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Тогда

$$m = k\iiint\limits_V \left(r^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot r^2 \sin\theta \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta = k\int_0^R r^5 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \cdot d\theta = k \cdot \frac{r^6}{6}\Bigg|_0^R \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi} =$$

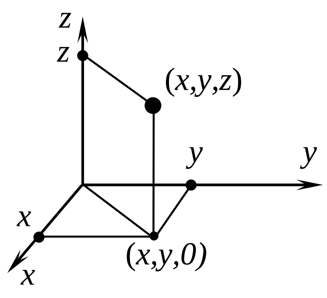
$$= k \cdot \frac{R^6}{6} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{2}{3} k\pi R^6.$$

Заметим, что здесь при вычислении трехкратного интеграла получилось произведение интегралов, так как внутренние интегралы оказались не зависящими от переменных внешних интегралов.

Ответ: $m = \frac{2}{3} k\pi R^6$ (единиц массы).

Механические характеристики для объема V (статические моменты, моменты инерции, координаты центра масс) вычисляются по формулам, которые составляются по аналогии с формулами для двумерных тел.

Объём V разбивается на малые элементарные части. Для каждой элементарной части составляется механическая характеристика как для материальной точки $(x;y;z)$, имеющей массу dm.



Элементарные статические моменты и моменты инерции относительно координатных осей:

$$dM_x = \sqrt{y^2 + z^2} \cdot dm = \sqrt{y^2 + z^2}\gamma(x, y, z) \cdot dV; \quad dI_x = \left(\sqrt{y^2 + z^2}\right)^2 \cdot dm = \left(y^2 + z^2\right) \cdot \gamma(x, y, z) \cdot dV;$$

$$dM_y = \sqrt{x^2 + z^2} \cdot dm = \sqrt{x^2 + z^2} \cdot \gamma(x, y, z) \cdot dV; \quad dI_y = \left(\sqrt{x^2 + z^2}\right)^2 \cdot dm = (x^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) \cdot dV;$$

$$dM_z = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot dm = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \gamma(x, y, z) \cdot dV; \quad dI_z = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \cdot dm = (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x, y, z) \cdot dV;$$

элементарные моменты инерции относительно координатных плоскостей и точки начала координат:

$$dI_{xy} = z^2 \cdot dm = z^2 \cdot \gamma(x,y,z)dV;$$
$$dI_{xz} = y^2 \cdot dm = y^2 \cdot \gamma(x,y,z) \cdot dV; \quad dI_0 = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2 \cdot dm = (x^2+y^2+z^2) \cdot \gamma(x,y,z) \cdot dV$$
$$dI_{yz} = x^2 \cdot dm = x^2 \cdot \gamma(x,y,z)dV;$$

Далее, чтобы вычислить механическую характеристику всего объёма *V*, нужно просуммировать элементарные слагаемые этой характеристики по всем частям разбиения (так как вычисляемая характеристика обладает свойством аддитивности), а затем перейти к пределу в получившейся сумме при условии, что неограниченно уменьшаются (стягиваются в точки) все элементарные части разбиения. Эти действия описываются как интегрирование элементарного слагаемого вычисляемой механической характеристики по объёму *V*.

В результате получаются следующие ***формулы для вычисления статических моментов M и моментов инерции I трехмерных тел***:

$$\boxed{\begin{array}{ll} M_x = \iiint\limits_V \sqrt{y^2+z^2} \cdot \gamma(x,y,z) \cdot dV; & I_z = \iiint\limits_V (x^2+y^2) \cdot \gamma(x,y,z) \cdot dV; \\ M_y = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+z^2} \cdot \gamma(x,y,z) \cdot dV; & I_{xy} = \iiint\limits_V z^2 \cdot \gamma(x,y,z) \cdot dV; \\ M_z = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2} \cdot \gamma(x,y,z) \cdot dV; & I_{xz} = \iiint\limits_V y^2 \cdot \gamma(x,y,z) \cdot dV; \\ I_x = \iiint\limits_V (y^2+z^2) \cdot \gamma(x,y,z) \cdot dV; & I_{yz} = \iiint\limits_V x^2 \cdot \gamma(x,y,z) \cdot dV; \\ I_y = \iiint\limits_V (x^2+z^2) \cdot \gamma(x,y,z) \cdot dV; & I_0 = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2) \cdot \gamma(x,y,z) \cdot dV \end{array}} \qquad (14)$$

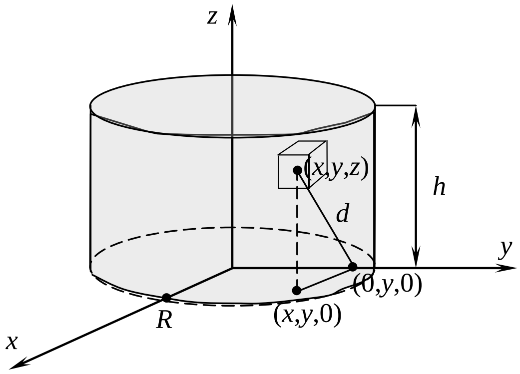
Формулы для координат центра масс трехмерного тела:

$$\boxed{x_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\iiint\limits_V x \cdot \gamma(x,y,z) \cdot dV}{\iiint\limits_V \gamma(x,y,z) \cdot dV}; \quad y_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\iiint\limits_V y \cdot \gamma(x,y,z) dV}{\iiint\limits_V \gamma(x,y,z) dV}; \quad z_c = \frac{M_z}{m} \frac{\iiint\limits_V z \cdot \gamma(x,y,z) \cdot dV}{\iiint\limits_V \gamma(x,y,z) dV}} \qquad (15)$$

На практике полезно эти формулы не только использовать как готовые, но и выводить их в решаемой задаче.

Примеры 7 (вычисление механических характеристик трехмерных тел)

Найти момент инерции однородного цилиндра, высота которого *h* и радиус основания *R*, относительно оси, совпадающей с диаметром основания.



Решение

Если цилиндр поместить в систему координат, как указано на чертеже, то момент инерции будет находиться относительно оси OY.

Из физики известно, что момент инерции материальной точки вычисляется как квадрат расстояния от оси до этой точки, умноженный на массу:

$$I_{\substack{матер.\\точки}} = m \cdot d^2$$

Найдём расстояние d для произвольной точки цилиндра:

расстояние от точки с координатами (x, y, z) до оси OY –это есть длина перпендикуляра, проведенного от этой точки к оси OY. Построим плоскость перпендикулярную оси OY так, что точка (x, y, z) принадлежит этой плоскости. Тогда любая прямая, пересекающая ось OY и принадлежащая этой плоскости, будет перпендикулярна OY. В частности, прямая, соединяющая точку (x, y, z) и точку $(0, y, 0)$, будет перпендикулярна оси OY, а расстояние между этими точками и будет искомым расстоянием d. Вычисляем его по известной формуле расстояния между двумя точками:

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-y)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + z^2}$$

Теперь составляем бесконечно малый элемент искомого момента инерции относительно оси OY:

$$dI_y = \Delta m \cdot d^2 = \Delta m \cdot (x^2 + z^2) = (x^2 + z^2) \cdot \gamma \cdot dV \, ,$$

в данной задаче $\gamma = \text{const}$, так как цилиндр является однородным по условию.

Интегрированием элементарного слагаемого dI_y по объему цилиндра V получаем искомую механическую характеристику этого объема:

$$I_y = \iiint\limits_V \gamma \cdot (x^2 + z^2) dV = \gamma \cdot \iiint\limits_V (x^2 + z^2) dV \, .$$

Вычисляем составленный тройной интеграл в цилиндрических координатах:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \\ z = z \\ dV = \rho \cdot d\varphi \cdot d\rho \cdot dz \end{cases} \qquad V: \begin{cases} 0 \le z \le h \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le R \end{cases}$$

$$I_y=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\rho\cdot d\rho\int_0^h\gamma\cdot(\rho^2\cdot\cos^2\varphi+z^2)dz=\gamma\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\rho\cdot d\rho\cdot(\rho^2\cdot\cos^2\varphi\cdot z+\frac{z^3}{3})\Big|_0^h=$$

$$=\gamma\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\rho\cdot d\rho\cdot(\rho^2\cdot\cos^2\varphi\cdot h+\frac{h^3}{3})=\gamma\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R(h\cdot\rho^3\cdot\cos^2\varphi+\frac{h^3}{3}\cdot\rho)d\rho=$$

$$=\gamma\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi h\cdot\cos^2\varphi\cdot\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^R+\frac{h^3}{3}\cdot\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^R=\gamma\cdot\int_0^{2\pi}(\frac{hR^4}{4}\cdot\cos^2\varphi+\frac{h^3}{3}\cdot\frac{R^2}{2})d\varphi=$$

$$=\gamma\int_0^{2\pi}(\frac{h\cdot R^4}{4}\cdot\frac{(1+\cos 2\varphi)}{2}+\frac{h^3}{3}\cdot\frac{R^2}{2})d\varphi=\gamma\cdot(\frac{h\cdot R^4}{8}\cdot(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2})\Big|_0^{2\pi}+\frac{h^3\cdot R^2}{6}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi})=$$

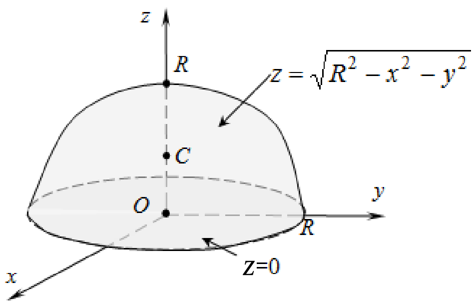
$$=\gamma\cdot(\frac{hR^4}{8}\cdot 2\pi+\frac{h^3\cdot R^2}{6}\cdot 2\pi)=\gamma\cdot hR^2\pi\cdot\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{3}\right).$$

Ответ: $I_y=\gamma hR^2\pi\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{3}\right)$(единиц момента инерции).

2. Определить координаты центра масс верхней половины шара радиуса R с центром в начале координат, считая плотность его материала постоянной.

Решение

Полушар ограничен поверхностями $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ и $z=0$.



Так как полушар имеет имеет является однородным и ось симметрии OZ, то его центр масс лежит на этой оси. Поэтому

$$x_c=0,\ y_c=0,\ z_c=\frac{\iiint\limits_V z\cdot\gamma\cdot dV}{\iiint\limits_V\gamma\cdot dV}$$

Выносим в обоих тройных интегралах постоянную плотность γ и переводим их в сферические координаты, заменяя $z=r\cos\theta$ и $dV=r^2\cdot\sin\theta\cdot dr\cdot d\varphi\cdot d\theta$. В результате вычисления тройного интеграла получаем, что

$$z_c=\frac{\gamma\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^R r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\cdot dr}{\gamma\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^R r^2\sin\theta\cdot dr}=\frac{2\pi\frac{R^4}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}\pi R^3}=\frac{3}{8}R$$

Ответ: $C(0;\ 0;\ \frac{3}{8}R)$.

ТЕМА II. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§5. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ I РОДА: ОПРЕДЕЛЕНИЕ, ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА, ВЫЧИСЛЕНИЕ, НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Содержание

5.1. Определение криволинейного интеграла I рода 41
5.2. Основные свойства криволинейного интеграла I рода 43
5.3. Вычисление криволинейного интеграла I рода (Как вычисляется криволинейный интеграл I рода) 43
5.4. Некоторые приложения криволинейного интеграла I рода.................. 46

5.1. Определение криволинейного интеграла I рода

Общий вид криволинейного интеграла I рода, или криволинейного интеграла по длине дуги:

$\int\limits_{(l)} f(x,y,z)\cdot dl$ или $\int\limits_{(AB)} f(x,y,z)\cdot dl$; $\int\limits_{(l)} f(x,y)\cdot dl$ - двумерный случай

Определение

1. Дугу кривой l или AB в пространстве $XOYZ$ разбиваем на n малых частей точками $M_0=A$, $M_1,\ldots, M_n=B$; обозначаем длины хорд $\Delta l_i = |M_{i-1}M_i|$, $i=\overline{1,n}$, *(Рис. 13)*

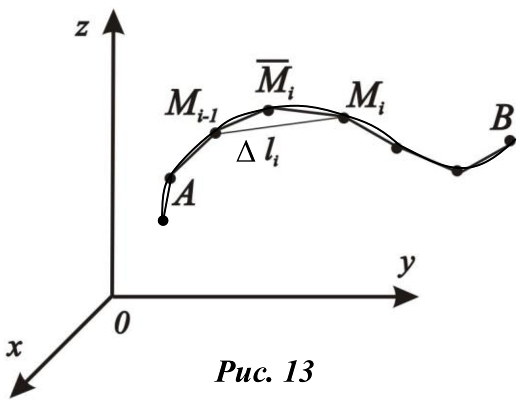


Рис. 13

2. Вычисляем значения функции $f(x,y,z)$ в произвольно выбираемых точках $\overline{M_i}$ на i-той части разбиения и умножаем их на соответствующие длины хорд Δl_i: $f(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i)\cdot \Delta l_i$, $i=\overline{1,n}$

3. Составляем интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}, \overline{y_i}, \overline{z_i}) \cdot \Delta l_i$$

и вычисляем её предел при $\lambda \to 0$, где $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \{\Delta l_i\}$ – это ранг разбиения.

4. Если предел интегральной суммы существует, является конечным и не зависит ни от способа разбиения дуги (l) на элементарные части, ни от выбора на них точек $\overline{M_i}$, то он называется ***криволинейным интегралом I рода от функции f (x, y, z) по линии l***:

$$\int\limits_{l} f(x,y,z)\cdot dl \overset{def}{=} \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}, \overline{y_i}, \overline{z_i})\cdot \Delta l_i \qquad (1)$$

Механическая трактовка криволинейного интеграла I рода

Если $f(x,y,z)\geq 0$ — это линейная плотность распределения материала по линии l (т.е. количество материала на единицу длины), то

$\int\limits_{(l)} f(x,y,z)\cdot dl = m$ — это «масса» тяжелой линии (l).

5.2. Основные свойства криволинейного интеграла I рода

Аналогичны свойствам определенных и кратных интегралов.

Свойство 1 (линейность криволинейного интеграла I рода по подынтегральной функции)

$$\int\limits_{(l)} (c_1 \cdot f_1(x,y,z) + c_2 \cdot f_2(x,y,z)) \cdot dl = c_1 \cdot \int\limits_{(l)} f_1(x,y,z) \cdot dl + c_2 \int\limits_{(l)} f_2(x,y,z) \cdot dl$$

где c_1, c_2 – постоянные по x, y, z.

Свойство 2 (аддитивность криволинейного интеграла I рода по линии интегрирования)

Если $(l)=(l_1)\cup(l_2)$, то $\int\limits_{(l)} f(x,y,z)\cdot dl = \int\limits_{(l_1)} f(x,y,z)\cdot dl + \int\limits_{(l_2)} f(x,y,z)\cdot dl$

Свойство 3 (значение криволинейного интеграла I рода от функции, тождественно равной единице на линии интегрирования)

Если $f(x,y,z)\equiv 1$ на (AB), то $\int\limits_{(AB)} dl = l_{AB}$ — длина дуги линии (AB).

Свойство 4 (достаточное условие существования криволинейного интеграла I рода)

Если функция $f(x,y,z)$ является непрерывной для $\forall (x,y,z)\in (l)$, то $\int\limits_{(l)} f(x,y,z)\cdot dl$ существует.

5.3. Вычисление криволинейного интеграла I рода (Как вычисляется криволинейный интеграл I рода)

Если записать параметрические уравнения линии (l): $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t\in[\alpha;\beta], \\ z = z(t) \end{cases}$

в которых функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ являются дифференцируемыми, то можно показать, что дифференциал длины дуги dl пересчитывается по формуле, аналогичной формуле для дифференциала длины дуги плоской линии (см. тему «Интегральное исчисление функции одной переменной»):

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt,$$

а криволинейный интеграл I рода сводится к определенному интегралу по переменной $t \in [\alpha;\beta]$.

В результате получается следующая ***формула для вычисления криволинейного интеграла I рода***:

$$\boxed{\int\limits_{(l)} f(x,y,z)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t)) \cdot \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2} \cdot dt} \qquad (2)$$

При этом в качестве параметра t на линии (l) можно брать любую независимую переменную.

В частности, если дан двумерный криволинейный интеграл и линия интегрирования l является графиком функции $y = y(x)$, $x \in [a;b]$, то в качестве параметра можно взять независимую переменную x: тогда $dl = \sqrt{1+(y_x')^2}dx$ и ***формула сведения криволинейного интеграла I рода к определенному интегралу*** будет иметь вид:

$$\int\limits_{(l)} f(x,y)dl = \int\limits_{a}^{b} f(x,y(x))\sqrt{1+(y_x')^2}dx. \qquad (3)$$

Если плоская линия l задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha;\beta]$ в полярной системе координат, то в качестве параметра нужно брать полярный угол φ и использовать связь между полярными и декартовыми координатами: $x = \rho \cdot \cos\varphi$, $y = \rho \cdot \sin\varphi$.

Тогда $\begin{cases} x(\varphi) = \rho(\varphi)\cdot\cos\varphi \\ y(\varphi) = \rho(\varphi)\cdot\sin\varphi \\ \varphi \in [\alpha;\beta] \end{cases} \Rightarrow dl = \sqrt{(x_\varphi')^2 + (y_\varphi')^2}d\varphi = \sqrt{\rho^2 + (\rho_\varphi')^2}d\varphi \Rightarrow$

формула сведения крволинейного интеграла I рода к определенному интегралу в полярных координатах:

$$\int\limits_{l} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho^2 + (\rho_\varphi')^2}d\varphi \qquad (4)$$

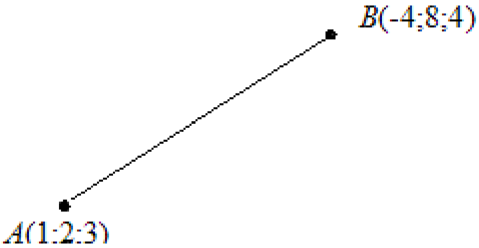
При составлении формул (2)-(4) нужно учитывать, что значение криволинейного интеграла I рода не зависит от направления на линии интегрирования l, поэтому $dl > 0$ всегда в следствие этого пределы интегрирования по независимой переменной «от α до β» всегда такие, что $\alpha < \beta$.

Пример 1 (вычисление криволинейного интеграла I рода)

Вычислить $\int\limits_{(l)}(x + 2y - z)dl$, где ($l$)— это отрезок прямой, соединяющий точки A(1; 2; 3) и B(-4; 8; 4).

Решение

Составляем параметрические уравнения прямой в пространстве по двум её известным точкам:



$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A}\Rightarrow$$

$$\frac{x-1}{-4-1}=\frac{y-2}{8-2}=\frac{z-3}{4-3}\Leftrightarrow\frac{x-1}{-5}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-3}{1}=t\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5t+1\\ y=6t+2\\ z=t+3\end{cases}$$

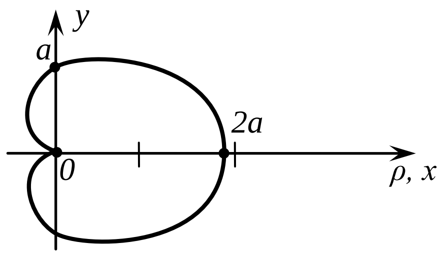
Находим пределы изменения для t на отрезке AB: $t_A=0$, $t_B=1 \Rightarrow t\in[0;1]$.

Сводим искомый криволинейный интеграл к определенному интегралу по $t\in[0;1]$, используя формулу (2), в которой $dl=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt=\sqrt{(-5)^2+6^2+1^2}\,dt=\sqrt{62}\,dt$:

$$\int\limits_{(l)}(x+2y-z)dl=\int\limits_{t=0}^{1}(-5t+1+2(6t+2)-(t+3))\cdot\sqrt{62}dt==\sqrt{62}\int\limits_{0}^{1}(6t+2)dt=\sqrt{62}\,(3t^2+2t)\Big|_0^1=\boxed{5\sqrt{62}}.$$

2. Вычислить $\int\limits_{(l)}(x+y)dl$, где l – это часть кардиоиды $\rho=a(1+\cos\varphi)$, $\varphi\in[0;\pi]$.

Решение



$$x(\varphi)=\rho(\varphi)\cos\varphi=a(1+\cos\varphi)\cos\varphi;$$
$$y(\varphi)=\rho(\varphi)\sin\varphi=a(1+\cos\varphi)\sin\varphi;$$
$$dl=\sqrt{\rho^2+(\rho_\varphi')^2}\,d\varphi=a\sqrt{(1+\cos\varphi)^2+(-\sin\varphi)^2}\,d\varphi=$$
$$=a\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi=a\sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi=2a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi,$$

так как $\cos\frac{\varphi}{2}\ge 0$ при $\varphi\in[0;\pi]$; $\int\limits_{(l)}(x+y)dl=2a^2\int\limits_0^{\pi}\left(\left(1+\cos\varphi\right)\cos\varphi+\left(1+\cos\varphi\right)\sin\varphi\right)\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=$

$$=2a^2\int\limits_0^{\pi}\left(\cos\varphi+\frac{1+\cos2\varphi}{2}+\sin\varphi+\frac{1}{2}\sin2\varphi\right)\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=\left\{\begin{matrix}\cos\alpha\cdot\cos\beta=0,5(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))\\ \sin\alpha\cdot\cos\beta=0,5(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))\end{matrix}\right\}=$$

$$=2a^2\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{3\varphi}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{4}\cos\frac{5\varphi}{2}+\frac{1}{4}\cos\frac{3\varphi}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{4}\sin\frac{5\varphi}{2}+\frac{1}{4}\sin\frac{3\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=2a^2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\sin\frac{3\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}+2\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\sin\frac{5\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cos\frac{3\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}-2\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cos\frac{5\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}\right)=$$

$$=a^2\left(-1+1+\frac{1}{5}+1+2+\frac{1}{5}\right)=\boxed{\frac{17}{5}a^2}.$$

5.4. Некоторые приложения криволинейного интеграла I рода

Криволинейный интеграл I рода относится к «массовым» интегралам, так как имеет механическую трактовку «масса линии», аналогичную трактовке двойного интеграла как «массы плоской фигуры» и тройного интеграла как «массы трёхмерного тела». Поэтому этот криволинейный интеграл имеет механические приложения, аналогичные механическим приложениям двойного и тройного интеграла: вычисление массы, статических моментов, моментов инерции и координат центра масс линии *l*.

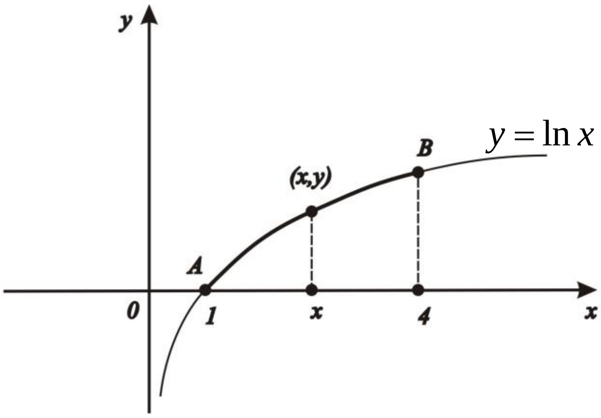
Из геометрических приложений криволинейного интеграла I рода наиболее важным является вычисление длины дуги (*AB*). ***Формула для вычисления длины дуги линии с помощью криволинейного интеграла I рода*** имеет очень простой вид:

$$l_{AB} = \int\limits_{(AB)} dl \qquad (5)$$

Примеры 2 (приложение криволинейного интеграла I рода)

1. Вычислить массу участка линии $y = \ln x$ между точками с абсциссами $x_1 = 1$ и $x_1 = 4$, если линейная плотность материала γ в каждой точке линии равна квадрату абсциссы точки.

Решение



$m = \int\limits_{(AB)} \gamma(x,y)dl$, то есть имеем двумерный вариант криволинейного интеграла I рода.

Так как $\gamma(x,y) = x^2$ по условию задачи, то $m = \int\limits_{(AB)} x^2 dl$.

Для вычисления составленного криволинейного интеграла по формуле (3) вычислим:

$$(AB): \begin{cases} x = x \\ y = \ln x, x \in [1;4] \end{cases} \Rightarrow dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2} \cdot dx = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot dx = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \cdot dx$$

Тогда

$$m=\int\limits_{x=1}^{4}x^2\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\cdot dx=\int\limits_{1}^{4}x\sqrt{x^2+1}\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{1}^{4}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot d(x^2+1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4=$$

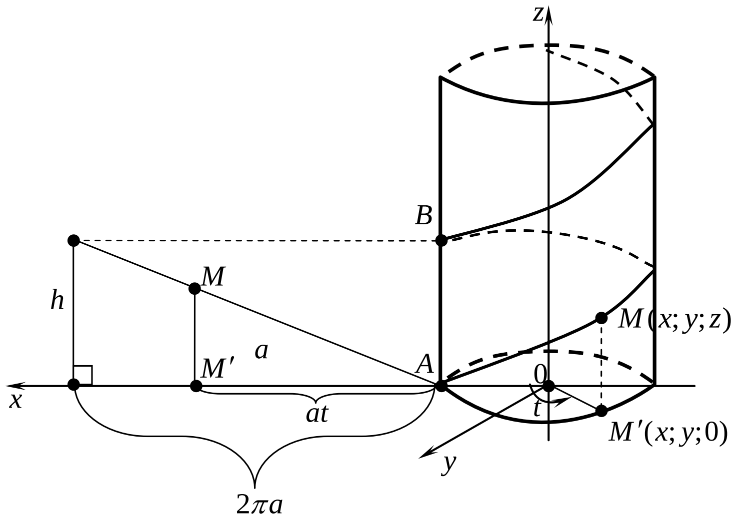
$$=\frac{1}{3}(17^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}})=\frac{1}{3}(17\sqrt{17}-2\sqrt{2})\approx 22{,}7$$

Ответ: $m=\frac{1}{3}(17\sqrt{17}-2\sqrt{2})\approx 22{,}7$ (ЕД. МАССЫ).

2. ВЫЧИСЛИМ ДЛИНУ ДУГИ ВИНТОВОЙ ЛИНИИ $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=\frac{ht}{2\pi}$, $0\le t\le 2\pi$.

Решение

ВИНТОВАЯ ЛИНИЯ ПОЛУЧАЕТСЯ, ЕСЛИ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК С КАТЕТАМИ ДЛИНОЙ $2\pi a$ И h «НАВИВАТЬ» НА ЦИЛИНДР С РАДИУСОМ ОСНОВАНИЯ a:



ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДУГИ *(AB)* ВИНТОВОЙ ЛИНИИ:

$x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=\frac{h}{2\pi}t$, $0\le t\le 2\pi$, где t – это полярный угол точки $M'(x;y;0)$.

Длина дуги *(AB)*: $l_{AB}=\int\limits_{(AB)}dl$.

$$dl=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}dt=\sqrt{(-a\sin t^2)+(a\cos t)^2+\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}dt=\sqrt{a^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}dt=$$

$$=\sqrt{\frac{4\pi^2a^2+h^2}{2\pi}}dt\Rightarrow l_{AB}=\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}dt=\frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}\cdot 2\pi=\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}.$$

Ответ: $l_{AB}=\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$ (единиц длины).

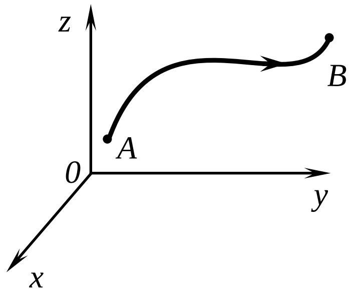
§6. Криволинейные интегралы II рода: определение, физическая трактовка, основные свойства, вычисление

Содержание

6.1. Определение криволинейного интеграла II рода 48
6.2. Физическая трактовка криволинейного интеграла II рода..................... 49
6.3. Основные свойства криволинейного интеграла II рода 50
6.4. Вычисление криволинейного интеграла II рода в двумерном случае.. 51

6.1. Определение криволинейного интеграла II рода

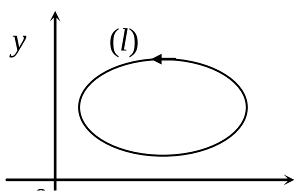
Общий вид криволинейного интеграла II рода в трехмерном случае:



$$\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)\cdot dx + Q(x,y,z)\cdot dy + R(x,y,z)\cdot dz \qquad (1)$$

где (AB) — это дуга пространственной кривой от точки A до точки B с указанным на ней направлением.

Общий вид криволинейного интеграла II рода в двумерном случае по дуге AB и по замкнутому контуру l:



при этом по умолчанию направление на (l) фиксируется против часовой стрелки

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot dy; \oint\limits_{(l)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (2)$$

Сумму слагаемых в подынтегральном выражении в криволинейном интеграле II рода принято записывать без скобок.

Определение криволинейного интеграла II рода в двумерном случае

1. Дугу кривой *(AB)* разбиваем на *n* элементарных частей точками

   $A = M_0, M_1, \ldots, M_n = B$;

   обозначим проекции *i*-той элементарной части на координатной оси:

   $$\Delta x_i = \text{пр}_x\left(\overrightarrow{M_{i-1}M_i}\right),\quad \Delta y_i = \text{пр}_y\left(\overrightarrow{M_{i-1}M_i}\right);$$

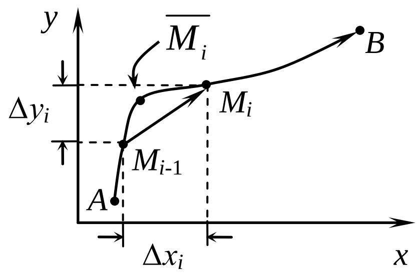


Рис. 14

рангом разбиения назовем число $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,n}}\left\{\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}\right\} = \max\limits_{i=\overline{1,n}}\left\{\Delta l_i\right\}$, где $\Delta l_i = \left|M_{i-1}M_i\right|$ - длина хорды, (*Рис. 14*).

2. На каждой элементарной части ($M_{i-1}M_i$) выбираем произвольную точку $\overline{M}_i(\overline{x}_i, \overline{y}_i)$ и вычисляем в ней значения двух функций: $P(\overline{x}_i, \overline{y}_i)$ и $Q(\overline{x}_i, \overline{y}_i)$.
3. Составляем интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n}\left(P\left(\overline{x}_i, \overline{y}_i\right)\cdot\Delta x_i + Q\left(\overline{x}_i, \overline{y}_i\right)\cdot\Delta y_i\right) \qquad (3)$$

   и вычисляем ее предел при $\lambda \to 0$.

4. Если предел интегральной суммы существует, является конечным и не зависит ни от способа разбиения дуги *(AB)* на элементарные части, ни от выбора точки $\overline{M}_i$ на каждой элементарной части, то он называется ***криволинейным интегралом II рода по дуге (AB)*** от выражения $Pdx + Qdy$ и обозначается

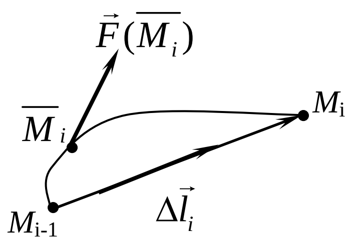
$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \overset{def}{=} \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(P(\overline{x}_i, \overline{y}_i)\cdot\Delta x_i + Q(\overline{x}_i, \overline{y}_i)\cdot\Delta y_i\right) \qquad (4)$$

Определение в трёхмерном случае составляется аналогично

6.2. Физическая трактовка криволинейного интеграла II рода

Если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ рассматривать как проекции на оси OX и OY вектора силы $\vec{F}(x,y)$, то $\int\limits_{(AB)} Pdx + Qdy = W$ — это работа переменной силы $\vec{F} = \{P;Q\}$, совершаемая на криволинейном перемещении (AB).

$\triangleright$ Действительно, каждое слагаемое интегральной суммы (3) можно трактовать как скалярное произведение вектора $\vec{F}\left(\overline{M_i}\right)=\left\{P(\overline{M_i});Q(\overline{M_i})\right\}$ на вектор прямолинейного перемещения $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}=\overrightarrow{\Delta l_i}=\left\{\Delta x_i;\Delta y_i\right\}$:



$P\left(\overline{x_i},\overline{y_i}\right)\Delta x_i+Q\left(\overline{x_i},\overline{y_i}\right)\Delta y_i=\vec{F}\left(\overline{M_i}\right)\cdot\Delta\vec{l}_i=\left|\vec{F}_i\right|\cdot\left|\Delta\vec{l}_i\right|\cos\left(\vec{F}_i,\Delta\vec{l}_i\right)=\Delta W_i$ – это работа постоянной силы $\vec{F}\left(\overline{M_i}\right)=\vec{F}_i$ на прямолинейном перемещении $\Delta\vec{l}_i$.

Как известно из физики, работа есть величина аддитивная. Поэтому интегральная сумма может трактоваться как сумма работ, совершаемых постоянными силами $\vec{F}_i$ на прямолинейных перемещениях $\Delta\vec{l}_i$. При вычислении предела интегральной суммы при $\lambda\to 0$ прямолинейные участки $\Delta\vec{l}_i$ неограниченно уменьшаются, так что перемещение материальной точки совершается по кривой (AB) и под действием переменной силы $\vec{F}$, заданной в каждой точке линии (AB):

$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta W_i=W$ – это работа по перемещению материальной точки по кривой (AB) из положения A в положение B под действием переменной силы $\vec{F}\left(x,y\right)=\left\{P(x,y);Q(x,y)\right\}$ $\triangleleft$

В связи с физическим смыслом криволинейного интеграла II рода его подынтегральное выражение часто записывают в векторной форме:

$$\int\limits_{(AB)}Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{(AB)}\vec{F}\cdot\vec{dl}\,, \tag{5}$$

где $\vec{F}(x,y,z)=\left\{P(x,y,z);Q(x,y,z);R(x,y,z)\right\}$, $\vec{dl}=\left\{dx,dy,dz\right\}$,

$\vec{F}\cdot\vec{dl}$ - это скалярное произведение векторов $\vec{F}$ и $\vec{dl}$.

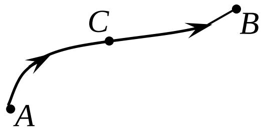
6.3. Основные свойства криволинейного интеграла II рода

Свойство 1 (линейность криволинейного интеграла II рода по подынтегральному выражению)

$$\int\limits_{(AB)}Pdx+Qdy=\int\limits_{(AB)}Pdx+\int\limits_{(AB)}Qdy$$

Свойство 2 (аддитивность криволинейного интеграла II рода по линии интегрирования)

$$\int\limits_{(AB)} Pdx + Qdy = \int\limits_{(AC)} Pdx + Qdy + \int\limits_{(CB)} Pdx + Qdy,$$



где точка C *– это любая точка на линии (AB).*

Свойство 3 (зависимость криволинейного интеграла II рода от направления на линии интегрирования)

$$\int\limits_{(AB)} Pdx + Qdy = -\int\limits_{(BA)} Pdx + Qdy$$

▷ Действительно, при изменении направления на дуге (*AB)* проекции вектора $\Delta\vec{l}_i = \{\Delta x_i ; \Delta y_i\}$ изменят свои знаки, следовательно, изменит знак интегральная сумма и её предел (3). ◁

Свойство 4 (достаточное условие существования криволинейного интеграла II рода)

Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются непрерывными в каждой точке линии (*AB*), то $\int\limits_{(AB)} Pdx + Qdy$ существует

6.4. Вычисление криволинейного интеграла II рода в двумерном случае

Пусть линия (*AB*) задана параметрически: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,

причем $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные и дифференцируемые функции,
t_A, t_B — это значения параметра t для начала и конца линии (*AB*).
Рассмотрим криволинейный интеграл (4) от одного слагаемого:

$$\int\limits_{(AB)} P(x, y)dx \overset{def}{=} \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta x_i \qquad (6)$$

В каждом слагаемом интегральной суммы можно сделать преобразования по теореме Лагранжа для дифференцируемой функции одной переменной: $\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x_t'(\bar{t}_i) \cdot \Delta t_i$, где $\overline{t_i}$ — это фиксированное значение аргумента t из промежутка между точками t_{i-1} и t_i;

при этом $\Delta x_i \to 0$ означает, что $\Delta t_i \to 0$ вследствие непрерывности функции $x(t)$.

Выберем $\overline{x}_i = x(\overline{t}_i),\ \overline{y}_i = y(\overline{t}_i)$, что всегда возможно, так как $\overline{x}_i, \overline{y}_i$ можно выбирать произвольно на каждой части разбиения.

Если учесть, что $\lambda \to 0$ в определении (6) означает, что $\max\limits_{i=\overline{1,n}}\{\Delta x_i\} \to 0$, то формула (6) преобразуется к следующему виду:

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\overline{x}_i, \overline{y}_i) \cdot \Delta x_i = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(x(\overline{t}_i), y(\overline{t}_i)) \cdot x'(\overline{t}_i) \cdot \Delta t_i .$$

Получился предел интегральной суммы для определенного интеграла по переменной t изменяется от значения t_A до значения t_B, от функции $P(x(t), y(t)) \cdot x'(t)$, поэтому криволинейный интеграл (6) сводится к определенному интегралу по переменной *t:*

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx = \int\limits_{t_A}^{t_B} P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) \cdot dt$$

Аналогично: $\int\limits_{(AB)} Q(x,y)dy = \int\limits_{t_A}^{t_B} Q\big(x(t), y(t)\big) \cdot y'(t) \cdot dt$.

Если сложить оба результата, то получится ***формула сведения криволинейного интеграла II рода к определенному интегралу***:

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \left\{ (AB): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} dx = x'_t dt \\ dy = y'_t dt \end{matrix} \right\} =$$

$$= \int\limits_{t_A}^{t_B} (P(x(t), y(t)) \cdot x'_t + Q(x(t), y(t)) \cdot y'_t) dt \qquad (7)$$

где t_A, t_B — это значения параметра t для начала и конца линии (AB).

Аналогичная формула составляется и для трехмерного криволинейного интеграла (1) по пространственной кривой (AB):

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{уравнение } (AB): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = x'_t dt \\ dy = y'_t dt \\ dz = z'_t dt \end{cases}, \\ t_A,\ t_B - \text{значение параметра для точек } A \text{ и } B \end{matrix} \right\} = \qquad (8)$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} (P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x_t' + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y_t' + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z_t') \cdot dt.$$

Таким образом, вычисление криволинейного интеграла II рода сводится к вычислению определенного интеграла по параметру, через который записаны уравнения линии интегрирования (AB). При этом в качестве параметра можно взять любую независимую переменную на линии (AB), а далее нужно выражать всё подынтегральное выражение в криволинейном интеграле через эту независимую переменную (параметр) и её дифференциал.

Замечание

Если в двумерном случае дуга (AB) задана уравнением y = y(x), то в качестве независимой переменной (параметра) может быть взята переменная x, и формула (7) в этом случае примет следующий вид

$$\int_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \{(AB): y = y(x) \Rightarrow dy = y_x' \cdot dx\} = \int_{x_A}^{x_B} (P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y_x')dx. \qquad (7')$$

Если же дуга (AB) задана уравнением $x = x(y)$, то в качестве независимой переменной (параметра) может быть взята переменная y, и тогда сведение криволинейного интеграла к определенному интегралу по y описывается следующей формулой:

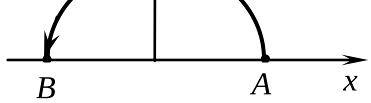
$$\int_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \left\{(AB): x = x(y) \Rightarrow dx = x_y' \cdot dy\right\} =$$

$$= \int_{y_A}^{y_B} (P(x(y), y) \cdot x'(y) + Q(x(y), y))dy \qquad (7'')$$

Примеры 1 (вычисление криволинейных интегралов II рода)

1. Вычислить $\int\limits_{(AB)} xydx + xdy$, где ($AB$) — это верхняя полуокружность радиуса R, проходимая против часовой стрелки.

Решение



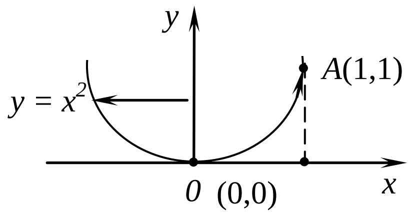
$$(AB): \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \Rightarrow t_A = 0, t_B = \pi$$

$$\int_{AB} xydx + xdy = \left\{ \begin{aligned} dx &= (R\cos t)_t' \cdot dt = -R\sin t dt \\ dy &= (R\sin t)_t' \cdot dt = R\cos t dt \end{aligned} \right\} =$$

$$= \int\limits_{t=0}^{\pi} (R\cos t \cdot R\sin t \cdot (-R\sin t dt) + R\cos t \cdot R\cos t dt) = \int\limits_{0}^{\pi} \left(-R^3 \sin^2 t \cos t + R^2 \cos^2 t\right) dt =$$

$$= -R^3 \int\limits_{0}^{\pi} \sin^2 t \cdot d\left(\sin t\right) + R^2 \int\limits_{0}^{\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = -R^3 \left.\frac{\sin^3 t}{3}\right|_0^{\pi} + \frac{R^2}{2} \left. t\right|_0^{\pi} + \frac{R^2}{2} \left.\frac{\sin 2t}{2}\right|_0^{\pi} = \boxed{\frac{\pi R^2}{2}}.$$

2. Вычислить $\int\limits_{(OA)} ydx + \cos x^2 dy$, где (OA) — это дуга параболы $y = x^2$ от точки $O(0;0)$ до $A(1;1)$.



Решение

На линии (OA) можно в качестве параметра взять независимую переменную x и пересчитать все подынтегральное выражение через x и ее дифференциал dx :

$$\left(OA\right): \begin{cases} x - \text{независимаяя переменая} \\ y = x^2 \\ x_0 = 0, x_A = 1 \end{cases} \Rightarrow dy = y'_x \cdot dx = (x^2)' \cdot dx = 2xdx$$

Теперь сводим криволинейный интеграл к определенному интегралу по переменной x:

$$\int\limits_{(AO)} ydx + \cos x^2 dy = \int\limits_{0}^{1} (x^2 dx + \cos x^2 \cdot 2xdx) = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\sin x^2\right|_0^1 = \boxed{\frac{1}{3} + \sin 1}.$$

3. Вычислить $I = \int\limits_{(AB)} \cos\frac{y}{x} \cdot dx + \sqrt{x} \cdot dy$, где (AB) – это дуга линии $x = \sqrt{y}$, $A(1;1)$, $B(4;16)$.

Решение

На линии *(AB)* возьмем y в качестве независимой переменной и вычислим данный криволинейный интеграл по формуле (7''):

$$W = \int\limits_{(AB)} \cos\frac{y}{x} \cdot dx + \sqrt{x} \cdot dy = \left\{ (AB): x = \sqrt{y} \Rightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{y}} dy, y_A = 16, y_B = 1 \right\} =$$

$$= \int\limits_{16}^{1} (\cos\frac{y}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} dy + \sqrt[4]{y} \cdot dy) = -\int\limits_{1}^{16} \cos\sqrt{y} \cdot d(\sqrt{y}) - \int\limits_{1}^{16} y^{\frac{1}{4}} dy =$$

$$= -\sin\left.\sqrt{y}\right|_1^{16} - \left.\frac{4}{5} \cdot y^{\frac{5}{4}}\right|_1^{16} = -\sin 4 + \sin 1 - \frac{4}{5} \cdot (32 - 1) = -\sin 4 + \sin 1 - \frac{124}{5} \approx -23,2$$

Отрицательное значение работы можно объяснить так: под действием данной силы $\vec{F}$ перемещение материальной точки должно совершаться из точки $B(4;16)$ в точку $A(1;1)$; поэтому вычисленное значение W - это значение работы, которую нужно затратить против силы $\vec{F}$.

Ответ: $W = \sin 1 - \sin 4 - \dfrac{124}{5} \approx -23,2$ (единиц работы).

Примеры 2 (вычисление работы переменной силы на криволинейном перемещении)

1. Вычислить работу, производимую силой $\vec{F} = \left\{ \cos\dfrac{y}{x}; \sqrt{x} \right\}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги кривой $x = \sqrt{y}$ из положения $A(4;16)$ в положение $B(1;1)$.

Решение

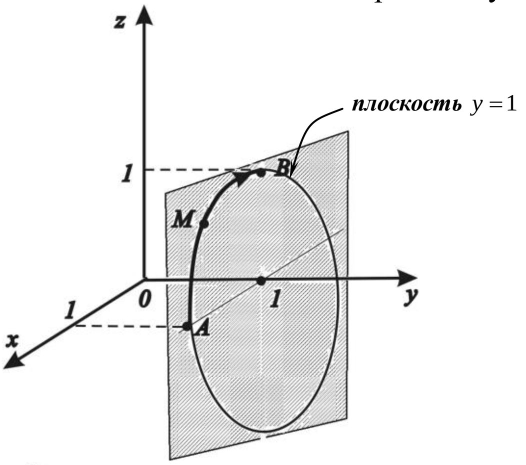
По физической трактовке криволинейного интеграла II рода составляем формулу для искомой работы W;

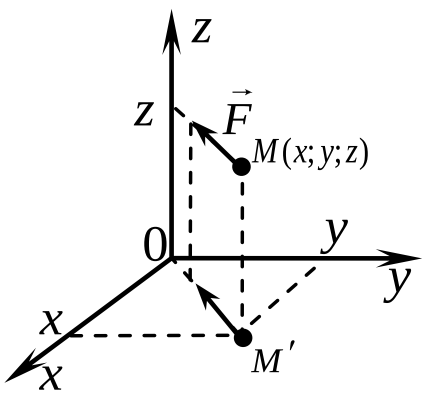
$$W = \int\limits_{(AB)} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \int\limits_{(AB)} \cos\frac{y}{x} dx + \sqrt{x} dy$$

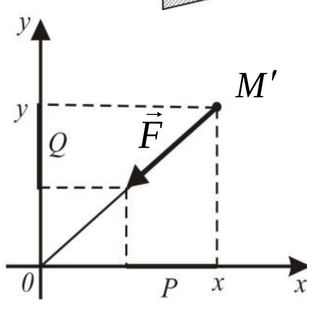
2. Сила по величине обратно пропорциональна расстоянию точки ее приложения от оси *OZ*, перпендикулярна к этой оси и направлена к ней. Найти работу силы при движении точки под действием этой силы по окружности $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 \\ z = \sin t \end{cases}$ от точки $A(1;1;0)$ до точки $B(0;1;1)$.

Решение

Сделаем несколько иллюстраций к условию задачи:







$\vec{F} = \{P;Q;R\}$;

$R = 0$, так как $\vec{F} \perp OZ$

$$\left|\vec{F}\right| = \frac{k}{|OM'|} = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow \begin{cases} P = \dfrac{-kx}{x^2 + y^2} \\ Q = \dfrac{-ky}{x^2 + y^2} \end{cases},$$

так как $\left|\vec{F}\right| = \sqrt{P^2 + Q^2}$, k - коэффициент пропорциональности.

Вычисляем искомую работу с помощью криволинейного интеграла II рода:

$$W = \int\limits_{(AB)} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int\limits_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{(AB)} \frac{-kx}{x^2 + y^2} \cdot dx + \frac{-ky}{x^2 + y^2} \cdot dy + 0 \cdot dz = \int\limits_{(AB)} \frac{-kx}{x^2 + y^2} dx + \frac{-ky}{x^2 + y^2} dy =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} (AB): \begin{cases} x = \cos t & dx = -\sin t \cdot dt \\ y = 1 \quad \Rightarrow & dy = 0 \\ z = \sin t & dz = \cos t \cdot dt \end{cases} \\ t_A = 0,\ t_B = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right\} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{-k \cdot \cos t}{\cos^2 t + 1} \cdot (-\sin t \cdot dt) + \frac{-k \cdot 1}{\cos^2 t + 1} \cdot 0 + 0 \cdot \cos t \cdot dt \right) =$$

$$= -k \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos t \cdot \sin t}{\cos^2 t + 1} dt = -\frac{k}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos^2 t + 1)}{\cos^2 t + 1} = -\frac{k}{2} \ln(\cos^2 t + 1)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{k}{2}(\ln 1 - \ln 2) = 0,5 \cdot k \cdot \ln 2.$$

Ответ: $W = 0,5 \cdot k \cdot \ln 2$ (единиц работы).

§7. Формула Грина. Вычисление площади плоской фигуры с помощью криволинейного интеграла II рода

Содержание

7.1. Вывод формулы Грина 57
7.2. Вычисление площади плоской фигуры с помощью криволинейного интеграла II рода 61

7.1. Вывод формулы Грина

Формула Грина устанавливает связь между двойным интегралом по области D и криволинейным интегралом II рода по границе (l) этой области и имеет следующий вид:

$$\boxed{\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_{(l^{+})}P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy} \qquad (1)$$

Направление на l берется против часовой стрелки, так что область D остается слева при обходе ее по контуру l; так ориентированный замкнутый контур обозначается l^{+}, (*Рис. 15*).

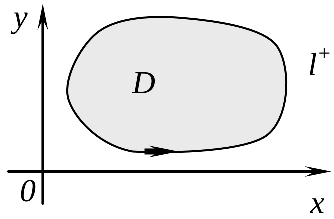


Рис. 15

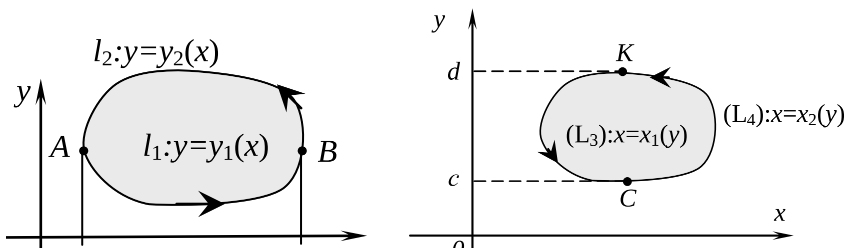


Рис. 16

Доказательство

▷ Пусть область D является правильной в направлении обеих координатных осей, а функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ имеют непрерывные частные производные в замкнутой области D.

Запишем область D неравенствами и рассмотрим двойные интегралы по D от каждого слагаемого в левой части формулы Грина (*Рис. 16*).

Для двойного интеграла от второго слагаемого область D запишем неравенствами так, что в постоянных пределах будет переменная x, и сведем двойной интеграл к повторному:

$$D:\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_2(x)}^{y_1(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int\limits_a^b dx \cdot P(x,y)\Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} = \int\limits_a^b P(x,y_2(x))dx - \int\limits_a^b P(x,y_1(x))dx \boxed{=}$$

воспользуемся формулой (7') предыдущего параграфа и перейдем от определенных интегралов по x к криволинейным интегралам по линиям l_1 и l_2, далее учтем направление на этих линиях

$$\boxed{=} \int\limits_{(l_2)} P\left(x,y\right)dx - \int\limits_{(l_1)} P\left(x,y\right)dx = \int\limits_{(AB)=(l_2)} P(x,y)dx - \int\limits_{(AB)=(l_1)} P(x,y)dx =$$

$$= -\int\limits_{(BA)} P(x,y)dx - \int\limits_{(AB)} P(x,y)dy = -\oint\limits_{(l^+)} P\left(x,y\right)dx\,.$$

В этих преобразованиях учтены следующие свойства криволинейного интеграла II рода: изменение его знака при изменении направления на линии интегрирования и его аддитивность по линии интегрирования.

Таким образом, доказано, что

$$\oint\limits_{(l^+)} P\left(x,y\right)dx = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy. \tag{2}$$

Теперь в формуле (1) рассмотрим двойной интеграл от первого слагаемого и для сведения его к повторному интегралу запишем область D неравенствами так, что в постоянных пределах изменяется переменная y (*Рис. 16*):

$$D:\begin{cases} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{cases}$$

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int\limits_c^d dy \cdot Q(x,y)\Bigg|_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} =$$

$$= \int\limits_c^d Q(x_2(y),y)dy - \int\limits_c^d Q(x_1(y),y)dy \boxed{=}$$

воспользуемся формулой (7'') предыдущего параграфа и перейдем от определенных интегралов по переменной y к криволинейным интегралам по линиям l_4 и l_3 и далее учтем направления на этих линиях

$$\boxed{=} \int\limits_{(l_4)} Q(x,y)dy - \int\limits_{(l_3)} Q(x,y)dy = \int\limits_{(CK)=(l_4)} Q(x,y)dy - \int\limits_{(CK)=(l_3)} Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{(CK)} Q(x,y)dy + \int\limits_{(KC)} Q(x,y)dy = \oint\limits_{(l^+)} Q(x,y)dy\,.$$

Здесь также применялись упомянутые выше свойства криволинейного интеграла II рода.

Таким образом доказано, что

$$\oint_{(l^+)} Q(x,y)\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy. \qquad (3)$$

Сложением равенств (2) и (3) получается следующая формула:

$$\oint_{(l^+)} P(x,y)dx + \oint_{(l^+)} Q(x,y)dy = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy + \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy$$

Отсюда по свойствам линейности относительно подинтегральных выражений криволинейных и двойных интегралов получаем равенство (1):

$$\oint_{(l^+)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Если область D не является правильной в направлениях осей OX и OY, то ее можно разбить на правильные части.

Например, рассмотрим область D, неправильную в направлении оси Ox, и разделим её на две правильные части линией l^*: $D = D_1 \cup D_2$,

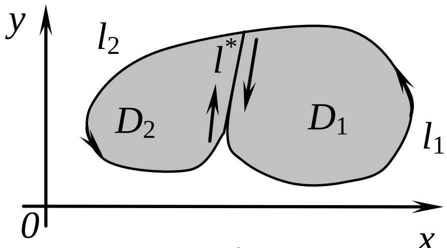


Рис. 17

граница D_1: $l_1 \cup l^*$; граница D_2: $l_2 \cup l^*$, граница $D = D_1 \cup D_2 : l = l_1 \cup l_2$, (*Рис. 17*)

Затем используем свойство аддитивности двойного и криволинейного интегралов и уже указанную формулу Грина для правильной области:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{по формуле Грина} \\ \text{для правильной области}\end{matrix}\right\} = \oint_{(l_1^+)} Pdx + Qdy + \oint_{(l_2^+)} Pdx + Qdy = \oint_{(l^+)} Pdx + Qdy$$

так как криволинейный интеграл по линии раздела (L^*) берется дважды в противоположных направлениях, следовательно, он равен 0. Таким образом, формула Грина справедлива для любой замкнутой области D.$\lhd$

Формула Грина имеет теоретическое значение и будет использована, например, в следующем параграфе для вывода необходимых и достаточных условий независимости криволинейного интеграла II рода от формы линии интегрирования. На практике формулу Грина можно использовать для сведения криволинейных интегралов II рода по замкнутому контуру к двойным интергалам по области, ограниченной этим контуром.

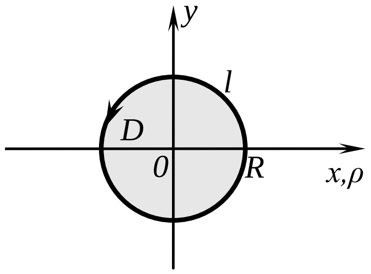
Обобщением формулы Грина на трехмерный случай является формула Стокса, которая будет рассморена далее в этой теме.

Примеры1 (использование формулы Грина)

1. Вычислить криволинейный интеграл II рода по замкнутому контуру

$\int\limits_{(l)} (1-x^2)ydx + x(1+y^2)dy$, где l – это окружность $x^2+y^2=R^2$, проходимая против часовой стрелки.

Решение



Данный интеграл по замкнутому контуру легко сводится к двойному интегралу по области, ограниченной этим контуром:

$P(x,y)=(1-x^2)y$, $Q(x,y)=x(1+y^2) \Rightarrow$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=1+y^2$, $\frac{\partial P}{\partial y}=1-x^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=y^2+x^2 \Rightarrow$

$$\oint\limits_{(l^+)} Pdx+Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy \boxed{=}$$

вычисляем двойной интеграл по кругу в полярных координатах

$$\boxed{=}\iint\limits_D \rho^2\rho d\varphi d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^3 d\rho = \varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^R = \boxed{\frac{\pi R^4}{2}}.$$

2. С помощью формулы Грина вычислить разность интегралов $I_1 - I_2$, если

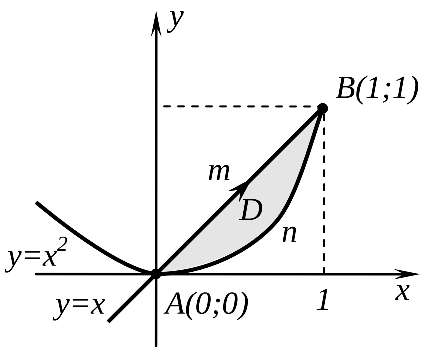
$$I_1 = \int\limits_{(AmB)} (x+y)^2dx-(x-y)^2dy,\ I_2 = \int\limits_{(AnB)} (x+y)^2dx-(x-y)^2dy,$$

где AmB - отрезок прямой, соединяющей точки $A(0;0)$ и $B(1;1)$,

AnB - дуга параболы $y=x^2$, соединяющей те же точки.

Решение

Сделаем чертеж к задаче и заметим, что интегралы I_1 и I_2 имеют одинаковые подинтегральные выражения, что позволяет разность этих интегралов свести к интегралу по замкнутому контуру:



$$I_1-I_2=\int\limits_{(AmB)} Pdx+Qdy - \int\limits_{(AnB)} Pdx+Qdy =$$

$$-\int\limits_{(AnB)} Pdx+Qdy - \int\limits_{(BmA)} Pdx+Qdy = -\oint\limits_{(AnBmA)} Pdx+Qdy$$

Теперь применяем формулу Грина криволинейному интегралу по замкнутому контуру, проходившему в положительном направлении, и далее вычисляем получившийся двойной интеграл:

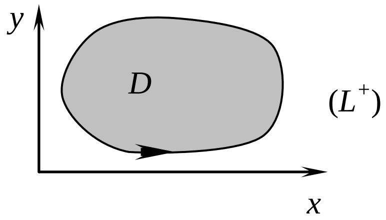
$$I_1-I_2 = -\oint\limits_{(AnBmA)} Pdx+Qdy = -\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint\limits_D\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dxdy = \left\{\begin{aligned}P(x,y)&=(x+y)^2\\ Q(x,y)&=-(x-y)^2\end{aligned}\right\} =$$

$$\iint\limits_D \big(2(x+y)+2(x-y)\big)\,dxdy = \iint\limits_D 4xdxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} 4xdy = \int\limits_0^1 4xdx\, y\Big|_{x^2}^{x} = 4\int\limits_0^1 (x^2-x^3)dx = 4\cdot\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 4\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = 4\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $I_1 - I_2 = \dfrac{1}{3}$.

7.2. Вычисление площади плоской фигуры с помощью криволинейного интеграла II рода



Если в формуле Грина положить $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = x$, то получим

$$\iint\limits_D 2dxdy = \oint\limits_{(L+)} xdy - ydx \quad \Leftrightarrow$$

$$2S_D = \oint\limits_{(L+)} xdy - ydx \text{, так как } \iint\limits_D dxdy = S_D.$$

Таким образом как следствие из формулы Грина получается следующее равенство:

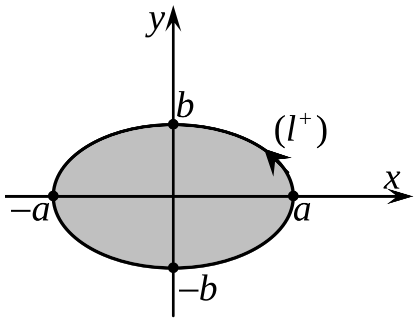
$$S_D = \frac{1}{2}\oint\limits_{(L^+)} xdy - ydx \qquad \textbf{(4)}$$

Эта формула дает возможность вычислить площадь плоской фигуры с помощью криволинейного интеграла II рода по ее границе.

Пример 2 (ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ С ПОМОЩЬЮ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА II РОДА)

ВЫЧИСЛИТЬ ПЛОЩАДЬ, ОГРАНИЧЕННУЮ ЭЛЛИПСОМ С ПОЛУОСЯМИ *А* И *В*.

Решение



$$S_D = \frac{1}{2}\oint\limits_{(l^+)} xdy - ydx$$

Для вычисления криволинейного интеграла записываем параметрические уравнения эллипса с полуосями a и b:

$$(l^+):\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} dx = -a\sin t \cdot dt \\ dy = b\cos t \cdot dt \end{matrix}, \quad t \in [0;2\pi]$$

и сводим криволинейный интеграл к определенному по переменной t:

$$S_D = \frac{1}{2}\int\limits_{t=0}^{2\pi}(a\cos t \cdot b\cos t \cdot dt - b\sin t \cdot (-a\sin t)\cdot dt) = \frac{1}{2}ab\int\limits_0^{2\pi}(\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \frac{1}{2}ab\int\limits_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

Ответ: $S_D = \pi ab$ (ед. площади).

§ 8. Условия независимости криволинейного интеграла II рода от формы линии интегрирования

Содержание

8.1. Формулировка и доказательство теоремы о независимости криволинейного интеграла II рода от формы линии интегрирования в двумерном случае . 64
8.2. Формулировка теоремы о независимости криволинейного интеграла II рода от формы линии интегрирования в трехмерном случае 67

Из физики известно, что существуют такие силовые поля, в которых работа по перемещению материальной точки из одного положения в другое не зависит от формы траектории перемещения, а зависит только от начальной и конечной точек на этой траектории. Например,

1) работа по преодолению силы тяжести вычисляется по формуле $A = mgh$,
где h – это высота, на которую нужно поднять материальную точку массой m (g – ускорение свободного падения); эта формула остается неизменной независимо от того, поднимаем ли точку на высоту h по вертикали или по какой-то иной траектории;

2) работа по перемещению точечного заряда в электростатическом силовом поле вычисляется как разность значений потенциала этого поля в конечной и в начальной точках перемещения, следовательно, не зависит от формы перемещения.

Поскольку криволинейный интеграл II рода

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

имеет физическую трактовку работы, совершаемой переменной силой $\vec{F} = \{P, Q, R\}$ на криволинейном перемещении (AB), то должны быть случаи, когда этот криволинейный интеграл не зависит от формы линии интегрирования (AB). Эти случаи имеют важное значение в приложениях и выделяются следующей теоремой, которую мы сначала разберем для более простого – двумерного криволинейного интеграла II рода, а затем обобщим на трехмерный криволинейный интеграл II рода.

8.1. Формулировка и доказательство теоремы о независимости криволинейного интеграла II рода от формы линии интегрирования в двумерном случае

Теорема о независимости криволинейного интеграла II рода от формы линии интегрирования (двумерный случай)

Для того чтобы криволинейный интеграл II рода $\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

не зависел от формы линии интегрирования (AB), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

1. $\oint\limits_{\forall(l)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, (1)

   то есть равен нулю интеграл по любому замкнутому контуру (L), на котором лежат точки A и B.

2. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, (2)

   причем частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ являются непрерывными и равными во всех точках некоторой области D, содержащей линию (AB).

3. Существует дифференцируемая функция двух переменных $U(x,y)$ такая, что подынтегральное выражение является ее полным дифференциалом:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dU(x,y) \tag{3}$$

Доказательство

$\triangleright$ Сформулированная сложная теорема включает в себя несколько теорем . Логика её доказательства может быть описана такой схемой :

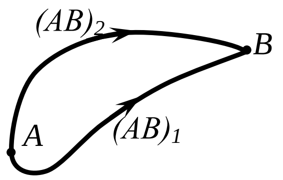
$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \text{ не зависит от формы линии } (AB) \Leftrightarrow (1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \tag{*}$$

В соответствии с этой схемой проведем доказательство в 3 этапа.

<u>1этап</u>

Докажем первое условие (необходимость и достаточность), используя свойства криволинейного интеграла *II* рода (аддитивность и зависимость от направления на линии интегрирования).

Пусть $(AB)_1$ и $(AB)_2$ – это две различные, произвольно взятые, линии, соединяющие точки A и B, тогда



$\int\limits_{(AB)} Pdx+Qdy$ не зависит от формы линии $(AB)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int\limits_{(AB)_1} Pdx+Qdy = \int\limits_{(AB)_2} Pdx+Qdy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_{(AB)_1} - \int\limits_{(AB)_2} = 0 \Leftrightarrow \int\limits_{(AB)_1} + \int\limits_{(BA)_2} = 0 \Leftrightarrow \oint\limits_{(ABA)} = 0 \Leftrightarrow \oint\limits_{\forall(l)} Pdx+Qdy = 0.$$

Таким образом, в логической схеме (*) доказан переход

$\int\limits_{(AB)} Pdx+Qdy$ не зависит от формы (AB) $\Leftrightarrow \oint\limits_{\forall(l)} Pdx+Qdy=0$.

<u>2 этап</u>

Эквивалентность условий (1) и (2) в схеме (*) следует из формулы Грина

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint\limits_{(L^+)} Pdx+Qdy \ .$$

Действительно, если $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ для всех точек (x,y) некоторой области D,

то $\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint\limits_D 0\cdot dxdy = 0 \quad \Rightarrow \oint\limits_{(L^+)} Pdx+Qdy=0$,

где (L) – это замкнутая линия, ограничивающая область D;

таким образом, в схеме (*) доказан переход (1) $\Leftarrow$ (2), то есть достаточность условия (2) для (1).

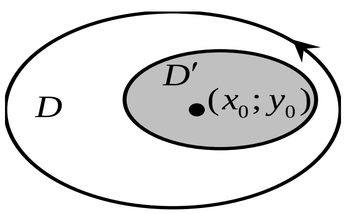
Обратно, если $\oint\limits_{(l^+)} Pdx+Qdy=0$ при $\forall\,(l)$, то формула Грина даёт, что

$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = 0$ для любой области D, ограниченной произвольно взятым контуром l.

Равенство нулю двойного интеграла по произвольно взятой области D возможно только в случае тождественного равенства нулю подынтегральной функции, следовательно

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ для любых $(x,y)\in D$.

Этот последний вывод можно обосновать рассуждениями от противного:



пусть хотя бы в одной точке $(x_0,y_0)\in D$ будет $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq 0$, но $\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = 0$.

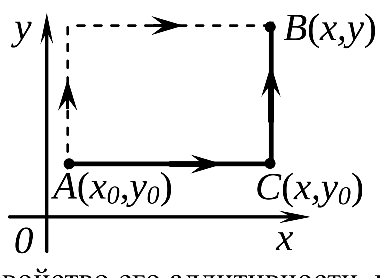
тогда по непрерывности частных производных $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ будет $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\neq 0$ в некоторой области $D'\subset D$, причем $(x_0, y_0)\in D'$, и во всей области D' разность $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ сохраняет свой знак (см. свойства непрерывных функций); поэтому, если взять двойной интеграл по области D' от функции фиксированного знака, то он никогда не получится равным нулю, что противоречит выводу из формулы Грина.
Следовательно, неверным является предположение об отличии от нуля (хотя бы в одной точке) непрерывной функции, интеграл от которой равен нулю по любой области интегрирования.
Следовательно, верным является вывод о равенстве нулю непрерывной функции, интеграл от которой равен нулю по любой области интегрирования.

Таким образом, в схеме (*) доказан переход (1)$\Rightarrow$(2), то есть необходимость условия (2) для (1).
Следовательно, показана эквивалентность условий (1) и (2): (1) $\Leftrightarrow$ (2).

<u>3 этап</u>

Докажем эквивалентность условий (2) и (3) в схеме (*)
Легко доказывается следствие (3) $\Rightarrow$ (2) на основании свойства смешанных частных производных второго порядка для ФНП:
пусть существует функция $U(x,y)$, такая что $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=dU(x,y)$;
так как по определению полного дифференциала ФНП имеем, что $dU=U'_x dx+U'_y dy$, то $P=U'_x$ и $Q=U'_y \Rightarrow P'_y=U''_{xy}$ и $Q'_x=U''_{yx}$; известно, что $U''_{xy}=U''_{yx}$, если они непрерывны, поэтому $P'_y=Q'_x$, следовательно, равенство частных производных $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ выполняется во всей области их существования и непрерывности.
Переход (2) $\Rightarrow$ (3) доказывается сложнее и , например, следующим образом.
Дано, что равенство $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ выполняется в некоторой области D и требуется доказать, что существует функция $U(x,y)$, такая что $dU=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.
Так как $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ при $\forall(x;y)\in D$, то по доказанному уже условию (2) это гарантирует, что криволинейный интеграл $\int\limits_{(AB)} Pdx+Qdy$ не зависит от формы линии (AB).

Выберем линию интегрирования (AB) так, чтобы она соединила некоторую фиксированную точку (x_0; y_0) и переменную точку (x,y) по ломаной, состоящей из отрезков, параллельных осям координат (так всегда можно сделать, оставаясь в области непрерывности функций P и Q и их частных производных).



Вычислим криволинейный интеграл по ломаной (ACB), используя свойство его аддитивности, и получим результат, зависящий от координат конечной точки
(x; y):

$$\int\limits_{(ACB)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{(AC)} Pdx+Qdy+\int\limits_{(CB)} Pdx+Qdx\boxed{=}$$

$$(AC):\begin{cases} y = y_0 = \text{const} \\ x - \text{параметр} \\ x_{нач} = x_0, x_{кон} = x \\ dy = 0 \end{cases} \qquad (CB):\begin{cases} x = x_0 = \text{const} \\ y - \text{параметр} \\ y_{нач} = y_0, y_{кон} = y \\ dx = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{=} \int\limits_{x=x_0}^{x} \left(P(x,y_0)dx + Q(x,y_0)\cdot 0\right) + \int\limits_{y=y_0}^{y} \underbrace{\left(P(x,y)\cdot 0 + Q(x,y)dy\right)}_{x=const} =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy \underset{\text{обозн.}}{=} U(x,y).$$

Вычислим $\dfrac{\partial U}{\partial x}$, используя теорему Барроу, правило Лейбница для дифференцирования интеграла, зависящего от параметра, и равенство $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \left(\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx\right)'_x + \left(\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy\right)'_x = P(x,y_0) + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial Q}{\partial x}dy =$$

$$= P(x,y_0) + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial P}{\partial y}dy = P(x,y_0) + P(x,y)\Big|_{y=y_0}^{y=y} = P(x,y_0) + P(x,y) - P(x,y_0) = P(x,y).$$

Для вычисления $\dfrac{\partial U}{\partial y}$ достаточно использовать только теорему Барроу:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \left(\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx\right)'_y + \left(\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy\right)'_y = 0 + Q(x,y) = Q(x,y).$$

Теперь составим полный дифференциал функции $U(x,y)$:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Таким образом, построена искомая функция $U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy$

и тем самым доказан переход (2)$\Rightarrow$(3). 3-й этап доказательства закончен.
Полное доказательство теоремы завершено.$\triangleleft$

8.2. Формулировка теоремы о независимости криволинейного интеграла II рода от формы линии интегрирования в трехмерном случае

Аналогично доказанной теореме формулируются и доказываются условия независимости криволинейного интеграла II рода от формы линии интегрирования в трёхмерном случае. Приведем здесь только формулировку этих условий.

Теорема о независимости криволинейного интеграла II рода от формы линии интегрирования (трехмерный случай)

Для того, чтобы криволинейный интеграл $\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$

не зависел от формы линии (AB), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих, эквивалентных между собой, условий:

1. $$\oint\limits_{\forall(l)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0 \qquad (1')$$

   то есть равен нулю интеграл по любому замкнутому контуру (L), на котором лежат точки A и B;

2. $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \qquad (2')$$

   эти три равенства непрерывных частных производных должны выполняться во всех точках некоторой области D, содержащей линию (AB);

3. Существует дифференцируемая функция трех переменных $U(x,y,z)$ такая, что подынтегральное выражение является ее полным дифференциалом:

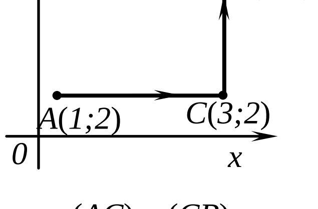
   $$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = dU(x,y,z) \qquad (3')$$

Примеры (вычисление криволинейных интегралов II рода, не зависящих от формы линии интегрирования)

1. Проверить независимость криволинейного интеграла $\int\limits_{(AB)} yxdx + \frac{1}{2}x^2dy$ от формы линии (AB) и вычислить его, если $A(1;2)$ и $B(3;4)$.

Решение

Здесь $\begin{cases} P = yx \\ Q = \frac{1}{2}x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = x \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ для $\forall(x,y) \Rightarrow$



данный криволинейный интеграл не зависит от формы (AB).

Вычислим его по ломаной (ACB), записав параметрически ее участки (AC) и (CB):

$$(AC): \begin{cases} y = 2, \\ x - \text{перем.} \\ x_{нач} = 1, \;\; x_{кон} = 2 \\ dy = 0 \end{cases} \qquad (CB): \begin{cases} x = 3, \\ y - \text{перем.} \\ y_{нач} = 2, \;\; y_{кон} = 4 \\ dx = 0 \end{cases}$$

$$\int\limits_{(ACB)} yxdx+\frac{1}{2}x^2dy=\int\limits_{AC}+\int\limits_{CB}=\int\limits_{x=1}^{x=2}2xdx+\int\limits_{y=2}^{y=4}\frac{1}{2}\cdot 3^2dy=x^2\Big|_1^2+\frac{9}{2}y\Big|_2^4=17.$$

Криволинейный интеграл II рода, не зависящий от формы линии интегрирования, часто записывают так, что указывается только начальная и конечная точки на линии интегрирования.

Ответ: $\int\limits_{(1;2)}^{(3;4)} yxdx+\frac{1}{2}x^2dy=17\cdot$

2. Проверить независимость криволинейного интеграла $\int\limits_{(1;2)}^{(3;4)} y^2xdx+\frac{1}{2}x^2dy$ от формы линии интегрирования *(AB)*.

Решение

Здесь $\begin{cases} P=y^2x \\ Q=\frac{1}{2}x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y}=2xy \\ \frac{\partial Q}{\partial x}=x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x},$

следовательно, данный криволинейный интеграл зависит от формы линии интегрирования, поэтому для его вычисления нужно дополнительно к имеющемуся условию задачи задавать уравнение линии *(AB)*.

3. Вычислить $\int\limits_{(1;2;3)}^{(2;4;5)} xdx+ydy+zdz$

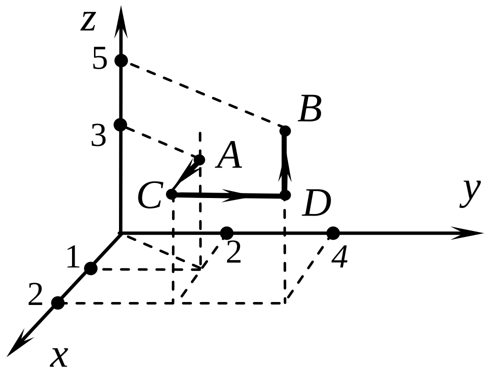
Решение

$\begin{cases} P(x,y,z)=x \\ Q(x,y,z)=y \\ R(x,y,z)=z \end{cases} \Rightarrow$ равенства $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}$ выполняются при $\forall x,y,z \Rightarrow$

данный криволинейный интеграл не зависит от формы линии интегрирования.

Проще всего такой интеграл вычислять по ломаной линии *(ACDB)*, состоящей из отрезков, параллельных осям координат.

$$(AC):\begin{cases} y=2\Rightarrow dy=0\\ z=3\Rightarrow dz=0\\ x-\text{переменная},\ x_A=1,\ x_C=2\end{cases}$$



$$(CD):\begin{cases} x=2\Rightarrow dx=0\\ z=3\Rightarrow dz=0\\ y-\text{переменная},\ y_C=2,\ y_D=4\end{cases}$$

$$(CB):\begin{cases} x=2\Rightarrow dx=0\\ y=4\Rightarrow dy=0\\ z-\text{переменная},\ z_D=3,\ z_B=5\end{cases}$$

$$\int\limits_{(1;2;3)}^{(2;3;4)} xdx+ydy+zdz=\int\limits_{x=1}^{x=2}\left(xdx+0+0\right)+\int\limits_{y=2}^{y=4}\left(0+ydy+0\right)+\int\limits_{z=3}^{z=5}\left(0+0+zdz\right)=\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2+\left.\frac{y^2}{2}\right|_2^4+\left.\frac{z^2}{2}\right|_3^5=15{,}5.$$

Ответ: $\int\limits_{(1;2;3)}^{(2;3;4)} xdx+ydy+zdz=15{,}5.$

§9. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ПО ЕЕ ПОЛНОМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛУ

Содержание

9.1. Постановка задачи в двумерном случае 71
9.2. Описание решения 71

Это одно из приложений криволинейного интеграла II рода.

9.1. Постановка задачи в двумерном случае

Дано выражение полного дифференциала функции двух переменных:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dU(x,y).$$

Найти функцию $U(x,y)$.

9.2. Описание решения

1. Так как не всякое выражение вида $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$, то необходимо проверить корректность постановки задачи, то есть проверить ***необходимое и достаточное условие полного дифференциала***, которое для функции 2-х переменных имеет вид $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Это условие следует из эквивалентности утверждений (2) и (3) в теореме предыдущего параграфа. Если обозначенное условие выполнено, то задача имеет решение, то есть функцию $U(x,y)$ восстановить можно; если условие не выполнено, то задача не имеет решения, то есть функцию $U(x,y)$ восстановить нельзя.
2. Найти функцию $U(x,y)$ по ее полному дифференциалу dU можно, например, с помощью криволинейного интеграла II рода, вычислив его от dU по линии, соединяющей фиксированную точку (x_0,y_0) и переменную точку $(x;y)$ (*Рис. 18*):

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} dU = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \right) \ominus$$

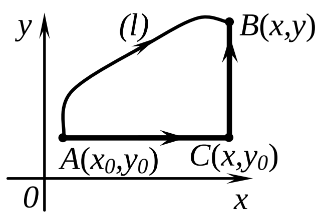


Рис. 18

записываем параметрические уравнения любой линии l:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} dx = \dfrac{dx}{dt} \cdot dt \\ dy = \dfrac{dy}{dt} \cdot dt \end{matrix}$$

и сводим криволинейный интеграл к определённому интегралу

$$\circleddash \int_{t_0}^{t} \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \right)}_{\substack{\text{полная производная} \\ \text{функции } U(x(t),y(t))}} dt = \int_{t_0}^{t} \frac{dU}{dt} dt = \int_{t_0}^{t} dU(x(t), y(t)) = U(x(t), y(t))\Big|_{t_0}^{t} =$$

$$= U\big(x(t), y(t)\big) - U\big(x(t_0), y(t_0)\big) = U(x, y) - U(x_0, y_0) = \int_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} dU$$

Таким образом получено, что криволинейный интеграл II рода от полного дифференциала $dU(x,y)$ равен разности значений функции $U(x,y)$ в конечной и начальной точках линии интегрирования.

Зная теперь этот результат, нужно подставить вместо dU в криволинейный интеграл выражение $Pdx + Qdy$ и провести вычисление интеграла по ломаной (ACB), учитывая его независимость от формы линии интегрирования:

$$U(x, y) - U(x_0, y_0) = \int_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} dU = \int_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \circleddash$$

на (AC): $\begin{cases} y = y_0 = \text{const} \Rightarrow dy = 0 \\ x - \text{переменная} \\ x_A = x_0, \ x_C = x \end{cases}$ на (CB) : $\begin{cases} x = x = \text{const} \Rightarrow dy = 0 \\ y - \text{переменная} \\ y_C = y_0, \ y_B = y \end{cases}$

$$\circleddash \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy = U(x, y) - U(x_0, y_0). \qquad (1)$$

Таким образом, получена формула, с помощью которой восстанавливается функция 2-х переменных $U(x,y)$ по ее полному дифференциалу $dU = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

3. Восстановить функцию по ее полному дифференциалу можно только с точностью до постоянного слагаемого, так как $d(U + \text{const}) = dU$. Поэтому в результате решения задачи получаем множество функций, отличающихся друг от друга на постоянное слагаемое.

Примеры (восстановление функции двух переменных по ее полному дифференциалу)

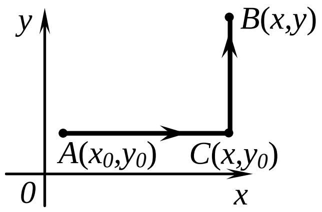
1. Найти $U(x,y)$, если $dU = (x^2 - y^2)dx - 2xydy$.

Решение

Проверяем условие полного дифференциала функции двух переменных:

$$\begin{cases} P = x^2 - y^2 \\ Q = -2xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = -2y \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$ — условие полного дифференциала выполнено,

значит, функцию $U(x,y)$ восстановить можно.



$$U(x,y) - U(x_0,y_0) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} dU = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left(x^2 - y^2\right)dx - 2xydy =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} \left(x^2 - y_0^2\right)dx + \int\limits_{y_0}^{y} -2xydy = \left(\frac{x^3}{3} - y_0^2 x\right)\Bigg|_{x=x_0}^{x=x} - xy^2\Big|_{y=y_0}^{y=y} =$$

$$= \frac{x^3}{3} - y_0^2 x - \frac{x_0^3}{3} - y_0^2 x_0 - xy^2 + xy_0^2 = \underbrace{\left(\frac{x^3}{3} - xy^2\right)}_{U(x,y)} - \underbrace{\left(\frac{x_0^3}{3} - x_0 y_0^2\right)}_{U(x_0,y_0)} \Rightarrow$$

$$U(x,y) = \frac{x^3}{3} - xy^2.$$

Проверка: $dU = U'_x \cdot dx + U'_y \cdot dy = \left(x^2 - y^2\right)dx - 2xydy$ – верно.

Ответ: $U(x,y) = x^3/3 - xy^2 + C$.

2. Найти функцию $U(x,y,z)$, такую что $dU = \dfrac{dx - 3dy}{z} + \dfrac{3y - x + z^3}{z^2}dz$

Решение

Проверяем необходимые и достаточные условия полного дифференциала функции трех переменных: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}$, если дано выражение

$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$.

В решаемой задаче

$$P(x,y,z) = \frac{1}{z},\ Q(x,y,z) = -\frac{3}{z},\ R(x,y,z) = \frac{3y - x + z^3}{z^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y}=0, & \dfrac{\partial Q}{\partial x}=0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z}=-\dfrac{1}{z^2}, & \dfrac{\partial R}{\partial x}=-\dfrac{1}{z^2} \Rightarrow \quad \dfrac{\partial P}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{3}{z^2}, & \dfrac{\partial R}{\partial y}=\dfrac{3}{z^2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial y} \end{cases} \Bigg\} \Rightarrow$$

все условия полного дифференциала выполнены, следовательно, функцию $U(x,y,z)$ восстановить можно (задача поставлена корректно).

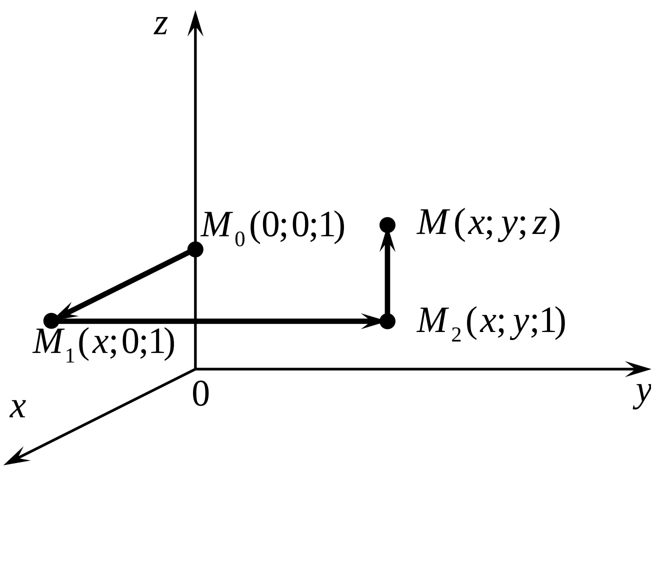
Будем восстанавливать функцию $U(x,y,z)$ с помощью криволинейного интеграла II рода, вычислив его по некоторой линии, соединяющей фиксированную точку (x_0,y_0,z_0) и переменную точку (x,y,z), так как

$$\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} dU(x,y,z) = U(x,y,z) - U(x_0,y_0,z_0)$$

(это равенство выводится так же, как и в двумерном случае).

С другой стороны, криволинейный интеграл II рода от полного дифференциала dU не зависит от формы линии интегрирования, поэтому его проще всего считать по ломаной, состоящей из отрезков, параллельных осям координат. При этом в качестве фиксированной точки (x_0,y_0,z_0) можно взять для просто ты взять точку с конкретными числовыми координатами, отслеживая лишь только, чтобы в этой точке и на всей линии интегрирования выполнилось условие существования криволинейного интеграла (то есть чтобы функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ были непрерывными). С учетом этого замечания в данной задаче можно взять фиксированной точкой, например, точку М0 $(0;0;1)$. Тогда на каждой из звеньев ломаной $M_0M_1M_2M$ будем иметь

на (M_0M_1): $\begin{cases} y=0 \Rightarrow dy=0 \\ z=1 \Rightarrow dz=0 \\ x - \text{переменная} \\ x_{нач.}=0,\ x_{кон.}=x \end{cases}$,



на (M_1M_2): $\begin{cases} x=x=\text{const} \Rightarrow dx=0 \\ z=1 \Rightarrow dz=0 \\ y - \text{переменная} \\ y_{нач.}=0,\ y_{кон.}=y \end{cases}$,

на (M_2M): $\begin{cases} x=x=\text{const} \Rightarrow dx=0 \\ y=y=\text{const} \Rightarrow dy=0 \\ z - \text{переменная} \\ z_{нач.}=1,\ z_{кон.}=z \end{cases}$

$$U(x,y,z)-U(0,0,1)=\int\limits_{M_0(0;0;1)}^{M(x;y;z)} dU=\int\limits_{M_0(0;0;1)}^{M(x;y;z)} \frac{1}{z}dx-\frac{3}{z}dy+\frac{3y-x+z^3}{z^2}dz=$$

$$\underset{\substack{\text{свойство аддитивности}\\ \text{интеграла}}}{=}\int\limits_{(M_0M_1)}+\int\limits_{(M_1M_2)}+\int\limits_{(M_2M)}\underset{\substack{\text{сводим криволинейный интеграл}\\ \text{к определенным интегралам}}}{=}$$

$$=\int\limits_{x=0}^{x}\left(\frac{1}{1}\cdot dx-\frac{3}{1}\cdot 0+\frac{3\cdot 0-x+1^3}{1^2}\cdot 0\right)+\int\limits_{y=0}^{y}\left(\frac{1}{1}\cdot 0-\frac{3}{1}\cdot dy+\frac{3y-x+1^3}{1^2}\cdot 0\right)+$$

$$+\int\limits_{z=1}^{z}\left(\frac{1}{z}\cdot 0-\frac{3}{z}\cdot 0+\underbrace{\frac{3y-x+z^3}{z^2}}_{x,\,y-\text{постоянные}}dz\right)=\int\limits_0^x dx+\int\limits_0^y -3dy+\int\limits_1^z\left(\frac{3y-x}{z^2}+z\right)dz=$$

$$=x\Big|_0^x-3y\Big|_0^y+\left(-\frac{3y-x}{z}+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{z=1}^{z}=x-3y-\frac{3y-x}{z}+\frac{z^2}{2}-\left(-\frac{3y-x}{1}+\frac{1}{2}\right)\underset{\text{упрощаем}}{=}$$

$$=x-3y+\frac{x-3y}{z}+\frac{z^2}{2}+3y-x-\frac{1}{2}=\underbrace{\frac{x-3y}{z}+\frac{z^2}{2}}_{U(x,y,z)}-\underbrace{\frac{1}{2}}_{U(0,0,1)}$$

$$\Rightarrow U(x,y,z)=\frac{x-3y}{z}+\frac{z^2}{2}.$$

Проверка:

$$U'_x=\left(\frac{x-3y}{z}+\frac{z^2}{2}\right)'_x=\frac{1}{z}=P(x,y,z)-\text{верно},$$

$$U'_y=\left(\frac{x-3y}{z}+\frac{z^2}{2}\right)'_y=-\frac{3}{z}=Q(x,y,z)-\text{верно},$$

$$U'_z=\left(\frac{x-3y}{z}+\frac{z^2}{2}\right)'_z=-\frac{x-3y}{z^2}+z=\frac{3y-x+z^3}{z^2}=R(x,y,z)-\text{верно},$$

$$dU=U'_x\cdot dx+U'_y\cdot dy+U'_z\cdot dz=\frac{1}{z}dx-\frac{3}{z}dy+\frac{3y-x+z^3}{z^2}dz-\text{верно}.$$

Ответ: $U(x,y,z)=\dfrac{x-3y}{z}+\dfrac{z^2}{2}+C$, где C - это произвольная постоянная.

§10. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ I РОДА: ОПРЕДЕЛЕНИЕ, ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА, ВЫЧИСЛЕНИЕ, НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Содержание

10.1. Определение и основные свойства поверхностного интеграла I рода77
10.2. Вычисление поверхностного интеграла I рода 78
10.3. Некоторые приложения поверхностного интеграла I рода 80

10.1. Определение и основные свойства поверхностного интеграла I рода

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА I РОДА

Рассмотрим функцию $f\left(x,y,z\right)$, заданную в каждой точке некоторой поверхности (σ) в системе координат $XOYZ$. ***Поверхностным интегралом I рода от функции f(x,y,z) по поверхности (σ)*** называется конечный предел интегральной суммы при стремлении к нулю ранга разбиения, порождающего эту сумму:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f\left(x,y,z\right)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i,y_i,z_i\right)\cdot\Delta\sigma_i \qquad (1)$$

где n —это количество элементарных частей, на которые разбита поверхность (σ),

$\Delta\sigma_i$ — площадь i-ой части разбиения, $i=\overline{1,n}$,

$(x_i;y_i;z_i)$ — произвольная точка на i-той элементарной части (*Рис.19*),

$\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,n}}\left\{d_i\right\}$ — ранг разбиения,

d_i — диаметр i-ой части разбиения.

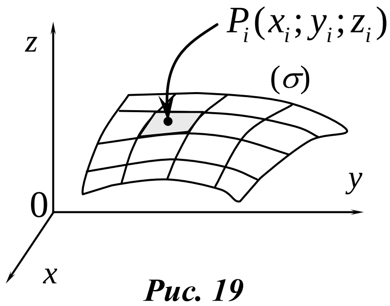


Рис. 19

При этом предполагается, что предел интегральной суммы существует и не зависит ни от способа разбиения поверхности (σ) на элементарные части, ни от выбора точек P_i на каждой из элементарных частей.

Основные свойства поверхностного интеграла I рода

СВОЙСТВО 1 (линейность поверхностного интеграла I рода по поверхности интегрирования)

$$\iint\limits_{(\sigma)}\left(c_1\cdot f_1(x,y,z)+c_2\cdot f_2(x,y,z)\right)d\sigma = c_1\cdot\iint\limits_{(\sigma)} f_1(x,y,z)d\sigma + c_2\cdot\iint\limits_{(\sigma)} f_2(x,y,z)d\sigma$$

где c_1, c_2 — постоянные по x, y, z.

СВОЙСТВО 2 (аддитивность поверхностного интеграла I рода по поверхности интегрирования)

Если $(\sigma)=(\sigma_1)\cup(\sigma_2)$, то $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{(\sigma_1)} f(x,y,z)d\sigma + \iint\limits_{(\sigma_2)} f(x,y,z)d\sigma$

СВОЙСТВО 3 (о значении поверхностного интеграла I рода от функции, тождественно равной единице)

Если подынтегральная функция $f(x,y,z) \equiv 1$ во всех точках поверхности (σ), то поверхностный интеграл от функции $f(x,y,z)$ по поверхности (σ) равен площади (мере) поверхности интегрирования:

$$\iint\limits_{(\sigma)} d\sigma = S_\sigma$$

СВОЙСТВО 4 (достаточные условия существования поверхностного интеграла I рода)

Если функция $f(x,y,z)$ является непрерывной в каждой точке ограниченной поверхности (σ), то поверхностный интеграл $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)d\sigma$ существует.

Механический смысл поверхностного интеграла I рода

$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)d\sigma = m$ — это масса неоднородной поверхности (σ),

если $f(x,y,z)\geq 0$ — это поверхностная плотность распределения массы по поверхности (σ).

10.2. Вычисление поверхностного интеграла I рода

Вычисление поверхностного интеграла I рода сводится к вычислению двойного интеграла по проекции поверхности (σ) на одну из координатных плоскостей.
Например, если поверхность (σ) имеет уравнение $z = z(x,y)$ и проектируется однозначно в область $D \subset XOY$, то ***формула сведения поверхностного интеграла к двойному интегралу*** имеет такой вид:

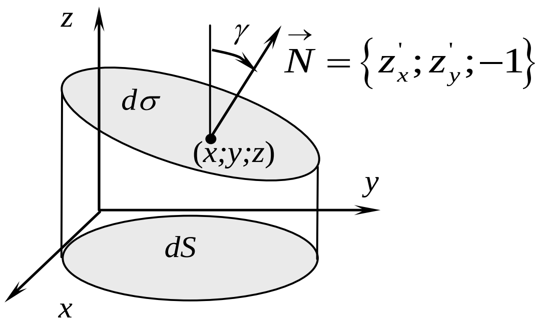
$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)d\sigma = \left\{ \begin{array}{l} (\sigma): z = z(x,y) \\ d\sigma = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2 \cdot dS} \end{array} \right\} = \iint\limits_{D} f(x,y,z(x,y)) \cdot \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} \cdot dS, \qquad (2)$$

где $dS = dx \cdot dy$ в декартовых координатах.

Пояснения к формуле

Если уравнение поверхности (σ) имеет вид: $z = z(x, y)$, то

$\vec{N} = \{z'_x; z'_y; -1\}$ – это вектор нормали к поверхности в любой ее точке (x,y,z);



в окрестности этой точки бесконечно малую часть поверхности (σ) можно заменить бесконечно малой частью ее касательной плоскости, поэтому рассмотрим $d\sigma$ как площадь бесконечно малой части касательной плоскости, проведенной к поверхности (σ) в ее точке (x,y,z);
dS - это проекция $d\sigma$ на плоскость XOY; тогда по свойству проекций верно, что

$$dS = d\sigma \cdot |\cos\gamma| \Leftrightarrow d\sigma = \frac{dS}{|\cos\gamma|};$$

Здесь γ - это угол между вектором $\vec{N}$ и осью OZ, его косинус вычисляется как один из направляющих косинусов вектора $\vec{N}$:

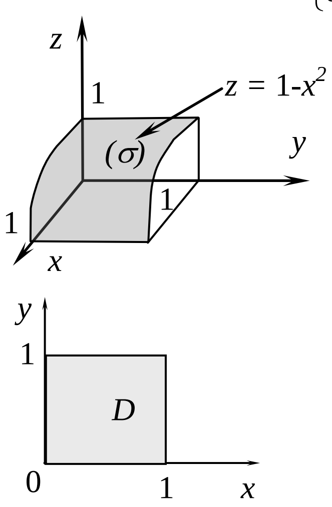
$$\cos\gamma = \frac{N_z}{|\vec{N}|} = \frac{-1}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + (-1)^2}} \Rightarrow |\cos\gamma| = \frac{1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \Rightarrow$$

$$d\sigma = \frac{dS}{|\cos\gamma|} = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dS.$$

Пример 1 (вычисление поверхностного интеграла I рода)

Вычислить $\iint\limits_{(\sigma)} x\,d\sigma$, где ($\sigma$) - часть поверхности цилиндра

$z = 1 - x^2$, для которой $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$.



Решение

Строим поверхность (σ) и ее проекцию D на плоскость XOY, сводим данный поверхностный интеграл к двойному интегралу по проекции D и вычисляем получившийся двойной интеграл:

$$\iint\limits_{(\sigma)} x\,d\sigma = \left\{ \begin{array}{l} (\sigma): z = 1 - x^2 \Rightarrow z'_x = -2x,\ z'_y = 0 \\ \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + 4x^2} \\ d\sigma = \sqrt{1 + 4x^2}\, dS \end{array} \right\} =$$

$$=\iint_D x\sqrt{1+4x^2}\,dS=\int_0^1 dx\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dy=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx\cdot y\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1\left(1+4x^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1+4x^2\right)=\frac{1}{8}\frac{\left(1+4x^2\right)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1=\frac{1}{12}\left(5^{3/2}-1^{3/2}\right)=\boxed{\frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right)}.$$

10.3. Некоторые приложения поверхностного интеграла I рода

1. Вычисление площади поверхности (σ):

$$S_\sigma=\iint_{(\sigma)}d\sigma \tag{3}$$

2. Вычисление массы поверхности (σ), если известна поверхностная плотность $\gamma(x,y,z)$ распределения масс:

$$m=\iint_{(\sigma)}\gamma(x,y,z)d\sigma \tag{4}$$

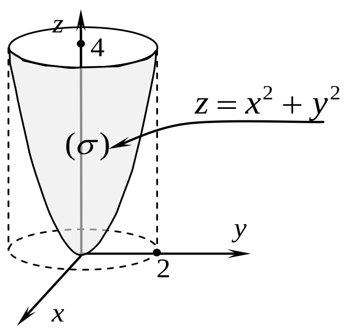
Другие механические приложения (вычисление статических моментов, моментов инерции и координат центра масс поверхности) осуществляются аналогично приложениям двойных и тройных интегралов.
Студентам рекомендуется составить формулы этих приложений.

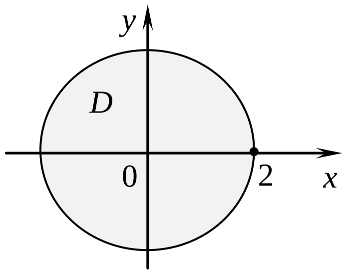
Примеры 2 (приложения поверхностного интеграла I рода)

1. Найти площадь поверхности части параболоида $z = x^2 + y^2$ при $z \le 4$.

Решение

Строим поверхность (σ) – указанную часть параболоида и проецируем ее на область D плоскости XOY:





D в полярных координатах:

$$\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 2 \end{cases}$$

Решение

$$S_{(\sigma)} = \iint\limits_{(\sigma)} d\sigma = \left\{ \begin{aligned} (\sigma): z &= x^2 + y^2 \\ z'_x &= 2x \\ z'_y &= 2y \end{aligned} \right\} = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dS =$$

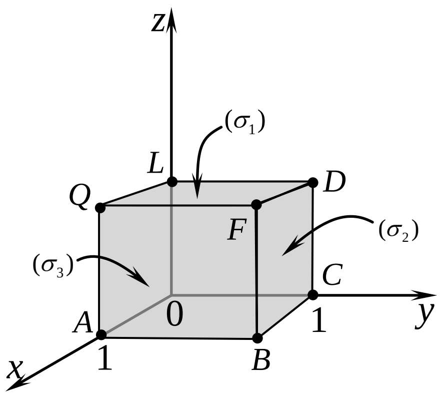
$$\iint\limits_{D} \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dS = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho d\rho \sqrt{1 + 4\rho^2} = \frac{2\pi}{8} \frac{\left(1+4\rho^2\right)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{2\pi}{12}\left(17^{3/2} - 1^{3/2}\right) = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 1\right) = 36{,}2.$$

Ответ: $S_{(\sigma)} = \dfrac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1) \approx 36{,}2$ (ед. площади)

2. Вычислить массу поверхности куба, на котором $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$, если поверхностная плотность в точке $M(x; y; z)$ равна xyz.

Решение



Масса каждой из трех граней куба, лежащих в координатных плоскостях, равна нулю, так как на каждой из этих граней равна нулю одна из координат x, y или z, поэтому равна нулю плотность распределения массы:

$\gamma(M) = xyz \;\Rightarrow\; \gamma \equiv 0$,

если $x = 0$ или $y = 0$ или $z = 0$.

Остается вычислить массы трех граней куба, не лежащих в координатных плоскостях:

$$m_{(DFQL)} = \iint\limits_{(\sigma_1)} xyz d\sigma = \left\{ \begin{array}{l} (\sigma_1): z = 1 \Rightarrow\; z'_x = 0,\; z'_y = 0 \\ d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dS_{xy} = dS_{xy} = dx \cdot dy \\ \text{проекция } (\sigma_1) \text{ на } XOY - \text{это квадрат } (AOCB) \end{array} \right\} =$$

$$= \iint\limits_{(AOCB)} xy \cdot 1 \cdot dS_{xy} = \int\limits_0^1 x dx \int\limits_0^1 y dy = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4};$$

$$m_{(BFDC)}=\iint\limits_{(\sigma_2)} xyzd\sigma=\left\{\begin{array}{l}(\sigma_2): y=1\Rightarrow y'_x=0,\ y'_z=0\\ d\sigma=\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}dS_{xz}=dS_{xz}=dxdz\\ \text{проекция}\,(\sigma_2)\,\text{на}\ XOZ-\text{это квадрат}\,(AQLO)\end{array}\right\}=$$

$$=\iint\limits_{(AQLO)} x\cdot 1\cdot z\cdot dS_{xz}=\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^1 zdz=\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1\cdot\frac{z^2}{2}\bigg|_0^1=\frac{1}{4};$$

$$m_{(AQFB)}=\iint\limits_{(\sigma_3)} xyzd\sigma=\left\{\begin{array}{l}(\sigma_3): x=1\Rightarrow x'_y=0,\ x'_z=0\\ d\sigma=\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}dS_{yz}=dy\cdot dz\\ \text{проекция}\,(\sigma_3)\,\text{на}\ YOZ-\text{это квадрат}\,(OLDC)\end{array}\right\}=$$

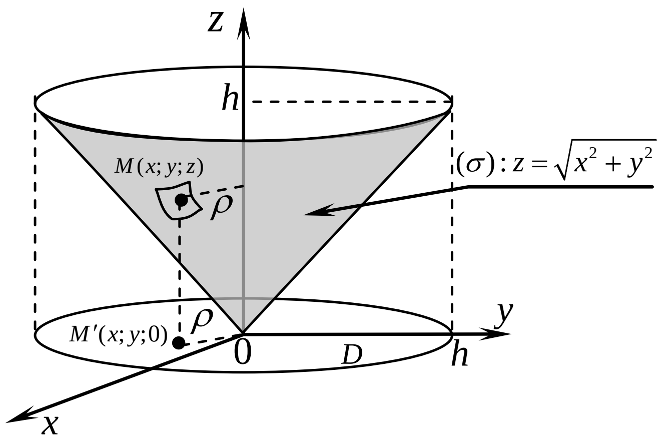
$$=\iint\limits_{(OLDC)} 1\cdot yz\cdot dS_{yz}=\int\limits_0^1 ydy\int\limits_0^1 zdz=\frac{y^2}{2}\bigg|_0^1\cdot\frac{z^2}{2}\bigg|_0^1=\frac{1}{4};$$

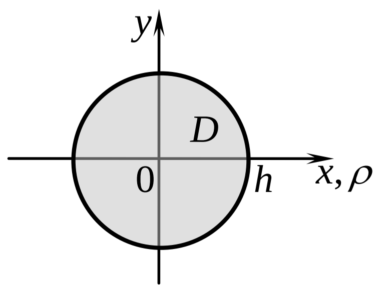
$$m_{куба}=0+0+0+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=0,75.$$

Ответ: 0,75 (единиц массы).

3. Вычислить момент инерции части боковой поверхности конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le h$ относительно оси OZ, если поверхностная плотность материала γ является постоянной.

Решение





Если на боковой поверхности конуса (σ) взять бесконечно малый элемент поверхности $d\sigma$ и точку $M(x,y,z)$ на нем, то его расстояние до оси OZ будет равным $\rho=|OM'|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Тогда момент инерции этого элемента относительно оси OZ будет равен $dI_{oz}=\rho^2\cdot dm=\rho^2\cdot\gamma\cdot d\sigma=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\gamma d\sigma=\left(x^2+y^2\right)\gamma d\sigma$.

Момент инерции относительно OZ всей поверхности (σ) получится как поверхностный интеграл I рода:

$$I_{oz} = \iint\limits_{(\sigma)} dI_{oz} = \iint\limits_{(\sigma)} \left(x^2 + y^2\right)\gamma d\sigma .$$

Вычислим составленный поверхностный интеграл сведением его к двойному интегралу по области $D \subset XOY$, являющейся проекцией поверхности (σ) на координатную плоскость XOY:

$$\iint\limits_{(\sigma)} \left(x^2 + y^2\right)\gamma d\sigma = \left\{ \begin{array}{l} (\sigma): z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ d\sigma = \sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}dS_{xy} = \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{x^2 + y^2} + \dfrac{y^2}{x^2 + y^2}}dS_{xy} = \sqrt{2}dS_{xy} \end{array} \right\} \underset{\gamma = const}{=}$$

$$= \gamma \iint\limits_{D} \left(x^2 + y^2\right)\sqrt{2}dS_{xy} = \left\{ \begin{array}{l} \text{в полярных координатах} \\ D: 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le h, \\ x^2 + y^2 = \rho^2,\ dS_{xy} = \rho d\rho d\varphi \end{array} \right\} = \sqrt{2} \cdot \gamma \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h \rho^2 \cdot \rho d\rho =$$

$$= \sqrt{2}\gamma \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^h = \sqrt{2}\gamma \cdot 2\pi \cdot \frac{h^4}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\gamma h^4 .$$

Ответ: $I_{oz} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi\gamma h^4$ (единиц момента инерции).

§11. Поверхностные интегралы II рода: определение, физическая трактовка, основные свойства, вычисление. Формулы Стокса и Остроградского-Гаусса

Содержание

11.1. Определение и физическая трактовка поверхностного интеграла II рода 84
11.2. Основные свойства поверхностного интеграла II рода: 86
11.3. Вычисление поверхностного интеграла II рода 87

11.1. Определение и физическая трактовка поверхностного интеграла II рода

Определение поверхностного интеграла II рода

В каждой точке поверхности (σ) вводится единичный вектор нормали $\vec{n}=\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$ и рассматривается вектор-функция $\vec{F}$, заданная своими проекциями на оси координат: $\vec{F}(x,y,z)=\{P(x,y,z);Q(x,y,z);R(x,y,z)\}$.

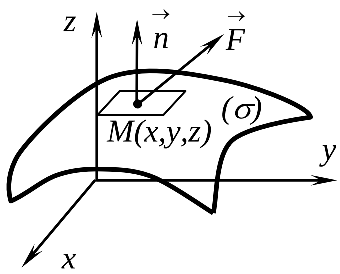


Рис. 20

Разбив поверхность (σ) на элементарные части с площадями $\Delta\sigma_i$, $i=1,2,...,k$ и заменив эти части поверхности касательными плоскостями к ним, вычислим следующие парные произведения:

$$\text{пр}_n\,\vec{F}\cdot\Delta\sigma=\frac{\vec{F}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\cdot\Delta\sigma=\left(P(x,y,z)\cdot\cos\alpha+Q(x,y,z)\cdot\cos\beta+R(x,y,z)\cdot\cos\gamma\right)\cdot\Delta\sigma.$$

Каждое из этих парных произведений имеет смысл потока вектора $\vec{F}$ через часть поверхности $\Delta\sigma$ в направлении указанной нормали (*Рис. 20*).

Вычисляя сумму составленных парных произведений и ее предел при $\lambda\to 0$ ($\lambda=\max\limits_{i=\overline{1,k}}\{d_i\}$, d_i - диаметр i-той части разбиения), получим определение поверхностного интеграла II рода:

$$\boxed{\begin{aligned}&\iint\limits_{(\sigma)}\left(P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma\right)d\sigma=\\&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{k}\left(P(x_i,y_i,z_i)\cos\alpha+Q(x_i,y_i,z_i)\cos\beta+R(x_i,y_i,z_i)\cos\gamma\right)\Delta\sigma_i\end{aligned}}\qquad(1)$$

Как и при определении всех предыдущих интегралов, здесь предполагается, что предел существует, является конечным и не зависит ни от способа разбиения поверхности (σ) на элементарные части, ни от выбора точки $M(x, y, z)$ на каждой элементарной части. Кроме этого предполагается, что поверхность (σ) является двухсторонней и в каждой ее точке существует вектор нормали $\vec{n}$.

Определенный равенством (1) интеграл по поверхности (σ) можно записать более кратко в векторной форме:

$$\iint\limits_{(\sigma)} \left(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right)\cdot d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} (\vec{F}\cdot\vec{n})d\sigma \qquad (1')$$

где $\vec{F}\cdot\vec{n}$ – это скалярное произведение векторов $\vec{F}$ и $\vec{n}$.

Очевидно, что при положительных направляющих косинусах будут выполняться равенства:

$$d\sigma\cos\gamma = dS_{xy} = dxdy,\quad d\sigma\cos\alpha = dS_{yz} = dydz,\quad d\sigma\cos\beta = dS_{xz} = dxdz$$

(см. пояснение к формуле (2) предыдущего параграфа).

Поэтому существует еще одна форма записи поверхностного интеграла II рода:

$$\iint\limits_{(\sigma)} (\vec{F}\cdot\vec{n})d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} P\left(x,y,z\right)dydz + Q\left(x,y,z\right)dxdz + R\left(x,y,z\right)dxdy \qquad (2)$$

При этом подинтегральное выражение в правой части принято записывать без скобок

Понятие ориентированной поверхности

Поверхность (σ) называется ***двусторонней поверхностью***, если изменить направление нормали на противоположное в любой ее точке можно только прохождением через край поверхности (*Рис. 21*).

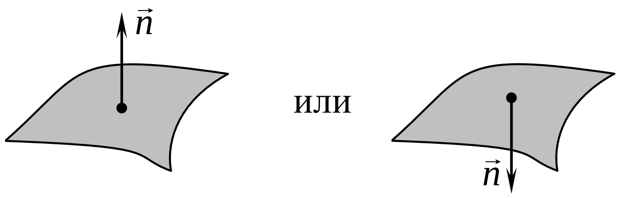


Рис. 21

Поверхность (σ) называется ***односторонней поверхностью***, если в любой ее точке можно изменить направление нормали на противоположное движением по поверхности без перехода через ее край. Пример односторонней поверхности — это лист Мебиуса, который получается, если прямоугольник $A_1A_2B_2B_1$ склеить по ширине так, чтобы совпали точки A_1 и B_2, B_1 и A_2 (*Рис. 22*)

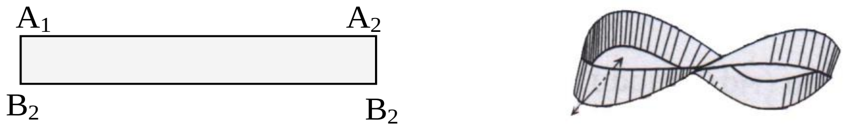


Рис. 22

Ориентированной поверхностью называется двусторонняя поверхность (σ), на которой указана сторона поверхности направлением нормали.

Физическая трактовка поверхностного интеграла II рода

$\iint\limits_{(\sigma)} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma$ — это поток вектора $\vec{F}$ через ориентированную поверхность (σ) в направлении ее нормали $\vec{n}$.

11.2. Основные свойства поверхностного интеграла II рода:

СВОЙСТВО 1 (линейность поверхностного интеграла II рода по подинтегральному выражению)

$$\iint\limits_{(\sigma)} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{(\sigma)} P(x,y,z)dydz + \iint\limits_{(\sigma)} Q(x,y,z)dxdz + \iint\limits_{(\sigma)} R(x,y,z)dxdy$$

СВОЙСТВО 2 (аддитивность поверхностного интеграла II рода по поверхности интегрирования)

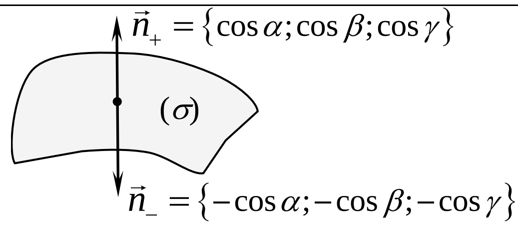
Если $(\sigma) = (\sigma_1) \cup (\sigma_2)$, то $\iint\limits_{(\sigma)} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iint\limits_{(\sigma_1)} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma + \iint\limits_{(\sigma_2)} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma$.

При этом все три поверхности должны быть одинаково ориентированны.

СВОЙСТВО 3 (зависимость поверхностного интеграла II рода от ориентации поверхности)

$$\iint\limits_{(\sigma)^+} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma = -\iint\limits_{(\sigma)^-} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma,$$

то есть при изменении направления нормали к поверхности (σ) поверхностный интеграл II рода изменяет знак на противоположный.



Свойство 4 (достаточные условия существования поверхностого интеграла II рода)

4.

5. Для того, чтобы поверхностный интеграл $\iint\limits_{(\sigma)} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$ существовал, достаточно

6. выполнение двух условий:

1) векторная функция $\vec{F}$ имеет непрерывные проекции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ в каждой точке поверхности (σ);

2) поверхность (σ) является ограниченной, двусторонней и имеет в каждой своей точке (x,y,z) ненулевой вектор нормали $\vec{n}$, или, что то же, имеет в каждой своей точке касательную плоскость.

11.3. Вычисление поверхностного интеграла II рода

Вычисление поверхностного интеграла II рода в форме (2) можно проводить от каждого слагаемого в отдельности сведением к двойному интегралу по проекции поверхности (σ) на соответствующую координатную плоскость:

1. $$\iint\limits_{(\sigma)} P(x,y,z)\cos\alpha d\sigma = \pm\iint\limits_{(\sigma)} P(x,y,z)dydz = \pm\iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz$$

берется знак “+” , если $\cos\alpha \geq 0$, или берется знак “–“, если $\cos\alpha \leq 0$;

функцию $x = x(y,z)$ нужно взять из уравнения, описывающего поверхность (σ).

2. $$\iint\limits_{(\sigma)} Q(x,y,z)\cos\beta d\sigma = \pm\iint\limits_{(\sigma)} Q(x,y,z)dxdz = \pm\iint\limits_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz,$$

берется знак ”+”, если $\cos\beta \geq 0$, или берется знак “–“, если $\cos\beta \leq 0$;
функцию $y = y(x,z)$ нужно взять из уравнения поверхности (σ).

3. $$\iint\limits_{(\sigma)} R(x,y,z)\cos\gamma d\sigma = \pm\iint\limits_{(\sigma)} R(x,y,z)dxdy = \pm\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$$

берется знак “+”, если $\cos\gamma \geq 0$, или берется знак “–“, если $\cos\gamma \leq 0$;
функцию $z = z(x,y)$ нужно взять из уравнения поверхности (σ) .

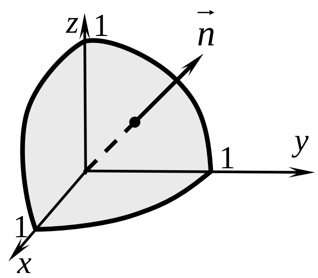
Если же на поверхности (σ) хорошо записывается единичный вектор нормали $\vec{n} = \{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$, то криволинейный интеграл II рода проще вычислить в форме (1), так как в этом случае применяется правило вычисления поверхностного интеграла I рода (см. формулу (2) предыдущего параграфа).

Примеры 1 (вычисления поверхностных интегралов II рода)

1. Вычислить $\iint\limits_{(\sigma)} xdydz + dxdz + xz^2dxdy = I$,

где (σ) — это внешняя часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, заключенная в I октанте.

Решение



На внешней стороне сферы в I октанте углы α,β,γ принадлежат промежутку [0;π/2], поэтому $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ являются неотрицательными.

На каждую из координатных плоскостей указанная часть сферы проектируется в четверть круга радиуса 1. Вычисляем интеграл от каждого слагаемого в отдельности:

$$I_1 = \iint\limits_{(\sigma)} xdydz = +\iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2-z^2}\,dydz = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho = \frac{\pi}{6};$$

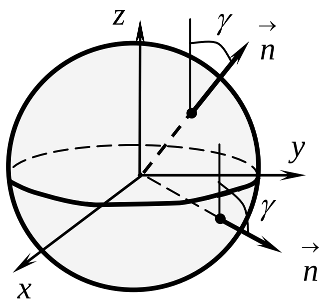
$$I_2 = \iint\limits_{(\sigma)} dxdz = +\iint\limits_{D_{xz}} dxdz = S_{Dxz} = \frac{1}{4}\pi\cdot 1^2 = \frac{\pi}{4};$$

$$I_3 = \iint\limits_{(\sigma)} xz^2dxdy = +\iint\limits_{D_{xy}} x\left(1-x^2-y^2\right)dxdy = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\cos\varphi\left(1-\rho^2\right)\rho d\rho = \frac{2}{15}.$$

$$\mathrm{I} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \frac{2}{15} = \boxed{\frac{5\pi}{12} + \frac{2}{15}}.$$

2. Вычислить $I = \iint\limits_{(\sigma)} z\cos\gamma d\sigma$, где σ — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Решение



$z_1 = +\sqrt{1-x^2-y^2},\ \cos\gamma \ge 0$ — на верхней полусфере,

$z_2 = -\sqrt{1-x^2-y^2},\ \cos\gamma \le 0$ — на нижней полусфере.

$$I = I_{\text{по верхней полусфере}} + I_{\text{по нижней полусфере}} =$$

$$= \iint\limits_{(\sigma)_{верх.}} z\cos\gamma d\sigma + \iint\limits_{(\sigma)_{нижн}} z\cos\gamma d\sigma = +\iint\limits_{\sigma_{верх.}} zdxdy - \iint\limits_{\sigma_{нижн}} zdxdy =$$

$$= +\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy - \iint\limits_{D_{xy}} -\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy =$$

$$= 2\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho = 2\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1\cdot\frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{3}\pi}.$$

11.4. Формула Стокса

Формула Стокса связывает интеграл по поверхности (σ) с криволинейным интегралом по замкнутому контуру (l), ограничивающему эту поверхность, и имеет следующий вид:

$$\iint_{(\sigma)^+}\left(\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right)d\sigma=\oint_{(l)}Pdx+Qdy+Rdz \qquad (3)$$

В двумерном случае формула Стокса совпадает с формулой Грина:
За положительное направление нормали $\vec{n}$ к поверхности (σ) берется такое направление, чтобы с конца $\vec{n}$ обход по контуру l, оставляющий поверхность слева, был виден против часовой стрелки (*Рис. 23*).

$\iint\limits_D(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y})dS=\oint\limits_{(L)}Pdx+Qdy$, так как $\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\{0;0;1\}$,
$(\sigma)=D\subset XOY$, (*Рис. 24*)

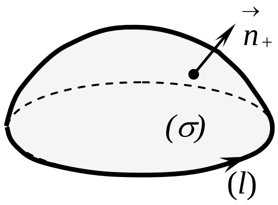


Рис. 23

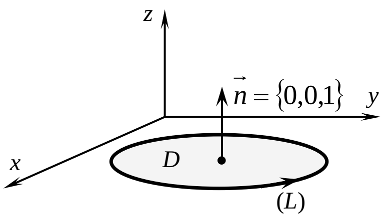


Рис. 24

Формула Остроградского-Гаусса

Формула Остроградского-Гаусса устанавливает связь между интегралом по замкнутой поверхности (σ) и тройным интегралом по объему, ограниченному этой поверхностью (*Рис. 25*):

$$\oiint_{(\sigma)^+}\left(\vec{F}\cdot\vec{n}\right)d\sigma=\oiint_{(\sigma)^+}\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)d\sigma=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV \qquad (4)$$

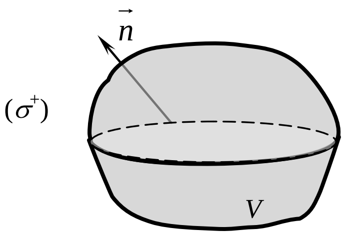


Рис. 25

Нормаль $\vec{n}$ к поверхности (σ) проводится по внешней стороне поверхности.

Пример 2 (вычисление поверхностного интеграла II рода по формуле Остроградского-Гаусса)

Вычислить значение $I=\oiint\limits_{(\sigma)}\left(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma\right)d\sigma$, где (σ) — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Решение

В данном интеграле $P(x,y,z) = x,\ Q(x,y,z) = y,\ R(x,y,z) = z \Rightarrow$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1,\quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 1,\quad \frac{\partial R}{\partial z} = 1.$$

По формуле Остроградского-Гаусса получаем, что

$$I = \iiint\limits_V (1+1+1)\,dV = 3\iiint\limits_V dV = 3V_{сферы} = 3\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = \boxed{4\pi R^3}\cdot$$

ТЕМА III. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

§ 12. Определение Векторного поля. Векторные линии. ПОток векторного поля через поверхность: определения, основные свойства, формулы для вычисления

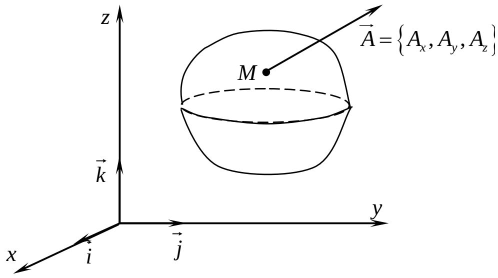
Содержание

12.1. Определение векторного поля 91
12.2. Векторные линии 92
12.3. Поток векторного поля и его свойства 93
12.4. Упражнения для самостоятельной работы 96

12.1. Определение векторного поля

Определение векторного поля

Если в любой точке $M(x,y,z)$ области $D \subset XOYZ$ задан вектор $\vec{A}$, то говорят, что в области D задано ***векторное поле*** $\vec{A} = \vec{A}(M)$



Примеры векторных полей: силовое поле $\vec{F}$, поле скоростей $\vec{V}$ текущей жидкости, электростатическое поле напряженностей $\vec{E}$.

Векторное поле является заданным, если задана векторная функция $\vec{A}$ от координат точки $M(x,y,z)$ с помощью своих проекций на координатные оси:

$$\vec{A}(M) = A_x(M)\vec{i} + A_y(M)\vec{j} + A_z(M)\vec{k} = \{A_x; A_y; A_z\}, \qquad (1)$$

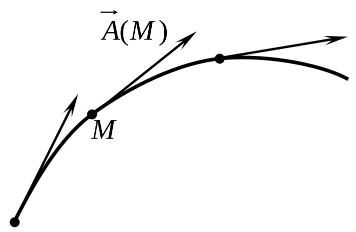
где A_x, A_y, A_z являются функциями от x, y, z, о которых предполагаем, что они непрерывны и имеют непрерывные частные производные по x, y, z в области D (область D может, в частности, совпадать со всем пространством).

Если есть зависимость функций A_x, A_y, A_z еще и от времени t, то векторне поле $\vec{A}$ называют нестационарным.

12.2. Векторные линии

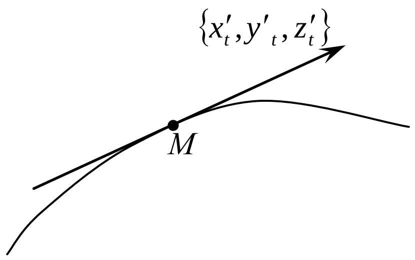
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРНОЙ ЛИНИИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Векторная линия векторного поля $\vec{A}(M)$ — это линия, в каждой точке которой направление касательной совпадает с направлением вектора поля, соответствующего этой точке.



Для поля скоростей $\vec{V}$ векторные линии – это линии тока жидкости;

для электростатического поля – это силовые линии поля.



Уравнения векторных линий можно записать в параметрической форме:

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \Rightarrow \vec{\tau} = \{x'_t; y'_t; z'_t\}$ - это вектор касательной в любой точке M.

Так как $\vec{\tau} \parallel \vec{A}$, то $\frac{x'_t}{A_x} = \frac{y'_t}{A_y} = \frac{z'_t}{A_z}$ (по условию коллинеарности векторов); умножим все части последнего равенства на dt и учтем, что $x'_t dt = dx,\ \ y'_t \cdot dt = dy,\ \ z'_t \cdot dt = dz$, в результате получится ***система дифференциальных уравнений векторных линий векторного поля*** $\vec{A}$:

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z} \qquad (2)$$

Если векторное поле $\vec{A}$ является двумерным, то есть $\vec{A}(M) = A_x(x,y)\vec{i} + A_y(x,y)\vec{j}$, то получится только ***одно дифференциальное уравнение векторных линий плоского векторного поля***, которое имеет вид:

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y}. \qquad (2')$$

Пример 1 (нахождение векторных линий плоского векторного поля)

Дано векторное поле $\vec{A} = -y\vec{i} + x\vec{j} = \{-y; x\}$. Составить уравнения его векторных линий.

Решение

Так как векторное поле является плоским, то дифференциальное уравнение семейства векторных линий имеет вид $\dfrac{dx}{-y}=\dfrac{dy}{x}\Rightarrow xdx=-ydy \Rightarrow \int xdx=-\int ydy+C \Rightarrow \dfrac{x^2}{2}=-\dfrac{y^2}{2}+C \Rightarrow$ $x^2+y^2=2C \Rightarrow$ векторными линиями данного векторного поля являются концентрические окружности с центрами в начале координат.

12.3. Поток векторного поля и его свойства

Пусть в области D имеем двустороннюю поверхность (σ) с указанным на ней вектором единичной нормали $\vec{n}=\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$.

Определение потока векторного поля

Поток векторного поля $\vec{A}$ через ориентированную поверхность (σ) — это интеграл по поверхности (σ) от скалярного произведения вектора $\vec{A}$ на единичный вектор нормали $\vec{n}$ к поверхности (σ).

$$P=\iint\limits_{(\sigma)}\vec{A}\cdot\vec{n}d\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}\left(A_x\cos\alpha+A_y\cos\beta+A_z\cos\gamma\right)d\sigma \qquad (3)$$

Так как $\vec{A}\cdot\vec{n}=np_n\vec{A}=A_n$, то поток – это поверхностный интеграл от нормальной составляющей вектора $\vec{A}$, (*Рис. 25*).

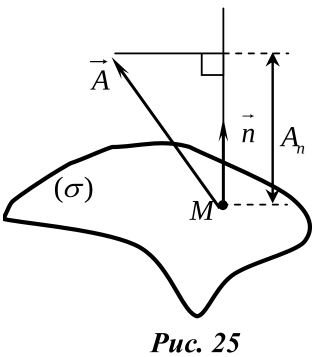


Рис. 25

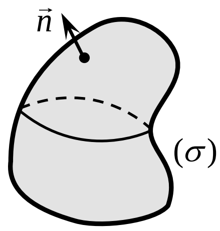


Рис. 26

Свойства потока

1. Поток P — это интегральная характеристика векторного поля, является скалярной величиной.
2. P зависит от направления нормали $\vec{n}$ к поверхности (σ): если изменить направление $\vec{n}$ на противоположное, то P изменит знак.
3. Если поток вычисляется по замкнутой поверхности (σ) в направлении ее внешней нормали: $P=\oiint\limits_{(\sigma)}\left(\vec{A}\cdot\vec{n}\right)d\sigma$, (*Рис. 26*), то его величина имеет следующие истолкования:

- если $P=0$, то говорят, что внутри поверхности (σ) источники и стоки поля $\vec{A}$ уравновешивают друг друга;
- если $P>0$, то говорят, что внутри поверхности (σ) преобладают источники поля $\vec{A}$;
- если $P<0$, то говорят, что внутри поверхности (σ) преобладают стоки поля $\vec{A}$.

4. Можно вывести удобные формулы для вычисления P:

если поверхность (σ) задана уравнением $F(x,y,z)=0$, то вектор ее нормали в любой точке равен $\vec{N}=\{F'_x,F'_y,F'_z\}=\overrightarrow{gradF}$ $\Rightarrow$ единичный вектор нормали равен

$$\vec{n}=\frac{\overrightarrow{gradF}}{\left|\overrightarrow{gradF}\right|}\Rightarrow P=\iint\limits_{(\sigma)}\vec{A}\cdot\vec{n}d\sigma==\pm\iint\limits_{(\sigma)}\frac{\vec{A}\cdot\overrightarrow{gradF}}{\left|\overrightarrow{gradF}\right|}d\sigma=P \qquad (4)$$

«+» брать в случае, когда вектор $\overrightarrow{gradF}$ и вектор $\vec{n}$, указанный в задаче, совпадают по направлению; «-», если эти векторы противоположны.

Для вычисления поверхностного интеграла (4) поверхность (σ) проектируют на одну из координатных плоскостей, например в область $D\subset XOY$. Тогда

$$d\sigma=\frac{dS}{|\cos\gamma|},\ \text{где}\ \cos\gamma=\frac{N_z}{|\vec{N}|}=\frac{\pm F'_z}{\left|\overrightarrow{gradF}\right|}\ \Rightarrow\ P=\iint\limits_{(\sigma)}\left(\vec{A}\cdot\vec{n}\right)d\sigma=\pm\iint\limits_{D_{x\ y}}\underbrace{\frac{\vec{A}\cdot\overrightarrow{gradF}}{|F'_z|}}_{\substack{\text{подставлять}\\ z=z(x,y)\\ \text{из ур.пов−ти}}}dS_{x\ y} \qquad (4')$$

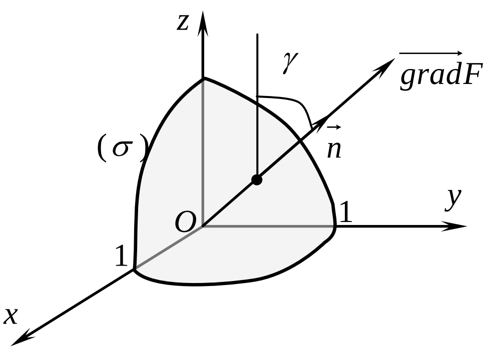
Примеры 2 (вычисление потока векторного поля)

1. Дано векторное поле $\vec{A}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Вычислить поток вектора $\vec{A}$ через часть поверхности сфера $x^2+y^2+z^2=1$, расположенную в I октанте, в направлении нормали, образующей острый угол с осью OZ.

Решение

$\vec{A}=\{x;y;z\}$; (σ): $\underbrace{x^2+y^2+z^2-1}_{F(x,y,z)}=0$.

$\overrightarrow{gradF}=\{2x;2y;2z\}$.



При $z\geq 0$ в I октанте $\overrightarrow{gradF}$ образует острый угол с OZ, поэтому в формуле (4) надо брать знак «+»

$$P=\iint\limits_{(\sigma)}\left(\vec{A}\cdot\vec{n}\right)d\sigma=+\iint\limits_{(\sigma)}\frac{\vec{A}\cdot\overrightarrow{gradF}}{\left|\overrightarrow{gradF}\right|}d\sigma=+\iint\limits_{(\sigma)}\frac{x\cdot 2x+y\cdot 2y+z\cdot 2z}{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(2z)^2}}d\sigma=\iint\frac{2(x^2+y^2+z^2)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}d\sigma=$$

$$=\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,d\sigma=\left\{\begin{array}{l}\text{вычисление интеграла по поверхности }(\sigma)\text{ сводим к вычислению двойного}\\ \text{интеграла по проекции пов-ти }(\sigma)\text{ на координатную плоскость }XOY:\\ z=\sqrt{1-x^2-y^2}\Rightarrow z'_x=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\ z'_y=\dfrac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\\ d\sigma=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dS_{xy}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dS_{xy}\end{array}\right\}=$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2+\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dS_{xy}=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dS_{xy}=$$

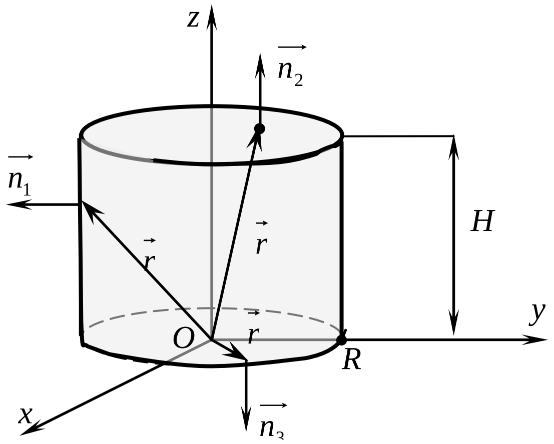
$$=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dS_{xy}=\left\{\begin{array}{l}\text{вычисление двойного интеграла в полярных коор-х:}\\ D_{xy}:\begin{cases}0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0\le\rho\le 1\end{cases}\quad dS_{xy}=\rho\cdot d\rho\cdot d\varphi\\ \sqrt{1-x^2-y^2}=\sqrt{1-(\rho\cos\varphi)^2-(\rho\sin\varphi)^2}=\sqrt{1-\rho^2}\end{array}\right\}=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\rho\cdot d\rho\cdot d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}d\rho=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1\frac{d(1-\rho^2)}{\sqrt{1-\rho^2}}=-\frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot 2\sqrt{1-\rho^2}\ \Big|_0^1=-\frac{\pi}{2}(0-1)=\boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

2. Вычислить поток радиус-вектора $\vec{r}$ точки M через поверхность цилиндра радиуса R и высоты H, стоящего на плоскости XOY так, что ось OZ является его осью симметрии. Направление нормали $\vec{n}$ — внешнее.

Решение

$$P=\iint\limits_{(\sigma^+)}\left(\vec{r}\cdot\vec{n}\right)d\sigma=P_1+P_2+P_3,$$



где P_1 — поток через боковую поверхность;

P_2 — поток через верхнее основание;

P_3 — поток через нижнее основание.

$\vec{r}(M)=\{x,y,z\}$.

$$P_1=\iint\limits_{(\sigma_{бок.})}\underbrace{\left(\vec{r}\cdot\vec{n}_1\right)}_{пр_n\vec{r}=R}d\sigma=\iint\limits_{(\sigma_{бок.})}Rd\sigma=R\cdot S_{бок.}=2\cdot 2\pi RH=2\pi R^2H;$$

$$P_2 = \iint\limits_{(\sigma_{верх.осн.})} \underbrace{(\vec{r}\cdot\vec{n}_2)}_{пр_n\vec{r}=H} d\sigma = \iint\limits_{(\sigma_{верх.осн.})} Hd\sigma = H\cdot S_{верх.осн.} = H\pi R^2;$$

$$P_3 = \iint\limits_{(\sigma_{нижн.осн.})} \underbrace{(\vec{r}\cdot\vec{n}_3)}_{пр_n\vec{r}=0} d\sigma = \iint\limits_{(\sigma_{нижн.осн.})} 0d\sigma = 0.$$

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 2\pi R^2 H + H\pi R^2 = \boxed{3\pi R^2 H}.$$

Так как получилось $P > 0$, то внутри цилиндра находятся источники данного векторного поля.

Таким образом, вычисление потока векторного поля через заданную поверхность можно проводить как по формуле (4), так и непосредственно по его определению.

12.4. Упражнения для самостоятельной работы

1. Найдите векторные линии заданных векторных полей:

   а) $\vec{A} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$; б) $\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j}$; в) $\vec{A} = y\vec{i} + x\vec{j}$.

2. Вычислить поток радиуса-вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через боковую поверхность круглого конуса, основание которого находится на плоскости *XOY*, а ось совпадает с осью *OZ*. Высота конуса равна 1, радиус основания равен 2. Направление нормали внешнее

3. Вычислите поток вектора $\vec{A} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ через часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, заключенной в первом октанте. Направление нормали возьмите «от начала координат».

Ответы к упражнениям для самостоятельной работы

1. а) прямые $\dfrac{x - x_0}{3} = \dfrac{y - y_0}{2} = \dfrac{z - z_0}{-1}$; (x_0, y_0, z_0) - фиксированная точка;

   б) прямые $y = Cx$, C – произвольная постоянная;

   в) $x^2 - y^2 = 2C$, C – произвольная постоянная.

2. 4π. 3. $\dfrac{3\pi}{16}$.

§13. Дивергенция и ротор векторного поля: определения, основные свойства, формулы для вычисления. Формула Остроградского-Гаусса в векторной форме

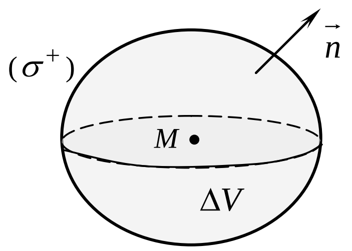
Содержание

13.1. Дивергенция и её основные свойства 97
13.2. Ротор и его основные свойства 100
13.3. Упражнения для самостоятельной работы 102

13.1. Дивергенция и её основные свойства

Определение дивергенции векторного поля

Дивиргенция (или расходимость) векторного поля $\vec{A}(M)$ ***в точке*** M — это предел отношения потока вектора $\vec{A}$ через замкнутую поверхность (σ), окружающую точку M, в направлении ее внешней нормали к объему, ограниченному этой поверхностью, при условии, что вся поверхность (σ) стягивается в точку M:



$$div\vec{A}(M) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oiint\limits_{(\sigma)} \vec{A} \cdot \vec{n} d\sigma}{\Delta V} \qquad (1)$$

$\Rightarrow div\vec{A} = P'_V$ — дивергенция является производной потока через замкнутую ориентированную поверхность по объёму, ограниченному этой поверхностью.

Основные свойства дивергенции

1. $div\vec{A}$ — это дифференциальная характеристика поля, является скалярной величиной.
2. В каждой точке M поля $\vec{A}$ показывает наличие источников или стоков поля:
   - если $div\vec{A}(M) > 0$, то в точке M есть источник поля $\vec{A}$, при этом значение $div\vec{A}(M)$ численно равно мощности источника;

- если $div\vec{A}(M) < 0$, то в точке M есть сток поля $\vec{A}$, при этом значение $\left|div\vec{A}(M)\right|$ численно равно мощности стока;
- если $div\vec{A}(M) = 0$, то в точке M нет ни источника, ни стока поля $\vec{A}$.

3. $div\vec{A}(M)$ вычисляется по формуле:

$$div\vec{A}\Big|_M = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Bigg|_M \tag{2}$$

▷Воспользуемся формулой Остроградского—Гаусса, связывающей интеграл по замкнутой поверхности с интегралом по объёму, ограниченному этой поверхностью:

$$\oiint\limits_{(\sigma)}\left(\vec{A}\cdot\vec{n}\right)d\sigma = \oiint\limits_{(\sigma^+)}\left(A_x\cos\alpha + A_y\cos\beta + A_z\cos\gamma\right)d\sigma = \iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)dV$$

Применяем теорему о среднем к тройному интегралу:

$$\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\cdot dV = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Bigg|_{M_1}\cdot\Delta V$$

где M_1 — это некоторая фиксированная точка в объёме, ограниченном замкнутой поверхностью (σ),

ΔV —величина этого объёма.

Теперь используем определение (1) дивергенции:

$$div\vec{A}(M) = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oiint\limits_{(\sigma^+)}\left(\vec{A}\cdot\vec{n}\right)d\sigma}{\Delta V} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Big|_{M_1}\cdot\Delta V}{\Delta V} = \lim_{\Delta V\to 0}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Bigg|_{M_1} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Bigg|_M,$$

так как при $\Delta V \to 0$ точка M_1стремится к точке M. ◁

4. Если использовать понятие дивергенции, то теорема Остроградского-Гаусса в векторной форме:

$$\oiint\limits_{(\sigma^+)}\left(\vec{A}\cdot\vec{n}\right)d\sigma = \iiint\limits_{(V)} div\vec{A}dV, \tag{3}$$

то есть поток вектора $\vec{A}$ изнутри замкнутой поверхности (σ) равен тройному интегралу от дивергенции вектора $\vec{A}$ по объему, ограниченному этой поверхностью.

Так как $div\vec{A}$ можно рассматривать как плотность распределения источников и стоков векторного поля $\vec{A}$, то тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} div\vec{A}dV$ равен суммарной мощности источников и стоков по объему V.

Учитывая это, ***смысл теоремы Остроградского-Гаусса*** в форме (3) можно сформулировать следующим образом:
поток векторного поля $\vec{A}$ изнутри замкнутой поверхности (σ) равен суммарной мощности источников и стоков этого поля, заключенных в объеме V, ограниченном этой поверхностью (σ).
Следовательно, если поток равен 0, то внутри поверхности (σ) нет источников и стоков поля $\vec{A}$ или они уравновешивают друг друга.

5. Линейность дивергенции:

$$div\left(\alpha_1 \cdot \vec{A}_1(M) + \alpha_2 \cdot \vec{A}_2(M)\right) = \alpha_1 \cdot div\vec{A}_1(M) + \alpha_2 \cdot div\vec{A}_2(M).$$

Это следует из линейности операций сложения векторов и дифференцирования.

6. Дивергенция прозведения скалярного поля $U(M)$ на векторное поле $\vec{A}(M)$ вычисляется по формуле:

$$div(U\vec{A}) = Udiv\vec{A} + \vec{A} \cdot \overrightarrow{gradU}.$$

$\triangleright$ $\quad U\vec{A} = \{UA_x; UA_y; UA_z\} \Rightarrow div(U\vec{A}) = \dfrac{\partial(UA_x)}{\partial x} + \dfrac{\partial(UA_y)}{\partial y} + \dfrac{\partial(UA_z)}{\partial z} =$

$$= \frac{\partial U}{\partial x}A_x + \underline{U\frac{\partial A_x}{\partial x}} + \frac{\partial U}{\partial y}A_y + \underline{U\frac{\partial A_y}{\partial y}} + \frac{\partial U}{\partial z}A_z + \underline{U\frac{\partial A_z}{\partial z}} =$$

$$= U\left(\underbrace{\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}_{div\vec{A}}\right) + \left(\underbrace{A_x\frac{\partial U}{\partial x} + A_y\frac{\partial U}{\partial y} + A_z\frac{\partial U}{\partial z}}_{\vec{A}\cdot\overrightarrow{gradU} \text{ - скал. произведение}}\right) = Udiv\vec{A} + \vec{A} \cdot \overrightarrow{gradU}. \quad \triangleleft$$

Примеры 1 (вычисление дивергенции векторного поля)

1. Дано $\vec{r}(M) = \{x, y, z\}$ — поле радиус-вектора точки M. Вычислить $div\vec{r}$.

Решение

$$div\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = \boxed{3},$$

то есть каждая точка M этого поля является источником постоянной мощности, равной 3.

2. Вычислить $div\vec{A}(M_0)$ и объяснить смысл ее значения, если $\vec{A}(M) = x^3\vec{i} - y^2\vec{j} + \ln z \cdot \vec{k}$, $M_0(2;1;4)$

Решение

$$div\vec{A} = \left(x^3\right)'_x + \left(-y^2\right)'_y + \left(\ln z\right)'_z = 3x^2 - 2y + \frac{1}{z};$$

$$div\vec{A}(M_0)=\left(3x^2-2y+\frac{1}{z}\right)_{(2,1,4)}=12-2+\frac{1}{4}=\boxed{10{,}25}.$$

Значение $div\vec{A}(M_0)$ указывает на то, что в заданной точке M_0 есть источник векторного поля $\vec{A}$ и мощность этого источника равна 10,25.

По рассмотренному примеру можно заметить, что любое векторное поле $\vec{A}$ сопровождается скалярным полем $div\vec{A}$ его дивергенций.

13.2. Ротор и его основные свойства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РОТОРА ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Ротором или вихрем векторного поля $\vec{A}=\{A_x;A_y;A_z\}$ называется вектор с проекциями

$$\left\{\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z};\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x};\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right\}=rot\vec{A} \tag{4}$$

Основные свойства ротора

1. $rot\vec{A}$ — это векторная величина, которая является дифференциальной (т.е. точечной) характеристикой векторного поля $\vec{A}$.
2. $rot\left(\alpha_1\vec{A}_1+\alpha_2\vec{A}_2\right)=\alpha_1 rot\vec{A}_1+\alpha_2 rot\vec{A}_2$ — свойство линейности.
3. Ротор произведения скалярной и векторной функции вычисляется по формуле: $rot\left(U\vec{A}\right)=U\cdot rot\vec{A}+\left(\overrightarrow{gradU}\times\vec{A}\right)$.

$$\triangleright \quad rot\left(U\vec{A}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ UA_x&UA_y&UA_z\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ UA_y&UA_z\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial z}\\ UA_x&UA_z\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}\\ UA_x&UA_y\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(UA_z)-\frac{\partial}{\partial z}(UA_y)\right)-\vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}(UA_z)-\frac{\partial}{\partial z}(UA_x)\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(UA_y)-\frac{\partial}{\partial y}(UA_x)\right)=$$

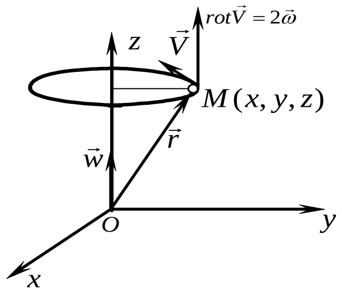
$$=\vec{i}\left(\frac{\partial U}{\partial y}A_z+\frac{\partial A_z}{\partial y}U-\frac{\partial U}{\partial z}A_y-\frac{\partial A_y}{\partial z}U\right)-\vec{j}\left(\frac{\partial U}{\partial x}A_z+\frac{\partial A_z}{\partial x}U-\frac{\partial U}{\partial z}A_y-\frac{\partial A_y}{\partial z}U\right)+$$

$$+\vec{k}\left(\frac{\partial U}{\partial x}A_y+\frac{\partial A_y}{\partial x}U-\frac{\partial U}{\partial y}A_x-\frac{\partial A_x}{\partial y}U\right)=\vec{i}\left(\frac{\partial U}{\partial y}A_z-\frac{\partial U}{\partial z}A_y\right)-\vec{j}\left(\frac{\partial U}{\partial x}A_z-\frac{\partial U}{\partial z}A_y\right)+$$

$$+\vec{k}\left(\frac{\partial U}{\partial x}A_y-\frac{\partial U}{\partial y}A_x\right)+\vec{i}U\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)-\vec{j}U\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)+\vec{k}U\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)=$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}+U\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\overrightarrow{gradU}\times\vec{A}+Urot\vec{A}\quad\lhd$$

4. Физический смысл ротора



Некоторое физическое истолкование понятия ротора можно получить, если рассматривать векторное поле линейных скоростей $\vec{V}$ твердого тела (материальной точки *M*), вращающегося вокруг оси $0z$ с постоянной угловой скоростью $\vec{w}$.

Из физики известно, что $\vec{V}=\vec{w}\times\vec{r}$, где $\vec{w}=\{0;0;w\}$ - это угловая скорость вращения, $\vec{r}=\{x;y;z\}$ - это радиус вектор точки *M*.

Поэтому $\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & w\\ x & y & z\end{vmatrix}=-wy\vec{i}+wx\vec{j}+0\vec{k}\Rightarrow\vec{V}=\{-wy;wx;0\}$,

то есть поле линейных скоростей тела, вращающегося вокруг неподвижной оси есть плоское векторное поле.
Вычислим его ротор равен:

$$rot\vec{V}=\vec{\nabla}\times\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -wy & wx & 0\end{vmatrix}=\left(0-\frac{\partial(wx)}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(0-\frac{\partial(-wy)}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial(wx)}{\partial x}-\frac{\partial(-wy)}{\partial y}\right)\vec{k}=2w\vec{k}=2\vec{w},$$

то есть $rot\vec{V}=2\vec{w}$;

Следовательно, ротор этого поля $\vec{V}$ направлен параллельно оси вращения, его модуль равен удвоенной угловой скорости вращения. Таким образом, $rot\vec{V}$ характеризует вращательную способность поля $\vec{V}$, наличие у этого поля “закрученных” векторных линий или “вихрей”.

В технической литературе ротор векторного поля часто называют вихрем этого поля.

Примеры 2 (вычисление ротора векторного поля)

1. Вычислить ротор радиус-вектора $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ точки $M(x;y;z)$.

Решение

Составляем формулу (4) для $rot\vec{r}$ и делаем вычисления: $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z \Rightarrow$

$$rot\vec{r} = \left\{ \frac{\partial r_z}{\partial y} - \frac{\partial r_y}{\partial z};\ \frac{\partial r_x}{\partial z} - \frac{\partial r_z}{\partial x};\ \frac{\partial r_y}{\partial x} - \frac{\partial r_x}{\partial y} \right\} = \{0;0;0\} = \vec{0} \Rightarrow$$

векторное поле $\vec{r} = \{x; y; z\}$ не обладает вращательной способностью.

2. Вычислить $rot\vec{A}(M_0)$, если $\vec{A} = y^2z\vec{i} + xz\vec{j} + y^2x\vec{k},\ M_0(3;\ 2;\ 1)$.

Решение

Записываем проекции данного векторного поля: $A_x = y^2z$, $A_y = xz$, $A_z = y^2x$

и по формуле (4) получаем, что

$$rot\vec{A}(M) = \{2xy - x;\ y^2 - y^2;\ \ z - 2yz\} = \{2xy - x;\ \ 0;\ \ z - 2yz\};$$
$$rot\vec{A}(M_0) = 9\vec{i} - 3\vec{k}.$$

Из рассмотренного примера следует, что любое векторное поле $\vec{A}$ сопровождается другим векторным полем $rot\vec{A}$ его ротора.

13.3. Упражнения для самостоятельной работы

1. Вычислите дивергенцию (расходимость) и ротор (вихрь) следующих векторных полей:
   а) $\vec{A} = (y^2 + z^2)\vec{i} + (z^2 + x^2)\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}$;

   б) $\vec{A} = \{x^2yz;\ xy^2z;\ xyz^2\}$;

   в) $\vec{A} = \overrightarrow{grad}(x^2 + y^2 + z^2)$.
2. Векторное поле образовано силой, имеющей постоянную величину F и направление положительной оси абсцисс. Вычислите дивергенцию и ротор этого поля.
3. Плоское векторное поле образовано силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния от точки ее приложения до начала координат и направленной к началу координат (например, плоское электрическое поле, образованное точечным зарядом). Найдите дивергенцию и ротор этого поля.
4. Найдите дивергенцию и ротор пространственного поля, если силы поля подчинены тем же условиям, что и в задаче 3.
5. Векторное поле образовано силой, обратно пропорционально расстоянию от точки ее приложения до оси *OZ*, перпендикулярной к этой оси и направленной к ней. Вычислите дивергенцию и ротор этого поля.

Ответы к упражнениям для самостоятельной работы

1. а) $div\vec{A} = 0,\quad rot\vec{A} = 2((y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k})$;

   б) $div\vec{A} = 6xyz,\ rot\vec{A} = x(z^2 - y^2)\vec{i} + y(x^2 - z^2)\vec{j} + z(y^2 - x^2)\vec{k}$;

в) $div\vec{A} = 6,\ rot\vec{A} = \vec{0}$.

2. $div\vec{F} = 0,\ rot\vec{F} = \vec{0}$.

3. $div\vec{A} = \frac{k}{r^3}$, k - коэффициент пропорциональности, r - расстояние от точки приложения силы до начала координат;

$rot\vec{A} = \vec{0}$.

4. $div\vec{A} = 0,\ rot\vec{A} = \vec{0}$.

5. $div\vec{A} = 0,\ rot\vec{A} = \vec{0}$, в точках оси OZ поле не определенно.

§14. Векторный дифференциальный оператор Гамильтона. Дифференциальные векторные операции первого и второго порядков

Содержание

14.1. Определение оператора Гамильтона 103
14.2. Правила действий с оператором Гамильтона 104
14.3. Векторные дифференциальные операции первого и второго порядков105
14.4. Упражнения для самостоятельной работы 108

14.1. Определение оператора Гамильтона

Условимся, что обозначение производных по переменным x, y, z можно формально рассматривать как произведение символов дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ и дифференцируемой функции:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}U,\ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}U,\ \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}U.$$

При этом считается, что символ дифференцирования срабатывает тогда и только тогда, когда дифференцируемая функция стоит справа от него, то есть:

$$U \cdot \frac{\partial}{\partial x} \neq \frac{\partial}{\partial x}U = \frac{\partial U}{\partial x}.$$

При таком представлении символы $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ называются ***операторами дифференцирования***. Умножение каждого из них на функцию соответствует операции вычисления частной производной этой функции.

Определение векторного дифференциального оператора

Вектор, координатами которого являются операторы дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, называется ***векторным дифференциальным оператором Гамильтона или оператором «набла»*** и обозначается

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right\}$$

Здесь $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — это орты координатных осей $XOYZ$.

14.2. Правила действий с оператором Гамильтона

1. Умножение на скалярную функцию:

$$\vec{\nabla}U = (\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k})U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \quad \Rightarrow \vec{\nabla}U = \overrightarrow{grad}U\,. \qquad (1)$$

2. Скалярное произведение с векторной функцией:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y + \frac{\partial}{\partial z}A_z = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = div\vec{A} \;\Rightarrow\; \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = div\vec{A}\,. \qquad (2)$$

3. Векторное произведение с векторной фукцией:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_y & A_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_x & A_y \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = \left\{\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}; \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}; \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right\} = rot\vec{A} \;\Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{A} = rot\vec{A}}. \qquad (3)$$

Если доказанное в предидущем параграфе свойство ротора

$$rot\left(U\vec{A}\right) = Urot\vec{A} + \left(\overrightarrow{grad}U \times \vec{A}\right)$$

записать с помощью оператора «набла»

$$\vec{\nabla}\times\left(U\vec{A}\right)=\vec{\nabla}U\times\vec{A}+U\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right),$$

то можно увидеть проявление его дифференциальной природы, а именно: оператор $\vec{\nabla}$ действует напроизведение аналогично известному правилу дифференцирования произведения.

14.3. Векторные дифференциальные операции первого и второго порядков

Векторными дифференциальными операциями первого порядка называются три рассмотренные действия с оператором «набла»:

$$\overrightarrow{gradU}=\vec{\nabla}U,\quad div\vec{A}=\vec{\nabla}\cdot\vec{A},\ rot\vec{A}=\vec{\nabla}\times\vec{A}.$$

Векторными дифференциальными операциями второго порядка называются следующие пять операций:

1. $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}U=div\,\overrightarrow{gradU}=\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial U}{\partial x}+\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial U}{\partial y}+\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial U}{\partial z}=\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2U}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2U}{\partial z^2}=\vec{\nabla}^2U=\Delta U$,

где $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ — это ***оператор Лапласа*** $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}U=div\overrightarrow{gradU}=\Delta U}$. (4)

2. $\underline{\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}U=rot\ \overrightarrow{grad}\ U=\vec{0}}$,

так как $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}U=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial U}{\partial x} & \dfrac{\partial U}{\partial y} & \dfrac{\partial U}{\partial z}\end{vmatrix}=\vec{i}\underbrace{\left(\dfrac{\partial^2U}{\partial y\partial z}-\dfrac{\partial^2U}{\partial z\partial y}\right)}_{=0}-\vec{j}\underbrace{\left(\dfrac{\partial^2U}{\partial x\partial z}-\dfrac{\partial^2U}{\partial z\partial x}\right)}_{=0}+\vec{k}\underbrace{\left(\dfrac{\partial^2U}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2U}{\partial y\partial x}\right)}_{=0}=\vec{0}.$

3. $\underline{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=div\ \ rot\ \ \vec{A}=0}$,

так как $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(\left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}\right)=$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)=\underline{\frac{\partial^2A_z}{\partial x\partial y}}-\underline{\underline{\frac{\partial^2A_y}{\partial x\partial z}}}+\frac{\partial^2A_x}{\partial y\partial z}-\underline{\frac{\partial^2A_z}{\partial y\partial x}}+\underline{\underline{\frac{\partial^2A_y}{\partial z\partial x}}}-\frac{\partial^2A_x}{\partial z\partial y}=0.$$

По рассмотренным операциям можно заметить, что при действиях с векторным дифференциальным оператором $\vec{\nabla}$ нужно пользоваться правилами векторной алгебры и правилами дифференцирования.

Аналогия в действиях с оператором $\vec{\nabla}$ действиям векторной алгебры показана в следующей таблице:

	Действия с векторами	Действия с векторным оператором $\vec{\nabla}$
1.	Скалярный квадрат вектора $\vec{a}\cdot(\vec{a}U)=(\vec{a}\cdot\vec{a})U=\vec{a}^2U= =(a_x^2+a_y^2+a_z^2)U$	$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}U)=\vec{\nabla}^2U=\Delta U=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)U$
2.	Векторный квадрат вектора $\vec{a}\times(\vec{a}U)=(\vec{a}\times\vec{a})U=\vec{0}$	$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}U=\vec{0}$
3.	Смешанное произведение трех векторов $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\vec{a}\vec{b}=0$	$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$
4.	Двойное векторное произведение $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$	$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$

Используя эту аналогию и правило вычисления двойного векторного произведения запишем результат следующей векторной дифференциальной операции второго порядка.

4. $$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=rot\ rot\ \vec{A}=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}=\vec{\nabla}(div\ \ \vec{A})-\vec{\nabla}^2\vec{A}=\overrightarrow{grad}\ div\ \vec{A}-\Delta\vec{A}, \quad (7)$$

Здесь $\Delta\vec{A}=(\Delta A_x)\vec{i}+(\Delta A_y)\vec{j}+(\Delta A_z)\vec{k}$ — это векторная величина, полученная в результате применения оператора Лапласа к каждой проекции вектора $\vec{A}$.

Таким образом получена еще одна формула:

5. $$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})=\overrightarrow{grad}divA, \text{ причем} \quad (8)$$

$$\underline{\overrightarrow{grad}\ div\ \vec{A}} = \vec{\nabla}(div\vec{A}) = \frac{\partial}{\partial x}(div\vec{A})\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(div\vec{A})\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(div\vec{A})\vec{k} =$$

$$= \left\{ div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right\} = \underline{\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z} \right)\vec{j} +}$$

$$\underline{+ \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right)\vec{k}}$$

Эта операция используется в формуле (7).

Примеры (вычисления дифференциальных векторных операций)

1. Дано скалярное поле $U = x^2 + 2y^2 + 3z^2 x$.

Вычислить 1) $\overrightarrow{grad}U$; 2) $div(\overrightarrow{grad}U)$; 3) $rot(\overrightarrow{grad}U)$;

Решение

1) $\overrightarrow{grad}U = \vec{\nabla}U = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right)U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = \underline{2x\vec{i} + 4y\vec{j} + 6zx\vec{k}}$;

2) $div(\overrightarrow{grad}U) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}U) = (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})U = \vec{\nabla}^2 U = \Delta U = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} =$

$= 2 + 4 + 6x = \underline{6 + 6x}$;

3) $rot(\overrightarrow{grad}U) = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times U) = (\vec{\nabla}\times\vec{\nabla})U = \vec{0}\cdot U = \vec{0}$.

Ответ: 1) $\overrightarrow{grad}U = 2x\cdot\vec{i} + 4y\vec{j} + 6zx\vec{k}$; 2) $div(\overrightarrow{grad}U) = 6 + 6x$; 3) $rot(\overrightarrow{grad}U) = \vec{0}$.

2. Дано векторное поле $\vec{A} = x^2\vec{i} + 2y^2\vec{j} + 3z^2 x\vec{k}$.

Вычислить 1) $div\vec{A},\ rot\vec{A}$; 2) $\overrightarrow{grad}(div\vec{A})$; 3) $div(rot\vec{A})$; 4) $rot(rot\vec{A})$.

Решение

1) $div\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right)\cdot\left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \right) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \underline{2x + 4y + 6zx}$;

$$rot\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \vec{j}\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \left\{ \begin{array}{l} A_x = x^2 \\ A_y = 2y^2 \\ A_z = 3z^2 x \end{array} \right\} =$$

$= \underline{\vec{i}\cdot 0 - \vec{j}\cdot 3z^2 + \vec{k}\cdot 0 = 3z^2\vec{j}}$;

2) $\overrightarrow{grad}(div\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = \vec{\nabla}(2x + 4y + 6zx) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right)(2x + 4y + 6zx) =$

$= \underline{2\vec{i} + 4\vec{j} + 6x\vec{k}}$;

3) $div(rot\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right) \cdot (-3z^2\vec{j}) = \frac{\partial}{\partial x}0 + \frac{\partial}{\partial y}(-3z^2) + \frac{\partial}{\partial z}0 = 0$;

4) $rot(rot\vec{A}) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right) \times (-3z^2\vec{j}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -3z^2 & 0 \end{vmatrix} =$

$= \vec{i} \cdot (-6z) - \vec{j} \cdot 0 + \vec{k} \cdot 0 = -6z\vec{i}$.

Ответ: 1) $div\vec{A} = 2x + 4y + 6zx$; $rot\vec{A} = -3z^2\vec{j}$; 2) $\overrightarrow{grad}(div\vec{A}) = (2+6z)\vec{i} + 4\vec{j} + 6x\vec{k}$;

3) $div(rot\vec{A}) = 0$; 4) $rot(rot\vec{A}) = -6z\vec{i}$.

14.4. Упражнения для самостоятельной работы

1. Для скалярного поля $U = xyz - 2x^2z + 5yz^2$ вычислить

1) $\overrightarrow{grad}U$; 2) $div(\overrightarrow{grad}U)$; 3) $rot(\overrightarrow{grad}U)$.

2. Для векторного поля $A = xyz\vec{i} - 2x^2z\vec{j} + 5yz^2\vec{k}$ вычислить

1) $div\vec{A},\ rot\vec{A}$; 2) $\overrightarrow{grad}(div\vec{A})$; 3) $div(rot\vec{A})$; 4) $rot(rot\vec{A})$.

Ответы к упражнениям для самостоятельной работы

§ 15. Работа и Циркуляция векторного поля: определения, основные свойства циркуляции.

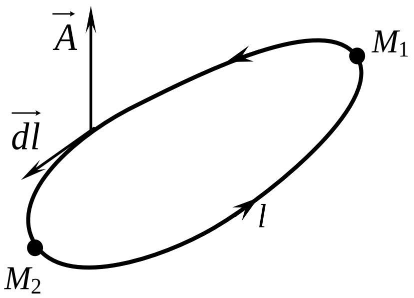
Содержание

15.1. Определение работы и циркуляции 109
15.2. Основные свойства циркуляции 109
15.3. Вычисление циркуляции 112
15.4. Упражнения для самостоятельной работы 112

15.1. Определение работы и циркуляции

Определение работы и циркуляции векторного поля

Работой векторного поля $\vec{A}$ ***на участке*** M_1M_2 ***кривой*** l с указанным на ней направлением называется криволинейный интеграл II рода от скалярного произведения вектора поля $\vec{A}$ на вектор малого перемещения $d\vec{l} = \{dx, dy, dz\}$:



$$W = \int\limits_{(\overset{\smile}{M_1M_2})} \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int\limits_{(\overset{\smile}{M_1M_2})} A_x dx + A_y dy + A_z dz \qquad (1)$$

Циркуляцией вектора $\vec{A}$ ***по замкнутому контуру*** l называется работа этого векторного поля вдоль замкнутой кривой (l), на которой указано направление обхода:

$$C = \oint\limits_{(l)} \vec{A}\cdot d\vec{l} = \oint\limits_{(l)} A_x dx + A_y dy + A_z dz \qquad (2)$$

15.2. Основные свойства циркуляции

1. Циркуляция векторного поля – это скалярная величина, которая является интегральной характеристикой поля; она указывает на способность

векторного поля совершать работу при перемещении по замкнутым траекториям.

2. Циркуляция зависит от направления на контуре (l), так как $\oint\limits_{(l^+)} = -\oint\limits_{(l^-)}$.

Следовательно, при изменении направления обхода контура (l) циркуляция меняет знак на противоположный.

3. Если $C = 0$ по любому замкнутому контуру l, то $\oint\limits_{\forall(l)} A_x dx + A_y dy + A_z dz = 0$.

По теореме, в которой указываются необходимые и достаточные условия независимости криволинейного интеграла II рода от формы линии интегрирования, имеем, что равенство нулю такого интеграла по любому замкнутому контуру эквивалентно существованию функции $U(x,y,z)$, такой что подынтегральное выражение является ее полным дифференциалом: $dU = A_x dx + A_y dy + A_z dz \;\Rightarrow\; \{A_x; A_y; A_z\} = \left\{\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z}\right\} = \overrightarrow{grad}U.$

Таким образом, если $C = 0$ по любому замкнутому контуру l, то это означает, что существует скалярная функция $U(x,y,z)$, такая что $\vec{A} = \overrightarrow{grad}\,U$.

Функция $U(x,y,z)$ называется ***потенциалом векторного поля*** $\vec{A}$, а поле $\vec{A}$ в этом случае называется ***потенциальным векторным полем***.

Так как существование функции $U(x,y,z)$, такой что $dU = A_x dx + A_y dy + A_z dz$, является и достаточным условием для того, чтобы $\oint\limits_{\forall(l)} A_x dx + A_y dy + A_z dz = 0$, то получается что циркуляция в потенциальном поле всегда равна нулю.

4. Циркуляция связана с ротором с помощью формулы Стокса:

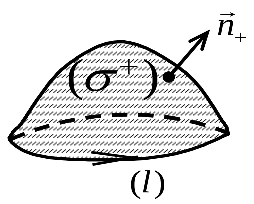
$$\oint\limits_{(l)} A_x dx + A_y dy + A_z dz = \iint\limits_{(\sigma^+)} \left(\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos\gamma \right) d\sigma,$$

формула Стокса в векторной форме имеет вид

$$\oint\limits_{(l)} \vec{A}\cdot d\vec{l} = \iint\limits_{(\sigma^+)} \left(rot\vec{A}\cdot\vec{n}\right) d\sigma \tag{3}$$

Смысл формулы Стокса теперь легко прочитывается:

Циркуляция векторного поля $\vec{A}$ по замкнутому контуру (l) равна потоку ротора этого векторного поля через произвольную поверхность (σ^+), опирающуюся на контур l.

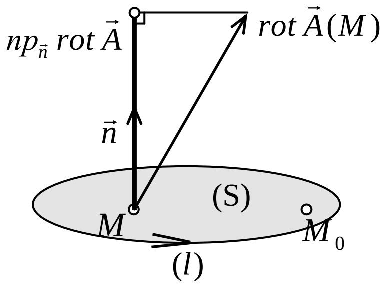


При этом направление $\vec{n}$ на (σ^{+}) и направление на контуре (l) образуют “правую систему”, то есть с конца вектора $\vec{n}$ направление на контуре (l) видно против часовой стрелки.

Из формулы Стокса (3) следует, что $rot\vec{A} \neq \vec{0}$ означает способность векторного поля $\vec{A}$ совершать работу при перемещении материальной точки по замкнутому контуру (l).

5. Используя формулу Стокса в векторной форме, можно дать другое (физическое) определение ротора векторного поля, эквивалентное первому определению: $rot\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ и не зависящее от выбора координатной системы. Для этого запишем формулу Стокса для достаточно малой плоской площадки S с контуром (l), содержащей точку *M*:

$$\oint\limits_{(l)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint\limits_{(S^{+})} \left(rot \quad \vec{A} \cdot \vec{n} \right) \; d\sigma.$$



Поверхностный интеграл в правой части формулы Стокса можно записать по теореме о среднем в следующем виде:

$$\iint\limits_{(S^{+})} \underbrace{\left(rot\vec{A} \cdot \vec{n} \right)}_{np_{\vec{n}} rot\vec{A}} d\sigma = np_{\vec{n}} rot\vec{A} \;\Big|_{M_0} \cdot S \,,$$

где M_0 — некоторая точка площадки S, площадь площадки тоже обозначена буквой S.

Тогда из формулы Стокса следует, что $np_{\vec{n}} \quad rot \quad \vec{A} \quad (M_0) = \dfrac{1}{S} \oint\limits_{(l)} \vec{A} \cdot d\vec{l}$, (*)

где *l* – это контур, ограничивающий площадку *S*.

Пусть теперь контур l стягивается в точку *M*, тогда $M_0 \to M$ и $S \to 0$. Переходя к пределу при этих условиях, в равенстве (*) получаем, что

$$np_{\vec{n}} \quad rot \quad \vec{A} \quad (M) = \lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \oint\limits_{(l)} \vec{A} \cdot d\vec{l} \qquad (4)$$

Теперь формулируем определение ротора векторного поля, которое основано на формуле (4):

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РОТОРА ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ЧЕРЕЗ ЕГО ЦИРКУЛЯЦИЮ

Ротор вектора $\vec{A}$ ***в точке M*** – это вектор, проекция которого на каждое направление $\vec{n}$ равна пределу отношения циркуляции вектора $\vec{A}$ по контуру (l) плоской площадки S, перпендикулярной этому направлению, к площади этой площадки, стягивающейся в точку.

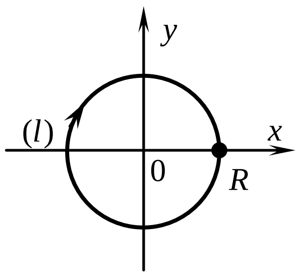
15.3. Вычисление циркуляции

Циркуляция векторного поля $\vec{A}$ по замкнутому контуру (l), на котором указано направление, вычисляется непосредственно по правилу вычисления криволинейного интеграла II рода, но может быть вычислена также и по формуле Стокса.

Примеры (вычисление циркуляции)

1. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{A} = xy\vec{i} + x^2\vec{j}$ по окружности $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$, проходимой по часовой стрелке.

Решение



Общая формула (1): $C = \oint\limits_{(l)} \vec{A}\cdot\vec{dl} = \oint\limits_{(l)} A_x dx + A_y dy$.

Для данного поля $A_x = xy$, $A_y = x^2$, поэтому $C = \oint\limits_{(l)} xydx + x^2dy$.

Вычисляем криволинейный интеграл II рода сведением его к определенному интегралу:

$$C = \oint\limits_{(l)} xydx + x^2dy = \left\{ \text{на } l: \begin{matrix} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} dx = x'_t dt = -R\sin t dt & t_{\text{начал.}} = 2\pi, \\ dy = y'_t dt = R\cos t dt & t_{\text{конечн.}} = 0 \end{matrix} \Bigg\} =$$

$$= \int\limits_{t=2\pi}^{0} \left(R\cos t \cdot R\sin t \cdot (-R\sin t dt) + (R\cos t)^2 \cdot R\cos t dt \right) = R^3 \int\limits_{2\pi}^{0} (-\cos t \cdot \sin^2 t + \cos^3 t) dt =$$

$$= R^3 \int\limits_{2\pi}^{0} (-\cos t \cdot \sin^2 t + \cos t \cdot (1 - \sin^2 t)) dt = R^3 \left(\int\limits_{2\pi}^{0} \cos t dt - 2\int\limits_{2\pi}^{0} \sin^2 t \cdot \cos t dt \right) = R^3 \left(\sin t\Big|_{2\pi}^{0} - 2\cdot \frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_{2\pi}^{0} \right) = 0$$

Ответ: $C = 0$.

15.4. Упражнения для самостоятельной работы

Ответы к упражнениям для самостоятельной работы

§ 16. Потенциальные, соленоидальные и гармонические векторные поля: определения и основные свойства. Нахождение потенциала потенциального векторного поля

Содержание

16.1. Потенциальные поля и их свойства 113
16.2. Соленоидальные поля и их свойства 116
16.3. Гармонические поля и их свойства 117
16.4. Упражнения для самостоятельной работы 118

16.1. Потенциальные поля и их свойства

Определение потенциального поля

Поле $\vec{A}(M)$ называется ***потенциальным векторным полем***, если оно является градиентом некоторого скалярного поля U:

$$\vec{A} = \overrightarrow{grad}\, U = \vec{\nabla} U. \qquad (1)$$

При этом функция $U(M)$ называется ***потенциалом векторного поля*** $\vec{A}(M)$**.**

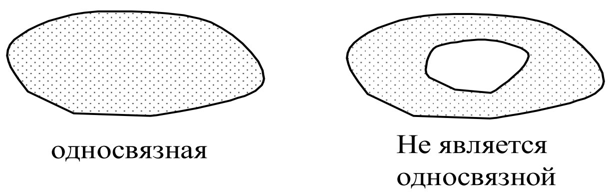
Основные свойства потенциальных полей

1. $C = \oint\limits_{\forall(l)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0$ — циркуляция потенциального поля равна нулю по любому замкнутому контуру (l).

▷ Действительно, $C = \oint\limits_{(l)} \vec{A} \cdot d\vec{l} \overset{\text{формула}}{\underset{\text{Стокса}}{=}} \iint\limits_{(\sigma^+)} \left(rot\vec{A} \cdot \vec{n} \right) d\sigma = \iint\limits_{(\sigma^+)} \left(\left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right) \cdot \vec{n} \right) d\sigma \overset{(1)}{=} \iint\limits_{(\sigma)} \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} U)}_{=\vec{0}} \cdot \vec{n} d\sigma = 0.$ ◁

2. Если векторное поле $\vec{A}$ задано в односвязной области D, то для его потенциальности необходимо и достаточно, чтобы его $\boxed{rot\vec{A} = \vec{0}}$, то есть любое потенциальное поле является “безвихревым”.

Односвязная область – это такая область, граница которой может быть стянута в точку непрерывным образом, не выходя за пределы области.



Доказательство

$\triangleright$Необходимость: если векторное поле $\vec{A}$ потенциально, то есть $\vec{A} = \overrightarrow{gradU}$, то его $rot\vec{A} = rot\left(\overrightarrow{gradU}\right) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} U) = \vec{0}$.

Достаточность: если $rot\vec{A} = \vec{0}$, то все компоненты вектора $rot\vec{A}$ равны 0, то есть $\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial z}$, $\frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x}$, $\frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial y}$.

Докажем, что поле $\vec{A}$ является потенциальным.

Если переобозначить $A_x = P,\ A_y = Q,\ A_z = R,$ то получим: $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

В этих равенствах легко узнать необходимые и достаточные условия для того, чтобы выражение $Pdx + Qdy + Rdz = A_x dx + A_y dy + A_z dz$ было полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y, z)$, то есть $A_x = \frac{\partial U}{\partial x}$, $A_y = \frac{\partial U}{\partial y}$, $A_z = \frac{\partial U}{\partial z} \Rightarrow \{A_x, A_y, A_z\} = \overrightarrow{gradU},$ то есть поле $\vec{A}$ является потенциальным, ч.т.д.

Если вспомнить доказательство достаточных условий полного дифференциала (в двумерном случае – с помощью формулы Грина), то становится понятно, что эти условия ($\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$,...) должны выполняться во всех точках некоторой области, которая рассматривалась как односвязная область.

Можно показать, что в случае области, которая не является односвязной, этих условий может оказаться недостаточно для восстановления однозначной функции $U(x, y, z)$ во всей области (см. Фихненгольц, т.III, §§ 558-562, 601, 641). $\triangleleft$

3. Если векторное поле $\vec{A}$ потенциально, то его работа этого поля между двумя точками пространства не зависит от формы линии, которой соединяются эти точки, и равна разности значений потенциала поля в этих точках.

Доказательство

$\triangleright$

$$W = \int\limits_{(M_1M_2)} \vec{A} \cdot d\vec{l} \overset{(1)}{=} \int\limits_{(M_1M_2)} \vec{\nabla} U \cdot d\vec{l} = \int\limits_{(M_1M_2)} \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) = \left\{ \begin{array}{l} (M_1M_2): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases} \\ t_1, t_2 - \text{значения } t \text{ для точек } M_1 \text{ и } M_2 \end{array} \right\} =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} x'_t + \frac{\partial U}{\partial y} y'_t + \frac{\partial U}{\partial z} z'_t \right) dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{dU(x(t), y(t), z(t))}{dt} dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} dU(x(t), y(t), z(t)) =$$

$$= U(x(t), y(t), z(t))\Big|_{t_1}^{t_2} = U(x(t_2), y(t_2), z(t_2)) - U(x(t_1), y(t_1), z(t_1)) = U(M_2) - U(M_1),$$

то есть работа равна разности значений потенциала и не зависит от формы перемещения (M_1M_2) $\lhd$

4. Потенциал потенциального поля $\vec{A}(M)$ определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Действительно, $\vec{A} = \overrightarrow{grad}U = \overrightarrow{grad}(U + Const)$.

Найти потенциал векторного поля $\vec{A}$ можно, например, с помощью криволинейного интеграла II рода, вычисленного от фиксированной точки (x_0, y_0, z_0) до переменной точки (x, y, z):

$$\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} dU = U(x,y,z) - U(x_0,y_0,z_0) \qquad (2)$$

При этом удобно вычислять криволинейный интеграл как независящий от формы линии интегрирования, то есть по ломаной, состоящей из отрезков, параллельных осям координат. Точки (x_0, y_0, z_0), (x, y, z) и линия интегрирования должны оставаться в области существования этого криволинейного интеграла.

При этом координаты фиксированной точки (x_0, y_0, z_0) можно положить равными конкретным числам – это упростит вычисление.

По методу своего решения задача нахождения потенциала потенциального векторного поля совпадает с задачей о восстановлении функции двух или трех переменных по ее полному дифференциалу (см. §9 данного конспекта).

Пример 1 (нахождение потненциала потенциального векторного поля)

Убедиться в том, что векторное поле $\vec{A}$ потенциально, и найти его потенциал:

$\vec{A} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + yx\vec{k}.$

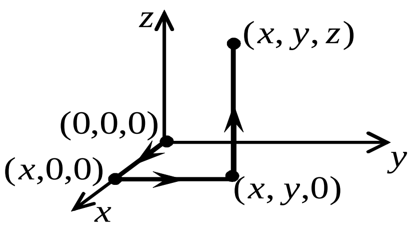
Решение

$rot\vec{A} = \vec{0}$ — это необходимое и достаточное условие потенциальности поля $\vec{A}$.

Вычисляем

$$rot\vec{A} = \nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & yx \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial(yx)}{\partial y} - \frac{\partial(xz)}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial(yx)}{\partial x} - \frac{\partial(yz)}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial(xz)}{\partial x} - \frac{\partial(yz)}{\partial y}\right) =$$

$= \vec{i}\,(x-x) - \vec{j}\,(y-y) + \vec{k}\,(z-z) = \vec{i}\,0 - \vec{j}\,0 + \vec{k}\,0 = \vec{0} \Rightarrow$ поле $\vec{A}$ является потенциальным.



$$U(x,y,z)=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}\vec{A}\cdot d\vec{l}=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} yzdx+xzdy+yxdz=\int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)} 0\cdot 0\cdot dx+$$
$$+\int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} x\cdot 0\cdot dy+\int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} y\cdot x\cdot dz=yxz\Big|_{z=0}^{z=z}=yxz.$$

Ответ: $U(x,y,z)=xyz+C.$

16.2. Соленоидальные поля и их свойства

Определение соленоидального векторного поля

Поле $\vec{A}(M)$ называется ***соленоидальным векторным полем*** в односвязной области D, если в любой точке этой области его дивергенция равна нулю: $div\vec{A}=0.$

Основные свойства соленоидальных полей

1. Если векторное поле $\vec{A}$ соленоидально, то поток этого поля через любую замкнутую поверхность равен 0.

$\triangleright$Действительно, по определению потока с использованием формулы Остроградского-Гаусса получим, что $P=\oiint\limits_{(\sigma)}\left(\vec{A}\cdot\vec{n}\right)d\sigma=\iiint\limits_{V}\underbrace{div\vec{A}}_{=0}dv=0\triangleleft$

2. Если векторное поле $\vec{A}(M)$ можно представить в виде ротора другого векторного поля $\vec{B}(M)$, которое называют ***векторным потенциалом векторного поля*** $\vec{A}$, то поле $\vec{A}(M)$ является соленоидальным.

$\triangleright$Действительно, если $\vec{A}=rot\vec{B},$ то $div\vec{A}=\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})=0\triangleleft$

3. В соленоидальном поле источники и стоки отсутствуют (так как $div\vec{A}(M)=0$ во всех точках M) , следовательно, векторные линии такого поля не имеют начала и конца и либо являются замкнутыми, либо уходят в бесконечность.

Пример 2 (определение соленоидальности векторного поля)
Определить, являются ли соленоидальными следующие поля:
$\vec{A}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$; $\vec{B}=x^2\vec{i}-2xy\vec{j}+5\vec{k}$; $\vec{C}=y^2\vec{i}+xy\vec{j}-z\vec{k}$.
Решение

$$div\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}(yz)+\frac{\partial}{\partial y}(xz)+\frac{\partial}{\partial z}(xy)=0+0+0=0\Rightarrow$$

поле $\vec{A}$ является соленоидальным;

$div\vec{B} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-2xy) + \frac{\partial}{\partial z}(5) = 2x - 2x + 0 = 0 \Rightarrow$ поле $\vec{B}$ является соленоидальным;

$div\vec{C} = \frac{\partial}{\partial x}(y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial z}(-z) = 0 + x - 1 = x - 1 \neq 0 \Rightarrow$ поле $\vec{C}$ не является соленоидальным.

16.3. Гармонические поля и их свойства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Поле $\vec{A}(M)$, являющееся одновременно и потенциальным и соленоидальным, называется ***гармоническим векторным полем***: $\vec{A} = \overrightarrow{gradU}$ и $div\vec{A} = 0$.

Основные свойства гармонических полей

1. Потенциал $U(x,y,z)$ гармонического поля $\vec{A}$ удоволетворяет уравнению Лапласа: $\boxed{\Delta U = 0}$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа

▷ Действительно, $\vec{A} = \overrightarrow{gradU}$, так как $\vec{A}$ — потенциальное $\Rightarrow$ $div\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} U = \Delta U$. Так как поле соленоидальное, то $div\vec{A} = 0 \Rightarrow \Delta U = 0$ ◁

2. Можно показать, что произвольное векторное поле $\vec{A}(M)$ всегда может быть представлено в виде суммы двух векторных полей, одно из которых – потенциально, а другое — соленоидально.

Пример 3 (определение гармоничности векторного поля)

Проверить, являются ли гармоническими следующие поля:

$\vec{A} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$; $\vec{B} = x^2\vec{i} - 2xy\vec{j} + 5\vec{k}$; $\vec{C} = y^2\vec{i} + xy\vec{j} - z\vec{k}$.

Решение

Признаком потенциальности векторного поля является равенство нулю его ротора.

Векторное поле $\vec{A}$ является гармоническим, так как $rot\vec{A} = 0$ и $div\vec{A} = 0$ (вычислялись в предыдущих примерах этого параграфа).

Для поля $\vec{B}$ имеем, что $div\vec{B} = 0$, $rot\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & -2xy & 5 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot 0 - \vec{j} \cdot 0 + \vec{k} \cdot (-2y) = -2y\vec{k} \neq 0$,

поэтому поле $\vec{B}$ не является гармоническим.

Для поля $\vec{C}$ имеем $div\vec{C} = x - 1 \neq 0$, поэтому это поле не является гармоническим.

16.4. Упражнения для самостоятельной работы

Глоссарий

векторная линия векторного поля это... (стр. 90)

векторное поле это... (стр. 90)

векторным дифференциальным оператором Гамильтона или оператором «набла» называется... (стр. 102)

векторным потенциалом векторного поля называется... (стр. 114)

векторными дифференциальными операциями второго порядка называется... (стр. 103)

векторными дифференциальными операциями первого порядка называется... (стр. 103)

гармоническим векторным полем называется... (стр. 115)

двойным интегралом от функции f(x,y) по области D называется... (стр. 5)

двумерной интегральной суммой функции f(x,y) в области D называется... (стр. 5)

двусторонней поверхностью называется... (стр. 84)

диаметр d плоской геометрической фигуры это... (стр. 6)

дивиргенция (или расходимость) векторного поля □в точке □ это... (стр. 96)

криволинейным интегралом I рода от функции
f (x, y, z) по линии l называется... (стр. 42)

криволинейным интегралом II рода по дуге (AB) называется... (стр. 49)

необходимое и достаточное условие полного дифференциала это... (стр. 71)

одно дифференциальное уравнение векторных линий плоского векторного поля это... (стр. 91)

односвязная область это... (стр. 111)

односторонней поверхностью называется... (стр. 84)

оператор Лапласа это... (стр. 104)

операторами дифференцирования называется... (стр. 102)

Ориентированной поверхностью называется... (стр. 85)

поверхностным интегралом I рода от функции f(x,y,z) по поверхности (() называется... (стр. 76)

потенциалом векторного поля называется... (стр. 108)

потенциалом векторного поля называется... (стр. 111)

потенциальным векторным полем называется... (стр. 108)

потенциальным векторным полем называется... (стр. 111)

поток векторного поля □ через ориентированную поверхность □ это... (стр. 92)

правильной областью в полярной системе координат называется... (стр. 15)

простые формулы для координат центра масс однородной пластинки это... (стр. 34)

работой векторного поля □ на участке □ кривой □ называется... (стр. 107)

рангом разбиения двумерной области D называется... (стр. 5)

ротор вектора □ в точке M это... (стр. 109)

ротором или вихрем векторного поля это... (стр. 99)

система дифференцальных уравнений векторных линий векторного поля это... (стр. 91)

смысл теоремы Остроградского-Гаусса это... (стр. 97)

смысл формулы Стокса это... (стр. 108)

соленоидальным векторным полем называется... (стр. 114)

средним значением
функции f(x,y,z) по области V называется... (стр. 22)

средним значением функции f (x,y) в области D называется... (стр. 8)

сферическим радиусом точки; называется... (стр. 26)

тройным интегралом от функции f(x, y, z) по области V называется... (стр. 20) формула для вычислеия момента инерции пластинки относительно точки начала координат это... (стр. 32)

формула для вычисления двойного интеграла в полярных координатах это... (стр. 16)

формула для вычисления длины дуги линии с помощью криволинейного интеграла I рода это... (стр. 46)

формула для вычисления криволинейного интеграла I рода это... (стр. 44)

формула для вычисления массы неоднородной пластинки это... (стр. 31)

формула для вычисления массы трехмерного объекта, занимающего объем V это... (стр. 35)

формула для вычисления объема любого пространственного тела это... (стр. 35)

формула для вычисления объема тела с помощью двойного интеграла это... (стр. 29)

формула для вычисления объема цилиндроида это... (стр. 28)

формула для вычисления статических моментов тонких пластинок относительно координатных осей это... (стр. 31)

формула перевода тройного интеграла к сферическим координатам это... (стр. 27)

формула сведения криволинейного интеграла I рода к определенному интегралу это... (стр. 44)

формула сведения криволинейного интеграла II рода к определенному интегралу это... (стр. 52)

формула сведения поверхностного интеграла к двойному интегралу это... (стр. 78)

формула сведения тройного интеграла к трехкратному интегралу это... (стр. 23)

формула это... (стр. 57)

формулы для вычисления моментов инерции тонких пластинок относительно координатных осей это... (стр. 32)

формулы для вычисления статических моментов M и моментов инерции I трехмерных тел это... (стр. 37)

формулы для координат центра масс тонкой пластинки это... (стр. 33)

формулы для координат центра масс трехмерного тела это... (стр. 38) функциональный определитель Якоби (якобиан это... (стр. 18)

цилиндрические координаты точки в пространстве XOYZ это... (стр. 24)

цилиндроид или цилиндрическое тело это... (стр. 8)

циркуляцией вектора □ по замкнутому контуру □ называется... (стр. 107)

Вопросы для самопроверки

1. Что называется рангом разбиения двумерной области D?

2. Что называется двумерной интегральной суммой функции f(x,y) в области D?

3. Что называется двойным интегралом от функции f(x,y) по области D?

4. Что такое диаметр d плоской геометрической фигуры ?

5. Сформулируйте свойство о линейности двойного интеграла по подынтегральной функции?

6. Сформулируйте свойство об аддитивности двойного интеграла по области интегрирования?

7. Сформулируйте свойство о значении двойного интеграла от функциитождественно равной единице?

8. Сформулируйте свойство оценки значения двойного интеграла?

9. Сформулируйте свойство об интегрировании неравенств двойным интегралом?