

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

В лекциях по дисциплине «Теоретические основы электротехники» (ТОЭ) рассматриваются теоретические вопросы и даются сведения описательного характера, значительно меньше внимания уделяется применению полученных знаний для решения задач, связанных с использованием методов расчета параметров и режимов работы электрических цепей.

Настоящее практическое занятие посвящено расчету электрических процессов, происходящих в длинной линии при разомкнутой и короткозамкнутой на конце линии нагрузке.

В начале практического занятия даются теоретические сведения и основные формулы, необходимые для решения задачи по нахождению распределения напряжения и тока в режимах разомкнутой и короткозамкнутой на конце линии. В конце приведен справочный материал, который используется при решении задачи.

Тема: РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКА ВДОЛЬ ЛИНИИ В РЕЖИМЕ ХОЛОСТОГО ХОДА, КОРОТКОГО ЗАМЫКАНИЯ И СОГЛАСОВАННОЙ НАГРУЗКИ

Цель занятия:

Овладение методикой определения распределения напряжения и тока в режиме холостого хода, короткого замыкания и согласованной нагрузки.

Порядок выполнения практической работы

1. Ознакомиться с алгоритмом расчета распределения напряжения и тока в режиме холостого хода, короткого замыкания и согласованной нагрузки.
2. Выполнить индивидуальные задания и оформить отчет в соответствии с едиными требованиями к оформлению текстовых и графических документов.

Указания к выполнению индивидуальных заданий

В заданиях каждый студент после ознакомления с теоретическим материалом должен решить задачу в соответствии с номером своего варианта (таблица 1). Номер варианта соответствует номеру в списке группы (См. Microsoft Teams – Теоретические основы электротехники – Файлы - Список группы для выбора варианта индивидуального задания по практическому занятию). Номер варианта индивидуального задания соответствует порядковому номеру студента в списке группы.

Отчёт по практической работе должен содержать решение задачи (образец оформления решения задачи приведен в Приложении 1).

Отчёт оформляют на листе формата А4 (по возможности с использованием оформления ПЭВМ).

I. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКА В РЕЖИМЕ ХОЛОСТОГО ХОДА, КОРОТКОГО ЗАМЫКАНИЯ И СОГЛАСОВАННОЙ НАГРУЗКИ

Распределение напряжения и тока в линии зависит как от собственных параметров линии $\underline{\gamma}$, \underline{Z}_B и геометрических размеров линии l , которая является функцией длины электромагнитной волны λ , так и от характера нагрузки \underline{Z}_H (режима работы линии).

Рассмотрим предельные режимы работы линии, когда линия разомкнута на конце, либо замкнута накоротко.

Линия разомкнута на конце, т. е. когда нагрузочное сопротивление бесконечно велико.

Бегущая волна, дойдя до конца разомкнутой на конце линии, отражается и движется обратно к генератору. Таким образом, в линии распространяются две бегущие волны: одна — падающая — движется от генератора к концу линии, а другая — отражённая — движется в обратном направлении. В результате взаимодействия падающих и отражённых волн в линии образуются стоячие волны.

На рисунке 1 показано сложение падающей и отражённой волн напряжения, для некоторого момента времени, в разомкнутой линии.

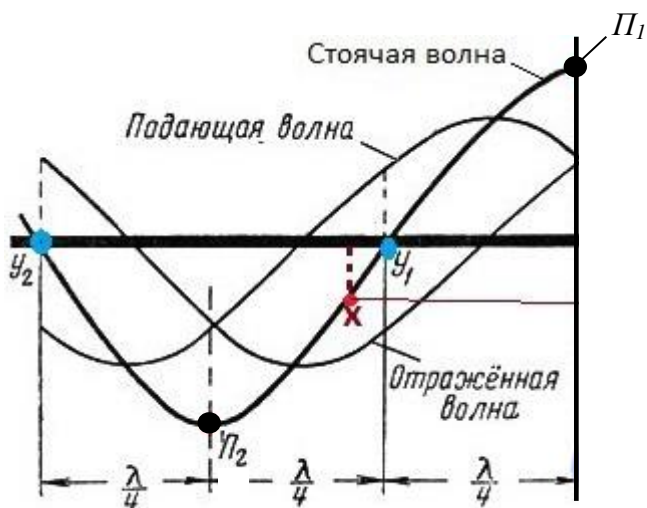


Рис. 1. К пояснению процесса образования стоячих волн

Эти волны проявляются наличием в линии максимумов (пучностей Π_1, Π_2) напряжения, а также их нулевых значений (узлов U_1, U_2).

Характер распределения напряжения вдоль линии при стоячей волне не изменяется с течением времени. В разные моменты времени изменяется только величина напряжения в каждом сечении линии.

На рис.2 показано распределение напряжения вдоль разомкнутой линии для нескольких различных моментов времени на протяжении нескольких полупериодов.

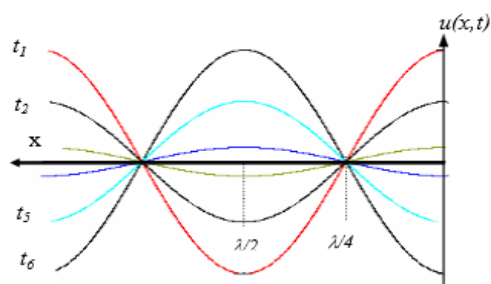


Рис. 2. Изменение напряжения вдоль линии, разомкнутой на конце, для различных моментов времени

Кривая t_1 (красная линия) соответствует фазе, когда напряжение в линии наибольшее. Далее напряжение становится всё меньше и меньше (кривые t_2, t_3). Затем напряжение во всей линии становится равным нулю. Затем оно меняет знак и начинает возрастать (кривые t_4, t_5, t_6). Через полпериода после начала процесса напряжение снова достигает амплитудного значения, но с обратным знаком. В каждом сечении линии напряжение колеблется по синусоидальному закону. Для пучностей амплитуда наибольшая, равная двойной амплитуде бегущей волны, для других сечений она меньше, и, наконец, для узлов она равна нулю.

Все сказанное относится и к току, но в стоячей волне узлы тока получаются там, где пучности напряжения, а пучности тока находятся в узлах напряжения. Иначе говоря, стоячая волна тока сдвинута на $1/4\lambda$ или 90° относительно стоячей волны напряжения. Графически это изображено на рисунке 3 двумя кривыми. Кривая тока дана штриховой линией, а кривая напряжения — сплошной линией.

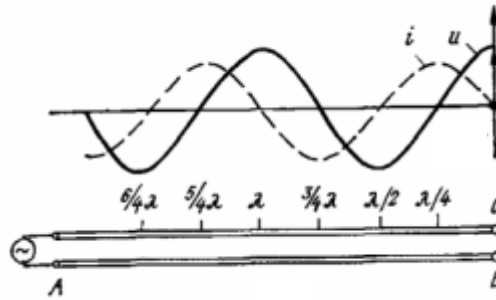


Рис. 3. Распределение токов и напряжений в длинной линии разомкнутой на конце

Отношение напряжения к току — U/I в каждом сечении линии, так и на её концах будет определять входное сопротивление линии.

Входным сопротивлением линии называется такое сосредоточенное сопротивление, подключение которого вместо линии к зажимам генератора не изменит режим работы последнего.

Для анализа функциональной зависимости входного сопротивления линии от её параметров ($Z_B, \underline{\gamma}, l$) и нагрузки (Z_H) воспользуемся схемой замещения однородной длинной линии при отсчете координаты (x) от начала линии (рис 4), для которой уравнения передачи имеют вид:

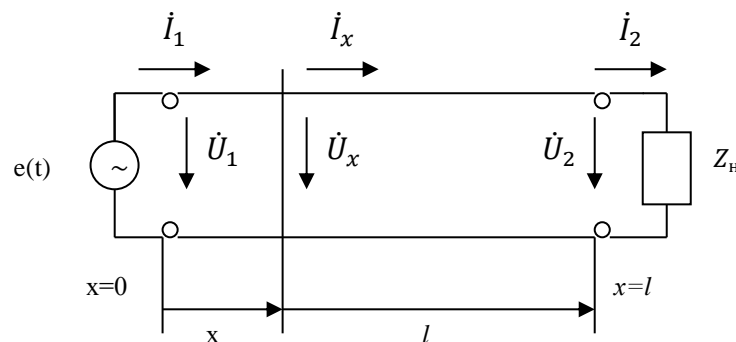


Рис. 4. Схема замещения однородной длинной линии при отсчете координаты (x) от начала линии

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \dot{I}_2 Z_B \operatorname{sh} \underline{\gamma} l \\ \dot{I}_1 = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \frac{\dot{U}_2}{Z_B} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l \end{cases}, (1)$$

Тогда выражение для входного сопротивления отрезка линии $\underline{Z}_{\text{вх}}$ с волновым сопротивлением \underline{Z}_B нагруженного на сопротивление нагрузки \underline{Z}_H будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} &= \frac{\dot{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \dot{I}_2 \underline{Z}_B \operatorname{sh} \underline{\gamma} l}{\dot{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l} = \frac{\dot{I}_2 \underline{Z}_H \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \dot{I}_2 \underline{Z}_B \operatorname{sh} \underline{\gamma} l}{\dot{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \frac{\dot{I}_2 \underline{Z}_H}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l} = \frac{\underline{Z}_H \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \underline{Z}_B \operatorname{sh} \underline{\gamma} l}{\operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \frac{\underline{Z}_H}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l} = \\ &= \underline{Z}_B \frac{\underline{Z}_H \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \underline{Z}_B \operatorname{sh} \underline{\gamma} l}{\underline{Z}_B \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \underline{Z}_H \operatorname{sh} \underline{\gamma} l}. \quad (2) \end{aligned}$$

После деления числителя и знаменателя выражение (2) на $\underline{Z}_B \operatorname{ch} \underline{\gamma} l$ получим

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_B \frac{\frac{\underline{Z}_H}{\underline{Z}_B} + \operatorname{th} \underline{\gamma} l}{1 + \frac{\underline{Z}_H}{\underline{Z}_B} \operatorname{th} \underline{\gamma} l}. \quad (3)$$

Анализ выражения (3) показывает, что входное сопротивление является функцией параметров линии $\underline{\gamma}$ и \underline{Z}_B , её длины l и сопротивления нагрузки \underline{Z}_H и определяется гиперболическим тангенсом комплексного аргумента $\underline{\gamma} l$.

Рассмотрим некоторые частные режимы работы длинной линии, при этом будем рассматривать длинную линию, у которой первичные параметры $R_o = 0$ и $G_o = 0$, т.е. имеет место линия без потерь ($\alpha=0$). Такая идеализация справедлива для коротких по длине линий, работающих на сверхвысоких частотах, где выполняются условия $R_o \ll \omega L_o$ и $G_o \ll \omega C_o$ и резистивным сопротивлением R_o и проводимостью G_o можно пренебречь по сравнению с сопротивлением индуктивности ωL_o и проводимостью емкости ωC_o в линии.

Если учесть, что коэффициент распространения линии без потерь равен

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = j\beta = j\omega\sqrt{L_o C_o}, \quad (4)$$

а связь между гиперболическими и тригонометрическими функциями выражается следующими математическими соотношениями: $\operatorname{ch} \underline{\gamma} l = \cos \beta l$; $\operatorname{sh} \underline{\gamma} l = j \sin \beta l$ и $\operatorname{th} \underline{\gamma} l = \operatorname{tg} \beta l$, то уравнения передачи (1), примет вид:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cos \beta l + j \dot{I}_2 \underline{Z}_B \sin \beta l \\ \dot{I}_1 = \dot{I}_2 \cos \beta l + j \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_B} \sin \beta l \end{cases}, \quad (5)$$

и выражение (3) можно переписать в виде:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_B \frac{\underline{Z}_H + j \underline{Z}_B \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} l}{\underline{Z}_B + j \underline{Z}_H \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} l}. \quad (6)$$

В режиме разомкнутой на конце линии, входное сопротивление будет равно

$$\underline{Z}_{\text{вх вх}} = -j \underline{Z}_B \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{\lambda} l, \quad (7)$$

т.е. носит периодический характер (наличие периодической функции $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} l$) и имеет реактивный характер (множитель $-j$) и вследствие разности фаз между током и напряжением, может быть индуктивным (X_L) или емкостным (X_C) в зависимости от

знака фазового сдвига между током и напряжением.

На рисунке 5 представлен характер изменения входного сопротивления разомкнутой на конце линии при изменении электрической длины линии.

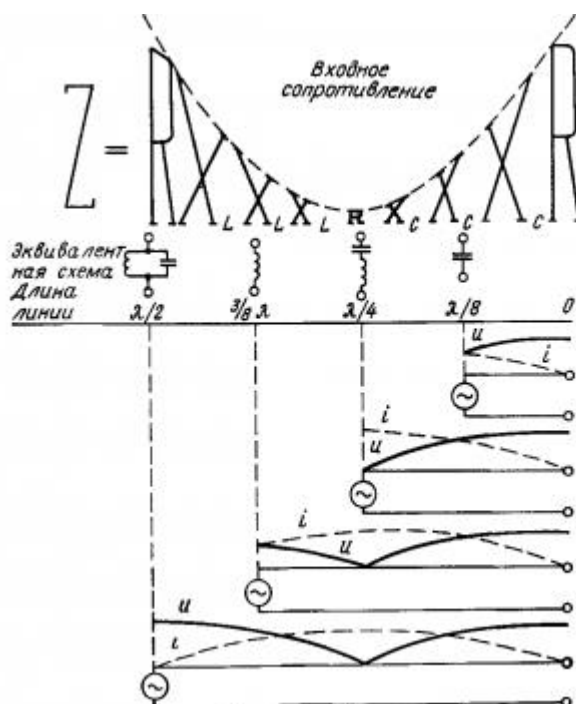


Рис. 5. Изменение величины и характера входного сопротивления разомкнутой длинной линии ($\alpha > 0$) при изменении её электрической длины

На конце линии (см. рис. 5) наблюдается нулевой уровень тока и максимальный уровень напряжения. Это означает, что входное сопротивление линии равно бесконечности.

Начиная с конца линии (см. рис. 5) начинает убывать емкостная составляющая входного сопротивления - X_C , которая достигает наименьшего значения на расстоянии $1/4 \lambda$ от конца линии. Но здесь ей противостоит столь же малая индуктивная составляющая входного сопротивления - X_L , возникающая в следующем участке $1/4 \lambda$ длины линии. На расстоянии, равном $\lambda/4$ длины линии от конца линии (см. рис. 5), напряжение равно нулю, а ток максимален. Это означает, что в этой точке входное сопротивление линии равно нулю. На расстоянии $1/4 \lambda$ от конца разомкнутой на конце линии, линия представляет собой последовательный контур.

На отрезке линии между $1/4 \lambda$ и $1/2 \lambda$ индуктивная составляющая входное сопротивление увеличивается и в точке $1/2 \lambda$ входное сопротивление снова становится равным бесконечности. В этой точке линия представляет собой параллельный колебательный контур. Далее изменение входного сопротивления повторяется и в зависимости от своей длины разомкнутая двухпроводная линия (фидер) настраивается или как емкость, или как индуктивность подобно последовательному либо параллельному резонансному контуру.

Сдвиг фаз на 90° между током и напряжением при стоячей волне показывает, что в линии происходит колебание энергии, сходное с колебательным процессом в замкнутом колебательном контуре. Когда напряжение в линии наибольшее, а ток равен нулю, то вся энергия сосредоточена в электрическом поле. Через четверть периода напряжение равно нулю, а ток имеет наибольшее значение, и вся энергия сосредоточена в магнитном поле. Еще через четверть периода энергия снова возвратится в электрическое поле и процесс колебания энергии повторится.

Линия короткозамкнута на конце, т. е. когда нагрузочное сопротивление бесконечно мало.

В короткозамкнутой линии стоячая волна напряжения сдвинута на $1/4\lambda$ или 90° относительно стоячей волны тока. Графически это изображено на рисунке 6 двумя кривыми.

В случае короткозамкнутой на конце линии, входное сопротивление будет равно

$$\underline{Z}_{\text{вх КЗ}} = j\underline{Z}_{\text{в}} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} l, \quad (8)$$

т.е. имеет чисто реактивный характер (множитель $+j$) и носит периодический характер (наличие периодической функции $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} l$)

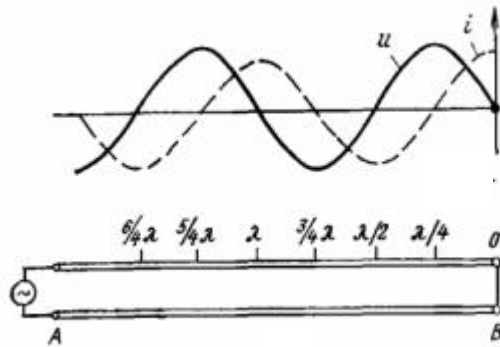


Рис. 6. Распределение токов и напряжений в длинной линии короткозамкнутой на конце

На рисунке 7 представлен характер изменения входного сопротивления короткозамкнутой линии при изменении электрической длины линии.

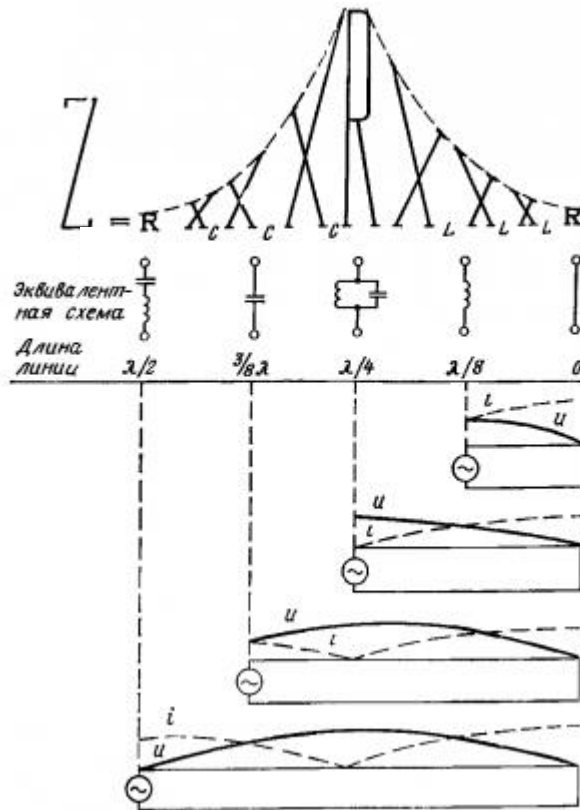


Рис. 7. Изменение величины и характера входного сопротивления короткозамкнутой длинной линии ($\alpha > 0$) при изменении её длины

В точке В на конце линии (см. рис. 6) наблюдается нулевой уровень напряжения и максимальный уровень тока (пучность тока). Это означает, что на конце линии входное сопротивление линии $Z_{вх} = 0$.

Начиная с закороченного конца линии (см. рис. 7) начинает возрастать индуктивная составляющая входного сопротивления - X_L , которая достигает наибольшего значения на расстоянии $1/4 \lambda$ от конца линии. Но здесь ей противостоит столь же большая емкостная составляющая входного сопротивления - X_C , возникающая в следующем участке $1/4 \lambda$ длины линии.

На расстоянии, равном $\lambda/4$ электрической длины линии от точки В (см. рис. 6), ситуация обратная, т. е. напряжение максимально, а ток равен нулю

На расстоянии $1/4 \lambda$ от конца закороченной линии, линия представляет собой параллельный контур и полное сопротивление линии в этой точке становится равным бесконечности.

На отрезке линии между $1/4 \lambda$ и $1/2 \lambda$ емкостная составляющая входное сопротивление уменьшается до нуля и в точке $1/2 \lambda$ входное сопротивление становится равным нулю. В этой точке линия представляет собой последовательный колебательный контур. Далее изменение входного сопротивления повторяется и в зависимости от своей длины короткозамкнутая двухпроводная линия (фидер) настраивается или как индуктивность, или как емкость подобно последовательному либо параллельному резонансному контуру.

Также как и линии разомкнутой на конце, в короткозамкнутой линии, сдвиг фаз на 90° между током и напряжением при стоячей волне показывает, что в линии происходит колебание энергии, сходное с колебательным процессом в замкнутом колебательном контуре. Когда напряжение в линии наибольшее, а ток равен нулю, то вся энергия сосредоточена в электрическом поле. Через четверть периода напряжение равно нулю, а ток имеет наибольшее значение, и вся энергия сосредоточена в магнитном поле. Еще через четверть периода энергия снова возвратится в электрическое поле и процесс колебания энергии повторится.

Эти свойства двухпроводной линии (фидера) позволяют использовать их как резонансные элементы в колебательных контурах, фильтрах и согласующих устройствах. Отрезки линии, представляющие собой эквиваленты индуктивности, ёмкости или колебательного контура, могут иметь длину менее $1/4 \lambda$. Это позволяет подбором длины линии получить необходимую индуктивность или ёмкость. Например, нужную индуктивность можно получить из короткозамкнутой линии длиной меньше $1/4 \lambda$, а из разомкнутой линии длиной менее $1/4 \lambda$ можно получить необходимую ёмкость. Замкнутая линия длиной $1/4 \lambda$ представляет собой параллельный колебательный контур, а эта же разомкнутая линия превратится в последовательный колебательный контур. На рисунках 5 и 7 представлены разные возможности использования разомкнутой или короткозамкнутой линии в качестве согласующего элемента.

II. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКА В РЕЖИМЕ ХОЛОСТОГО ХОДА, КОРОТКОГО ЗАМЫКАНИЯ И СОГЛАСОВАННОЙ НАГРУЗКИ

Исходные данные.

По заданным вторичным параметрам однородной длинной линии длиной l км, волновом сопротивлении $Z_{в}$ [Ом], коэффициенте распространения однородной линии $\underline{\gamma}$ [$1/\text{км}$] и частоте f [Гц] (см. таблицу 1 «Исходные данные для расчета распределения напряжения и тока в режиме холостого хода и короткого замыкания»)

1. Построить эпюры распределения напряжения и тока вдоль линии для случаев короткого замыкания, холостого хода и согласованной нагрузки, если линейное напряжение источника питающего линию изменяется по закону $u(t) = U_{1m} \sin \omega t$, где

$$U_{1m} = 115000 \text{ В.}$$

2. Определить, при какой частоте в заданной линии будет укладываться одна четверть волны ($l = \frac{\lambda}{4}$).

Решение:

1. Распределение напряжения и тока вдоль линии при холостом ходе.

Для анализа распределение напряжения и тока вдоль линии будем использовать схему замещения длинной линии

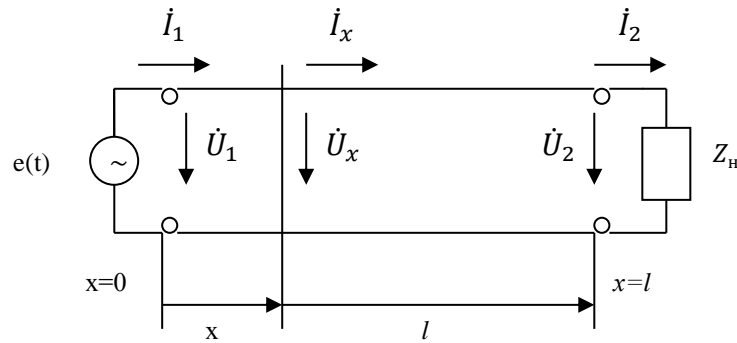


Схема замещения длинной линии

Воспользуемся уравнениями передачи однородной длинной линии для комплексных значений напряжения \dot{U}_x и тока \dot{I}_x с использованием гиперболических функций для произвольного сечения линии x через комплексные действующие значения напряжения \dot{U}_1 и тока \dot{I}_1 в начале линии при отсчете координаты x от начала линии будут иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{U}_x = \dot{U}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x - \dot{I}_1 \underline{Z}_B \operatorname{sh} \underline{\gamma} x \\ \dot{I}_x = \dot{I}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x - \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh} \underline{\gamma} x \end{cases} \cdot (1)$$

Подставив в выражения (1) вместо комплексных действующих значений напряжения \dot{U}_1 и тока \dot{I}_1 в начале линии комплексные действующие значения напряжения \dot{U}_{10} и тока \dot{I}_{10} в начале линии при холостом ходе, будем иметь

$$\begin{cases} \dot{U}_x = \dot{U}_{10} \operatorname{ch} \underline{\gamma} x - \dot{I}_{10} \underline{Z}_B \operatorname{sh} \underline{\gamma} x \\ \dot{I}_x = \dot{I}_{10} \operatorname{ch} \underline{\gamma} x - \frac{\dot{U}_{10}}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh} \underline{\gamma} x \end{cases} \cdot (2)$$

Определяем действующее значение тока в начале линии для разомкнутой на конце линии

$$\dot{I}_{10} = \frac{\dot{U}_{10}}{\underline{Z}_{10}}, \text{ А}$$

где $\dot{U}_{10} = |U_{10}| e^{j\psi_{1u}} |U_{10}| e^{j\psi_{1u}}$ – действующее значение напряжения в начале линии при $\psi_{1u} = 0$, равно $|U_{10}| = \frac{115000}{\sqrt{3}} = 66500, \text{ В}$;

$$\underline{Z}_{10} = \underline{Z}_{\text{вх.хх}} = \frac{\underline{Z}_B}{\operatorname{th} \underline{\gamma} l}, \text{ Ом - входное сопротивление линии в режиме холостого хода.}$$

Для сечений линии с координатами $0; l/4; l/2; 3l/4; l$ км, отсчитываемых от её начала определяем $\underline{\gamma} x$; $\operatorname{sh} \underline{\gamma} x$; и $\operatorname{ch} \underline{\gamma} x$, которые входят в выражения (1), при этом учитывая

l									
---	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Для найденных значений \underline{y}_x ; $sh\underline{y}_x$; и $ch\underline{y}_x$, используя выражения (1), определяем напряжение и ток в сечениях линии $x = 0; 25; 50; 75$ и 100 км.

Результаты расчетов сводим в таблицу 2.

Таблица 2

x, км	Режим холостого хода	
	Ток, А	Напряжение, В
0		
l/4		
l/2		
3l/4		
l		

По данным расчетов строим эпюры распределения действующих значений напряжения и тока вдоль линии при холостом ходе (рис. 1).

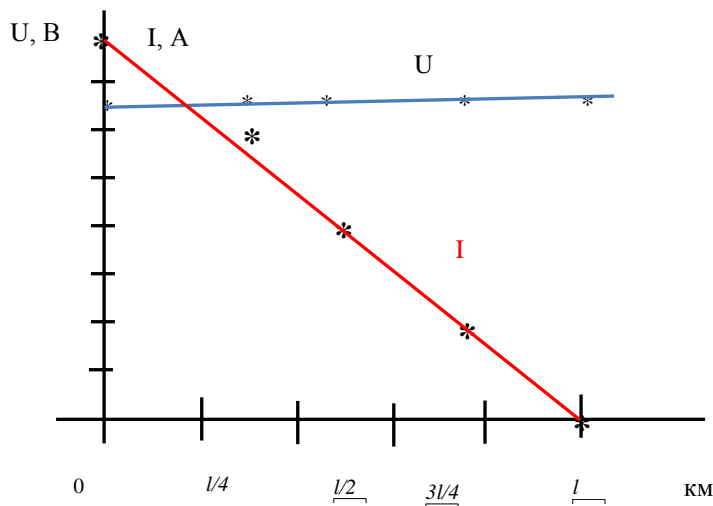


Рис. 1. Эпюры распределения действующих значений напряжения и тока вдоль линии при холостом ходе

2. Распределение тока и напряжения вдоль линии при коротком замыкании.

По аналогии определяем распределение тока и напряжения вдоль линии при коротком замыкании.

Определяем действующее значение тока в начале линии для короткого замыкания в линии

$$\dot{I}_{1к} = \frac{\dot{U}_{1к}}{Z_{1к}}, \text{ А}$$

где $\dot{U}_{1к} = |U_{1к}|e^{j\psi_{1у}}|U_{10}|e^{j\psi_{1у}}$ – действующее значение напряжения в начале линии при $\psi_{1у} = 0$, равно $|U_{1к}| = \frac{115000}{\sqrt{3}} = 66500, \text{ В}$;

$Z_{1к} = Z_{вх.кз} = \frac{\dot{U}_{1к}}{\dot{I}_{1к}} = Z_{в} th\underline{y}l$, Ом - входное сопротивление линии в режиме короткого замыкания.

По выражениям (1), для принятых сечений с координатами $x = 0; 25; 50; 75$ и 100 км, отсчитываемых от её начала, x (см. табл. 1) определяем напряжение и ток.

Вычисленные значения токов и напряжений при коротком замыкании линии сводим в таблицу 3, а построенные по результатам вычислений эпюры распределения токов и напряжений вдоль линии приведены на рисунке 2.

Таблица 3

x, км	Режим короткого замыкания	
	Ток, А	Напряжение, В
0		
1/4		
1/2		
3/4		
0		

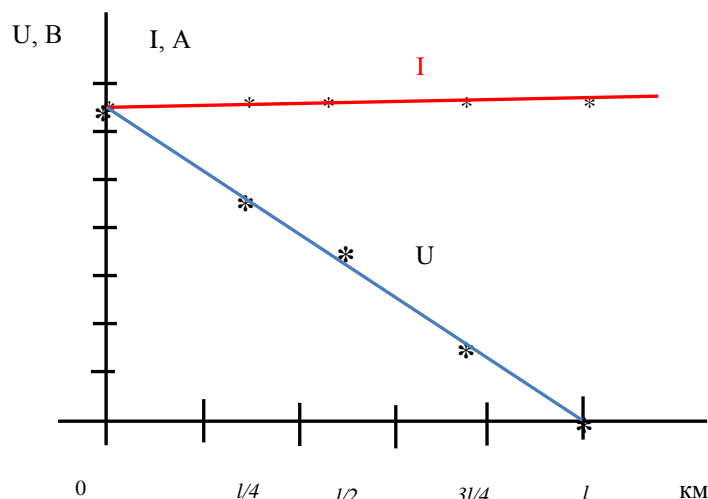


Рис. 2. Эюры распределения действующих значений напряжения и тока вдоль линии при коротком замыкании

3. Распределение токов и напряжений вдоль линии при согласованной нагрузке.

Распределение токов и напряжений вдоль линии при согласованной нагрузке ($Z_H = Z_B$), определяется аналогично режимам холостого хода и короткого замыкания.

Особенность данного режима является то, что в любом сечении линии входное сопротивление её остается постоянным и равным волновому

$$Z_{вх} = Z_B \text{ . Ом}$$

Ток в начале линии, нагруженной на $Z_H = Z_B$, будет равен

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_B} \text{ . А}$$

По выражениям (1) находим значение напряжения и тока в сечениях с координатами $x = 0; 25; 50; 75$ и 100 км, принятых ранее (см. табл. 1). Вычисленные значения токов и напряжений сведены в таблицу 4.

Таблица 4

x, км	Режим согласованной нагрузки	
	Ток, А	Напряжение, В
0		
1/4		
1/2		
3/4		

На рисунке 3 приведены эпюры распределения действующих значений тока и напряжения вдоль линии, работающей в режиме согласованной нагрузки.

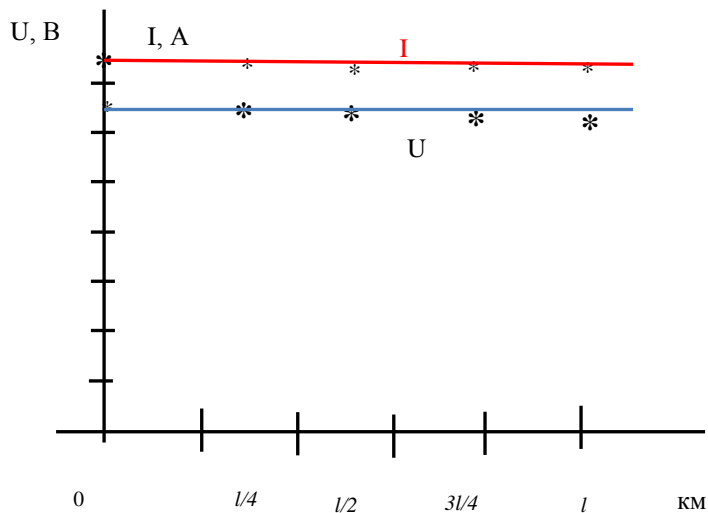


Рис. 3. Распределения действующих значений напряжения и тока вдоль линии при согласованной нагрузке

4. Определение частоты, при которой в заданной линии будет укладываться одна четверть волны, т.е. $l = \frac{\lambda}{4}$ или $\lambda = 4l$.

Для этого используем соотношения:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

и

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} = \frac{2\pi f}{\frac{2\pi}{\lambda}} = f\lambda$$

Откуда

$$f = \frac{v_{\phi}}{\lambda}$$

или при длине волны, равной $\lambda = 4l$ имеем

$$f = \frac{v_{\phi}}{\lambda} = \frac{v_{\phi}}{4l}, 1/c$$

где $v_{\phi} = 300000 \text{ км/с}$ – скорость электромагнитной волны в вакууме.

**Образец формы титульного листа отчета по практическому занятию и содержание
пунктов отчета**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

Кафедра Электротехники



ОТЧЕТ
по практическому занятию № ____
по дисциплине «ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ»
ТЕМА: _____
(наименование темы)

Студент(ка) гр. _____

Дата выполнения практического занятия _____

Преподаватель _____

Екатеринбург
202__

Исходные данные:

По заданным вторичным параметрам однородной длинной линии длиной l км, волновом сопротивлении \underline{Z}_B Ом, коэффициенте распространения однородной линии $\underline{\gamma}$ 1/км и частоте f Гц (см. таблицу 1 «Исходные данные для расчета распределения напряжения и тока в режиме холостого хода и короткого замыкания») построить эпюры распределения напряжения и тока вдоль линии для случаев короткого замыкания, холостого хода и согласованной нагрузки, если напряжение источника питающего линию изменяется по закону $u = U_{1m} \sin \omega t$, где $U_{1m} = 115000$ В.

Определить, при какой частоте в заданной линии будет укладываться одна четверть волны ($l = \frac{\lambda}{4}$).

Таблица

Длина линии, l , км	100
Волновом сопротивлении, \underline{Z}_B , Ом	$450e^{-j18}$
Коэффициент распространения на единицу длины однородной линии, $\underline{\gamma}$, 1/км	$1,13 \cdot 10^{-3} e^{j71}$
Частота сигнала, f , Гц	50
Напряжение источника питания, U_{1m} , В	115000

Решение:

1. Найдем распределение напряжения и тока вдоль линии при холостом ходе.

Для анализа распределение напряжения и тока вдоль линии будем использовать схему замещения длинной линии

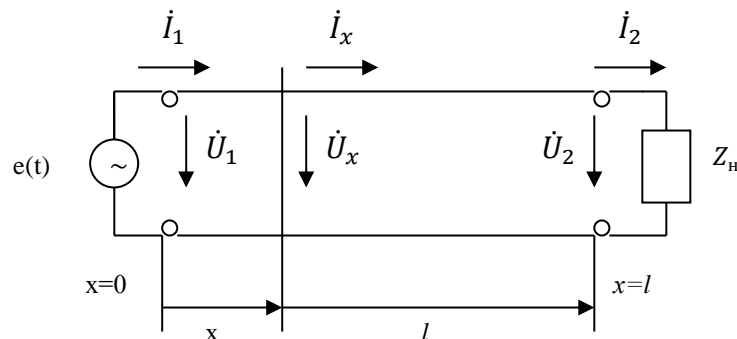


Схема замещения длинной линии

Воспользуемся уравнениями передачи однородной длинной линии для комплексных значений напряжения \dot{U}_x и тока \dot{I}_x с использованием гиперболических функций для

произвольного сечения линии x через комплексные действующие значения напряжения \dot{U}_1 и тока \dot{I}_1 в начале линии при отсчете координаты x от начала линии будут иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{U}_x = \dot{U}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma x} - \dot{I}_1 \underline{Z}_B \operatorname{sh} \underline{\gamma x} \\ \dot{I}_x = \dot{I}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma x} - \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh} \underline{\gamma x} \end{cases} \cdot (1)$$

Подставив в выражения (1) вместо комплексных действующих значений напряжения \dot{U}_1 и тока \dot{I}_1 в начале линии комплексные действующие значения напряжения \dot{U}_{10} и тока \dot{I}_{10} в начале линии при холостом ходе, будем иметь

$$\begin{cases} \dot{U}_x = \dot{U}_{10} \operatorname{ch} \underline{\gamma x} - \dot{I}_{10} \underline{Z}_B \operatorname{sh} \underline{\gamma x} \\ \dot{I}_x = \dot{I}_{10} \operatorname{ch} \underline{\gamma x} - \frac{\dot{U}_{10}}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh} \underline{\gamma x} \end{cases} \cdot (2)$$

Определим действующее значение тока в начале линии при холостом ходе

$$\dot{I}_{10} = \frac{\dot{U}_{10}}{\underline{Z}_{10}} = \frac{115000}{\sqrt{3} \cdot 4180 e^{-j89}} = 15,9 e^{j89}, \text{ А}$$

где $\dot{U}_{10} = |U_{10}| e^{j\psi_{1u}} |U_{10}| e^{j\psi_{1u}}$, при $\psi_{1u} = 0$ равно $|U_{10}| = \frac{115000}{\sqrt{3}} = 66500$, В – действующее значение напряжения в начале линии при холостом ходе;

$$\underline{Z}_{10} = \underline{Z}_{\text{вх.хх}} = \frac{\underline{Z}_B}{\operatorname{th} \underline{\gamma l}} = \frac{450 e^{-j18} \cdot 0,994 e^{j12'}}{0,107 e^{j71}} = 4180 e^{-j89}, \text{ Ом - входное сопротивление линии}$$

в режиме холостого хода.

Для сечений линии с координатами $x = 0; 25; 50; 75$ и 100 км, отсчитываемых от её начала, определяем $\underline{\gamma x}$; $\operatorname{sh} \underline{\gamma x}$; и $\operatorname{ch} \underline{\gamma x}$, которые входят в выражения (2).

Результаты расчетов сведены в таблицу 1

Таблица 1

x , км	$\underline{\gamma x}$	$\operatorname{sh} \underline{\gamma x}$	$\operatorname{ch} \underline{\gamma x}$
0	0	0	1
25	0,0088+j0,0268	$0,028 e^{j90}$	1
50	0,0176+j0,0536	$0,00176+j0,059=0,059 e^{j88}$	$0,998+j0,0104=0,998 e^{j4'}$
75	0,0264+j0,0804	$0,0263+j0,0795=0,084 e^{j72}$	$0,997+j0,0021=0,997 e^{j6'}$
100	0,0353+j0,107	$0,0351+j0,107=0,107 e^{j71}$	$0,994+j0,0038=0,994 e^{j12'}$

Определим напряжение и ток для сечения линии $x = 25$ км

$$\begin{aligned} \dot{U}_{25} &= \dot{U}_{10} \operatorname{ch} \underline{\gamma x} - \dot{I}_{10} \underline{Z}_B \operatorname{sh} \underline{\gamma x} = 66500 \cdot 1 - 15,9 e^{j89} \cdot 450 e^{-j18} \cdot 0,028 e^{j90} = \\ &= 66690 - j63,2 = 66700 e^{-j3'}, \text{ В} \end{aligned}$$

$$\dot{I}_{25} = \dot{I}_{10} \operatorname{ch} \underline{\gamma x} - \frac{\dot{U}_{10}}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh} \underline{\gamma x} = 15,9 e^{j89} \cdot 1 - \frac{66500}{450 e^{-j18}} \cdot 0,028 e^{j90} = 1,818 + j11,83 = 11,9 e^{j81}. \text{ А}$$

Аналогично определяем напряжение и ток для остальных сечений линии. Результаты расчетов сведены в таблицу 2. По данным расчетов построены эпюры распределения действующих значений напряжения и тока вдоль линии при холостом ходе (рис. 1).

Таблица 2

x, км	Режим холостого хода	
	Ток, А	Напряжение, В
0	$15,9 e^{j89}$	66500
25	$11,9 e^{j81}$	$66700 e^{-j3'}$
50	$7,98 e^{j81}$	$66740 e^{-j6'}$
75	$3,45 e^{j89}$	$66780 e^{-j10'}$
100	0	$66800 e^{-j12'}$

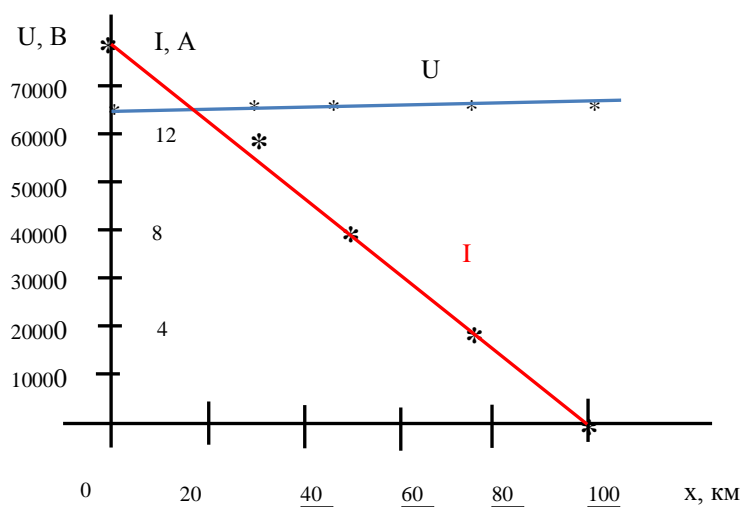


Рис. 1. Эюры распределения действующих значений напряжения и тока вдоль линии при холостом ходе

2. По аналогии определяем распределение тока и напряжения вдоль линии при коротком замыкании.

Предварительно вычисляем ток короткого замыкания в начале линии

$$\dot{I}_{1к} = \frac{\dot{U}_{1к}}{Z_{1к}} = \frac{115000}{\sqrt{3} \cdot 48,5 e^{j53}} = 1370 e^{-j53}, \text{ А}$$

где $\dot{U}_{1к} = |U_{1к}| e^{j\psi_{1u}} |U_{10}| e^{j\psi_{1u}}$, при $\psi_{1u} = 0$ равно $|U_{1к}| = \frac{115000}{\sqrt{3}} = 66500$, В – действующее значение напряжения в начале линии при холостом ходе;

$$Z_{1к} = Z_{вх.кз} = \frac{\dot{U}_{1к}}{\dot{I}_{1к}} = Z_{в} \text{th} \underline{\gamma} l = \frac{450 e^{-j18} \cdot 0,994 e^{j12'}}{0,111 e^{j69}} = 48,5 e^{j53}, \text{ Ом} - \text{ входное}$$

сопротивление линии в режиме короткого замыкания.

По уравнениям (2), где вместо \dot{U}_1 и \dot{I}_1 , подставляем $\dot{U}_{1к}$ и $\dot{I}_{1к}$ для принятых сечений x (см. табл. 1) определяем напряжение и ток.

Так, например, для $x = 25$ км имеем:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{25} &= \dot{U}_{1к} \text{ch} \underline{\gamma} x - \dot{I}_{1к} Z_{в} \text{sh} \underline{\gamma} x = 66500 \cdot 1 - 1370 e^{-j53} \cdot 450 e^{-j18} \cdot 0,028 e^{j90} = \\ &= 50150 - j5230 = 50300 e^{-j8}, \text{ В} \end{aligned}$$

$$\dot{I}_{25} = \dot{I}_{1к} \text{ch} \underline{\gamma} x - \frac{\dot{U}_{1к}}{Z_{в}} \text{sh} \underline{\gamma} x = 1370 e^{-j53} \cdot 1 - \frac{66500}{450 e^{-j18}} \cdot 0,028 e^{j90} = 816,3 + j1104 = 1371 e^{-j53}, \text{ А}$$

Ток и напряжение для остальных x находим аналогично. Вычисленные значения токов и напряжений при коротком замыкании линии приведены в таблице 3, а

построенные по результатам вычислений эпюры распределения токов и напряжений вдоль линии приведены на рисунке 2.

Таблица 3

x, км	Режим короткого замыкания	
	Ток, А	Напряжение, В
0	$1370 e^{-j53}$	66500
25	$1371 e^{-j53}$	$50300 e^{-j8}$
50	$1372 e^{-j53}$	$33300 e^{-j18}$
75	$1373 e^{-j53}$	$14600 e^{-j10}$
100	$1374 e^{-j53}$	0

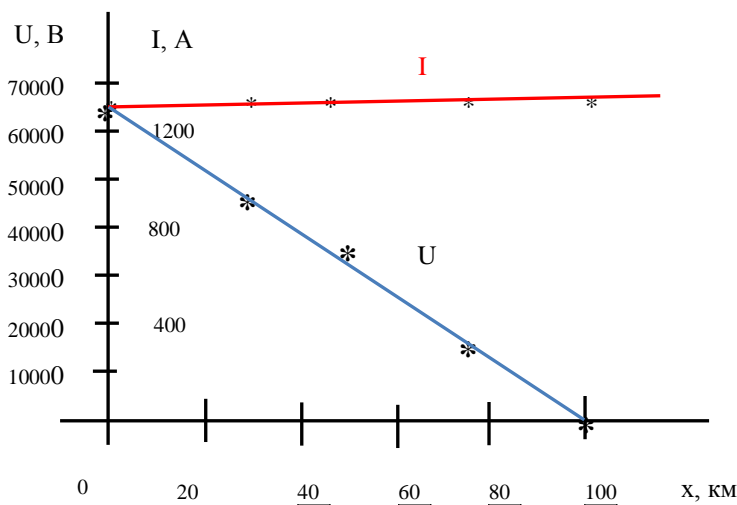


Рис. 2. Эпюры распределения действующих значений напряжения и тока вдоль линии при коротком замыкании

3. Распределение токов и напряжений вдоль линии при согласованной нагрузке, т.е. когда сопротивление нагрузки равно волновому сопротивлению ($Z_H = Z_B$) определяется аналогично режимам холостого хода и короткого замыкания.

Особенность данного режима является то, что в любом сечении линии входное сопротивление её остается постоянным и равным волновому ($Z_{ВХ} = Z_B$). Следовательно входное сопротивление линии в данном режиме равно

$$Z_{ВХ} = Z_B = 450 e^{-j18} \text{ Ом}$$

Ток в начале линии, нагруженной на $Z_H = Z_B$, будет равен

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_B} = \frac{115000}{\sqrt{3} \cdot 450 e^{-j13}} = 148 e^{j18} \text{ А}$$

По уравнениям (2) находим значение напряжения и тока в сечениях, принятых ранее (см. табл. 1).

Например, при $x = 25$ км имеем:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{25} &= \dot{U}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x - \dot{I}_1 Z_B \operatorname{sh} \underline{\gamma} x = 66500 \cdot 1 - 148 e^{j18} \cdot 450 e^{-j18} \cdot 0,028 e^{j90} = \\ &= 66500 - j1863 = 66500 e^{-j1}, \text{ В} \\ \dot{I}_{25} &= \dot{I}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x - \frac{\dot{U}_1}{Z_B} \operatorname{sh} \underline{\gamma} x = 148 e^{-j18} \cdot 1 - \frac{66500}{450 e^{-j18}} \cdot 0,028 e^{j90} = 148 e^{j16} \text{ А} \end{aligned}$$

Вычисленные значения токов и напряжений сведены в таблицу 4. На рисунке 3 приведены эпюры распределения действующих значений тока и напряжения вдоль линии, работающей в режиме согласованной нагрузки.

x, км	Режим согласованной нагрузки	
	Ток, А	Напряжение, В
0	$148 e^{j18}$	66500
25	$148 e^{j16}$	$66500 e^{-j1}$
50	$145 e^{j15}$	$66200 e^{-j2}$
75	$143 e^{j13}$	$64750 e^{-j4}$
100	$143 e^{j12}$	$66300 e^{-j6}$

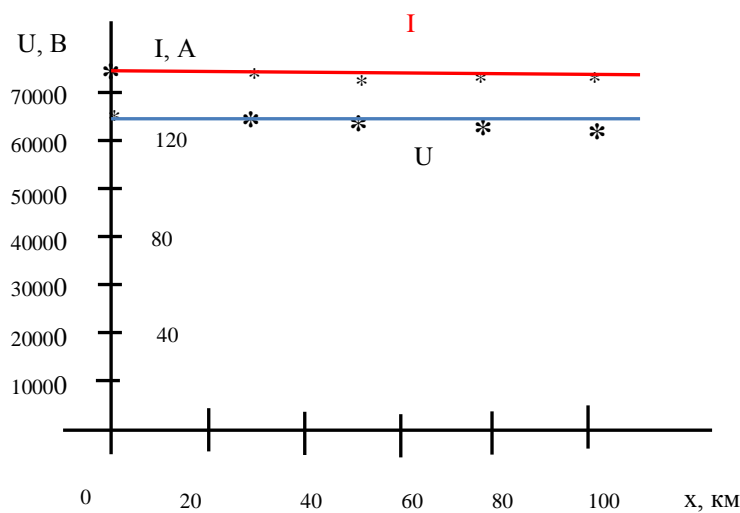


Рис. 3. Распределения действующих значений напряжения и тока вдоль линии при коротком замыкании

4. Определим частоту, при которой в заданной линии будет укладываться одна четверть волны, т.е. $l = \frac{\lambda}{4}$ или $\lambda = 4l$.

Для этого используем соотношения:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

и

$$v_{\Phi} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} = \frac{2\pi f}{\frac{2\pi}{\lambda}} = f\lambda$$

Откуда

$$f = \frac{v_{\Phi}}{\lambda}$$

или при длине волны, равной $\lambda = 4l$ имеем

$$f = \frac{v_{\Phi}}{\lambda} = \frac{v_{\Phi}}{4l} = \frac{300 \cdot 10^3}{4 \cdot 100} = 732, 1/\text{с}$$

где $v_{\Phi} = 300000 \text{ км/с}$ — скорость электромагнитной волны в вакууме.

Примечание: Студенты оформляют отчет с использованием для оформления и печати ЭВМ.

Таблица 4. Круговые, показательные и гиперболические функции
(Аргумент в дуговых единицах и градусах) *

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	x в градусах
0,00	0,00000	1,00000	0,00000	1,00000	1,00000	0,00000	1,00000	0,00000	0,00
01	0,01000	0,99985	0,01000	1,01005	0,99005	0,01000	1,00005	0,01000	0,57
02	0,02000	0,99980	0,02000	1,02010	0,98010	0,02000	1,00020	0,02000	1,15
03	0,03000	0,99955	0,03001	1,03045	0,97045	0,03000	1,00045	0,02999	1,42
04	0,03999	0,99920	0,04002	1,04081	0,96079	0,04001	1,00080	0,03998	2,29
05	0,04978	0,99875	0,05004	1,05127	0,95123	0,05002	1,00125	0,04996	2,86
06	0,05956	0,99820	0,06007	1,06184	0,94176	0,06004	1,00180	0,05993	3,44
07	0,06934	0,99755	0,07011	1,07251	0,93239	0,07006	1,00245	0,06989	4,01
08	0,07911	0,99680	0,08017	1,08329	0,92312	0,08009	1,00320	0,07983	4,58
09	0,08888	0,99595	0,09024	1,09417	0,91393	0,09012	1,00405	0,08976	5,16
0,10	0,09883	0,99500	0,10033	1,10517	0,90484	0,10017	1,00500	0,09967	5,73
11	0,10878	0,99396	0,11045	1,11623	0,89583	0,11022	1,00606	0,10966	6,30
12	0,11871	0,99281	0,12058	1,12730	0,88692	0,12029	1,00721	0,11943	6,88
13	0,12863	0,99156	0,13074	1,13838	0,87810	0,13037	1,00846	0,12927	7,45
14	0,13854	0,99022	0,14092	1,14927	0,86936	0,14046	1,00982	0,13909	8,02
15	0,14844	0,98877	0,15114	1,16083	0,86071	0,15056	1,01127	0,14889	8,59
16	0,15832	0,98723	0,16138	1,17351	0,85214	0,16068	1,01283	0,15865	9,17
17	0,16818	0,98558	0,17165	1,18530	0,84366	0,17082	1,01448	0,16838	9,74
18	0,17803	0,98384	0,18197	1,19722	0,83527	0,18097	1,01624	0,17808	10,31
19	0,18886	0,98200	0,19232	1,20925	0,82696	0,19115	1,01810	0,18775	10,89
0,20	0,19867	0,98007	0,20271	1,22140	0,81873	0,20134	1,02007	0,19738	11,46
21	0,20846	0,97803	0,21314	1,23368	0,81058	0,21155	1,02213	0,20697	12,03
22	0,21823	0,97590	0,22362	1,24608	0,80252	0,22178	1,02430	0,21652	12,61
23	0,22798	0,97367	0,23414	1,25869	0,79453	0,23203	1,02657	0,22603	13,18
24	0,23770	0,97134	0,24472	1,27125	0,78663	0,24231	1,02894	0,23550	13,75
25	0,24740	0,96891	0,25534	1,28403	0,77880	0,25261	1,03141	0,24492	14,32
26	0,25708	0,96639	0,26602	1,29693	0,77105	0,26294	1,03399	0,25430	14,90
27	0,26673	0,96377	0,27676	1,30996	0,76338	0,27329	1,03667	0,26362	15,47
28	0,27636	0,96106	0,28755	1,32313	0,75578	0,28367	1,03946	0,27291	16,04
29	0,28595	0,95824	0,29841	1,33643	0,74826	0,29408	1,04235	0,28213	16,62
0,30	0,29552	0,95534	0,30934	1,34986	0,74082	0,30452	1,04534	0,29131	17,19
31	0,30506	0,95233	0,32033	1,36343	0,73345	0,31499	1,04844	0,30044	17,76
32	0,31457	0,94924	0,33139	1,37713	0,72615	0,32549	1,05164	0,30951	18,33
33	0,32404	0,94604	0,34252	1,39097	0,71892	0,33602	1,05495	0,31852	18,91
34	0,33349	0,94275	0,35374	1,40495	0,71177	0,34659	1,05836	0,32748	19,48
35	0,34290	0,93937	0,36503	1,41907	0,70469	0,35719	1,06188	0,33638	20,05
36	0,35227	0,93590	0,37640	1,43333	0,69768	0,36783	1,06550	0,34521	20,63
37	0,36162	0,93233	0,38776	1,44773	0,69073	0,37850	1,06923	0,35399	21,20
38	0,37092	0,92866	0,39941	1,46228	0,68386	0,38921	1,07307	0,36271	21,77
39	0,38019	0,92491	0,41105	1,47698	0,67706	0,39996	1,07702	0,37136	22,35
0,40	0,38942	0,92106	0,42279	1,49182	0,67032	0,41075	1,08107	0,37995	22,92
41	0,39861	0,91712	0,43461	1,50682	0,66365	0,42158	1,08523	0,38847	23,49
42	0,40776	0,91309	0,44657	1,52196	0,65705	0,43246	1,08950	0,39693	24,06
43	0,41687	0,90897	0,45862	1,53726	0,65051	0,44337	1,09388	0,40532	24,64
44	0,42594	0,90475	0,47078	1,55271	0,64404	0,45434	1,09837	0,41364	25,21
45	0,43497	0,90045	0,48306	1,56831	0,63763	0,46534	1,10297	0,42190	25,78
46	0,44395	0,89605	0,49545	1,58407	0,63128	0,47640	1,10768	0,43008	26,36
47	0,45289	0,89157	0,50797	1,59999	0,62500	0,48750	1,11250	0,43820	26,93
48	0,46178	0,88699	0,52061	1,61607	0,61878	0,49865	1,11743	0,44624	27,50
49	0,47063	0,88233	0,53339	1,63232	0,61263	0,50984	1,12247	0,45422	28,07
0,50	0,47943	0,87758	0,54630	1,64872	0,60653	0,52110	1,12763	0,46212	28,65

* Дополн. табл. для значений аргумента $\pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4, 2\pi$ (стр. 42).
 П р и м е ч а н и е. Для значений $x > 6,3$ будет 1) (по меньшей мере для 3 десятичных знаков) $\operatorname{sh} x \approx \operatorname{ch} x \approx \frac{1}{2} e^x$; расчет, как в прим. 2 (стр. 57); 2) $\operatorname{th} x \approx 1,00000$; 3) $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x$ равны соответственным значениям функций для значений аргумента $x - 2\pi, x - 4\pi, x - 6\pi, \dots$, лежащих между 0,0 и 6,3. — Следует считаться с пробой $\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x = e \pm x$.

Таблица 4. Круговые, показательные и гиперболические функции
(Аргумент в дуговых единицах и градусах) * (Продолжение)

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	x в градусах
0,50	0,47943	0,87758	0,54630	1,64872	0,60653	0,52110	1,12763	0,46212	28,65
51	0,48818	0,87274	0,55936	1,66329	0,60050	0,53240	1,13289	0,46995	29,22
52	0,49688	0,86782	0,57206	1,68203	0,59452	0,54375	1,13827	0,47770	29,79
53	0,50553	0,86281	0,58592	1,69893	0,58862	0,55516	1,14377	0,48538	30,37
54	0,51414	0,85771	0,59943	1,71611	0,58275	0,56663	1,14938	0,49299	30,94
55	0,52269	0,85252	0,61311	1,73325	0,57695	0,57815	1,15510	0,50052	31,51
56	0,53119	0,84726	0,62695	1,75067	0,57121	0,58973	1,16094	0,50798	32,09
57	0,53963	0,84190	0,64097	1,76827	0,56553	0,60137	1,16690	0,51536	32,66
58	0,54802	0,83646	0,65517	1,78604	0,55990	0,61307	1,17297	0,52267	33,23
59	0,55636	0,83094	0,66956	1,80399	0,55433	0,62483	1,17916	0,52990	33,80
0,60	0,56464	0,82534	0,68414	1,82212	0,54881	0,63665	1,18547	0,53706	34,38
61	0,57287	0,81965	0,69892	1,84043	0,54335	0,64854	1,19189	0,54413	34,95
62	0,58104	0,81388	0,71391	1,85893	0,53794	0,66049	1,19844	0,55113	35,52
63	0,58914	0,80803	0,72911	1,87761	0,53259	0,67251	1,20510	0,55805	36,10
64	0,59720	0,80210	0,74454	1,89648	0,52729	0,68459	1,21189	0,56490	36,67
65	0,60519	0,79608	0,76020	1,91554	0,52205	0,69675	1,21879	0,57167	37,24
66	0,61312	0,78999	0,77610	1,93479	0,51685	0,70897	1,22582	0,57836	37,82
67	0,62099	0,78382	0,79225	1,95424	0,51171	0,72126	1,23297	0,58498	38,39
68	0,62879	0,77757	0,80866	1,97388	0,50662	0,73363	1,24025	0,59152	38,96
69	0,63654	0,77125	0,82534	1,99372	0,50158	0,74607	1,24765	0,59798	39,53
0,70	0,64422	0,76484	0,84229	2,01375	0,49659	0,75858	1,25517	0,60437	40,11
71	0,65183	0,75826	0,85953	2,03399	0,49164	0,77117	1,26282	0,61068	40,68
72	0,65938	0,75181	0,87707	2,05443	0,48675	0,78384	1,27059	0,61691	41,25
73	0,66687	0,74517	0,89492	2,07508	0,48191	0,79659	1,27849	0,62307	41,83
74	0,67429	0,73847	0,91309	2,09594	0,47711	0,80941	1,28652	0,62915	42,40
75	0,68164	0,73169	0,93160	2,11700	0,47237	0,82232	1,29468	0,63515	42,97
76	0,68892	0,72484	0,95045	2,13828	0,46767	0,83530	1,30297	0,64108	43,54
77	0,69614	0,71791	0,96967	2,15977	0,46301	0,84838	1,31139	0,64693	44,12
78	0,70328	0,71091	0,98926	2,18147	0,45841	0,86153	1,31994	0,65271	44,69
* 79	0,71035	0,70385	1,00925	2,20340	0,45384	0,87478	1,32862	0,65841	45,26
0,80	0,71736	0,69671	1,02964	2,22554	0,44933	0,88811	1,33743	0,66404	45,84
81	0,72429	0,68950	1,05046	2,24791	0,44486	0,90152	1,34638	0,66959	46,41
82	0,73115	0,68222	1,07171	2,27050	0,44043	0,91503	1,35547	0,67507	46,98
83	0,73793	0,67488	1,09343	2,29332	0,43605	0,92863	1,36468	0,68048	47,56
84	0,74464	0,66746	1,11563	2,31637	0,43171	0,94233	1,37404	0,68581	48,13
85	0,75128	0,65998	1,13833	2,33965	0,42741	0,95612	1,38353	0,69107	48,70
86	0,75784	0,65244	1,16156	2,36316	0,42316	0,97000	1,39316	0,69626	49,27
87	0,76433	0,64483	1,18532	2,38691	0,41895	0,98398	1,40293	0,70137	49,85
88	0,77074	0,63715	1,20966	2,41090	0,41478	0,99806	1,41284	0,70642	50,42
89	0,77707	0,62941	1,23460	2,43513	0,41066	1,01224	1,42289	0,71139	50,99
0,90	0,78333	0,62161	1,26016	2,45960	0,40657	1,02652	1,43309	0,71630	51,57
91	0,78950	0,61375	1,28637	2,48432	0,40252	1,04090	1,44342	0,72113	52,14
92	0,79560	0,60582	1,31326	2,50929	0,39852	1,05539	1,45390	0,72590	52,71
93	0,80162	0,59783	1,34087	2,53451	0,39455	1,06998	1,46453	0,73059	53,28
94	0,80756	0,58979	1,36923	2,55998	0,39063	1,08468	1,47530	0,73522	53,86
95	0,81342	0,58168	1,39838	2,58571	0,38674	1,09948	1,48623	0,73978	54,43
96	0,81919	0,57352	1,42836	2,61170	0,38289	1,11440	1,49729	0,74428	55,00
97	0,82489	0,56530	1,45920	2,63794	0,37908	1,12943	1,50851	0,74870	55,58
98	0,83050	0,55702	1,49096	2,66446	0,37531	1,14457	1,51988	0,75307	56,15
99	0,83603	0,54869	1,52368	2,69123	0,37158	1,15983	1,53141	0,75736	56,73
1,00	0,84147	0,54030	1,55741	2,71828	0,36788	1,17520	1,54308	0,76159	57,30

* Дополнительная таблица для значений аргумента $\pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4, 2\pi$ (стр. 42).

Таблица 4. Круговые, показательные и гиперболические функции

(Аргумент в дуговых единицах и градусах) *

(Продолжение)

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	x в градусах
1,00	0,84147	0,54030	1,55741	2,71828	0,36788	1,17520	1,54308	0,76159	57,30
01	0,84683	0,53,86	1,59221	2,74560	0,36422	1,19069	1,55491	0,76576	57,87
02	0,85211	0,52337	1,62813	2,77319	0,36059	1,20630	1,56689	0,76987	58,44
03	0,85730	0,51482	1,66524	2,80107	0,35701	1,22203	1,57904	0,77391	59,01
04	0,86240	0,50622	1,70361	2,82922	0,35345	1,23788	1,59134	0,77789	59,59
05	0,86742	0,49757	1,74332	2,85765	0,34994	1,25386	1,60379	0,78181	60,16
06	0,87236	0,48887	1,78442	2,88637	0,34646	1,26996	1,61641	0,78566	60,73
07	0,87720	0,48012	1,82703	2,91538	0,34301	1,28619	1,62919	0,78946	61,31
08	0,88196	0,47133	1,87122	2,94468	0,33960	1,30254	1,64214	0,79320	61,88
09	0,88663	0,46249	1,91709	2,97427	0,33622	1,31903	1,65525	0,79688	62,45
1,10	0,89121	0,45360	1,96476	3,00417	0,33287	1,33565	1,66852	0,80050	63,03
11	0,89570	0,44466	2,01434	3,03436	0,32956	1,35240	1,68196	0,80406	63,60
12	0,90010	0,43568	2,06596	3,06485	0,32628	1,36929	1,69557	0,80757	64,17
13	0,90441	0,42666	2,11975	3,09566	0,32303	1,38631	1,70934	0,81102	64,74
14	0,90863	0,41759	2,17588	3,12677	0,31982	1,40347	1,72329	0,81441	65,32
15	0,91276	0,40849	2,23450	3,15819	0,31664	1,42078	1,73741	0,81775	65,89
16	0,91680	0,39934	2,29580	3,18993	0,31349	1,43822	1,75171	0,82104	66,46
17	0,92075	0,39015	2,35998	3,22,99	0,31037	1,45581	1,76618	0,82427	67,04
18	0,92461	0,38092	2,42727	3,26437	0,30728	1,47355	1,78083	0,82745	67,61
19	0,92837	0,37166	2,49790	3,29708	0,30422	1,49143	1,79565	0,83058	68,18
1,20	0,93204	0,36236	2,57215	3,32012	0,30119	1,50946	1,81066	0,83365	68,75
21	0,93562	0,35302	2,65033	3,35348	0,29820	1,52764	1,82584	0,83668	69,33
22	0,93910	0,34365	2,73275	3,38719	0,29523	1,54598	1,84121	0,83965	69,90
23	0,94249	0,33424	2,81982	3,42123	0,29229	1,56447	1,85676	0,84258	70,47
24	0,94578	0,32480	2,91193	3,45561	0,28938	1,58311	1,87250	0,84546	71,05
25	0,94898	0,31532	3,00957	3,49034	0,28650	1,60192	1,88842	0,84828	71,62
26	0,95209	0,30582	3,11327	3,52542	0,28365	1,62088	1,90454	0,85106	72,19
27	0,95510	0,29628	3,22363	3,56085	0,28083	1,64001	1,92084	0,85380	72,77
28	0,95802	0,28672	3,34135	3,59664	0,27804	1,65930	1,93734	0,85648	73,34
29	0,96084	0,27712	3,46721	3,63279	0,27527	1,67876	1,95403	0,85913	73,91
1,30	0,96356	0,26750	3,60210	3,66930	0,27253	1,69838	1,97091	0,86172	74,48
31	0,96618	0,25785	3,74708	3,71617	0,26982	1,71818	1,98800	0,86428	75,06
32	0,96872	0,24818	3,90335	3,76342	0,26714	1,73814	2,00528	0,86678	75,63
33	0,97115	0,23848	4,07231	3,81104	0,26448	1,75828	2,02276	0,86925	76,20
34	0,97348	0,22875	4,25462	3,85904	0,26185	1,77860	2,04044	0,87167	76,78
35	0,97572	0,21901	4,45022	3,90743	0,25924	1,79909	2,05833	0,87405	77,35
36	0,97786	0,20924	4,65944	3,95619	0,25666	1,81977	2,07643	0,87629	77,92
37	0,97991	0,19945	4,91306	3,99535	0,25411	1,84061	2,09473	0,87869	78,50
38	0,98185	0,18964	5,17744	3,97490	0,25158	1,86160	2,11324	0,88095	79,07
39	0,98370	0,17981	5,47069	4,01485	0,24908	1,88289	2,13196	0,88317	79,64
1,40	0,98545	0,16997	5,79789	4,05520	0,24660	1,90430	2,15090	0,88535	80,21
41	0,98710	0,16010	6,16536	4,09596	0,24414	1,92591	2,17005	0,88749	80,79
42	0,98865	0,15023	6,58112	4,13712	0,24171	1,94770	2,18942	0,88960	81,36
43	0,99010	0,14033	7,05547	4,17870	0,23931	1,96970	2,20900	0,89167	81,93
44	0,99146	0,13042	7,60183	4,22070	0,23693	1,99188	2,22881	0,89370	82,51
45	0,99271	0,12050	8,23810	4,26311	0,23457	2,01427	2,24884	0,89569	83,08
46	0,99387	0,11057	8,98861	4,30506	0,23224	2,03686	2,26910	0,89765	83,65
47	0,99492	0,10063	9,91550	4,34924	0,22993	2,05965	2,28958	0,89958	84,22
48	0,99588	0,09067	10,98338	4,39295	0,22764	2,08260	2,31029	0,90147	84,80
49	0,99674	0,08071	12,34986	4,43710	0,22537	2,10586	2,33123	0,90332	85,37
1,50	0,99749	0,07074	14,10142	4,48160	0,22313	2,12928	2,35241	0,90515	85,94

* Дополнительная таблица для значений аргумента $\pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4, 2\pi$ (стр. 42).

Для определения промежуточных значений рекомендуется пользоваться подробными таблицами К. Науашки. Пятизначные таблицы круговых и гиперболических функций, а также функций e^x и e^{-x} с натуральными числами как аргументом, Берлин и Лейпциг 1921 (Verein. wiss. Verleger).

Таблица 4. Круговые, показательные и гиперболические функции

(Аргумент в дуговых единицах и градусах)*

(Продолжение)

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	x в градусах
1,50	0,99749	0,07074	14,10142	4,48169	0,22313	2,12928	2,35241	0,90515	85,94
51	0,99815	0,06776	16,42809	4,51673	0,22091	2,15291	2,37382	0,90694	86,52
52	0,99871	0,06507	19,66966	4,57223	0,21871	2,17676	2,39547	0,90870	87,09
53	0,99917	0,06279	24,49841	4,61818	0,21654	2,20082	2,41736	0,91042	87,66
54	0,99953	0,06079	32,46114	4,66459	0,21438	2,22510	2,43949	0,91212	88,24
55	0,99978	0,05909	48,07849	4,71147	0,21225	2,24961	2,46186	0,91379	88,81
56	0,99994	0,01080	92,62050	4,75882	0,21014	2,27434	2,48448	0,91542	89,37
*57	1,00000	+0,00080	+1255,766	4,80665	0,20805	2,29930	2,50735	0,91703	89,95
58	0,99996	-0,00920	-118,6492	4,85496	0,20598	2,32449	2,53047	0,91860	90,53
*59	0,99982	-0,01920	-52,6668	4,90375	0,20393	2,34991	2,55384	0,92015	91,10
1,60	0,99957	-0,02920	-34,23254	4,95303	0,20190	2,37557	2,57746	0,92167	91,67
70	0,99166	-0,12884	-7,69660	5,47395	0,18268	2,64563	2,82832	0,93041	97,40
80	0,97385	-0,22720	-4,25626	6,04965	0,16530	2,94217	3,10747	0,94681	103,13
90	0,94530	-0,32329	-2,92710	6,68389	0,14957	3,26816	3,41773	0,95624	108,86
2,00	0,90930	-0,41615	-2,18504	7,38906	0,13534	3,62686	3,76220	0,96403	114,59
10	0,86321	-0,50485	-1,70985	8,16617	0,12246	4,02186	4,14431	0,97045	120,32
20	0,80850	-0,58850	-1,37382	9,02501	0,11180	4,45711	4,56791	0,97574	126,05
*30	0,74571	-0,66628	-1,11921	9,97418	0,10206	4,93696	5,03722	0,98010	131,78
40	0,67546	-0,73739	-0,91601	11,02318	0,09372	5,46623	5,55695	0,98367	137,51
50	0,59847	-0,80114	-0,74702	12,18249	0,08628	6,05200	6,13229	0,98661	143,24
60	0,51550	-0,85689	-0,60160	13,46374	0,07927	6,69473	6,76911	0,98903	148,97
70	0,42738	-0,90417	-0,47273	14,87973	0,07271	7,40026	7,47347	0,99101	154,70
80	0,33499	-0,94222	-0,35553	16,44435	0,06681	8,19192	8,25273	0,99263	160,43
90	0,23925	-0,97096	-0,24641	18,17415	0,06150	9,05956	9,11458	0,99396	166,16
3,00	0,14112	-0,98999	-0,14255	20,08554	0,04979	10,01787	10,06766	0,99505	171,89
*10	+0,04158	-0,99914	-0,04162	22,19785	0,04305	11,17645	11,12150	0,99595	177,62
20	-0,05837	-0,99829	+0,05847	24,53253	0,04076	12,45888	12,28665	0,99668	183,35
30	-0,15775	-0,98748	0,15975	27,11264	0,03683	13,93788	13,57476	0,99728	189,08
40	-0,25554	-0,96680	0,26442	29,96410	0,03337	14,96635	14,99874	0,99777	194,81
50	-0,35078	-0,93646	0,37470	33,11545	0,03020	16,54263	16,57282	0,99818	200,54
60	-0,44252	-0,89676	0,49347	36,59823	0,02732	18,28546	18,31178	0,99851	206,26
70	-0,52384	-0,84810	0,62473	40,44730	0,02472	20,21129	20,23691	0,99878	211,99
80	-0,61186	-0,79097	0,77356	44,70118	0,02237	22,36941	22,36178	0,99900	217,72
*90	-0,68777	-0,72593	0,94742	49,40245	0,02024	24,69110	24,71105	0,99918	223,45
4,00	-0,75680	-0,65364	1,15782	54,59815	0,01832	27,28992	27,30823	0,99933	229,18
10	-0,81828	-0,57482	1,42353	60,34029	0,01657	30,16186	30,17843	0,99945	234,91
20	-0,87158	-0,49026	1,77778	66,68633	0,01500	33,33537	33,35066	0,99955	240,64
30	-0,91617	-0,40080	2,28585	73,69979	0,01357	36,84311	36,85668	0,99963	246,37
40	-0,95160	-0,30733	3,09332	81,45087	0,01228	40,71930	40,73157	0,99970	252,10
50	-0,97753	-0,21080	4,63733	90,01713	0,01111	45,00391	45,01412	0,99975	257,83
60	-0,99369	-0,11215	8,86918	99,48432	0,01005	49,73713	49,74718	0,99980	263,56
*70	-0,99992	-0,01239	+80,71280	109,9472	0,00910	54,96901	54,97813	0,99983	269,29
80	-0,99616	+0,08750	-11,38487	121,5104	0,00823	60,75109	60,75932	0,99985	275,02
90	-0,98245	0,18651	-5,26749	134,2698	0,00745	67,14117	67,14861	0,99989	280,75
5,00	-0,95892	0,28366	-3,38052	148,4132	0,00674	74,20321	74,20995	0,99991	286,48
10	-0,92581	0,37798	-2,44939	164,0219	0,00610	82,00791	82,01400	0,99993	292,21
20	-0,88345	0,46852	-1,88564	181,2722	0,00552	90,63336	90,63988	0,99994	297,94
30	-0,83227	0,55437	-1,50128	200,3368	0,00499	100,1639	100,1709	0,99995	303,67
*40	-0,77276	0,63469	-1,21754	221,4064	0,00452	110,7009	110,7055	0,99996	309,40
50	-0,70554	0,70867	-0,99508	244,6919	0,00409	122,3439	122,3480	0,99997	315,13
60	-0,63127	0,77557	-0,81394	270,4264	0,00370	135,2114	135,2159	0,99997	320,86
70	-0,55069	0,83471	-0,65973	298,8674	0,00335	149,4320	149,4354	0,99998	326,59
80	-0,46460	0,88552	-0,52467	330,2996	0,00303	165,1483	165,1513	0,99998	332,32
90	-0,37388	0,92748	-0,40311	365,0375	0,00274	182,5174	182,5201	0,99999	338,05
6,00	-0,27942	0,96017	-0,29101	403,4288	0,00248	201,7132	201,7176	0,99999	343,77
*30	+0,01681	0,99986	+0,01681	544,5719	0,00184	272,2850	272,2859	0,99999	360,96

* Дополнит. таблица для значений аргумента $\pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4, 2\pi$ (стр. 42).