МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

Методические указания
к выполнению курсовой работы

ГУАП
Санкт-Петербург
2018

Составитель – А. Р. Жежерин
Рецензент – кандидат технических наук *Л. А. Федорова*

Содержат указания к выполнению и защите курсовой работы по дисциплине «Радиотехнические цепи и сигналы». Приведены формулы для расчетов спектров сигналов, характеристик линейных цепей и сигнала на выходе линейной цепи. Даны инструкции по выполнению проекта на персональном компьютере в пакете MathCAD и составлению отчета. Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров: «Радиотехника» (11.03.01), «Оптотехника» (12.03.02), «Лазерная техника и лазерные технологии» (12.03.05), «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» (11.03.02) и направлениям подготовки специалистов: «Радиоэлектронные системы и комплексы» (11.05.01), «Техническая эксплуатация транспортного оборудования» (25.05.03) дневного факультета.

Публикуется в авторской редакции.
Компьютерная верстка *Ю. В. Умницына*

Подписано к печати 28.12.18. Формат 60 × 84 1/16.
Усл. печ. л. 3,2. Тираж 50 экз. Заказ № 613.

Редакционно-издательский центр ГУАП
190000, Санкт-Петербург, Б. Морская ул., 67

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курсовая работа «Исследование прохождения сигналов через линейные цепи» выполняется студентами 2-го курса радиотехнического факультета и предназначена для закрепления теоретического материала по разделам: «Теория сигналов», «Линейные радиотехнические цепи».

В курсовой работе студенты должны исследовать спектральные характеристики периодических сигналов (как управляющих, так и радиосигналов), частотные характеристики линейных цепей, а также выполнить расчет сигнала на выходе линейной цепи, при заданном входном сигнале, спектральным методом.

ВВЕДЕНИЕ

Сигналы являются материальной формой информации. В современных системах передачи и обработки информации используются как электрические сигналы (которые передаются по проводным линиям связи), так и радиосигналы, (которые передаются при помощи электромагнитных волн). Для эффективного возбуждения и приема электромагнитных колебаний размеры антенны должны быть соизмеримы с длиной волны используемых колебаний.

Простейшая эффективная антенна в виде «штыря» должна иметь длину равную $\lambda/4$, где λ – длина электромагнитной волны. Для этого частота используемых электромагнитных волн должна быть более 100–300кГц. В то же время активная ширина спектра сигнала, несущего информацию, например, последние известия или концерт популярного певца, не превышает полосы частот – 10–16 кГц.

Если принять среднюю частоту используемой полосы частот – 3 кГц (так как $\lambda = c/f$, где c – скорость э/м волн – $3 \cdot 10^8$ м/с, f – рассматриваемая частота), то $\lambda/4 = 25$ км. Такой, для эффективной работы, должна быть длина штыревой антенны. Технически и экономически это невозможно.

Получается противоречие – эффективно могут возбуждаться, передаваться и приниматься в/ч колебания, а информация содержится в низкочастотном сигнале. Для разрешения этого противоречия низкочастотный информационный сигнал «сажают» на в/ч колебание, т. е. осуществляют управление одним из 3-х параметров электромагнитного гармонического колебания – амплитудой, частотой или начальной фазой. Т. е осуществляют модуляцию в/ч колебания.

Таким образом, *радиосигналом* называется модулированное в/ч колебание. В курсовой работе студенты будут изучать и рассчитывать характеристики и управляющих сигналов (низкочастотных сигналов, которые управляют параметрами в/ч колебаний) и характеристики радиосигналов.

При обработке и управляющих сигналов (активная часть спектра которых лежит в области низких частот) и радиосигналов, они проходят через линейные радиотехнические цепи. Задача этих цепей так преобразовать поступающий сигнал, чтобы содержащаяся в нем информация была представлена в виде наиболее удобном для потребителя. Например, если футбольный матч смотрит человек, ему нужно представить информацию в виде картинки на экране монитора телевизора и звука на выходе звуковых колонок. Если матч «смотрит» компьютер, то информация должна быть представлена в двоичном цифровом коде.

Поэтому, умение правильно выбирать и проектировать системы излучения и обработки принимаемых сигналов является главным в образовании р/инженера. Выполняя данную курсовую работу, студент будет учиться применять известные методы анализа прохождения сигналов через линейные цепи для изучения того, как цепи могут влиять на вид и характеристики сигнала.

В курсовой работе студенты должны исследовать спектральные характеристики периодических сигналов (как управляющих, так и радиосигналов), частотные характеристики линейных цепей, а также выполнить расчет сигнала на выходе линейной цепи, при заданном входном сигнале, спектральным методом.

1. ЗАДАНИЕ

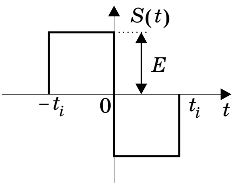
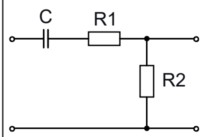
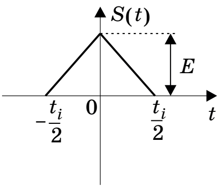
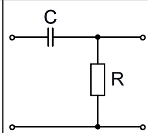
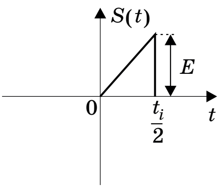
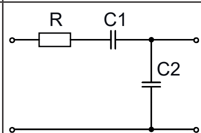
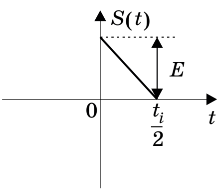
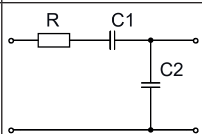
Студенту задаются:

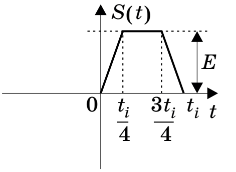
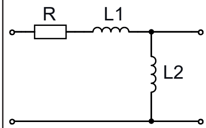
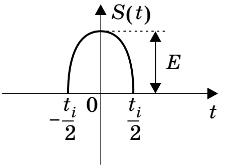
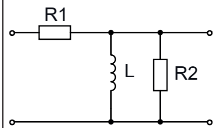
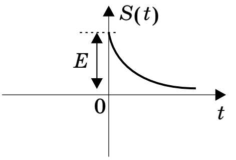
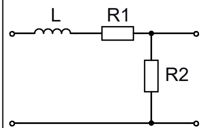
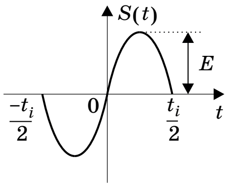
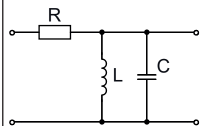
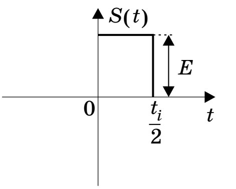
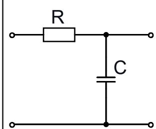
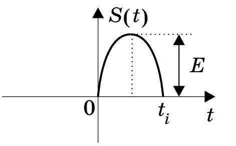
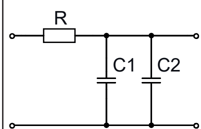
1. Графическое изображение сигнала – $S(t)$ на временном интервале $0 < t < T$ или – $-T/2 < t < T/2$ (табл. 1).

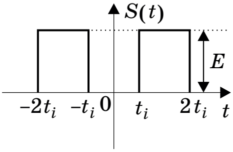
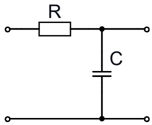
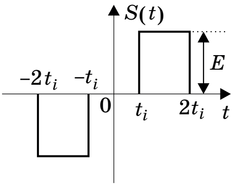
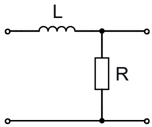
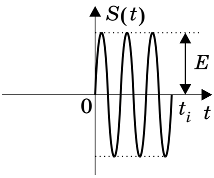
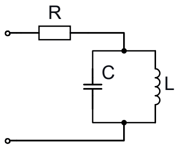
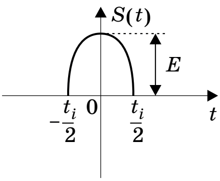
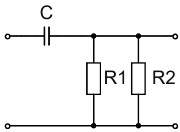
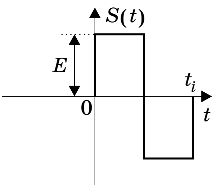
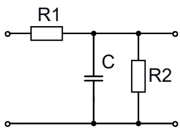
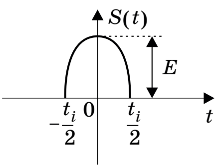
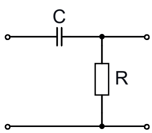
2. Принципиальная схема радиотехнической цепи (табл. 1).

Таблица 1

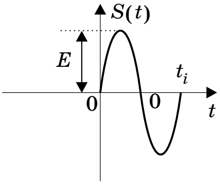
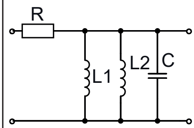
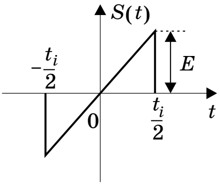
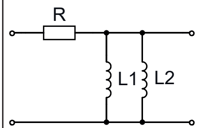
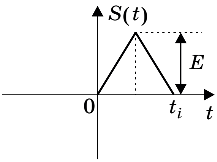
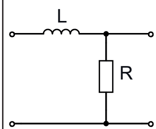
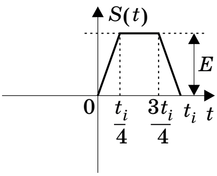
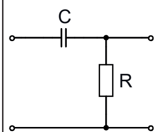
Варианты заданий

№	Сигнал		Схема	
1		$E = 2$ В $t_i = 20$ мкс $T = 100$ мкс		$R_1 = 1$ к $R_2 = 1$ к $C = 1$ нФ
2		$E = 1$ В $t_i = 25$ мкс $T = 100$ мкс $a_n = \frac{4E}{\pi^2 n^2} \times \sin^2 \frac{n\pi}{2}$		$R = 1$ к $C = 10^{-8}$ Ф
3		$E = 1$ В $t_i = 15$ мкс $T = 50$ мкс		$R = 1$ кОм $C_1 = 10$ нФ $C_2 = 1$ нФ
4		$E = 1$ В $t_i = 5$ мкс $T = 20$ мкс		$R = 1$ кОм $C_1 = 10$ нФ $C_2 = 2$ нФ

№	Сигнал		Схема	
5		$E = 100$ мВ $t_i = 4$ мкс $T = 50$ мкс		$R = 5$ кОм $L_1 = 1$ мГн $L_2 = 1$ мГн
6		$E = 6$ мВ $t_i = 15$ мкс $T = 50$ мкс		$R_1 = 1$ кОм $R_2 = 1$ кОм $L = 0{,}5$ мГн
7		$S(t) = E \cdot e^{-\alpha t}$ $E = 100$ мВ $\alpha = 2\pi \cdot 100 \frac{1}{c}$		$R_1 = 1$ кОм $R_2 = 1$ кОм $L = 10$ мГн
8		$E = 2$ В $t_i = 1$ мкс $T = 20$ мкс		$L = \frac{10^{-4}}{2\pi}$ Гн $C = \frac{1}{2\pi} 10^{-8}$ Ф $R = 0{,}5$ кОм
9		$E = 5$ мВ $t_i = 10$ мкс $T = 50$ мкс		$R = 5$ кОм $C = 10^{-9}$ Ф
10		$E = 10$ мВ $t_i = 20$ мкс $T = 100$ мкс		$R = 1$ кОм $C_1 = 0{,}5 \cdot 10^{-8}$ Ф $C_2 = 0{,}5 \cdot 10^{-8}$ Ф

№	Сигнал		Схема	
11		$E = 10$ мВ $t_i = 10$ мкс $T = 100$ мкс		$R = 500$ Ом $C = 10^{-6}$ Ф
12		$E = 1$ мВ $t_i = 1$ мкс $T = 10$ мкс		$R = 1$ кОм $L = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$ Гн $\left(L = 2 \cdot 10^{-4}\text{ Гн}\right)$
13		$E = 10$ мВ $t_i = 20$ мкс $T = 100$ мкс $f_0 = 10^6$ Гц		$R = 10$ кОм $L = \frac{10^{-3}}{2\pi}$ Гн $C = \frac{10^{-9}}{2\pi}$ Ф
14		$E = 10$ мВ $t_i = 10$ мкс $T = 50$ мкс		$R_1 = 1$ кОм $R_2 = 1$ кОм $C = 0{,}1$ мкФ
15		$E = 2$ В $t_i = 2$ мкс $T = 20$ мкс		$R_1 = 1$ кОм $R_2 = 5$ кОм $C = 10$ нФ
16		$E = 100$ мВ $t_i = 5$ мкс $T = 40$ мкс		$C = 5 \cdot 10^{-9}$ Ф $R = 0{,}5$ кОм

Окончание табл. 1

№	Сигнал		Схема	
17		$E = 20$ мВ $t_i = 1$ мкс $T = 20$ мкс		$R = 0{,}5$ кОм $L_1 = \dfrac{1 \cdot 10^{-4}}{2\pi}$ Гн $L_2 = \dfrac{1 \cdot 10^{-4}}{2\pi}$ Гн $C = \dfrac{2 \cdot 10^{-8}}{2\pi}$ Ф
18		$E = 100$ мВ $t_i = 10$ мкс $T = 50$ мкс		$R = 1$ кОм $L_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ Гн $L_2 = 5 \cdot 10^{-3}$ Гн
19		$E = 1$ мВ $t_i = 10$ мкс $T = 5 \cdot 10^{-6}$ мкс		$t_i = 20$ мкс $T = 100$ мкс
20		$E = 10$ мВ $t_i = 20$ мкс $T = 100$ мкс		$R = 1$ кОм $C = 10^{-8}$ Ф

Используя систему *MathCAD*, требуется:

1. Записать аналитическое выражение (формулу) – $S(t)$ для заданного сигнала и по этой формуле построить его график в MathCAD на временном интервале $0 < t < T$ или $-T/2 < t < T/2$, выбрав удобный масштаб.

2. Образовать периодический сигнал путем повторения функции $S(t)$ с периодом T.

3. Записать аналитические выражения и вычислить амплитудный и фазовый спектры этого сигнала. Построить спектральные

диаграммы вычисленных спектров. Найти активную ширину спектра сигнала по методике, изложенной в методических указаниях. Вычислить какая часть средней за период мощности сигнала содержится в активной части спектра.

4. Построить (синтезировать) периодический сигнал, учитывая только активную ширину его спектра. Определить погрешность синтеза. Показать возможность уменьшения этой погрешности. Объяснить, зачем нужно синтезировать заданный сигнал по активной части спектра.

5. По заданной схеме цепи вывести выражение для комплексного коэффициента передачи цепи. Построить графики амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик цепи, выбрав нужный масштаб частотной оси. Найти полосу пропускания цепи. Сравнить частотные диапазоны полосы пропускания цепи и активной ширины спектра сигнала. Объяснить необходимость такого сравнения.

6. Используя спектральный метод анализа, вычислить напряжение на выходе цепи при условии, что входное напряжение является периодическим сигналом. Построить график вычисленного сигнала. Сравнить сигнал на входе и выходе цепи и сделать выводы о причинах его изменения.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ

2.1. Представления периодических сигналов

При изучении физических явлений и процессов, при разработке технических устройств важным моментом является выработка представлений и понятий. Природа не объясняет своих явлений и причин их возникновения. Вся современная наука и практика Человека построена на представлениях, которые он придумывает сам. Если эти представления объясняют экспериментальные результаты, полученные на основе этих представлений, то такие представления верны (с точки зрения Человека) и составляют основу научных знаний. Правильные представления порождают понятия, которыми люди повсеместно пользуются на практике. Невозможно обсуждать какую-либо тему или предмет, не пользуясь понятиями. Поэтому мы сначала рассмотрим некоторые важные для понимания курсовой работы представления. На основе этих представлений студент должен получить, выучить и затем уметь применять определенные понятия, касающиеся материала курсовой работы.

На данном этапе изучения сигналов, абстрагируясь от их физической природы, будем рассматривать сигналы, как функции времени.

Гармоническая функция может быть записана

$$S(t) = E \cdot \cos(\omega t + \Theta),$$

где E – амплитуда, $\omega=2\pi f$, f – частота, Θ – начальная фаза, ωt – текущая фаза, $\psi(t) = (\omega t + \Theta)$ – полная фаза.

Период функции $S(t)$, как функции времени, равен $T = 1/f = 2\pi/\omega$. Однако, известно, что за период (если $\Theta = 0$) полная фаза гармонической функции «набегает» – 2π. На рис. 1 $S_1(t) = E\sin\omega t$ $(\Theta = 0)$, $S_2(t) = E\sin(\omega t - \Theta_2)$, $S_3(t) = E\sin(\omega t + \Theta_3)$.

Из рисунка видно, что функция $S_2(t)$ сдвинута относительно начала отсчета на $t = t_з$. Этот сдвиг соответствует начальной фазе Θ. Для определения Θ составим соотношение – T соответствует 2π, $t_з$ соответствует Θ. Тогда $\Theta=2\pi t_з/T$. Таким образом, гармоническую функцию $E\sin(\omega t - \Theta_2)$ можно представить, как сдвинутую на $t = t_з$ функцию $E\sin\omega t$.

Замечание. Θ – является величиной относительной. Она может принимать знаки $\pm$. Если гармонический сигнал, например $S_2(t)$, задержан относительно исходного сигнала $S_1(t)$ $(\Theta_1 = 0)$, то Θ_2 приписывается знак (-). Если сигнал, например $S_3(t)$, опережает $S_1(t)$

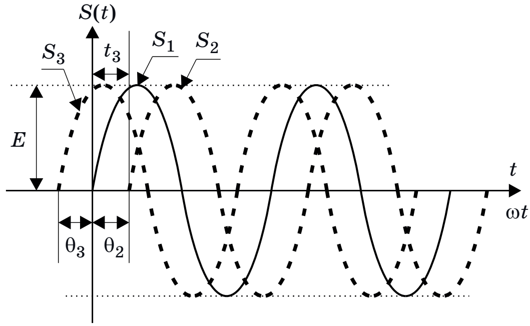


Рис. 1. Определение начальной фазы гармонического сигнала

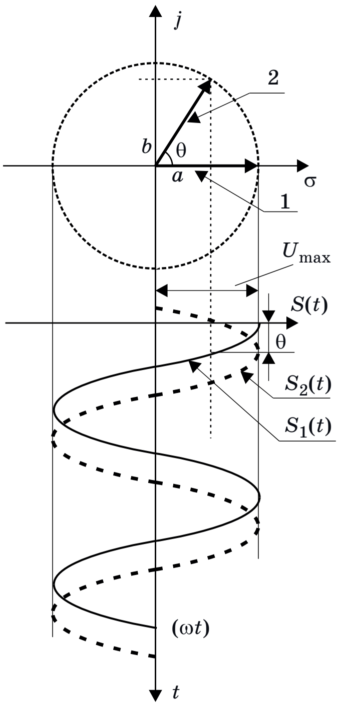


Рис. 2. Представление гармонического колебания в виде вектора, вращающегося на комплексной плоскости

(сдвинут влево от S_1), то Θ_3 приписывается знак (+).

(Если по оси X откладывать время t, то период функции $S(t)$ равен – T. Если по оси X откладывать фазу, то период функции $S(\Theta)$ равен – 2π).

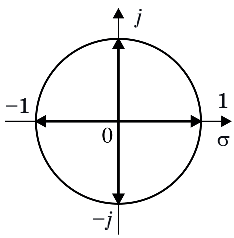
Гармонический сигнал удобно представлять вектором, вращающимся на комплексной плоскости против часовой стрелки. Любой вектор представляется своей длиной и направлением. На рис. 2 представлена гармоническая функция $S_1(t)$ (косинусоида) и соответствующий ей вращающийся на комплексной плоскости (j, σ) вектор. В момент $t = 0$ $S_1(t) = U_{\text{макс}}$, и вектор 1 (длиной $U_{\text{макс}}$) занимает горизонтальное положение. Его угол относительно оси σ равен 0 (т. е. $\Theta_1 = 0$). Другой вектор 2, (той же длины $U_{\text{макс}}$) соответствующий гармонической функции $S_2(t)$, в тот же момент времени $t = 0$, имеет угол относительно оси σ $\Theta_2 = \Theta$. Когда время начнет меняться, мгновенные значения сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$ начнут принимать значения в соответствии с формулой $S(t)=U_{\text{макс}}\cdot\cos(2\pi f t)$, а вектора начнут вращаться против часовой стрелки с угловой скоростью $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$, где T – период гармонических колебаний. За время, равное периоду T, вектора совершат полный оборот.

Гармонические колебания $S_1(t)=U_{\text{макс}}\cos(\omega t)$ и $S_2(t)=$ $=U_{\text{макс}}\cos(\omega t+\Theta)$ в комплексном виде представляются $\mathbf{S_1}(t)=$ $=U_{\text{макс}}e^{j0}\cdot e^{j\omega t}$, $\mathbf{S}_2(t)=U_{\text{макс}}e^{j\Theta}\cdot e^{j\omega t}$. $\mathbf{U}=U_{\text{макс}}e^{j\Theta}$ называется комплексной амплитудой. Она несет информацию об амплитуде и начальной фазе гармонического сигнала. Член $e^{j\omega t}$ характеризует косинусоиду с частотой $\omega=2\pi f$. Таким образом, гармонические колебания $S_1(t)$ и $S_2(t)$ имеют одинаковые амплитуды и одинаковые частоты, но разные комплексные амплитуды $U_{\text{макс}}e^{j0}$ и $U_{\text{макс}}e^{j\Theta}$. Если сравнивать 2 гармонических сигнала, имеющих одинаковую частоту f, то можно сравнивать только их комплексные амплитуды.

Замечание. Используя рассмотренное представление вектора на комплексной плоскости, можно выразить действительные числа 1, (−1) и мнимые числа j, ($-j$) в показательной форме, см. рис. 3. Это потребуется при дальнейших вычислениях.

Далее рассмотрим представление, известное из линейной алгебры (нужно вспомнить 1-й курс). Если среди множества векторов, выбрать те вектора, чье скалярное произведение ($ab\cdot\cos\varphi$, где a и b модули векторов, а φ – угол между ними) равно 0 ($\varphi=\pi/2$), то такие вектора образуют базис (или систему координат). Тогда любой вектор в таком пространстве векторов может быть представлен, как сумма его проекций на ортогональные вектора (оси системы координат). Например, для 3-х мерного пространства это представление записывается

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3=\sum_{n=1}^{3}x_n\mathbf{e}_n,$$



$$1=1\cdot e^{j0}$$

$$j=1\cdot e^{j\pi/2}$$

$$-1=1\cdot e^{j\pi}$$

$$-j=1\cdot e^{j\frac{3}{2}\pi}=1\cdot e^{-j\frac{3}{2}\pi}$$

Рис. 3. Представление действительных и мнимых чисел в показательной форме где $\mathbf{e}_n$ – ортонормированные вектора.

Для n-мерного пространства можно записать

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \mathbf{e}_n,$$

Если в качестве *элементов пространства* выбрать функции, то ортогональными будут функции, чье скалярное произведение равно 0. Условие ортогональности для функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ записывается

$$\int_a^b f_1(t) \cdot f_2(t) dt = 0,$$

где a и b – интервалы задания функций.

В радиотехнике в качестве ортогональных (или базисных) функций выбираются функции $\sin(\Omega t)$ и $\cos(\Omega t)$. Эти функции определены на временном интервале, равном периоду функций – T. Можно показать, что

$$\int_0^T \sin(\Omega t) \cdot \cos(\Omega t) dt = 0 \qquad (1)$$

так как $\sin(\Omega t) \cdot \cos(\Omega t) = 1/2(\sin(2\Omega t) + \sin 0)$.

Таким образом, в пространстве периодических функций, периодические функции $\sin(\Omega t)$ и $\cos(\Omega t)$ могут образовать базис (или систему координат), так же, как ортогональные вектора в векторном пространстве. Тогда, используя такое представление, можно сказать, что любая периодическая функция $S(t \pm T)$ может быть представлена в виде суммы проекций на ортогональные функции (сравнить с векторами). Можно записать

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\Omega t) + b_n \cdot \sin(n\Omega t). \qquad (2)$$

Соотношение (2) носит название ряд Фурье и говорит о том, что любой периодический сигнал $S(t)$ может быть представлен (опять пользуемся понятием представление) в виде суммы гармонических составляющих. Эта форма ряда носит название тригонометрический ряд Фурье. Гармонические функции были выбраны в качестве *базисных*, так как они обладают уникальным свойством. При прохождении таких сигналов через линейные цепи они не меняют свою форму (т. е. остаются гармоническими той же частоты).

Тригонометрический ряд Фурье может быть записан в другой форме

$$S(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot\cos(n\Omega t+\Theta_n). \qquad (3)$$

Замечание.

$$A_n\cdot\cos(n\Omega t+\Theta_n)=A_n\cdot\left[\cos\Theta_n\cdot\cos(n\Omega t)-\sin\Theta_n\cdot\sin(n\Omega t)\right].$$

Если обозначить $a_n=A_n\cdot\cos\Theta_n$, $b_n=A_n\cdot\sin\Theta_n$ то ряд (3) будет эквивалентен ряду (2).

$$A_n=\sqrt{a^2+b^2} \qquad (4)$$

$$arctg(b_n/a_n) \qquad (5)$$

Если использовать **формулу Эйлера** для представления гармонической функции

$$A_n\cdot\cos(n\Omega t+\Theta_n)=\left[A_n\cdot e^{j\Theta_n}\cdot e^{jn\Omega t}+A_{-n}\cdot e^{-j\Theta_n}\cdot e^{-jn\Omega t}\right]/2,$$

то ряд (3) можно представить в виде

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\mathbf{A}_n\cdot e^{jn\Omega t},\ \text{где}\ \mathbf{A}_n=A_n\cdot e^{j\Theta_n} \qquad (6)$$

В формулах (3) – (6) $\Omega=2\frac{\pi}{T}$, $\left(f=\frac{1}{T}\right)$ определяет частоту 1-й гармоники, n – номер гармоники.

Распределение амплитуд A_n гармоник по частотам ($n\Omega$ или nf) называется амплитудным *спектром периодического сигнала*, а распределение начальных фаз Θ_n по частотам называется фазовым спектром сигнала.

Для периодической последовательности импульсов (любой формы) можно записать

$$\mathbf{A}_n=A_n\cdot e^{\,j\Theta_n}=\frac{2}{T}\cdot\int_0^{t_и}s(t)\cdot e^{-jn\Omega}dt, \qquad (7)$$

$$\frac{A_0}{2}=\frac{1}{T}\cdot\int_0^{t_и}S(t)dt, \qquad (8)$$

где $\mathbf{A}_n$ – комплексная амплитуда n-й гармоники, T – период сигнала, $t_и$ – длительность импульса. Ясно, что распределение по частотам $|\mathbf{A}_n| = A_n$ – характеризует амплитудный спектр, а аргумент $\mathbf{A}_n$ – фазовый спектр.

Так как на языке Mathcad можно выполнять действия с комплексными числами, то целесообразно для определения амплитудного и фазового спектров пользоваться формулой (7).

Амплитудный и фазовый спектры периодического сигнала $S(t)$ являются дискретными функциями, так как A_n и Θ_n определены на дискретных частотах – $n\Omega = 2n\pi/T$. Расстояние между соседними гармониками равно

$$\Omega = 2\frac{\pi}{T} \text{ или } f = \frac{1}{T}. \tag{9}$$

В задании к курсовой работе исследуемый сигнал задан в виде графика функции $S(t)$. Для расчета $\mathbf{A}_n$ требуется записать $S(t)$ аналитически, т. е. в виде формулы.

Приведем примеры записи некоторых $S(t)$.

Пример 2.1. Прямоугольный импульс. Амплитуда $E = 1$ В, $t_i = 5 \cdot 10^{-6}$ с, $S(t) = E,\ 0 < t < t_i,\ S(t) = 0,\ T > t \ge t_i$.

График сигнала приведен на рис. 3*а*.

Периодический сигнал записывается $S_p(t) = S(t \pm T)$.

Пример 2.2. Синусоидальный импульс. E = 10В, $S(t)$ – представляет собой импульс длительностью в $1/2$ периода синусоиды. Период синусоиды, формирующей этот импульс, $T_\text{с} = 2t_i$ (показан пунктиром на рис. 3*в*). $S(t) = E \cdot \sin t/t\text{и} > t \ge 0,\ 0,\ T > t \ge t_i$.

Рис. 3а. График прямоугольного импульса

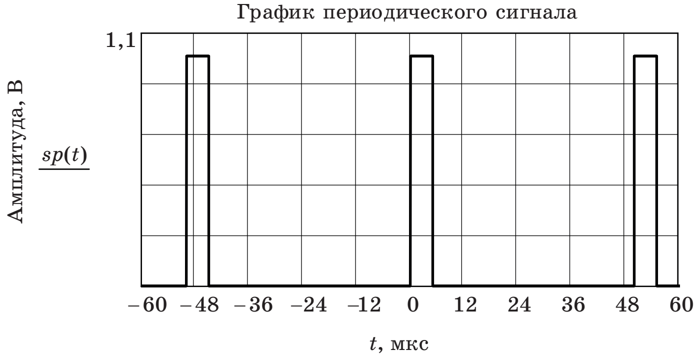


Рис. 3б. График периодической последовательности прямоугольных импульсов

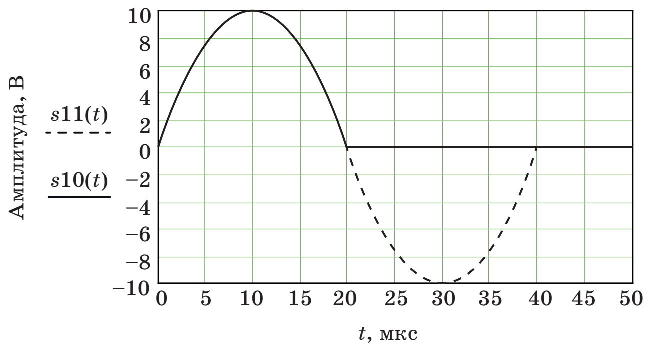


Рис. 3в. Объяснение построения графика синусоидального импульса

Так как формула требует задания сигнала в интервале $0 < t < T$, а учитывая, что $S(t) = 0$ для $t > t_i$, то задается интервал изменения $t < T$ (t– в мкс.).

Запись сигнала $S(t)$ из примера 2.2 на языке Mathcad представлена на рис. 3*г*.

Для построения графика $S(t)$ (чтобы проверить правильность записанной формулы) нужно выбрать иконку «график». Появятся оси x и у. По оси у нужно вставить $S(t)$, а по оси X-t. Вид синусоидального импульса показан на рис. 3*д*.

Далее нужно образовать периодический сигнал $S_p(t) = S(t + T)$. В программе Mathcad это выглядит так (рис. 3*е*).

$$E := 10\cdot 10^{-3} \quad ti := 20\cdot 10^{-6} \quad T := 100\cdot 10^{-6}$$

$$dt := \frac{ti}{100} \quad t := 0, dt .. ti$$

$$s10(t) := \left| \begin{array}{ll} E\cdot\sin\left(\frac{\pi}{ti}\cdot t\right) & \text{if } 0 < t < ti \\ 0 & \text{otherwise} \end{array} \right.$$

Рис. 3г. Пример записи сигнала из программы Mathcad

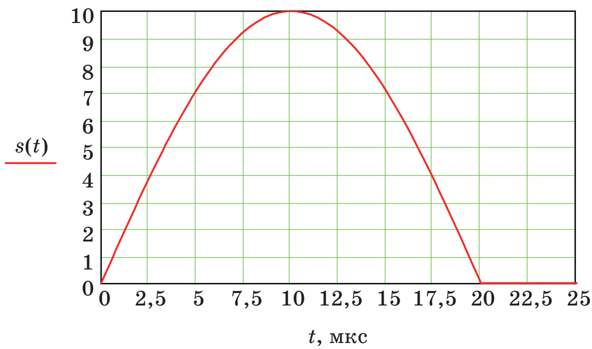


Рис. 3д. График синусоидального импульса. $S(t)$ – В, t – мкс

$$t := -1.5\cdot T, -1.5\cdot T + \frac{ti}{100} .. 1.5\cdot T \qquad sp(t) := \sum_{k=-2}^{2} s10(t - k\cdot T)$$

Рис. 3е. Пример записи периодического сигнала из программы Mathcad

После того как графически заданный сигнал записан в аналитическом виде, нужно воспользоваться формулой (7) и рассчитать $\mathbf{A}_n$. Затем, используя меню Mathcad, нужно построить график $Ak_n(nf) = |\mathbf{A}_n(nf)|$ – амплитудного спектра, где Ak_n – амплитуда n-ой гармоники, $f = 1/T$, n – номер гармоники. Ak_n – является индексированной переменной (n – номер гармоники), поэтому нужно задать диапазон изменения n, т. е. $n = 0...N$, где N – число рассчитываемых амплитуд гармоник в спектре.

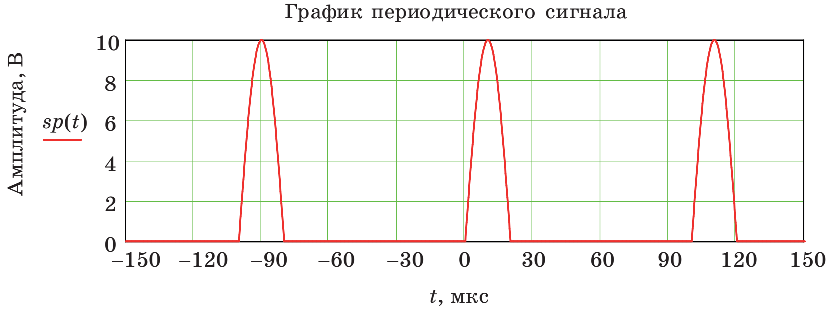


Рис. 4. График периодического сигнала «общего вида»

Расчет амплитудного и фазового спектров сигнала может быть упрощен, если сигнал $S(t)$ может быть представлен в виде четной или нечетной функции времени.

Замечание.

Функция $S(t)$ называется четной, если выполняется равенство $S(t) = S(-t)$.

Пример четной периодической функции показан на рис. 5.

Четный периодический сигнал может быть представлен рядом Фурье следующего вида

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos n\Omega t. \qquad (11)$$

Ряд содержит только косинусоидальные гармоники и начальные фазы гармоник $\Theta_n = 0$.

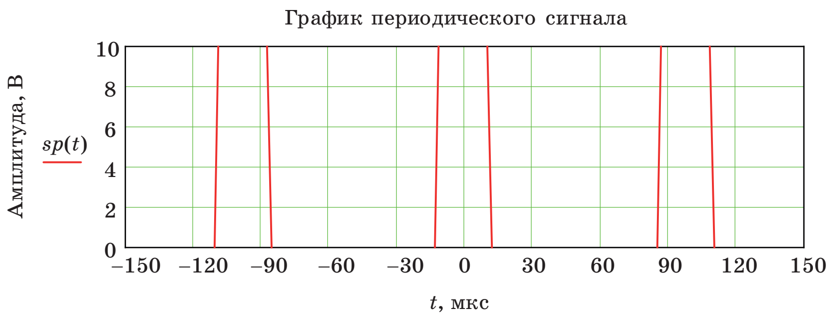


Рис. 5. График четного периодического сигнала

Для построения амплитудного спектра необходимо рассчитать коэффициенты а$_n$.

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\cdot\int_0^{t_и}S(t)dt,\quad a_n=\frac{2}{T}\cdot\int_0^{t_и}S(t)\cdot\cos(n\Omega t)dt, \tag{12}$$

Поскольку начальные фазы гармоник $\Theta_n=0$, фазовый спектр такого сигнала равен 0.

Функция $S(t)$ называется нечетной, если выполняется равенство $S(t)=-S(-t)$.

Пример нечетной периодической функции показан на рис. 6.

Нечетный периодический сигнал может быть представлен рядом Фурье следующего вида

$$S(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot\sin n\Omega t. \tag{13}$$

Ряд содержит только синусоидальные гармоники и начальные фазы гармоник $\Theta_n=0$.

Для построения амплитудного спектра необходимо рассчитать коэффициенты b_n.

$$b_n=\frac{2}{T}\cdot\int_0^{tи}S(t)\cdot\sin(n\cdot\Omega\cdot t)dt, \tag{14}$$

Поскольку начальные фазы гармоник $\Theta_n=0$, фазовый спектр такого сигнала равен 0.

Представление сигнала в виде четной или нечетной функции имеет смысл при расчете спектров без применения компьютера, так как

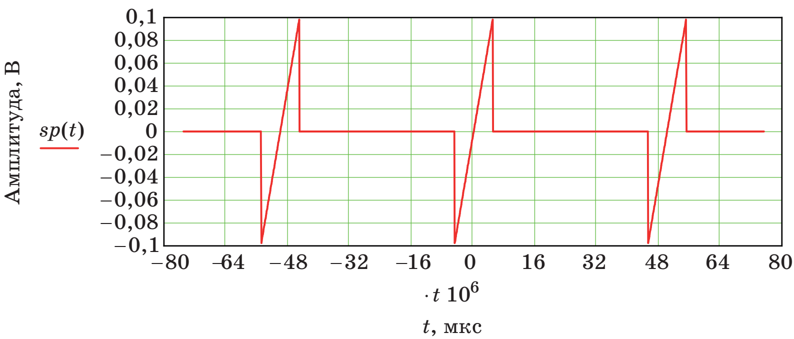


Рис. 6. График нечетной периодической функции

в этом случае уменьшается объем производимых вычислений и упрощается процедура взятия интеграла. Однако, студент при этом хуже осваивает процедуру нахождения коэффициентов ряда и построения спектров для сигнала «общего» вида (см. рис. 4). Хотя представление сигнала в «общем» виде наиболее часто используется на практике.

Так как теоретически спектр содержит бесчисленное число гармоник ($n = \infty$), то в начале расчета нужно задать $N = 20–30$. Для радиосигнала $N = 100$. После расчета $\mathbf{A}_n$ ряд Фурье нужно использовать в форме (3). В этой формуле есть член $A_0/2$ (постоянная составляющая). Поэтому, для построения на графике амплитудного спектра составляющей $A_0/2$, в программе, после формулы (7), нужно сделать запись $Ak_n = if\left(n > 0, \left|\mathbf{A}_n\right|, \left|\mathbf{A}_n\right| \cdot 0.5\right)$. Это означает, что программа Mathcad при построении графика амплитудного спектра должна при $n = 0$ отложить на графике – $A_0/2$, а при $n > 0$ отложить на графике амплитуды остальных гармоник, равными рассчитанным. Далее в меню программы нужно выбрать значок «графика». Появятся оси x и у. По оси у нужно вставить $Ak_n / Ak_{\max}$, а по оси x – либо номер гармоники – n, либо $f = n/T$, где $1/T$ – частота 1-ой гармоники. Лучше построить оба графика. Затем (по той же методике) построить график фазового спектра заданного периодического сигнала.

Основными энергетическими характеристиками вещественного сигнала $S(t)$ являются его энергия и мощность. При передаче сигналов главное внимание уделяется передаче информации, а не энергии. Тем не менее энергия и мощность являются важнейшими характеристиками сигналов.

В правильно построенной технической системе тип сигнала должен быть выбран таким образом, чтобы задачи системы выполнялись при минимальных затратах энергии.

Вводится понятие *мгновенная мощность сигнала* $S(t)$ – р(t).

$$p(t) = S^2(t) \tag{15}$$

Если $S(t)$ – напряжение или ток, то мгновенная мощность – это мощность, выделяемая на сопротивлении в 1 Ом.

Энергия G периодического сигнала определяется по формуле

$$G = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} p(t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S^2(t)dt. \tag{16}$$

Средняя мощность $P_{ср}$ периодического сигнала определяется

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \cdot \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S^2(t)dt. \tag{17}$$

Подставив сигнал $S(t)$, записанный в виде ряда Фурье по формуле (3), можно записать

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \cdot \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\Omega t + \Theta_n) \right)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(A_0^2/4\right)dt + 1/T \times \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\Omega t + \Theta_n)dt +$$

$$+ \frac{1}{T} \cdot \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \cdot \cos^2(n\Omega t + \Theta_n)dt.$$

Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n^2 \cdot \cos^2(n\Omega t \cdot \Theta_n) = \dfrac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n^2}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n^2 \cdot \cos(2n\Omega t + \Theta_n)$ и $\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$ от всех членов, содержащих $\cos(n\Omega t + \Theta_n)$ и $\cos(2n\Omega t + \Theta_n) = 0$, то

$$P\text{ср} = \frac{1}{T} \cdot \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S^2(t)dt = \frac{A_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \Big/ 2. \tag{18}$$

Это равенство называется равенством Парсеваля и говорит о том, что средняя мощность периодического сигнала за период (т. е. определенная во временной области) равна сумме квадратов амплитуд его спектральных составляющих (с коэффициентом $1/2$) и $A_0^2/4$.

Теоретически амплитудный спектр содержит бесчисленное число гармоник. Практически при расчетах всегда пользуются конечным числом гармоник. Для конкретизации этого числа вводится понятие – *активная ширина спектра*. Активной шириной спектра называется область частот, в которой сосредоточена большая часть (общепринято 90%) средней мощности сигнала. Обозначим ее P_a.

$$Pa = 0.9P\text{ср}=\frac{A_0^2}{4}+\sum_{n=1}^{Na}\frac{A_n^2}{2}, \tag{19}$$

где N_a – количество гармоник в активной ширине спектра. Оно находится из этого соотношения.

Для упрощения нахождения N_a студентам предлагается определять активную ширину спектра по уровню 0,05 от нормированных (по макс. гармонике) амплитуд гармоник рассчитанного спектра. Для этого (в указанном ранее порядке) строится график $Ak_n / Ak_{n\,\max} = f(n)$. $Ak_{n\,\max}$ определяется на ранее построенном графике амплитудного спектра сигнала. На графике $Ak_n / Ak_{n\,\max} = f(n)$ откладывается уровень 0.05 и определяется номер той гармоники, амплитуда которой первой не превысит этот уровень. Этот номер и определит N_a.

Необходимость определения N_a объясняется тем, что заданный сигнал практически (при расчете) может быть представлен рядом Фурье (3) только с конечным числом гармоник. Но, тогда сигнал $S_1(t)$, представленный конечным числом гармоник N_a, будет отличаться от заданного сигнала $S(t)$. Оба сигнала задаются на временном интервале $t = -T/2 \ldots T/2$. В практике вычислений похожесть двух функций (точность совпадения на заданном отрезке времени, в данном случае на периоде T) численно определяется величиной, называемой среднеквадратической ошибкой – Δ.

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[S1(t)-S2(t)\right]^2 dt} \; . \tag{20}$$

Если рассматриваемый сигнал представляет собой напряжение на входе цепи, то ошибка имеет размерность «В» (такую же как размерность заданного сигнала).

Для определения Δ нужно рассчитать сигнал $S_1(k\cdot\Delta t)$ по формуле

$$S_1(k\Delta t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{Na} A_n \cdot \cos(n\Omega k\Delta t + \Theta_n) \tag{20a}$$

в интервале времени $t = -T/2 \ldots T/2$ с шагом Δt, где $\Delta t = T/R$ (R количество отсчетных точек в периоде T) определяет шаг при представлении сигнала $S(t) = S(k\Delta t)$ и рассчитанного в тех же точках, что и сигнал $S_1(k \cdot \Delta t)$. Среднеквадратическая ошибка вычисляется по формуле

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{R} \cdot \sum_{k=-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} \left[S_1(k\Delta t) - S_2(k\Delta t)\right]^2 \Delta t}. \tag{21}$$

Замечание. Количество отсчетных точек может быть взято меньше R, так как $S_1(t)$ (при $t < -t_i/2$ и $t > t_i/2$ для четного сигнала и $t < 0$, $t > t_i$ для сигнала общего вида) осциллируя стремится к 0. Точность представления может быть выражена в %.

$$\Delta 1 = \frac{\Delta^2}{P\text{ср}} \cdot 100\%.$$

Восстановление сигнала (или синтез сигнала по конечному числу гармоник) имеет важное значение при расчетах.

Линейные р/технические цепи служат для обработки поступающих на них электрических сигналов, т. е. они изменяют сигналы в соответствии с требованиями потребителя. Сигнал обрабатывается таким образом, чтобы содержащаяся в нем информация была *представлена* в форме, удобной пользователю.

Например, как было сказано во введении, если хоккейный матч по телевизору смотрит человек, то принятый сигнал (э/м волна) должен быть преобразован в электрический сигнал (это делает антенна), усилен (в/ч усилитель), преобразован по частоте (это делает преобразователь частоты, чтобы осуществить дальнейшее усиление), продетектирован и снова усилен. Сигнал изображения выделяется из общего телевизионного н/ч сигнала и управляет работой кинескопа или «плазмы». Сигнал звука выделяется и подается усиленным на динамики. Человек видит картинку и слышит комментарии комментатора. Так как человек воспринимает информацию и глазами, и ушами, то эти 2 канала информации ему необходимы. В сложном телевизионном сигнале сигнал изображения представлен А/М радиосигналом, а сигнал звука – ЧМ радиосигналом (см. раздел лекций по РТЦиС «радиосигналы»). Если матч будет «смотреть» компьютер, то для него информация должна быть представлена в цифровом виде (в виде блока бит). В этом случае, принятый антенной сигнал подвергается другой обработке.

В курсовой работе заданный электрический сигнал $S(t)$ уже на входе цепи представляется конечным числом гармоник и становится сигналом $S_1(t)$, т. е. он изменяется. При прохождении через цепь сигнал $S_1(t)$ тоже будет изменяться. Исследователь должен четко понимать, как изменяется сигнал за счет представления сигнала рядом Фурье, с конечным числом членов, и какое изменение в сигнале производит цепь. Не достаточно точное представление сигнала $S(t)$ сигналом $S_1(t)$ является недостатком расчета и должно быть сведено к минимуму. С другой стороны, точность связана с N_a, которое определяет сложность и время расчета и связано уже с экономическими вопросами. Более точный расчет стоит дороже и его применение должно быть обосновано.

Таким образом, этот этап курсовой работы заканчивается расчетом, построением графика «синтезированного» (по конечному числу гармоник – N_a) сигнала и оценки точности его представления. Такой синтезированный сигнал при расчете подается на вход исследуемой линейной цепи.

2.2. Непериодические сигналы

В теории и технике наиболее общим способом представления сигналов и их характеристик яляется представление их как непериодичесих функций. Реальные сигналы могут быть одиночными и имеют конечную длительность. Например, разряд молнии создает одиночные сигналы конечной длительности – раскат грома (акустическтй сигнал) и мощный электомагнитный импульс. Каркнула ворона – одиночный сигнал. Любой удар палкой по стене порождает одиночный сигнал и т. д. Человеческая техника часто использует периодичесие сигналы. В природе одиночные сигналы встречаются сплошь и рядом. Временное представление таких сигналов, задавемых на конечном временном промежутке – очевидно. Но для анализа важно сохранить представление непериодических сигналов в частотной области. Непериодический сигнал не обладает свойством периодичности и не может быть представлен рядом Фурье. Для возможности представления сигнала в частотной области проделаем следующую процедуру на примере прямоугольного импульса. Одиночный (непериодический) прямоугольный импульс можно сформировать (представить) из периодической последовательности таких импульсов, если считать период $T \to \infty$. Периодическая последовательность может быть представлена рядом Фурье в комплексной форме. Согласно (7) формула для коэфициентов этого ряда запишется как

$$\mathbf{A}_n = A_n \cdot e^{j \cdot \Theta_n} = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{t и} S(t) \cdot e^{-j \cdot n \cdot \Omega \cdot t} dt.$$

Подсказка. Расстояние между гармониками в спектре бесконечной последовательности импульсов $S(t)$ – $\Omega = 2\pi/T$. Когда $T \to \infty$, $\Omega \to d\omega$, а дискретная частота $n\Omega$ становится непрерывной частотой – ω (так как $n\Omega$ становится последовательностью бесконечно малых величин). Но, тогда $\mathbf{A}_n \to d\mathbf{A}_n$, т. е. становятся бесконечно малыми амплитудами. Если обратиться к графику амплитудного спектра перидической последовательности импульсов (рис. 1.4п.), то можно видеть, что с увеличением T гармоники все ближе располагаются друг к другу. В пределе $d\mathbf{A}_n$ становятся сплошной функцией от ω. Таким образом, амплитудный спектр показывает не сами амплитуды, а амплитуду, приходящуюся на на единицу спектрального диапазона, т.е спектральную плотность амплитуд. Чтобы сохранить спектральные представления вводится понятие – спектральная плотность $S(j\omega)$.

При $T \to \infty$, сумма в ряду (6) превращается в интеграл, $2/T = \Omega/\pi \to \dfrac{d\omega}{\pi}$, $n\Omega \to \omega$, $dA_n = \dfrac{d\omega}{\pi} \cdot \int_0^{t_и} S(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$ и окончательно можно записать

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \right] \cdot e^{j\omega t} d\omega. \qquad (22)$$

Для того, чтобы не терять общности спектрального представления сигнала вводится понятие спектральная функция – $S(j\omega)$.

Выражение (23) определяет спектральную функцию, характеризующую спектр непериодического сигнала, и называется *прямым преобразованием Фурье* (ППФ).

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot e^{-j\omega t} dt. \qquad (23)$$

$S(j\omega) = S(\omega) \cdot e^{j \cdot \varphi(\omega)}$ – комплексная функция, $S(\omega)$ – называется амплитудным спектром непериодического сигнала, $\varphi(\omega)$ – называется фазовым спектром непериодического сигнала.

Для построения сектральных диаграмм необходимо построить графики модуля и аргумента функции $S(j\omega)$, откладывая по оси X значения круговой (ω) или циклической (f) частоты. Активная ширина спектра определяется по диапазону частот в котором содержится 90% энергии сигнала.

Выражение (24) назывыется *обратным преобразованием Фурье* (ОПФ) и позволяет определять сигнал $z(t)$ по его спектральной функции.

$$Z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \tag{24}$$

Сигнал $z(t)$ получается комплексным. Поэтому для получения действительной функции, описывающей действительный сигнал (которй может наблюдаться на экране осциллографа во время эксперимента) нужно взять мнимую часть этого сигнала $S(t) = Jm\left[Z(t)\right]$.

2.3. Частотные характеристики линейных цепей

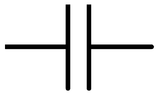
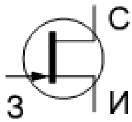
Линейной радиотехнической цепью называется цепь, состоящая из линейных элементов. Линейный элемент – это такой элемент цепи, для которого справедлив закон Ома $\mathbf{U} = \mathbf{I} \cdot Z$, где $\mathbf{U}$ и $\mathbf{I}$ – комплексные амплитуды напряжения на линейном элементе и тока, протекающего через элемент, Z – комплексное сопротивление элемента переменному току. Линейными элементами являются: резистор (R), индуктивность (L), емкость (С), транзисторы, работающие в линейном режиме.

В табл. 2 представлены изображения линейных элементов на схемах, единицы их измерения, сопротивления переменному току. Транзистор в линейном режиме характеризуется крутизной S входной вольтамперной характеристики на линейном участке этой характеристики.

На рис. 7. изображена воль/амперная характеристика полевого транзистора $I_c = f(U_з)$.

Если к затвору транзистора (з) приложено смещение в виде постоянного напряжения ($-\mathrm{E}_{\text{см}}$), а амплитуда входного гармонического сигнала – $U_{\text{вх}}$, то взаимодействие входного сигнала с транзистором происходит на линейном участке характеристики $I_c = f(U_з)$.

Таблица 2

Параметры / Вид элемента	Обозначение на схеме	Изображение на схеме	Сопротивление элемента
Резистор	R		R
Емкость	C		$\frac{1}{j\omega C}$
Индуктивность	L		$j\omega L$
Транзистор	T		$R_{вп} = f(\omega)$

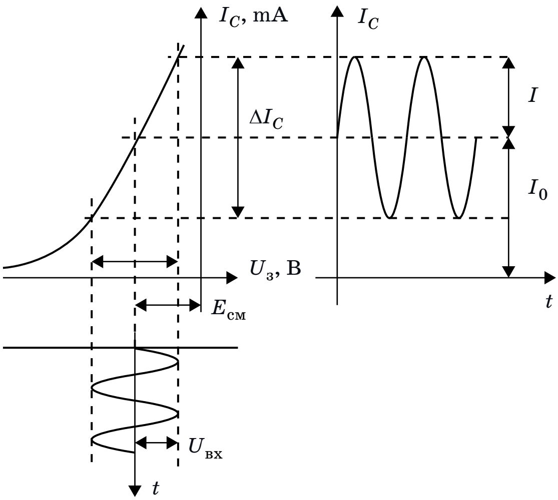


Рис. 7. Представление линейного режима работы транзистора

Этот участок носит название рабочего участка. Линейная зависимость $I_c = f(U_з)$ на рабочем участке характеризуется крутизной $S = \Delta I_c / 2U_{вх}$ мА/В. S – определяет усилительные свойства транзистора. При работе транзистора в линейном режиме, если на вход подано гармоническое напряжение, форма тока на выходе транзистора остается гармонической (не искажается). $\mathbf{I} = S \cdot \mathbf{U}_{\mathbf{вх}}$. Если нагрузкой транзистора является резистор $R_{н}$, то и форма напряжения на выходе будет гармонической $\mathbf{U} = \mathbf{I} \cdot R_{н}$.

Замечание. Как видно из табл. 2 сопротивления индуктивности L и емкости С являются чисто мнимыми – jX. Если в цепи, содержащей большое число элементов, встретится последовательное соединение R и jX, то их общее сопротивление $Z = R + jX$ будет комплексным. В общем случае линейный элемент может быть комплексным и зависящим от частоты – $Z(\omega)$.

Из курса теоретической электротехники известно, что сопротивление 2-х (или нескольких) элементов равно сумме их сопротивлений $Z_{посл} = \sum_{i=1}^{N} Z_i$, (в простейшем случае) $Z = Z_1 + Z_2$. При параллельном соединении 2-х элементов их общее сопротивление равно $Z_{парал} = Z1 \cdot Z2 / Z1 + Z2$.

Комплексное число Z может быть представлено в алгебраической форме $Z = R + jX$ или в показательной форме $Z = |Z| \cdot e^{j\varphi}$. Так как сопротивления линейных элементов зависят от частоты: $X_c = 1/j\omega C$, $X_L = j\omega L$ и $R_{транз} = f(\omega)$, то $Z(j\omega) = |Z(j\omega)| \cdot e^{j \cdot \varphi(\omega)}$ является частотно-зависимой функцией.

При последовательном соединении элементов для нахождения $Z_{посл}$ удобно пользоваться алгебраической формой записи Z, так как при сложении комплексных чисел (или функций) их действительные и мнимые части складываются раздельно.

$$Z_{посл} = (R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2).$$

При параллельном соединении элементов нужно осуществлять операции умножения и деления комплексных чисел (или функций). В этом случае удобно пользоваться показательной формой комплексного числа. При умножении комплексных элементов их модули перемножаются, а аргументы – складываются. При делении модули комплексных элементов делятся, а аргументы – вычитаются. И эти элементы являются функциями частоты.

$$Z_{парал}(\omega) = \frac{|Z_1(\omega)| \cdot e^{\varphi_1(\omega)} \cdot |Z_2(\omega)| \cdot e^{\varphi_2(\omega)}}{R_1(\omega) + jX_1(\omega) + R_2(\omega) + jX_2(\omega)}. \quad (25)$$

Как видно, в формуле (25) для выполнения деления нужно знаменатель дроби представить в показательной форме.

$$Z_{\text{знам}}(\omega)=\sqrt{\left(R_1(\omega)+R_2(\omega)\right)^2+\left(X_1(\omega)+X_2(\omega)\right)^2}\times$$
$$\times e^{j\cdot arctg(X_1+X_2)(\omega)/(R_1+R_2)(\omega)}$$

Тогда

$$Z_{\text{парал}}=\left|Z_{\text{числ}}(\omega)\right|\cdot\frac{e^{j\cdot\varphi(\omega)_{\text{числ}}}}{\left|Z_{\text{знам}}(\omega)\right|\cdot e^{j\cdot\varphi(\omega)_{\text{знам}}}}=$$
$$=\frac{\left|Z_{\text{числ}}(\omega)\right|}{\left|Z_{\text{знам}}(\omega)\right|}\cdot e^{j\cdot\left[\varphi(\omega)_{\text{числ}}-\varphi(\omega)_{\text{знам}}\right]}. \qquad (25а)$$

Любая сложная линейная цепь путем использования формул для последовательного и параллельного соединения может быть упрощена до вида, показанного на рис. 8.

Такая цепь является 4-х полюсником. 2 входных зажима образуют вход, 2 выходных зажима – выход. Радиотехническая цепь, составленная из линейных элементов, называется линейной цепью. Если на вход линейной цепи подать гармонический сигнал с комплексной амплитудой $\mathbf{U}_{\text{вх}}=U_{\text{вх}}\cdot e^{j\varphi_{\text{вх}}}$, то комплексная амплитуда сигнала на выходе будет – $\mathbf{U}_{\text{вых}}=U_{\text{вых}}\cdot e^{j\varphi_{\text{вых}}}$. Для линейной цепи вводится понятие – коэффициент передачи цепи

$$K(j\cdot\omega)=\frac{\mathbf{U}_{\text{вых}}(\omega)}{\mathbf{U}_{\text{вх}}(\omega)}=\frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}}\cdot e^{j\left[\varphi(\omega)_{\text{вых}}-\varphi(\omega)_{\text{вх}}\right]}, \qquad (26)$$

где $\mathbf{U}_{\text{вых}}(\omega)$ – комплексная амплитуда гармонического сигнала на выходе цепи, $\mathbf{U}_{\text{вх}}(\omega)$ – комплексная амплитуда гармонического сигнала на входе цепи.

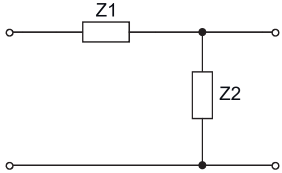


Рис. 8. Приведенная (путем последовательных и параллельных соединений) к эквивалентному 4-х полюснику сложная электрическая цепь

$K(\omega)=\dfrac{U_{\text{вых}}(\omega)}{U_{\text{вх}}(\omega)}$ – отношение амплитуд гармонического сигнала на выходе и входе называется *амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) цепи*.

$\varphi(\omega)_{\text{цепи}}=\varphi(\omega)_{\text{вых}}-\varphi(\omega)_{\text{вх}}$ – разность начальных фаз гармонического сигнала на выходе и входе цепи называется *фазочастотной характеристикой (ФЧХ) цепи*. Если $\mathbf{U}_{\text{вх}}(\omega)$ – комплексная амплитуда напряжения на входе цепи, то комплексная амплитуда тока, протекающего по Z_1 и Z_2, $\mathbf{I}_{\text{вх}}(\omega)=\dfrac{\mathbf{U}_{\text{вх}}(\omega)}{Z_1+Z_2}$. Комплексная амплитуда напряжения на выходе цепи (на сопротивлении Z_2) – $\mathbf{U}_{\text{вых}}(\omega)=\mathbf{I}_{\text{вх}}(\omega)\cdot Z_2=\dfrac{\mathbf{U}_{\text{вх}}(\omega)}{Z_1+Z_2}\cdot Z_2$.

$$K(j\omega)=\frac{\mathbf{U}_{\text{вых}}(\omega)}{\mathbf{U}_{\text{вх}}(\omega)}=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}=\frac{Z_{\text{вых}}}{Z_{\text{вх}}}. \qquad (27)$$

$K(j\omega)=\left|K(j\omega)\right|\cdot e^{j\varphi(\omega)}$, т. е. АЧХ и ФЧХ цепи могут быть определены по заданной схеме 4-полюсника.

Рассмотрим, для примера, вывод $K(j\omega)$ для цепи, показанной на нижеследующем рисунке.

Пример 2.3. Выходное сопротивление цепи образуют параллельно включенные R_2 и С. Тогда согласно формуле (25) для $Z_{\text{парал}}(\omega)$, выходное сопротивление этого 4-х полюсника

$$Z_{\text{вых}}=\frac{R_2\cdot\dfrac{1}{j\cdot\omega\cdot C}}{R_2+\dfrac{1}{j\cdot\omega\cdot C}}.$$

Входное сопротивление 4-х полюсника равно

$$Z_{\text{вх}}=R_1+\frac{R_2\dfrac{1}{j\omega C}}{R_2+\dfrac{1}{j\omega C}}.$$

Коэффициент передачи определится

$$K(j\omega)=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}=\frac{Z_{\text{вых}}}{Z_{\text{вх}}}=$$
$$=\frac{R_2}{(R_1+R_2)+j\omega CR_1R_2}.$$

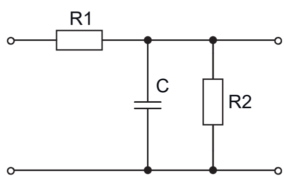


Рис. 8а. Схема RC цепи для примера 2.3

Для получения выражения для АЧХ и ФЧХ цепи, нужно представить полученную комплексную функцию в показательной форме.

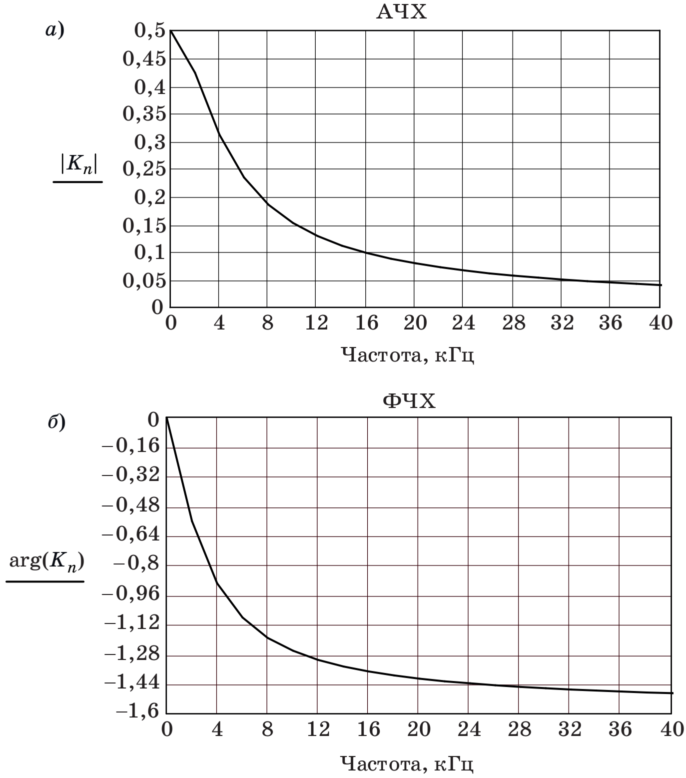


Рис. 8б. АЧХ (а) и ФЧХ (б) RC цепи для примера 2.3

Графики АЧХ и ФЧХ цепи показаны на рис. 8*б*.

$$K(j\omega) = \frac{R_2}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega C R)^2}} \cdot e^{-j \cdot \operatorname{arctg}\left[\frac{\omega C R}{R_1 + R_2}\right]}.$$

Любая линейная цепь обладает 2-мя важными свойствами:

1. Как уже указывалось ранее, гармонический сигнал, проходя через линейную цепь, не меняет своей формы (т. е. остается гармоническим сигналом той же частоты).

2. Линейная цепь подчиняется принципу суперпозиции. Это означает, что если на входе цепи присутствует сигнал, содержащий N гармоник, то сигнал на выходе цепи будет содержать такое же количество N гармоник. Т. е линейная цепь не обога-

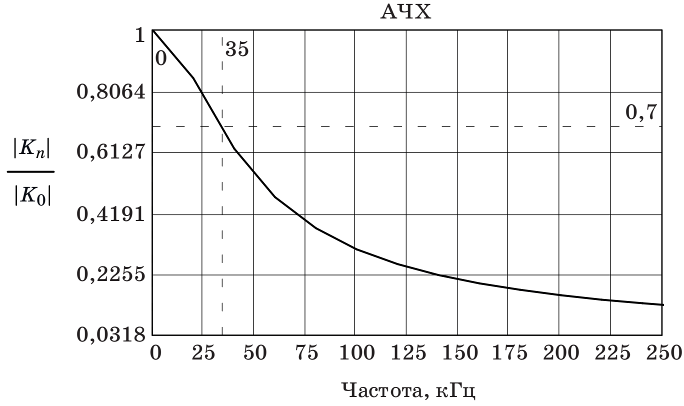


Рис. 9. К определению полосы пропускания цепи.
По уровню 0,707 $\cdot \Delta f = 35$кГц

щает спектр входного сигнала. Однако, в соответствии с определением АЧХ цепи, амплитуда гармоники на выходе цепи определяется $A_{\text{вых}}(n\Omega) = A_{\text{вх}}(n\Omega) \cdot K(n\Omega)$, где $A_{\text{вх}}(n\Omega)$ – амплитуда гармоники на входе цепи, $K(n\Omega)$ – модуль коэффициента передачи цепи на частоте гармоники. Начальная фаза на выходе цепи, $\Theta(n\Omega)_{\text{вых}} = \Theta(n\Omega)_{\text{вх}} + \varphi(n\Omega)_{\text{цепи}}$, где $\varphi(n\Omega)_{\text{цепи}}$ – фазовый сдвиг, производимый цепью на частоте гармоники.

Важной характеристикой цепи является – *полоса пропускания цепи* Δf. Для определения полосы пропускания на нормированной АЧХ цепи проводят уровень 0.707. Полоса частот, в которой АЧХ превышает этот уровень, определяет полосу пропускания цепи. На рис. 9. определена полоса пропускания для цепи из примера 2.3.

2.4. Спектральный анализ линейных радиотехнических цепей

Как было показано, любой периодический сигнал может быть представлен рядом Фурье. Такой сигнал на входе линейной цепи может быть записан

$$S_{\text{вх}}(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{n\text{вх}} \cdot \cos(n\Omega t + \Theta_{n\text{вх}}), \tag{28}$$

где $A_{n\text{вх}}$ – амплитуда n-ой гармоники на входе цепи, $\Theta_{n\text{вх}}$ – начальная фаза гармоники на входе цепи, $\frac{A_0}{2}$ – постоянная составляющая в спектре сигнала. Учитывая, что каждая гармоника, проходя через цепь, изменяется по амплитуде и сдвигается по фазе, а в силу принципа суперпозиции, количество гармоник на выходе цепи остается прежним, выходной сигнал может быть записан

$$S_{\text{вых}}(t) = \frac{A_0}{2} \cdot K(0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_{n\text{вх}} \cdot K(n\Omega) \cdot \cos\left(n\Omega t + \Theta_{n\text{вх}} + \varphi(n\Omega)_{\text{ц}}\right), \quad (29)$$

где $K(0)$ – коэффициент передачи цепи на нуле частоты. При расчете сигнала в курсовой работе необходимо задать временной интервал расчета выходного сигнала, временной шаг расчета Δt, количество гармоник в ряду – N_a. Поскольку сигнал $S_1(k \cdot \Delta t)$ на входе цепи (см. формулу 20а) рассчитывался в диапазоне $t = -\frac{T}{2} \ldots \frac{T}{2}$, то и выходной сигнал следует рассчитать в этом же временном диапазоне. Поэтому формула для выходного сигнала может быть записана:

$$S_{\text{вых}}(k \cdot \Delta t) = \frac{A_0}{2} \cdot K(0) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{Na} A_{n\text{вх}} \cdot K(n\Omega) \cdot \cos\left(n\Omega k \cdot \Delta t + \Theta_{n\text{вх}} + \varphi(n\Omega)_{\text{ц}}\right). \quad (30)$$

Формула (30) описывает *спектральный метод анализа*. Согласно этому методу входной периодический сигнал может быть представлен в виде суммы гармонических составляющих (т. е. спектром сигнала). Линейная цепь может быть представлена в частотной области коэффициентом передачи. Спектр сигнала на выходе цепи есть произведение спектра входного сигнала на коэффициент передачи цепи. Сигнал, как функция времени, на выходе цепи находится суммированием того же количества гармоник, что и на входе цепи. Поскольку амплитуды гармоник изменились в соответствии с АЧХ цепи, а начальные фазы гармоник приобрели дополнительный фазовый сдвиг (в соответствии с ФЧХ цепи), то после суммирования всех гармоник на выходе цепи (с новыми амплитудами и фазами) форма сигнала изменится. Студенту необходимо проанализировать, какие изменения произошли в заданном сигнале при представлении его в виде конечного числа гармоник и какое изменение в сигнале произвела линейная цепь. Результат анализа необходимо отразить в пояснительной записке к работе.

Спектральный метод анализа может быть применен и для непериодичесого сигнала. В этом случае порядок действий будет следующим. По заданному на входе цепи сигналу $S(t)$ при помощи ППФ (по формуле 23) находится спектральная функция сигнала $S_{\text{вх}}(j\omega)$.

$$S(j\omega)_{\text{вх}} = \int_{0}^{t\text{и}} S(t) \cdot e^{-j\omega t} dt.$$

Только в этом случае интегрирование осуществляется за длительность – $t_{\text{и}}$ заданного импульса.

Подсказка. Спектральная функция $S_{\text{вх}}(2j\pi f)$ является непрерывной функцией частоты.

Функция $|S_{\text{вх}}(2j\pi f)|$ – называется амплитудным спектром сигнала и имеет размерность – В/Гц. Аргумент функции $S_{\text{вх}}(j\omega)$ – называется фазовым спектром и имеет размерность фазы.

Далее, в соответствии со спектральным методом, находится спектр сигнала на выходе цепи. $S(j\omega)_{\text{вых}} = S(j\omega)_{\text{вх}} \cdot K(j\omega)$, где $K(j\omega)$ – комплексный коэффициент передачи цепи.

Затем при помощи обратного преобразования Фурье – ОПФ (см. формулу 24) находится сигнал на выходе цепи

$$Z(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\omega\text{н}}^{\omega\text{в}} S_{\text{вых}}(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega,$$

где $\omega_{\text{н}}$ и $\omega_{\text{в}}$ – крайние частоты спектра сигнала на выходе цепи. Для управляющих сигналов $\omega_{\text{н}}$ может быть равен 0. Сигнал $Z(t)$ получается комплексным. Поэтому для получения действительной функции, описывающей действительный сигнал $S(t)$ нужно взять мнимую часть этого сигнала $S(t) = Jm[Z(t)]$.

3. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ВАРИАНТА КУРСОВОЙ РАБОТЫ

(нумерация формул и рисунков в примере обозначается $N_{\text{П}}$)

1. Задан график входного сигнала и его параметры. Нужно записать аналитическое выражение для заданного сигнала и для проверки правильности выражения построить его график. Сравнить с заданным сигналом.

Рис. 1п. Заданный график входного сигнала

$$E := 1 \qquad ti := 10 \cdot 10^{-6} \qquad k := \frac{E}{ti} \qquad T := 50 \cdot 10^{-6}$$

$$dt := 0.01 \cdot ti \qquad t := \frac{-ti}{2}, \frac{-ti}{2} + dt \,..\, 2 \cdot ti$$

Рис. 1.1п. Диапазон задания сигнала из программы Mathcad

E – амплитуда импульса, t_i – длительность импульса, T – период следования импульсов. В Mathcad этот сигнал может быть записан так

$$s2(t) := \left| \begin{array}{l} k \cdot t \ \text{ if } \ 0 < t < ti \\ 0 \ \text{ otherwise} \end{array} \right.$$

Рис. 1.2п. Форма задания сигнала из прогрммамы Mathcad

После записи сигнала в виде формулы нужно в меню Mathcad вызвать иконку построения графика. По оси x отложить время t, а по оси у – значения сигнала $S(t)$. Программа построит график записанного сигнала. Он должен совпасть с заданным в задании сигналом. Затем нужно организовать периодическую последовательность таких сигналов. Как это сделать рассказано на стр 18.

2. Так как программа Mathcad может работать с комплексными числами и функциями, целесообразно для представления сигнала использовать комплексную форму ряда Фурье

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\mathbf{A}_n\cdot e^{jn\Omega t},\ \text{где}\ \mathbf{A}_n=A_n\cdot e^{j\Theta_n}.\ (1п)$$

Для расчета комплексных коэффициентов ряда A_n воспользуемся формулой (7).

Запись действий на Mathcad для этого вычисления выглядит так:

$$N := 50 \qquad n := 0..N \qquad A_n := \frac{2}{T}\cdot\int_0^{ti} s2(t)\cdot\exp\left(-2\cdot\pi\cdot i\cdot n\cdot\frac{t}{T}\right)dt$$

$$Ak_n := \mathrm{if}\left(n>0,\left|A_n\right|,\left|A_n\right|\cdot 0.5\right) \qquad f_n := n\cdot\frac{1}{T} \qquad (2п)$$

Рис. 1.3п Формула для расчета $\mathbf{A}_n$ *из программы Mathcad*

Так как после расчета $\mathbf{A}_n$ нужно построить график $Ak_n=f(f_n)$, где Ak_n – амплитуда n-ой гармоники, f_n – частота n-ой гармоники, n – номер гармоники (**подсказка** – амплитудным спектром называется зависимость амплитуд гармоник в ряду Фурье от частоты гармоник), то необходимо задать переменную – n и диапазон ее изменения от 0 до N. N – количество рассчитываемых гармоник. **Частота 1-ой гармоники** – $1/T$, частота 2-ой – $2/T$, n-ой гармоники – n/T. Так как частоты гармоник могут принимать только дискретные значения (кратные 1-ой гармонике), то амплитудный спектр периодического сигнала называется дискретным или линейчатым. **Расстояния между гармониками по частоте Δf – равно $1/T$.** Аргумент $\mathbf{A}_n$ – Θ_n – это начальная фаза n-ой гармоники (см. формулу (6), **подсказка** – зависимость начальных фаз гармоник в ряду Фурье от частоты называется фазовым спектром периодического сигнала).

Для дальнейших расчетов удобно использовать ряд Фурье в форме (3). В этой форме записи постоянная составляющая ряда вынесена за знак суммы в виде члена $A_o/2$.

$$S(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot\cos(n\Omega t+\Theta_n)$$

Для расчета $A_0/2$ и Ak_n нужно воспользоваться условием (2п) в этом примере. Затем, вызвав иконку построения графика, по указанной выше методике строятся графики амплитудного и фазового спектров. Так как в примере выбрано $N = 50$ можно построить графики до 50-й гармоники. Первоначальный выбор N делается студентом по своему усмотрению (но явно больше, чем предполагаемое N_a). На рис. 1.4п–1.5п показаны графики амплитудного и фазового спектров заданного сигнала.

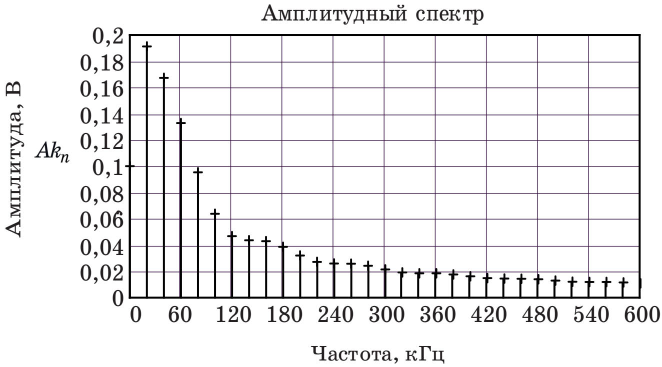


Рис. 1.4п. График амплитудного спектра из программы Mathcad

Рис. 1.5п. График фазового спектра сигнала из программы Mathcad

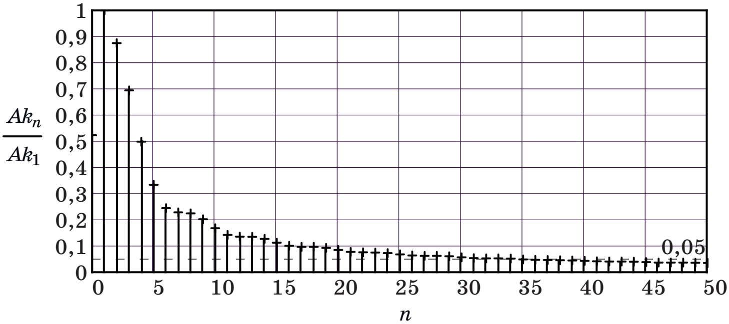


Рис. 1.6п. К расчету активной ширины спектра сигнала

Для определения активной ширины спектра N_a нужно построить график амплитуд гармоник, нормированных к макс. амплитуде (в этом примере максимальна 1-я гармоника), как функция от номера гармоники.

Далее проводится уровень 0.05 (см. на графике) и номер первой гармоники, амплитуда которой не превышает этот уровень, определяет $N_1 = N_a$. В примере $N_1 = 35$. Количество гармоник, содержащееся в активной ширине спектра, нужно для синтеза сигнала, т. е. при представлении входного сигнала по числу гармоник равном – N_a. Расчет сигнала $S_{вх}(t)$ ведется по формуле, указанной ниже (3п). Время определения сигнала – t задается большим, чем время определения сигнала в задании к работе ($0 > t > t_i$), так как при синтезе сигнала его форма может измениться.

$$\mathrm{N1} := 35 \qquad \mathrm{t} := \frac{-\mathrm{ti}}{2}, \frac{-\mathrm{ti}}{2} + 0.02 \cdot \mathrm{ti} .. 2 \cdot \mathrm{ti}$$

$$\mathrm{S1a}(\mathrm{t}) := \frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{\mathrm{n}=1}^{\mathrm{N1}} \left(\mathrm{Ak}_\mathrm{n} \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{t} + \arg\left(\mathrm{A}_\mathrm{n}\right) \right) \right) \qquad (3п)$$

Рис. 1.7п. Формула для записи входного сигнала в программе Mathcad

Для оценки «похожести» синтезированного сигнала и заданного в задании к курсовой работе необходимо рассчитать среднеквадратическую ошибку Δ по формуле (21). Интервал суммирования членов $\left(S(k \cdot \Delta t) - S_{синтез}(k \cdot \Delta t)\right)^2$ должен равняться временному интервалу задания рассчитанного синтезированного сигнала (от

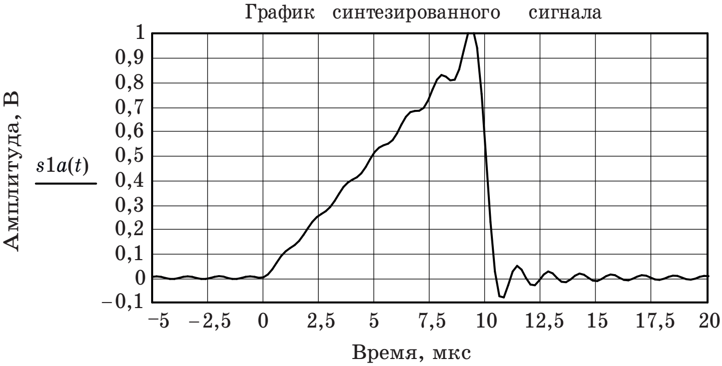


Рис. 1.8п. Синтезированный входной сигнал. Na = 35

$-t_i/2$ до $2t_i$).Величина ошибки может быть выражена в «В» или в % (если взять отношение средней мощности ошибки к средней мощности заданного сигнала, выраженную в процентах). Точность представления зависит от числа гармоник, суммируемых в ряду Фурье. Студент должен проанализировать, как численно меняется величина этой ошибки, если N_1 брать $0{,}3N_a$, $0{,}5N_a$, $0{,}7N_a$ и N_a.

Далее нужно рассчитать АЧХ и ФЧХ цепи, заданной в этом примере.

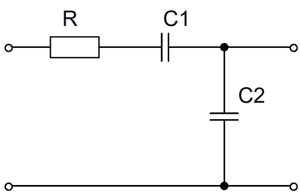


Рис. 1.9п. Принципиальная схема линейной цепи

Комплексный коэффициент передачи цепи $K_n = Z_{\text{вых } n}/Z_{\text{вх } n}$ может быть записан

$$C1 := 10^{-8} \quad C2 := 10^{-8} \quad R := 10^{3} \quad f_n := \frac{n}{T}$$

$$K_n := \frac{C1}{(C1 + C2) + 2j \cdot \pi \cdot \frac{n}{T} \cdot C1 \cdot C2 \cdot R}$$

Рис. 1.10п. Формула для $\mathbf{K}_n$ *из программы Mathcad* где n – номер гармоники, T – период заданного сигнала. Здесь нужно отметить, что **вычисление K_n должно происходить на частотах $\mathbf{f_n = n/T}$, т. е. частотах гармоник спектра заданного сигнала.** После записи параметров цепи и формулы для Mathcad нужно построить графики $|K_n|$ – АЧХ и аргумента K_n – ФЧХ цепи по описанной ранее методике.

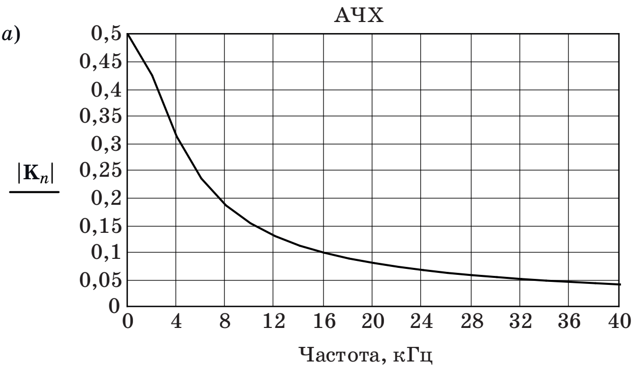
Графики АЧХ и ФЧХ цепи приведены на рис. 1.11п.

Для расчета сигнала на выходе цепи нужно использовать формулу (30)

$$S_{\text{вых}}(k \cdot \Delta t) = \frac{A_0}{2} \cdot K(0) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{Na} A_{n\text{вх}} \cdot K(n\Omega) \cdot \cos\left(n\Omega k \cdot \Delta t + \Theta_{n\text{вх}} + \varphi(n\Omega)_{\text{ц}}\right),$$

а)



б)

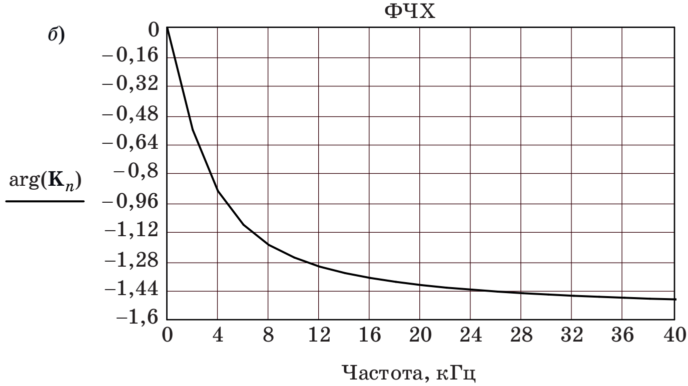


Рис. 1.11п. АЧХ (сверху), ФЧХ (снизу) цепи

где $K(0)$ – коэффициент передачи цепи для постоянной составляющей спектра входного сигнала. $\frac{A_0}{2} \cdot K(0)$ – величина постоянной составляющей на выходе цепи. $A_{n\text{вх}} \cdot K(n\Omega)$ – амплитуда n-ой гармоники на выходе цепи. $\Theta_{n\text{вх}} + \varphi(n\Omega)_{\text{ц}}$ – фаза n-ой гармоники на выходе цепи. В силу принципа суперпозиции количество гармоник на выходе остается равным их числу на входе, а функции остаются гармоническими. Поэтому в ряду суммируются те же гармоники, но с другими амплитудами и начальными фазами. Сигнал на выходе изменяется. В Mathcad нужно задать временной интервал расчета выходного сигнала и построить график этого сигнала.

$$t := \frac{-ti}{2}, \frac{-ti}{2} + 0.02 \cdot ti \,..\, 4 \cdot ti$$

$$S2a(t) := \frac{A_0}{2} \cdot \left|K_0\right| + \sum_{n=1}^{N1} \left(Ak_n \cdot \left|K_n\right| \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{T} \cdot t + \arg\left(A_n\right) + \arg\left(K_n\right)\right)\right)$$

Рис. 1.12п. Формула для расчета выходного сигнала из программы Mathcad

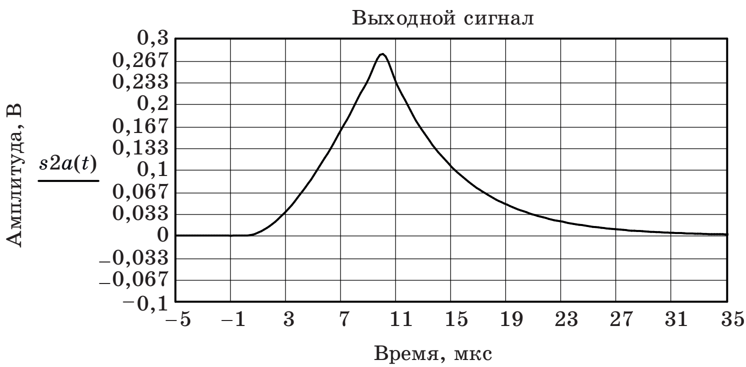


Рис. 1.13п. Рассчитанный сигнал на выходе цепи

По результатам расчета нужно сделать выводы о том, какие изменения вносят в сигнал разные этапы расчета и на что нужно обращать внимание при анализе прохождения периодического сигнала через линейную цепь.

4. РАДИОСИГНАЛЫ

Как было сказано во введении, для беспроводной передачи информации (т. е. при помощи электромагнитных волн) должны использоваться радиосигналы (**подсказка** – радиосигналом называется модулированное высокочастотное колебание). Аналитически радиосигнал может быть записан: $a(t)=A(t)\cdot\cos\left[\omega_0 t+\varphi(t)+\Theta_0\right]$, где $A(t)$ – огибающая р/сигнала, $\varphi(t)$ – функция фазовой модуляции, Θ_0 – начальная фаза, ω_0 – частота несущего колебания. $A(t)$ – определяет закон амплитудной модуляции, $\varphi(t)$ – закон фазовой модуляции. $\psi(t)=\omega_0 t+\varphi(t)+\Theta_0$ – называется полной фазой. $a(t)$ – является действительной функцией времени. Видно, что если будет осуществляться частотная модуляция, то будет меняться и $\psi(t)$. Т.е. частотная модуляция всегда сопровождается фазовой (см. раздел лекций – радиосигналы с угловой модуляцией). Радиосигнал может быть представлен в комплексном виде $Z(t)=A(t)\cdot\exp\left[j\omega_0 t+\varphi(t)\right]$. Используя формулу Эйлера, можно представить радиосигнал в виде $Z(t)=A(t)\cdot\cos\left[\omega_0 t+\varphi(t)+\Theta_0\right]+jA(t)\cdot\sin\left[\omega_0 t+\varphi(t)+\Theta_0\right]$. Значит, если в результате расчета получены отсчеты $Z(t)$, то для представления р/сигнала в виде действительной функции нужно взять мнимую или действительную части $Z(t)$, т. е. $a(t)=Jm\left[Z(t)\right]$ или $a(t)=\mathrm{Re}\left[Z(t)\right]$. Огибающая p/сигнала может быть определена из соотношения $A(t)=\left|Z(t)\right|$, а $\varphi(t)=\arg\left[Z(t)\right]$ если заранее известна несущая частота радиосигнала f_0.

Амплитудно-модулированные радиосигналы формируются в устройстве, называемом модулятором. Это устройство имеет 2 входа и один выход. На 1-й вход модулятора подается непрерывное высокочастотное гармоническое колебание с амплитудой A_0 и частотой f_0. На 2-й вход подается управляющий сигнал. Вид этого сигнала определяет форму огибающей радиосигнала. При подаче на вход периодической последовательности прямоугольных импульсов на выходе модулятора появляются радиоимпульсы с прямоугольной огибающей. Период следования управляющих сигналов определяют период следования радиоимпульсов. Если начальная фаза радиоимпульсов $\Theta_0 = 0$ или $\Theta_0 = \mathrm{co}nst$, то такая последовательность p/импульсов называется *когерентной или синфазной*.

Если начальная фаза p/импульсов случайна, то она наз. *некогерентной*. Эти понятия имеют важное значение при обработке сигналов в радиолокации и телекоммуникационных системах. Большинство сигналов, показанных в табл. 1, являются управляющими импульсами. Управляющий сигнал может быть непрерывным

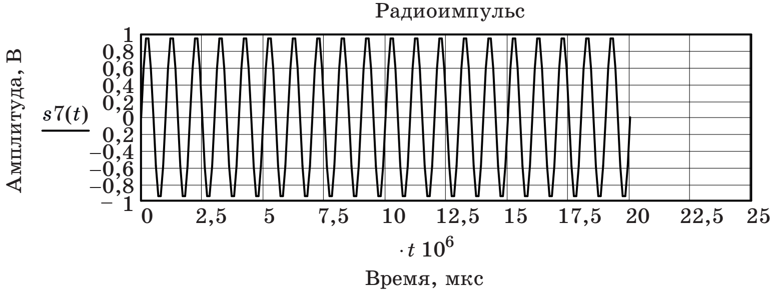


Рис. 10. Радиоимпульс с прямоугольной огибающей

(например, синусоида низкой частоты или сигнал типа «меандр»). Однако, практически любой управляющий сигнал имеет конечную длительность, определяемую типом системы и режимом ее работы.

Наиболее подготовленные студенты (и желающие разбираться в современных системах обработки p/сигналов) могут получить у преподавателя дополнительное задание по изучению прохождения p/сигналов (с амплитудной, частотной или фазовой модуляцией) через линейные цепи.

В курсовой работе представлен p/сигнал в виде периодической последовательности прямоугольных радиоимпульсов. Вид такого сигнала показан на рис. 10.

$A(\mathrm{t}) = 1\mathrm{В}$, если $0 < t < t_i$, $A(t) = 0$, если $ti < t < T$, f_0 − частота в/ч заполнения $= 1/T_0$, T_0 − период несущего колебания, $\Theta_0 = 0$.

Аналитически такой сигнал может быть записан $a(t) = 1 \cdot \sin(\omega_0 t)$, если $0 < t < t_i$, а $a(t) = 0$, если $t_i < t < T$. Или в комплексной форме $Z(t) = 1 \cdot e^{j\omega_0 t}$, если $0 < t < t_i$, $Z(t) = 0$, если $t_i < t < T$.

Для того чтобы показать, что сигнал является периодическим применяется такая форма записи $a(t) = a(t \pm T)$. В системе Mathcad сигнал и формула для расчета гармоник спектра могут быть записаны

$$\mathrm{TOL} := 10^{-12}$$

$$\mathrm{B} := 1 \qquad \mathrm{fo} := 10^{6} \qquad \mathrm{T} := 100 \cdot 10^{-6}$$

$$\mathrm{dt} := \frac{\mathrm{ti}}{200} \qquad \mathrm{t} := 0, \mathrm{dt} .. \mathrm{ti}$$

$$s7(t) := \begin{cases} B\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot fo\cdot t) & \text{if } 0 < t < ti \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Рис. 10а. Запись сигнала из программы Mathcad

$$N7 := 200 \qquad n := 10..N7$$

$$f_n := n\cdot\frac{1}{T} \qquad A_n := \frac{2}{T}\cdot\int_0^{ti} s7(t)\cdot\exp(-2\cdot\pi\cdot i\cdot f\cdot t)dt$$

$$Ak_n := \left|A_n\right|$$

Рис. 10б. Формула для $\mathbf{A}_n$ *из программы Mathcad*

Р/сигнал содержит в/ч колебание, поэтому шаг отсчета, для более точного представления сигнала и точного построения его графика, должен быть уменьшен. При заданной длительности сигнала это увеличивает количество временных точек для представления сигнала. И при расчете спектра сигнала (расчета интегралов при определении коэффициентов ряда Фурье) нужно увеличить точность расчета. Это делается заменой точности расчета в Mathcad – оператора TOL в верхнем левом углу листинга программы. TOL нужно присвоить точность – 10^{-6}, вместо – 10^{-3} (которое всегда выставляется вначале самой программой по умолчанию). Далее по изложенной ранее методике строятся графики амплитудного и фазового спектров сигнала.

Гармоники спектров сигналов, рассматриваемых ранее (управляющих сигналов), примыкали по частоте к началу координат. Гармоники амплитудного спектра радиосигналов сосредоточены относительно наибольшей гармоники на несущей частоте (см. рис. 11). Известно (см. раздел лекций о спектре прямоугольных радиоимпульсов), что активная ширина спектра р/импульсов с прямоугольной огибающей – $\Delta f_a = 2/ti$, где t_i – длительность р/импульса (это ширина главного лепестка амплитудного спектра последовательности импульсов). В показанном на рис. 11 примере активная ширина спектра содержит 10 гармоник (от $n = 95$ до $n = 105$). Если, как раньше, определять ширину амплитудного спектра по уровню (нормированному к макс. амплитуде гармоник (Ak_{100})) равному

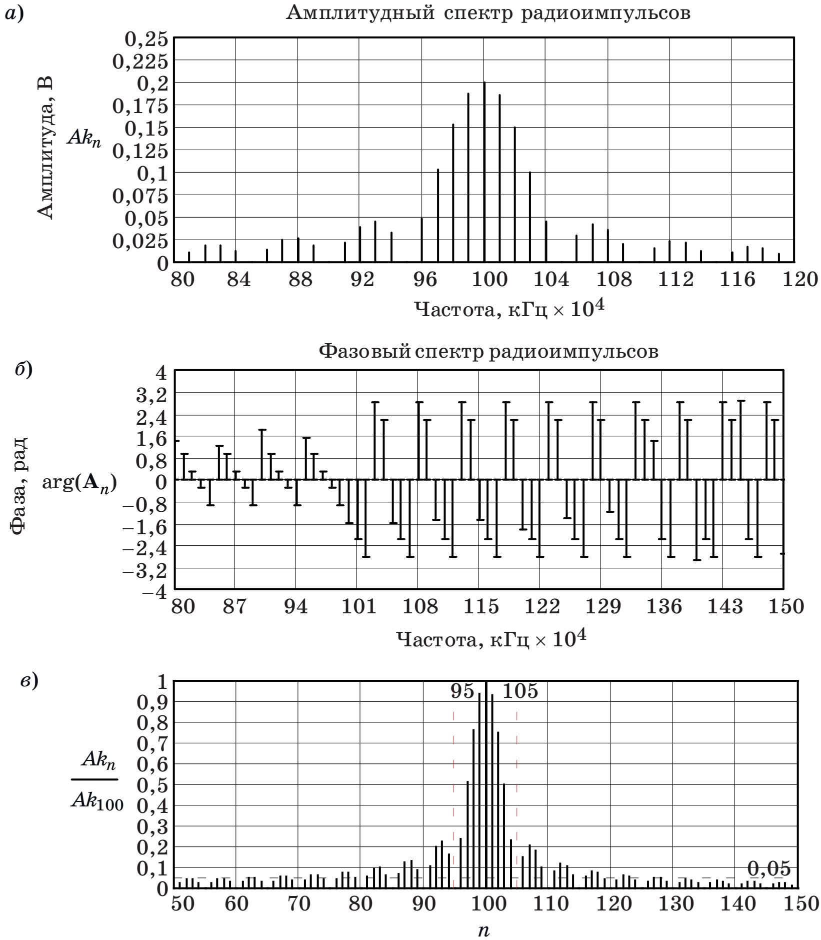


Рис. 11. Амплитудный (а) и фазовый (б) спектры периодической последовательности прямоугольных р/импульсов. Параметры указаны в MathCADовской программе (см. выше). (в) – амплитудный спектр в зависимости от номера гармоник

0,05, то она содержит гармоники от $n = 60$ до $n = 130$. Этот частотный диапазон обеспечивает мин. искажение исходного сигнала при заданном диапазоне учитываемых в ряду гармоник. На рис. 12. показан синтезированный сигнал при использовании в ряду Фурье гармоник от 60 до 130.

$$N7 := 130 \quad t1 := \frac{-40}{fo} \quad t2 := \frac{240}{fo} \quad t := t1, t1 + dt .. t2$$

$$S7p(t) := \left[\sum_{n=60}^{N7} \left(Ak_n \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{T} \cdot t + \arg\left(A_n\right) \right) \right) \right]$$

Рис. 11а. Формула для синтезированного сигнала из программы Mathcad

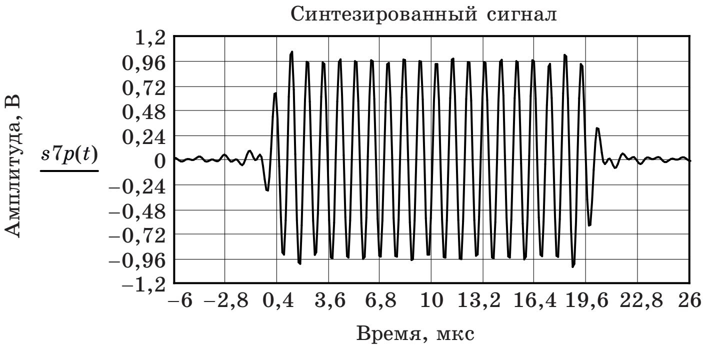


Рис. 12. Радиоимпульс, синтезированный по 70 гармоникам

Для сравнения на рис. 13. приведен р/импульс, синтезированный по гармоникам, входящим в активную ширину спектра.

При анализе прохождения р/импульсов через линейные полосовые цепи важно контролировать макс. значение сигнала на выходе цепи. Из рис. 13. видно, что макс. значение *p*/импульса в активной ширине спектра не меняется по отношению к сигналу, синтезированному в расширенном частотном диапазоне. Поэтому на практике при расчетах можно учитывать только активную ширину спектра прямоугольных радиоимпульсов.

Поскольку активная ширина спектра *p*/импульсов сосредоточена около несущей частоты, то для обработки таких сигналов нужно использовать цепи, АЧХ которых имели бы значимую величину около частоты f_0 (т. е. полосовые цепи). Рассмотрим прохождение *p*/импульсов с прямоугольной огибающей через простейшую полосовую цепь – параллельный колебательный контур. Схема такой цепи показана на рис. 14.

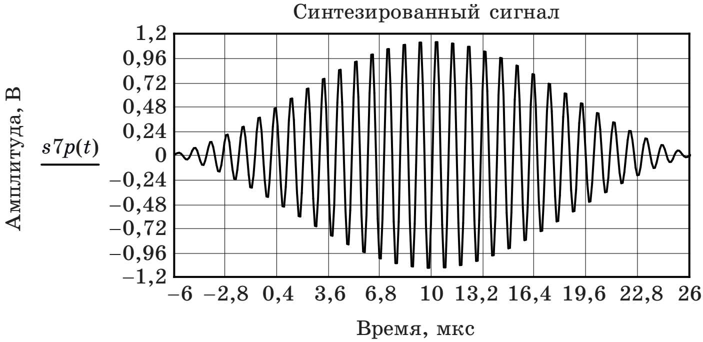


Рис. 13. Радиоимпульс, синтезированный по гармоникам активной ширины спектра

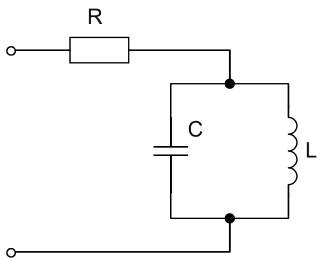


Рис. 14. Схема параллельного колебательного контура без потерь

В реальном контуре катушка индуктивности – L имеет потери, поэтому сопротивление катушки $Z_L = j\omega L + r$, где r – сопротивление потерь в катушке. R –внутреннее сопротивление источника сигнала.

Подсказка. С ростом частоты r растет, так как с ростом частоты электроны, которые образуют ток в катушке, начинают «прижиматься» к верхнему слою проводника провода, которым намотана катушка. При круглом сечении проводника электроны «занимают» малую часть сечения проводника (узкий ободок у поверхности). Сечение проводника, через которое течет ток, уменьшается, сопротивление – растет. Поэтому в контурах, работающих на высокой частоте, катушки мотают посеребренным проводом, чтобы сопротивление поверхностного слоя было меньше. Коэффициент передачи 4-х полюсника, содержащего колебательный контур, с учетом внутреннего сопротивления источника сигнала – R, может быть записан в Mathcad так

$$L := \frac{10^{-3}}{2\cdot\pi} \qquad C := \frac{10^{-9}}{2\cdot\pi} \qquad R := 10\cdot 10^{4} \qquad N7 := 400$$

$$\rho := \sqrt{\frac{L}{C}} = 1 \times 10^{3} \qquad fo := \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}} = 1 \times 10^{6}$$

$$Z2k_n := \frac{2j\cdot\pi\cdot\frac{n}{T}\cdot L}{1 - \left(2\cdot\pi\cdot\frac{n}{T}\right)^2\cdot L\cdot C} \qquad Z1k_n := R + Z2k_n \qquad Zk_n := \frac{Z2k_n}{Z1k_n}$$

Рис. 14а. Формуладля расчета коэффициента передачи цепи из программы Mathcad

Графики АЧХ и ФЧХ 4-полюсника строятся по указанной ранее методике.

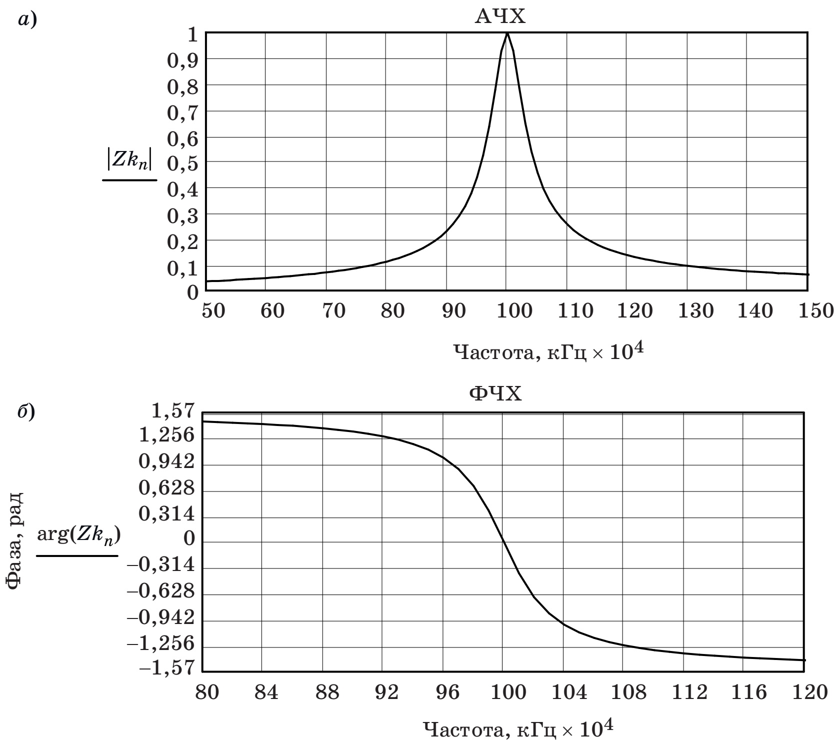


Рис. 15. АЧХ (а) и ФЧХ (б) 4-х полюсника с колебательным контуром

Сигнал на выходе цепи в Mathcad может быть представлен рядом

$$Zk_n := \left|Zk_n\right| \qquad S8p(t) := \sum_{n=10}^{200} \left(Ak_n \cdot Zk_n \cdot \cos\left(2\cdot\pi\cdot\frac{n}{T}\cdot t + \arg\left(A_n\right) + \arg\left(Zk_n\right) \right) \right)$$

Рис. 15а. Формула для рассчета выходного сигнала из программы Mathcad

Рассчитанный сигнал показан на рис. 16. Полоса пропускания контура – Δf_k по уровню 0.707 (при $R = 2\cdot10^4$ Ом) – 5МГц. Добротность контура $Q = \dfrac{f_0}{\Delta fk} = 20$. Для сравнения на рис. 17 показаны АЧХ цепи, при полосе Δf_k – 21 МГц ($R = 0.5\cdot10^4$ Ом, добротность контура $Q = \dfrac{f_0}{\Delta fk} = 5$) и вид сигнала на выходе цепи.

На рис. 18. показаны АЧХ цепи при полосе $\Delta f_k = 1$МГц ($R = 10\cdot10^4$Ом, добротность контура $Q = f_0/\Delta f_k = 100$), и вид сигнала на выходе цепи.

Как видно из рисунков, сигнал на выходе высокодобротного контура (Δf_k – мал) растягивается во времени и падает по амплитуде. Сигнал на выходе широкополосного контура (Δf_k – большое) изменяется мало по отношению к входному сигналу. Фазочастотная характеристика, в пределах полосы пропускания контура, может приближенно считаться линейной. Поэтому, если активная ширина спектра сигнала не выходит за пределы полосы пропускания контура, то макс. значение сигнала на выходе цепи (его амплиту-

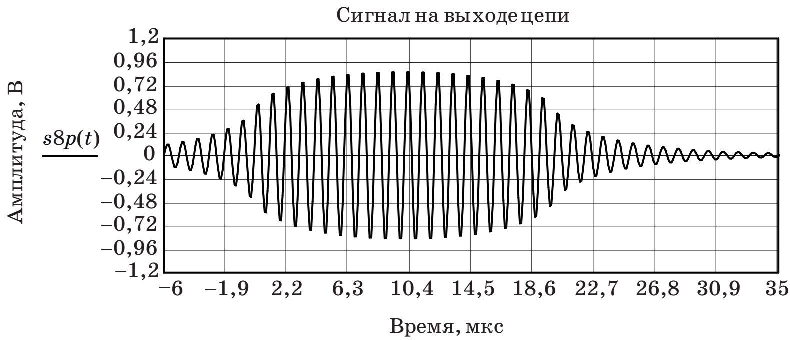


Рис. 16. Рассчитанный сигнал на выходе цепи $R = 2\cdot10^4$ Ом ($Q = 20$)

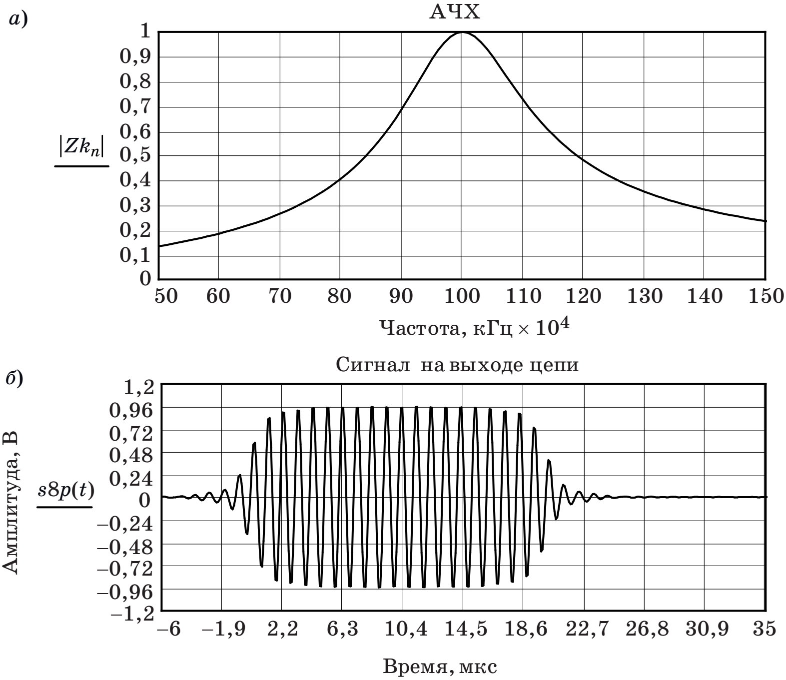


Рис. 17. АЧХ (а) цепи (Q = 5) и рассчитанный сигнал (б) на выходе цепи

да) изменяется незначительно и сигнал задерживается на время $t_з = d\varphi(\omega)/d\omega$.

Чем шире полоса пропускания цепи, тем более короткий радиоимпульс может проходить через цепь с мин. искажениями (при условии, что ФЧХ цепи остается линейной в полосе пропускания цепи). Одиночный контур обладает тем недостатком, что с увеличением полосы пропускания растет неравномерность АЧХ в полосе пропускания. Это будет приводить к искажению огибающей р/импульсов. В целом ряде радиосистем это недопустимо. Поэтому для выравнивания АЧХ в пределах Δf_k используют набор контуров, которые определенным образом связываются между собой (фильтры сосредоточенной селекции – ФСС). В настоящее время в технике радиосвязи (например, в сотовой связи) используются фильтры на поверхностных акустических волнах (ПАВ). Желающие подробнее изучать такие устройства могут обратиться к специальной лите-

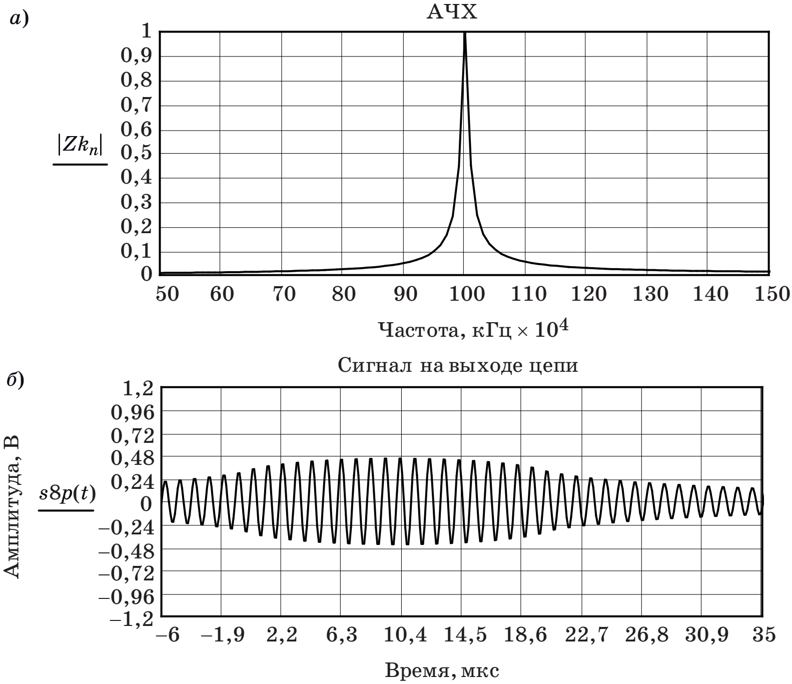


Рис. 18. АЧХ (а) цепи ($Q = 100$) и рассчитанный сигнал (б) на выходе цепи

ратуре, например (Д. Морган. Устройства обработки сигналов на ПАВ. М. Радио и связь. 1990 г.).

Для непериодического радиосигнала спектральный метод анализа можно сформулировать следующим образом. При помощи ППФ расчитывается спектр входного сигнала $S_{\text{вх}}(j\omega)$ – формула (23). Спектр сигнала на выходе цепи определяется $S_{\text{вых}}(j\omega) = S_{\text{вх}}(j\omega) \cdot K(j\omega)$. Сигнал на выходе цепи определяется при помощи ОПФ (формула 24), беря мнимую часть полученной функции $z(t)$.

5. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЗАЩИТЕ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Контрольные вопросы

1. Что понимают под сигналом, периодическим сигналом?

2. Какие формы тригонометрического ряда Фурье Вы знаете? Напишите формулы для определения

коэффициентов ряда для четной и нечетной функций, описывающих периодический сигнал.

3. Что описывает формула Эйлера?

4. Объясните комплексную форму ряда Фурье.

5. По каким формулам можно рассчитать коэффициенты ряда Фурье?

6. Дайте определение амплитудному и фазовому спектрам периодического сигнала.

7. В чем особенности спектров периодических сигналов?

8. Как рассчитать амплитуды и частоты гармоник амплитудного спектра?

9. Какие энергетические характеристики сигналов Вы знаете?

10. Как можно рассчитать среднюю за период мощность периодического сигнала?

11. Что такое активная ширина спектра периодического сигнала и как ее рассчитать?

12. Как можно объяснить различие между периодическими сигналами (заданными и синтезированными по активной части спектра)?

13. Как определяется точность представления периодического сигнала конечным числом гармоник?

14. Почему гармонические функции выбраны в качестве базисных функций в ряду Фурье?

14. В чем особенность спектров непериодических сигналов? Сравните спектры периодического и непериодического сигналов.

15. Каковы размерности спектральных функций периодических и непериодических сигналов?

16. Дать определение комплексного коэффициента передачи цепи. Какие характеристики цепи характеризуют модуль и аргумент коэффициента передачи.

17. Каковы условия неискаженной передачи сигналов через цепи?

18. Как определить полосу пропускания цепи?

19. В чем состоит принцип суперпозиции для линейной цепи?

20. Что позволяет рассчитать спектральный метод анализа?

21. Как минимизировать ошибку при расчете сигнала на выходе линейной цепи спектральным метолом?

22. Чем можно объяснить изменения сигнала на выходе цепи?

23. Дайте определение радиосигнала.

24. Как определяется характеристика непериодического сигнала в частотной области?

25. Как определить активную ширину спектра непериодического прямоугольного радиоимпульса?

26. В чем специфика линейных цепей для фильтрации радиосигналов?

27. Определите частотную характеристику параллельного колебательного контура.

28. На какие параметры прямоугольного радиоимпульса влияет полоса пропускания контура?

29. Как полоса пропускания контура влияет на макс. величину импульса на выходе фильтра?

30. Дайте описание фильтрующих элементов в современных радиоустройствах.

В процессе защиты курсовой работы студент должен продемонстрировать не только знания, полученные в ходе освоения соответствующих разделов теоретического курса, но и показать умение работать с системой MathCAD в среде Wi*n*dows. Он должен получить навык быстрого ввода и редактирования формул, уметь работать с текстом и графикой. Студент должен правильно интерпретировать сообщения об ошибках и исправлять их. Кроме того, студенту следует знать о возможностях системы и ориентироваться в пунктах меню и кнопках палитры инструментов MathCAD.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Mathsoft MathCAD 12. Самоучитель. М.: Издадельский дом «Вильямс», 2006. 224 с.

2. *Макаров Е. Г.* Mathcad: Учебный курс. СПб.:Питер, 2009. 384 с.

3. *Ушаков В. Н.* и др. Радиотехнические цепи и сигналы. СПб.: Питер, 2016. 336 с.

4. *Баскаков С. И.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высш. школа, 1990. 535с.

5. *Гоноровский С. И.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986. 512 с.

6. *Денисенко А. Н.* Сигналы. Теоретическая радиотехника. Справочное пособие. М.: Горячая линия – Телеком, 2005. 704 с.

СОДЕРЖАНИЕ