ОГЛАВЛЕНИЕ

Раздел 1

ПРЕДЕЛЫ

§ 1.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1) Понятия числовой последовательности и ее предела. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.

2) Понятие предела функции в точке. Понятие функции, ограниченной в окрестности точки. Теорема об ограниченности функции, имеющей предел.

3) Теорема о переходе к пределу в неравенствах.

4) Теорема о пределе промежуточной функции.

5) Понятие непрерывности функции. Доказать непрерывность функции $\cos x$.

6) Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

7) Понятие бесконечно малой функции. Теорема о связи между функцией, ее пределом и бесконечно малой.

8) Теорема о сумме бесконечно малых функций.

9) Теорема о произведении бесконечно малой функции на ограниченную функцию.

10) Теорема об отношении бесконечно малой функции к функции, имеющей предел, отличный от нуля.

11) Теорема о пределе суммы.

12) Теорема о пределе произведения.

13) Теорема о пределе частного.

14) Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции.

15) Непрерывность суммы, произведения и частного.

16) Непрерывность сложной функции.

17) Понятие бесконечно большой функции. Теоремы о связи бесконечно больших функций с бесконечно малыми.

занимает один учебный час). Повторная защита проводится вне сетки расписания в письменной форме или в виде собеседования (по усмотрению преподавателя).

Работой по созданию типовых расчетов руководил автор сборника доц. Л. А. Кузнецов. Большую помощь в этой работе ему оказали доц. В. П. Пикулин, старшие преподаватели А. Ф. Леферова, А. С. Калинин. В составлении задач принимали участие преподаватели кафедры высшей математики МЭИ В. В. Жаринов, В. А. Илюшкин, Н. К. Козлова, Р. Ф. Салихджанов, Г. А. Соколов и др. Созданию и внедрению системы типовых расчетов во многом способствовал чл.-корр. АН СССР проф. С. И. Похожаев.

При подготовке второго издания учтен опыт использования сборника в МЭИ и в ряде других вузов, внесены исправления, переработаны задачи в разделе «Ряды». Сборник дополнен разделом «Уравнения математической физики», в который включены простейшие задачи, рассчитанные на применение метода разделения переменных.

Автор благодарен проф. А. В. Ефимову, доцентам В. М. Терпигоревой, В. Г. Долголаптеву и И. Б. Кожухову за рецензирование рукописи и полезные замечания. Автор весьма признателен также проф. И. М. Петрушко и доц. А. Л. Павлову за участие в подготовке материалов для составления задач по уравнениям математической физики, доц. В. П. Пикулину, любезно предоставившему готовые материалы по аналитической геометрии и линейной алгебре, доц. П. А. Шмелеву за сделанные замечания и предложения по пересмотру ряда теоретических упражнений, доц. Минского радиотехнического института А. А. Карпуку, сообщившему замечания, накопленные при работе со сборником, и всем, кто проявил внимание и высказал добрые пожелания по совершенствованию сборника.

В третьем издании книги исправлены замеченные опечатки.

Автор

занимает один учебный час). Повторная защита проводится вне сетки расписания в письменной форме или в виде собеседования (по усмотрению преподавателя).

Работой по созданию типовых расчетов руководил автор сборника доц. Л. А. Кузнецов. Большую помощь в этой работе ему оказали доц. В. П. Пикулин, старшие преподаватели А. Ф. Леферова, А. С. Калинин. В составлении задач принимали участие преподаватели кафедры высшей математики МЭИ В. В. Жаринов, В. А. Илюшкин, Н. К. Козлова, Р. Ф. Салихджанов, Г. А. Соколов и др. Созданию и внедрению системы типовых расчетов во многом способствовал чл.-корр. АН СССР проф. С. И. Похожаев.

При подготовке второго издания учтен опыт использования сборника в МЭИ и в ряде других вузов, внесены исправления, переработаны задачи в разделе «Ряды». Сборник дополнен разделом «Уравнения математической физики», в который включены простейшие задачи, рассчитанные на применение метода разделения переменных.

Автор благодарен проф. А. В. Ефимову, доцентам В. М. Терпигоревой, В. Г. Долголаптеву и И. Б. Кожухову за рецензирование рукописи и полезные замечания. Автор весьма признателен также проф. И. М. Петрушко и доц. А. Л. Павлову за участие в подготовке материалов для составления задач по уравнениям математической физики, доц. В. П. Пикулину, любезно предоставившему готовые материалы по аналитической геометрии и линейной алгебре, доц. П. А. Шмелеву за сделанные замечания и предложения по пересмотру ряда теоретических упражнений, доц. Минского радиотехнического института А. А. Карпуку, сообщившему замечания, накопленные при работе со сборником, и всем, кто проявил внимание и высказал добрые пожелания по совершенствованию сборника.

В третьем издании книги исправлены замеченные опечатки.

Автор

Раздел 1

ПРЕДЕЛЫ

§ 1.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1) Понятия числовой последовательности и ее предела. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.

2) Понятие предела функции в точке. Понятие функции, ограниченной в окрестности точки. Теорема об ограниченности функции, имеющей предел.

3) Теорема о переходе к пределу в неравенствах.

4) Теорема о пределе промежуточной функции.

5) Понятие непрерывности функции. Доказать непрерывность функции $\cos x$.

6) Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

7) Понятие бесконечно малой функции. Теорема о связи между функцией, ее пределом и бесконечно малой.

8) Теорема о сумме бесконечно малых функций.

9) Теорема о произведении бесконечно малой функции на ограниченную функцию.

10) Теорема об отношении бесконечно малой функции к функции, имеющей предел, отличный от нуля.

11) Теорема о пределе суммы.

12) Теорема о пределе произведения.

13) Теорема о пределе частного.

14) Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции.

15) Непрерывность суммы, произведения и частного.

16) Непрерывность сложной функции.

17) Понятие бесконечно большой функции. Теоремы о связи бесконечно больших функций с бесконечно малыми.

18) Сравнение бесконечно малых функций.

19) Эквивалентные бесконечно малые функции. Теорема о замене бесконечно малых функций эквивалентными.

20) Условие эквивалентности бесконечно малых функций.

§ 1.2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1) Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. Вытекает ли из существования $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$ существование $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$?

Указание. Доказать и использовать неравенство

$$||b| - |a|| \leqslant |b - a|.$$

2) Доказать, что последовательность $\{n^2\}$ расходится.

3) Сформулировать на языке «$\varepsilon - \delta$» утверждение: «Число A не является пределом в точке x_0 функции $f(x)$, определенной в окрестности точки x_0».

4) Доказать, что если $f(x)$ непрерывная функция, то $F(x) = |f(x)|$ есть также непрерывная функция. Верно ли обратное утверждение?

5) Сформулировать на языке «$\varepsilon - \delta$» утверждение: «Функция $f(x)$, определенная в окрестности точки x_0, не является непрерывной в этой точке».

6) Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 0$, а $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$ не существует. Доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\varphi(x)$ не существует.

Указание. Допустить противное и использовать теорему о пределе частного.

7) Пусть функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0, а функция $\varphi(x)$ не имеет предела. Будут ли существовать пределы:

а) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + \varphi(x))$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\varphi(x)$?

Рассмотреть пример: $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$.

8) Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 0$, а функция $\varphi(x)$ бесконечно большая при $x \to x_0$. Доказать, что произведение $f(x)\varphi(x)$ является бесконечно большой функцией при $x \to x_0$.

9) Является ли бесконечно большой при $x \to 0$ функция $\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$?

10) Пусть $\alpha'(x) \sim \alpha(x)$ и $\beta'(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$. Доказать, что если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$ не существует, то $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ тоже не существует.

§ 1.3. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

1. $a_n = \frac{3n-2}{2n-1}$, $a = \frac{3}{2}$.

2. $a_n = \frac{4n-1}{2n+1}$, $a = 2$.

3. $a_n = \frac{7n+4}{2n+1}$, $a = \frac{7}{2}$.

4. $a_n = \frac{2n-5}{3n+1}$, $a = \frac{2}{3}$.

5. $a_n = \frac{7n-1}{n+1}$, $a = 7$.

6. $a_n = \frac{4n^2+1}{3n^2+2}$, $a = \frac{4}{3}$.

7. $a_n = \frac{9-n^3}{1+2n^3}$, $a = -\frac{1}{2}$.

8. $a_n = \frac{4n-3}{2n+1}$, $a = 2$.

9. $a_n = \frac{1-2n^2}{2+4n^2}$, $a = -\frac{1}{2}$.

10. $a_n = -\frac{5n}{n+1}$, $a = -5$.

11. $a_n = \frac{n+1}{1-2n}$, $a = -\frac{1}{2}$.

12. $a_n = \frac{2n+1}{3n-5}$, $a = \frac{2}{3}$.

13. $a_n = \frac{1-2n^2}{n^2+3}$, $a = -2$.

14. $a_n = \frac{3n^2}{2-n^2}$, $a = -3$.

15. $a_n = \frac{n}{3n-1}$, $a = \frac{1}{3}$.

16. $a_n = \frac{3n^3}{n^3-1}$, $a = 3$.

17. $a_n = \frac{4+2n}{1-3n}$, $a = -\frac{2}{3}$.

18. $a_n = \frac{5n+15}{6-n}$, $a = -5$.

19. $a_n = \frac{3-n^2}{4+2n^2}$, $a = -\frac{1}{2}$.

20. $a_n = \frac{2n-1}{2-3n}$, $a = -\frac{2}{3}$.

21. $a_n = \frac{3n-1}{5n+1}$, $a = \frac{3}{5}$.

22. $a_n = \frac{4n-3}{2n+1}$, $a = 2$.

23. $a_n = \frac{1-2n^2}{2+4n^2}$, $a = -\frac{1}{2}$.

24. $a_n = \frac{5n+1}{10n-3}$, $a = \frac{1}{2}$.

25. $a_n = \frac{2-2n}{3+4n}$, $a = -\frac{1}{2}$.

26. $a_n = \frac{23-4n}{2-n}$, $a = 4$.

27. $a_n = \frac{1+3n}{6-n}$, $a = -3$.

28. $a_n = \frac{2n+3}{n+5}$, $a = 2$.

29. $a_n = \frac{3n^2+2}{4n^2-1}$, $a = \frac{3}{4}$.

30. $a_n = \frac{2-3n^2}{4+5n^2}$, $a = -\frac{3}{5}$.

31. $a_n = \frac{2n^3}{n^3-2}$, $a = 2$.

Задача 2. Вычислить пределы числовых последовательностей.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^4-(1+n)^4}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3-(1+n)^3}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1-n)^4-(1+n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(6-n)^2-(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3-(n+1)^2}{(n-1)^3-(n+1)^3}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(n+1)^3}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2+(n-1)^2-(n+2)^3}{(4-n)^3}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2(n+1)^3-(n-2)^3}{n^2+2n-3}$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3+(n+2)^3}{(n+4)^3+(n+5)^3}$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)^3+(n+4)^3}{(n+3)^4-(n+4)^4}$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n^3-2n}{(n+1)^4-(n-1)^4}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+6)^3-(n+1)^3}{(2n+3)^2+(n+4)^2}$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-3)^3-(n+5)^3}{(3n-1)^3+(2n+3)^3}$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+10)^2+(3n+1)^2}{(n+6)^3-(n+1)^3}$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^3+(3n+2)^3}{(2n+3)^3-(n-7)^3}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+7)^3-(n+2)^3}{(3n+2)^2+(4n+1)^2}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^3-(2n+3)^3}{(2n+1)^2+(2n+3)^2}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-(n-1)^3}{(n+1)^4-n^4}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^4-(n-2)^4}{(n+5)^2+(n-5)^2}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2-(n-1)^2}$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^3+(n-2)^3}{n^4+2n^2-1}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3+(n-1)^2}{n^3-3n}$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3+1}$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^2-(n-2)^2}{(n+3)^2}$.

31. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^2-(n+1)^3}{n^2+n+1}$.

Задача 3. Вычислить пределы числовых последовательностей.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[3]{5n^2}+\sqrt[4]{9n^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+1}}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n-1}}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2-1}+7n^3}{\sqrt[4]{n^{12}+n+1}-n}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n-1}-\sqrt[3]{125n^3+n}}{\sqrt[3]{n}-n}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[5]{n}-\sqrt[3]{27n^6+n^2}}{(n+\sqrt[4]{n})\sqrt{9+n^2}}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{4n^4+1}-\sqrt[3]{n^4-1}}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n-2}}{\sqrt[4]{n^4+2}+\sqrt{n-2}}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n^3-\sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3}-n}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{5n+2}-\sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7}-n}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[4]{3n+1}+\sqrt{81n^4-n^2+1}}{(n+\sqrt[3]{n})\sqrt{5-n+n^2}}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^5-4}-\sqrt[4]{n^4+1}}$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+3}-\sqrt{n-3}}{\sqrt[5]{n^5+3}+\sqrt{n-3}}$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}-9n^2}{3n-\sqrt[4]{9n^8+1}}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n+1}-\sqrt[3]{27n^3+4}}{\sqrt[4]{n}-\sqrt[3]{n^5+n}}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[3]{7n}-\sqrt[4]{81n^8-1}}{(n+4\sqrt{n})\sqrt{n^2-5}}$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3-7}+\sqrt[3]{n^2+4}}{\sqrt[4]{n^5+5}+\sqrt{n}}$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^6+4}+\sqrt{n-4}}{\sqrt[5]{n^6+6}-\sqrt{n-6}}$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2-\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[3]{n^6+n^3+1}-5n}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+4}-\sqrt[5]{n^5+5}}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[4]{11n}+\sqrt{25n^4-81}}{(n-7\sqrt{n})\sqrt{n^2-n+1}}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}-\sqrt{n^2+5}}{\sqrt[5]{n^7}-\sqrt{n+1}}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^7+5}-\sqrt{n-5}}{\sqrt[7]{n^7+5}+\sqrt{n-5}}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+2}-5n^2}{n-\sqrt{n^4-n+1}}$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt[3]{n^3+2}}{\sqrt[7]{n+2}-\sqrt[5]{n^5+2}}$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{71n}-\sqrt[3]{64n^6+9}}{(n-\sqrt[3]{n})\sqrt{11+n^2}}$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+6}-\sqrt{n^2-5}}{\sqrt[3]{n^3+3}+\sqrt[4]{n^3+1}}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^8+6}-\sqrt{n-6}}{\sqrt[8]{n^8+6}+\sqrt{n-6}}$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^6+2}-n}$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[5]{n^5+1}}$.

31. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{(n+\sqrt[4]{n})\sqrt[3]{n^3-1}}$.

Задача 4. Вычислить пределы числовых последовательностей.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3}\right)$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n-\sqrt[3]{n^3-5}\right)n\sqrt{n}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{(n^2+1)(n^2-4)}-\sqrt{n^4-9}\right)$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^5-8}-n\sqrt{n(n^2+5)}}{\sqrt{n}}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-3n+2}-n\right)$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n+\sqrt[3]{4-n^3}\right)$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-2n+3}\right)$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{(n-1)(n+3)}\right)$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{n(n^4-1)}-\sqrt{n^5-8}\right)$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n\right)$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3}\right)$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{(n+2)^2}-\sqrt[3]{(n-3)^2}\right)$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(n+1)^3}-\sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-3}\right)$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}\right)$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n(n^5+9)}-\sqrt{(n^4-1)(n^2+5)}}{n}$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+5)}-n\right)$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1}\right)$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n^3+1)(n^2+3)}-\sqrt{n(n^4+2)}}{2\sqrt{n}}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n^2+1)(n^2+2)}-\sqrt{(n^2-1)(n^2-2)}\right)$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n^5+1)(n^2-1)}-n\sqrt{n(n^4+1)}}{n}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n^4+1)(n^2-1)}-\sqrt{n^6-1}}{n}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n(n-1)}\right)$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty}n^3\left(\sqrt[3]{n^2(n^6+4)}-\sqrt[3]{(n^8-1)}\right)$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sqrt{n}-\sqrt{n(n+1)(n+2)}\right)$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n(n-1)}\right)$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+2}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-4}\right)$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-2}\right)$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n(n+1)(n+2)}\left(\sqrt{n^3-3}-\sqrt{n^3-2}\right)$.

31. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n^2+5)(n^4+2)}-\sqrt{n^6-3n^3+5}}{n}$.

Задача 5. Вычислить пределы числовых последовательностей.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+3+5+7+\ldots+(2n-1)}{n+1}-\frac{2n+1}{2}\right)$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+3+\ldots+n}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+3}-n\right)$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n!)(n-1)}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-5^{n+1}}{2^{n+1}+5^{n+2}}$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^n}}$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-3+5-7+9-11+\ldots+(4n-3)-(4n-1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+n+1}}$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-2+3-4+\ldots+(2n-1)-2n}{n}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt{3n^4+2}}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{1+2+3+\ldots+n} - \frac{2}{3}\right)$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \ldots + \frac{3^n+2^n}{6^n}\right)$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-5+4-7+\ldots+2n-(2n+3)}{n+3}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n-n^2+3}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+\sqrt{n}-1}{2+7+12+\ldots+(5n-3)}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{16} + \frac{9}{64} + \ldots + \frac{1+2^n}{4^n}\right)$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+5+9+13+\ldots+(4n-3)}{n+1} - \frac{4n+1}{2}\right)$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt[3]{n^3+2n+2}}$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+7^n}{2^n-7^{n-1}}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3+6+9+\ldots+3n}{n^2+4}$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{7}{10} + \frac{29}{100} + \ldots + \frac{2^n+5^n}{10^n}\right)$.

31. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2+4+\ldots+2n}{n+3} - n\right)$

Задача 6. Вычислить пределы числовых последовательностей.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^4}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1}\right)^{-n+1}$
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1}\right)^{n/2}$
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1}$
9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}$
10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7}\right)^{2n+5}$
11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$
12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3}\right)^{n}$
13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$
14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^3}$
15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+3}$
16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1}\right)^{-n^3}$
17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$
18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}$
19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+21n-7}{2n^2+18n+9}\right)^{2n+1}$
20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{10n-3}{10n-1}\right)^{5n}$
21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-5n}{3n^2-5n+7}\right)^{n+1}$
22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{-n^2}$
23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-6n+5}{n^2-5n+5}\right)^{3n+2}$
24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+2}\right)^{n}$
25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7n^2+18n-15}{7n^2+11n+15}\right)^{n+2}$
26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+1}$
27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+n+1}{n^3+2}\right)^{2n^2}$
28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{13n+3}{13n-10}\right)^{n-3}$
29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+2n+3}{2n^2+2n+1}\right)^{3n^2-7}$
30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n-7}\right)^{n/6+1}$
31. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}$

Задача 7. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что:

1. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{2x^2+5x-3}{x+3}=-7$
2. $\lim\limits_{x\to1}\frac{5x^2-4x-1}{x-1}=6.$
3. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{3x^2+5x-2}{x+2}=-7.$
4. $\lim\limits_{x\to3}\frac{4x^2-14x+6}{x-3}=10.$
5. $\lim\limits_{x\to-1/2}\frac{6x^2+x-1}{x+1/2}=-5.$
6. $\lim\limits_{x\to1/2}\frac{6x^2-x-1}{x-1/2}=5.$

7. $\lim\limits_{x\to-1/3} \frac{9x^2-1}{x+1/3} = -6.$

8. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2-5x-2}{x-2} = 7.$

9. $\lim\limits_{x\to-1/3} \frac{3x^2-2x-1}{x+1/3} = -4.$

10. $\lim\limits_{x\to-1} \frac{7x^2+8x+1}{x+1} = -6.$

11. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x-3} = 2.$

12. $\lim\limits_{x\to 1/2} \frac{2x^2+3x-2}{x-1/2} = 5.$

13. $\lim\limits_{x\to 1/3} \frac{6x^2-5x+1}{x-1/3} = -1.$

14. $\lim\limits_{x\to-7/5} \frac{10x^2+9x-7}{x+7/5} = -19.$

15. $\lim\limits_{x\to-7/2} \frac{2x^2+13x+21}{2x+7} = -\frac{1}{2}.$

16. $\lim\limits_{x\to 5/2} \frac{2x^2-9x+10}{2x-5} = \frac{1}{2}.$

17. $\lim\limits_{x\to 1/3} \frac{6x^2+x-1}{x-1/3} = 5.$

18. $\lim\limits_{x\to-1/2} \frac{6x^2-75x-39}{x+1/2} = -81.$

19. $\lim\limits_{x\to 11} \frac{2x^2-21x-11}{x-11} = 23.$

20. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{5x^2-24x-5}{x-5} = 26.$

21. $\lim\limits_{x\to-7} \frac{2x^2+15x+7}{x+7} = -13.$

22. $\lim\limits_{x\to-4} \frac{2x^2+6x-8}{x+4} = -10.$

23. $\lim\limits_{x\to-1/3} \frac{6x^2-x-1}{3x+1} = -\frac{5}{3}.$

24. $\lim\limits_{x\to-5} \frac{x^2+2x-15}{x+5} = -8.$

25. $\lim\limits_{x\to 8} \frac{3x^2-40x+128}{x-8} = 8.$

26. $\lim\limits_{x\to 10} \frac{5x^2-51x+10}{x-10} = 49.$

27. $\lim\limits_{x\to 1/2} \frac{2x^2-5x+2}{x-1/2} = -3.$

28. $\lim\limits_{x\to-6} \frac{3x^2+17x-6}{x+6} = -19.$

29. $\lim\limits_{x\to 1/3} \frac{3x^2+17x-6}{x-1/3} = 19.$

30. $\lim\limits_{x\to-1/5} \frac{15x^2-2x-1}{x+1/5} = -8.$

31. $\lim\limits_{x\to 1/3} \frac{15x^2-2x-1}{x-1/3} = 8.$

Задача 8. Доказать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 (найти $\delta(\varepsilon)$).

1. $f(x) = 5x^2 - 1,\ x_0 = 6.$
2. $f(x) = 4x^2 - 2,\ x_0 = 5.$
3. $f(x) = 3x^2 - 3,\ x_0 = 4.$
4. $f(x) = 2x^2 - 4,\ x_0 = 3.$
5. $f(x) = -2x^2 - 5,\ x_0 = 2.$
6. $f(x) = -3x^2 - 6,\ x_0 = 1.$
7. $f(x) = -4x^2 - 7,\ x_0 = 1.$
8. $f(x) = -5x^2 - 8,\ x_0 = 2.$
9. $f(x) = -5x^2 - 9,\ x_0 = 3.$
10. $f(x) = -4x^2 + 9,\ x_0 = 4.$
11. $f(x) = -3x^2 + 8,\ x_0 = 5.$
12. $f(x) = -2x^2 + 7,\ x_0 = 6.$
13. $f(x) = 2x^2 + 6,\ x_0 = 7.$
14. $f(x) = 3x^2 + 5,\ x_0 = 8.$
15. $f(x) = 4x^2 + 4,\ x_0 = 9.$
16. $f(x) = 5x^2 + 3,\ x_0 = 8.$
17. $f(x) = 5x^2 + 1,\ x_0 = 7.$
18. $f(x) = 4x^2 - 1,\ x_0 = 6.$
19. $f(x) = 3x^2 - 2,\ x_0 = 5.$
20. $f(x) = 2x^2 - 3,\ x_0 = 4.$
21. $f(x) = -2x^2 - 4,\ x_0 = 3.$
22. $f(x) = -3x^2 - 5,\ x_0 = 2.$
23. $f(x) = -4x^2 - 6,\ x_0 = 1.$
24. $f(x) = -5x^2 - 7,\ x_0 = 1.$
25. $f(x) = -4x^2 - 8,\ x_0 = 2.$
26. $f(x) = -3x^2 - 9,\ x_0 = 3.$

27. $f(x) = -2x^2 + 9,\ x_0 = 4.$
28. $f(x) = 2x^2 + 8,\ x_0 = 5.$
29. $f(x) = 3x^2 + 7,\ x_0 = 6.$
30. $f(x) = 4x^2 + 6,\ x_0 = 7.$
31. $f(x) = 5x^2 + 5,\ x_0 = 8.$

Задача 9. Вычислить пределы функций.

1. $\lim\limits_{x\to-1} \frac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$.
2. $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^3-3x-2}{x+x^2}$.
3. $\lim\limits_{x\to-1} \frac{(x^2+3x+2)^2}{x^3+2x^2-x-2}$.
4. $\lim\limits_{x\to1} \frac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$.
5. $\lim\limits_{x\to-3} \frac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$.
6. $\lim\limits_{x\to-1} \frac{(x^3-2x-1)^2}{x^4+2x+1}$.
7. $\lim\limits_{x\to0} \frac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}$.
8. $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$.
9. $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$.
10. $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$.
11. $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.
12. $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$.
13. $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$.
14. $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$.
15. $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$.
16. $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$.
17. $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$.
18. $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$.
19. $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$.
20. $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^3-3x-2}{x-2}$.
21. $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$.
22. $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$.
23. $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$.
24. $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$.
25. $\lim\limits_{x\to1} \frac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$.
26. $\lim\limits_{x\to-3} \frac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$.
27. $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$.
28. $\lim\limits_{x\to0} \frac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^5}$.
29. $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.
30. $\lim\limits_{x\to-3} \frac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$.
31. $\lim\limits_{x\to3} \frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}$.

Задача 10. Вычислить пределы функций.

1. $\lim\limits_{x\to4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.
2. $\lim\limits_{x\to-8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.
3. $\lim\limits_{x\to1} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.
4. $\lim\limits_{x\to3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.
5. $\lim\limits_{x\to-2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.
6. $\lim\limits_{x\to16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

7. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

13. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$.

14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$.

15. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$.

16. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$.

17. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$.

18. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$.

19. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{\sqrt[3]{x/4}-1/2}{\sqrt{1/2+x}-\sqrt{2x}}$.

20. $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{\sqrt[3]{x/9}-1/3}{\sqrt{1/3+x}-\sqrt{2x}}$.

21. $\lim\limits_{x\to 1/4}\dfrac{\sqrt[3]{x/16}-1/4}{\sqrt{1/4+x}-\sqrt{2x}}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x}}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}$.

26. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

27. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt[3]{(\sqrt{x}-4)^2}}$.

28. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3+8}}$.

29. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2-16}}$.

30. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$.

31. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$.

Задача 11. Вычислить пределы функций.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4(x-\pi)}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10(x+\pi)}{e^{x^2}-1}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\operatorname{tg}(\pi(2+x))}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\operatorname{tg}\left(2\pi(x+1/2)\right)}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{x+1}-2}{\ln(1+4x)}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin(2\pi(x+10))}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x+5\pi/2)\operatorname{tg} x}{\arcsin 2x^2}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{\sqrt{8x+4}-2}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{3x+1}}{\cos\left(\pi(x+1)/2\right)}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3\operatorname{arctg} x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin[\pi(x+1)]}{\ln(1+2x)}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin\bigl(\pi(x+2)\bigr)}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\bigl(5(x+\pi)\bigr)}{e^{3x}-1}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{\sin 3(x+\pi)}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{4x}-1}{\sin\bigl(\pi(x/2+1)\bigr)}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\cos(x-\pi)}{(e^{3x}-1)^2}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{x^4}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{2-\sqrt{2x^2+4}}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(\pi(1+x/2))}{\ln(x+1)}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{4\pi x}-1}{\sqrt[3]{8+24x}-2}$.

31. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin 2x}{1+\cos(x-3\pi)}$.

Задача 12. Вычислить пределы функций.

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\ln x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}$.

3. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$.

4. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$.

5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+\cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x}$.

6. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$.

7. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{(x-\pi)^4}$.

8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\operatorname{tg} \pi x}$.

9. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 2\pi} \dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{x^2}-e^{4\pi^2}}$.

11. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$.

12. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$.

13. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin \pi x}$.

14. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{x^2-\pi^2}{\sin x}$.

15. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{\operatorname{tg} \pi x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2^x-16}{\sin \pi x}$.

17. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\ln 2x-\ln \pi}{\sin(5x/2)\cos x}$.

18. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$.

19. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin 5x-\sin 3x}$.

20. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(9-2x^2)}{\sin 2\pi x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1-2^{4-x^2}}{2\left(\sqrt{2x}-\sqrt{3x^2-5x+2}\right)}$.

22. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

23. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\operatorname{tg} \pi x}{x+2}$.

24. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1-\sin(x/2)}{\pi-x}$.

25. $\lim\limits_{x\to \pi/3} \dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$.

26. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{arctg}(x^2-2x)}{\sin 3\pi x}$.

27. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}$.

28. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos(\pi x/2)}{1-\sqrt{x}}$.

29. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3-\sqrt{10-x}}{\sin 3\pi x}$.

30. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$.

31. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cos 3x-\cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}$.

Задача 13. Вычислить пределы функций.

1. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{(2x-1)^2}{e^{\sin\pi x}-e^{-\sin 3\pi x}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x-\sqrt[3]{2x-3})}{\sin(\pi x/2)-\sin((x-1)\pi)}$.

4. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}2}{\sin\ln(x-1)}$.

5. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{e^{\operatorname{tg}2x}-e^{-\sin 2x}}{\sin x-1}$.

6. $\lim\limits_{x\to\pi/6}\frac{\ln\sin 3x}{(6x-\pi)^2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin\left(\sqrt{2x^2-3x-5}-\sqrt{1+x}\right)}{\ln(x-1)-\ln(x+1)+\ln 2}$.

8. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\frac{(x-2\pi)^2}{\operatorname{tg}(\cos x-1)}$.

9. $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{\ln(4x-1)}{\sqrt{1-\cos\pi x}-1}$.

10. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\arcsin(x+2)/2}{3^{\sqrt{2+x+x^2}}-9}$.

11. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2^{\sin\pi x}-1}{\ln(x^3-6x-8)}$.

12. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\ln\cos 2x}{(1-\pi/x)^2}$.

13. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\operatorname{tg}\ln(3x-5)}{e^{x+3}-e^{x^2+1}}$.

14. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\frac{\ln\cos x}{3^{\sin 2x}-1}$.

15. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{1+\ln^2 x}-1}{1+\cos\pi x}$.

16. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos(x/2)}{e^{\sin x}-e^{\sin 4x}}$.

17. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\ln(2x-5)}{e^{\sin\pi x}-1}$.

18. $\lim\limits_{x\to\pi/3}\frac{e^{\sin^2 6x}-e^{\sin^2 3x}}{\log_3\cos 6x}$.

19. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\operatorname{tg}2x}}{\ln(2x/\pi)}$.

20. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\operatorname{tg}(e^{x+2}-e^{x^2-4})}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2}$.

21. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2^x+7}-\sqrt{2^{x+1}+5}}{x^3-1}$.

22. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\ln(2+\cos x)}{(3^{\sin x}-1)^2}$.

23. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{(x^3-\pi^3)\sin 5x}{e^{\sin^2 x}-1}$.

24. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\operatorname{tg}(x+1)}{e^{\sqrt[3]{x^3-4x^2+6}}-e}$.

25. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 4x}$.

26. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\ln\sin x}{(2x-\pi)^2}$.

27. $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^{x^2-a^2}-1}{\operatorname{tg}\ln(x/a)}$.

28. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sin\left(e^{\sqrt[3]{1-x^2}/2}-e^{\sqrt[3]{x+2}}\right)}{\operatorname{arctg}(x+3)}$.

29. $\lim\limits_{x\to a\pi}\frac{\ln(\cos(x/a)+2)}{a^{a^2\pi^2/x^2-a\pi/x}-a^{a\pi/x-1}}$.

30. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\operatorname{tg}(3^{\pi/x}-3)}{3^{\cos(3x/2)}-1}$.

31. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin(x^2/\pi)}{2^{\sqrt{\sin x+1}}-2}$.

Задача 14. Вычислить пределы функций.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7^{2x}-5^{3x}}{2x-\operatorname{arctg}3x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{-2x}}{2\arcsin x-\sin x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin 3x-2x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{3x}}{\sin 2x-\sin x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{2x}-5^{3x}}{\operatorname{arctg}x+x^3}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{3x}}{\operatorname{arctg}x-x^2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{5x}-2^{x}}{x-\sin 9x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}-e^{-2x}}{2\operatorname{arctg}x-\sin x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{12^{x}-5^{-3x}}{2\arcsin x-x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{7x}-e^{-2x}}{\sin x-2x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{5x}-2^{7x}}{\arcsin 2x-x}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{x}}{\arcsin x+x^3}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4^x-2^{7x}}{\operatorname{tg}3x-x}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{tg}2x-\sin x}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{10^{2x}-7^{-x}}{2\operatorname{tg}x-\operatorname{arctg}x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{x}}{\sin 3x-\sin 5x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7^{3x}-3^{2x}}{\operatorname{tg}x+x^3}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}-e^{2x}}{2\operatorname{tg}x-\sin x}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{2x}-7^{x}}{\arcsin 3x-5x}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-5x}}{2\sin x-\operatorname{tg}x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4^{5x}-9^{-2x}}{\sin x-\operatorname{tg}x^3}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin 3x-\operatorname{tg}2x}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^{2x}-2^{3x}}{\sin x+\sin x^2}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{3x}}{\sin 3x-\operatorname{tg}2x}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{9^{x}-2^{3x}}{\operatorname{arctg}2x-7x}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-2x}}{x+\sin x^2}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{5x}-2^{-7x}}{2x-\operatorname{tg}x}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{x}}{\sin 2x-\sin x}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{x}}{x+\operatorname{tg}x^2}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x^3}$.

31. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{3x}-3^{5x}}{\sin 7x-2x}$.

Задача 15. Вычислить пределы функций.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$.

3. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{\sin(x+1)}$.

4. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{\ln x-\ln a}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(e^x-e^{-x})}{e^{x^3+1}-e}$.

9. $\lim\limits_{x\to \pi/3}\frac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)}$.

10. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin\pi x}$.

11. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\ln\operatorname{tg}x}$.

12. $\lim\limits_{x\to b}\frac{a^x-a^b}{x-b}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin 3x}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{x\ln\cos 5x}$.

15. $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ x>0}}\frac{\ln(x+h)+\ln(x-h)+2\ln x}{h^2}$.

16. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{\log_2 x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{tg}x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2^x-2}{\ln x}$.

19. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x-h)}{h}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sin 3x}$.

21. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

23. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{5+x}-2}{\sin\pi x}$.

24. $\lim\limits_{x\to \pi/6}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.

25. $\lim\limits_{x\to 10} \frac{\lg x-1}{\sqrt{x-9}-1}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^{x+1}-3}{\ln\left(1+x\sqrt{1+xe^x}\right)}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 2x}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin bx-\sin ax}{\ln(\operatorname{tg}(\pi/4+ax))}$.

29. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}$.

30. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\log_3 x-1}{\operatorname{tg}\pi x}$.

31. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{e^x-e}{\sin(x^2-1)}$.

Задача 16. Вычислить пределы функций.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\ln(1+x^3)\right)^{\frac{3}{(x^2\arcsin x)}}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{2}{\sin x}}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(5-\frac{4}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\ln(1+\sqrt[3]{x})\right)^{\frac{x}{\sin^4\sqrt[3]{x}}}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{\arcsin^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{3}{x}}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\pi x)^{\frac{1}{(x\sin\pi x)}}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 3x)^{\frac{1}{\ln\cos x}}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)^{\operatorname{ctg}x}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x\sin^2 x)^{\frac{1}{\ln(1+\pi x^3)}}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-5^{\arcsin x^3}\right)^{\frac{(\operatorname{cosec}^2 x)}{x}}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos 3x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}(2-e^{\sin x})^{\operatorname{ctg}\pi x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+\sin^2 x)}}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{x^2}\right)^{\frac{1}{\ln\left(1+\operatorname{tg}^2\left(\pi\frac{x}{3}\right)\right)}}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}(3-2\cos x)^{-\operatorname{cosec}^2 x}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{\sin^2 x}\right)^{\frac{1}{\ln\cos x}}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x^2]{2-\cos x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\frac{5}{\cos x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-\frac{2}{\cos x}\right)^{\operatorname{cosec}^2 x}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x\cos 2x}{1+\sin x\cos 3x}\right)^{\frac{1}{\sin x^3}}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{x^2}\right)^{\frac{1}{(1-\cos\pi x)}}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\ln\frac{1}{3}\operatorname{arctg}^6\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x\cos 2x}{1+\operatorname{tg}x\cos 5x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x\cdot 3^x}{1+x\cdot 7^x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{\ln(1+3x^2)}}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\ln\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\ln(1+\operatorname{tg}^2 3x)}}$.

31. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x^2 2^x}{1+x^2 5^x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$

Задача 17. Вычислить пределы функций.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)^{x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x}\right)^{2/(x+2)}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{3x}-1}{x}\right)^{\cos^2(\pi/4+x)}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{x+3}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2+4}{x+2}\right)^{x^2+3}$.
7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{6x}\right)^{x/(x+2)}$.
8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} 4x}{x}\right)^{2+x}$.
9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^3}-1}{x^2}\right)^{(8x+3)/(1+x)}$.
10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x+4}\right)^{\cos x}$.
11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x}{2x}\right)^{2+x}$.
12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)^{6/(1+x)}$.
13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\sin 3x}\right)^{x^2}$.
14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)^{x+2}$.
15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3+8}{3x^2+10}\right)^{x+2}$.
16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin(x+2)\right)^{3/(3+x)}$.
17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2^{2x}-1}{x}\right)^{x+1}$.
18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^4+5}{x+10}\right)^{4/(x+2)}$.
19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{11x+8}{12x+1}\right)^{\cos^2 x}$.
20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3+1}{x^3+8}\right)^{2/(x+1)}$.
21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right)^{3/(x+8)}$.
22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\frac{x}{\pi}\right)^{1+x}$.
23. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{2(x+5)}$.
24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} 3x}{x}\right)^{x+2}$.
25. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\cos x^4}$.
26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x^2}{\sin x}\right)^{1/(x+6)}$.
27. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)^{(e^x-1)/x}$.
28. $\lim\limits_{x\to 0}(6-5/\cos x)^{\operatorname{tg}^2 x}$.
29. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+8x}{2+11x}\right)^{1/(x^2+1)}$.
30. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin^2 x}{\arcsin^2 4x}\right)^{2x+1}$.
31. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3+4}{x^3+9}\right)^{1/(x+2)}$.

Задача 18. Вычислить пределы функций.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3x-1}{x+1}\right)^{1/(\sqrt[3]{x}-1)}$.
2. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x-a)}$.
3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{1/(\sqrt[3]{x}-1)}$.
4. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\cos x}{\cos 2}\right)^{1/(x-2)}$.
5. $\lim\limits_{x\to 8}\left(\frac{2x-7}{x+1}\right)^{1/(\sqrt[3]{x}-2)}$.
6. $\lim\limits_{x\to \pi/4}(\operatorname{tg} x)^{1/\cos(3\pi/4-x)}$.
7. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{1/(\sqrt[5]{x}-1)}$.
8. $\lim\limits_{x\to a}(2-x/a)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

9. $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\operatorname{ctg}2x/\sin 3x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{1/\sin^2 2x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{6-x}{3}\right)^{\operatorname{tg}(\pi x/6)}$.

12. $\lim\limits_{x\to 4\pi}(\cos x)^{\operatorname{ctg}x/\sin 4x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$.

14. $\lim\limits_{x\to 4\pi}(\cos x)^{\frac{5}{\operatorname{tg}5x\sin 2x}}$.

15. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{9-2x}{3}\right)^{\operatorname{tg}(\pi x/6)}$.

16. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\sin x)^{6\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}3x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 1}(2e^{x-1}-1)^{x/(x-1)}$.

18. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^{1/(x-\pi/2)}$.

19. $\lim\limits_{x\to 1}(2e^{x-1}-1)^{\frac{3x-1}{x-1}}$.

20. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(1+\cos 3x)^{\sec x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 2}(2e^{x-2}-1)^{\frac{3x+2}{x-2}}$.

22. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sin(x-1)}{x-1}\right)^{\frac{\sin(x-1)}{x-1-\sin(x-1)}}$.

23. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2-x}{x}\right)^{1/\ln(2-x)}$.

24. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)^{1/\cos x}$.

25. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{\sin(\pi x/2)}{\ln(2-x)}}$.

26. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{\sin x}{\sin 3}\right)^{1/(x-3)}$.

27. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{2x}\right)^{\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)}}$.

28. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\sin x)^{\frac{18\sin x}{\operatorname{ctg}x}}$.

29. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(2-x)}}$.

30. $\lim\limits_{x\to \pi}\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{4}\right)^{1/\cos(x/2)}$.

31. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}$.

Задача 19. Вычислить пределы функций.

1. $\lim\limits_{x\to e}\left(\frac{\ln x-1}{x-e}\right)^{\sin\frac{\pi}{2e}x}$.

2. $\lim\limits_{x\to \pi/4}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$.

3. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\left(\frac{\ln\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{ctg}x}\right)^{1/(x+\pi/4)}$.

4. $\lim\limits_{x\to 2}(\sin x)^{3/(1+x)}$.

5. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\sin 3\pi x}{\sin\pi x}\right)^{\sin^2(x-2)}$.

6. $\lim\limits_{x\to \pi/6}(\sin x)^{6x/\pi}$.

7. $\lim\limits_{x\to 3}\left(2-\frac{x}{3}\right)^{\sin\pi x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-x^2)/(1-x)}$.

9. $\lim\limits_{x\to 1}(1+e^x)^{\frac{\sin\pi x}{1-x}}$.

10. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\operatorname{tg}9\pi x}{\sin 4\pi x}\right)^{x/(x+1)}$.

11. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{\arcsin(x-3)}{\sin 3\pi x}\right)^{x^2-8}$.

12. $\lim\limits_{x\to \pi/4}(\sin 2x)^{\frac{x^2-\pi^2/16}{x-\pi/4}}$.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{arctg}\frac{x-3/4}{(x-1)^2}\right)^{x+1}$.

14. $\lim\limits_{x\to \pi}\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{4}\right)^{\sin(x-\pi)}$.

15. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\right)^{x^2/a^2}$.

16. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}\right)^{1/x}$.

17. $\lim\limits_{x\to \pi/4}(\sin x+\cos x)^{1/\operatorname{tg}x}$.

18. $\lim\limits_{x\to \pi/8}(\operatorname{tg}2x)^{\sin(\pi/8+x)}$.

19. $\lim\limits_{x\to 1}(\arcsin x)^{\operatorname{tg}\pi x}$.

20. $\lim\limits_{x\to \pi}(x+\sin x)^{\sin x+x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 1}(\ln^2 ex)^{1/(x^2+1)}$.

22. $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)^{\pi/\operatorname{arctg} x}$.

23. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^3-1}{x-1}\right)^{1/x^2}$.

24. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{e^{\sin \pi x}-1}{x-1}\right)^{x^2+1}$.

25. $\lim\limits_{x\to 2}(\cos \pi x)^{\operatorname{tg}(x-2)}$.

26. $\lim\limits_{x\to 1/2}(\arcsin x+\arccos x)^{\frac{1}{x}}$.

27. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\cos x+1)^{\sin x}$.

28. $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt[3]{x}+x-1)^{\sin(\pi x/4)}$.

29. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}\right)^{1/(2-x)}$.

30. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1+\cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x}\right)^{x^2}$.

31. $\lim\limits_{x\to 1}\left((e^{2x}-e^2)/(x-1)\right)^{x+1}$.

Задача 20. Вычислить предел функции или числовой последовательности.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{4\cos 3x+x\operatorname{arctg}(1/x)}$.
2. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\sqrt{3\sin x+(2x-\pi)\sin\frac{x}{2x-\pi}}$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-\sin n}{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n^3-7}}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x\cos(1/x)+\lg(2+x)}{\lg(4+x)}$.
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{1/n}+\sin\frac{n}{n^2+1}\cdot\cos n}{1+\cos(1/n)}$.
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{2+n^5}-\sqrt{2n^3+3}}{(n+\sin n)\sqrt{7n}}$.
7. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}+(4x-\pi)\cos\frac{x}{4x-\pi}}{\lg(2+\operatorname{tg} x)}$.
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\sqrt{n^2+1}\operatorname{arctg}\frac{n}{n^2+1}\right)$.
9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-\sqrt{3n^5-7}}{(n^2-n\cos n+1)\sqrt{n}}$.
10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\sin n+\sqrt{n-1}}{n+\sqrt{n+1}}$.
11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1-\cos n)\sqrt[3]{n}}{\sqrt{2n+1}-1}$.
12. $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(2+\sqrt{\operatorname{arctg} x\cdot\sin\frac{1}{x}}\right)$.
13. $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{\frac{1+\cos \pi x}{4+(x+2)\sin\frac{x}{x+2}}}$.
14. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^4-3}+\sin n}$.
15. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2\cos n}+\sqrt{3n^2+2}}{\sqrt[5]{n^6+1}}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+3}{2-\lg(1+\sin x)}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\operatorname{arctg} x \sin^2 \frac{1}{x} + 5\cos x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{4\cos x + \sin \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x)}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{2\cos^2 x + (e^x - 1)\sin \frac{1}{x}}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2+\ln\left(e+x\sin\frac{1}{x}\right)}{\cos x+\sin x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0} \ln\left((e^{x^2} - \cos x)\cos(1/x) + \operatorname{tg}(x+\pi/3)\right)$.

22. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x+\ln(1+x)\sqrt{2+\cos(1/x)}}{2+e^x}$.

23. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\cos 2\pi x}{2+\left(e^{\sqrt{x-1}}-1\right)\operatorname{arctg}\frac{x+2}{x-1}}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{(e^{\sin x} - 1)\cos \frac{1}{x} + 4\cos x}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(1+x)}{\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)\ln(1+x)+2}$.

26. $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt[3]{\lg(x+2) + \sin\sqrt{4-x^2}\cos\frac{x+2}{x-2}}$.

27. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{2+\cos x\sin\frac{2}{2x-\pi}}{3+2x\sin x}$.

28. $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{tg}\left(\cos x + \sin\frac{x-1}{x+1}\cos\frac{x+1}{x-1}\right)$.

29. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right) + 4\cos x}$.

30. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin x+\sin \pi x\cdot\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}}{1+\cos x}$.

31. $\lim\limits_{n\to \infty} \frac{\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt[3]{2n^2+1}}{n+2\sin n}$.

Раздел 2

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

§ 2.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1) Понятие производной. Производная функции x^n.

2) Геометрический смысл производной. Уравнения касательной и нормали к графику функции.

3) Понятие дифференцируемости функции и дифференциала. Условие дифференцируемости. Связь дифференциала с производной.

4) Геометрический смысл дифференциала.

5) Непрерывность дифференцируемой функции.

6) Дифференцирование постоянной и суммы, произведения и частного.

7) Производная сложной функции.

8) Инвариантность формы дифференциала.

9) Производная обратной функции.

10) Производные обратных тригонометрических функций.

11) Гиперболические функции, их производные.

12) Производные высших порядков. Формула Лейбница.

13) Дифференциалы высших порядков. Неинвариантность дифференциалов порядка выше первого.

14) Дифференцирование функций, заданных параметрически.

§ 2.2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1) Исходя из определения производной, доказать, что:

а) производная периодической дифференцируемой функции есть функция периодическая;

б) производной четной дифференцируемой функции есть функция нечетная;

в) производная нечетной дифференцируемой функции есть функция четная.

2) Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x=0$ и $f(0)=0$, то

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}.$$

3) Доказать, что производная $f'(0)$ не существует, если

$$f(x)=\begin{cases} x\sin(1/x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

4) Доказать, что производная от функции

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin(1/x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

разрывна в точке $x=0$.

5) Доказать приближенную формулу

$$\sqrt{a^2+z}\approx a+z/(2a),\quad a>0,\quad |z|\ll a.$$

6) Что можно сказать о дифференцируемости суммы $f(x)+$ $+g(x)$ в точке $x=x_0$, если в этой точке:

а) функция $f(x)$ дифференцируема, а функция $g(x)$ недифференцируема;

б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ недифференцируемы.

7) Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f(x_0)\neq 0$, а функция $g(x)$ недифференцируема в этой точке. Доказать, что произведение $f(x)g(x)$ является недифференцируемым в точке x_0.

8) Что можно сказать о дифференцируемости произведения $f(x)g(x)$ в предположениях задачи 6?

Рассмотреть примеры:

$$f(x)=x,\qquad g(x)=|x|,\quad x_0=0$$

$$f(x)=x,\qquad g(x)=\begin{cases}\sin(1/x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\quad x_0=0;$$

$$f(x)=|x|,\qquad g(x)=|x|,\quad x_0=0;$$

$$f(x)=|x|,\qquad g(x)=|x|+1,\quad x_0=0.$$

9) Найти $f'(0)$, если $f(x) = x(x+1)\dots(x+1234567)$.

10) Выразить дифференциал d^3y от сложной функции $y = y\big(u(x)\big)$ через производные от функции $y(u)$ и дифференциалы от функции $u(x)$.

11) Пусть $y(x)$ и $x(y)$ дважды дифференцируемые взаимно обратные функции. Выразить x'' через y' и y''.

§ 2.3. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$.

1. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(x^3 + x^2 \sin\frac{2}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(x^2 \cos\frac{1}{9x}\right) + \frac{2}{3}x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x \cos\frac{1}{5x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 - \sin\left(x^3 \sin\frac{1}{x}\right)\right), & x \neq 0; \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} \sin\left(x \sin\frac{3}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + \ln\left(1 + x^2 \sin\frac{1}{x}\right)^2} - 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} \sin\left(e^{x^2 \sin\frac{5}{x}} - 1\right) + x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{4}{3x} + \frac{x^2}{2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x^3 - x^{\frac{3}{2}} \sin\frac{1}{3x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} \sin x \cos\frac{5}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} x + \arcsin\left(x^2 \sin\frac{6}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg}(2^{x^2\cos(1/8x)}-1+x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}x\cdot\sin\frac{7}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases}2x^2+x^2\cos\frac{1}{9x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases}x^2\cos^2\frac{11}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases}2x^2+x^2\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln\cos x}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases}6x+x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases}e^{x\sin 5x}-1, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases}3^{x^2\sin\frac{2}{x}}-1+2x, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

22. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1+\ln(1+3x^2\cos(2/x))}-1, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases}e^{x\sin(3/5x)}-1, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

24. $f(x)=\begin{cases}\frac{2^{\operatorname{tg}x}-2^{\sin x}}{x^2}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\left(\frac{3x}{2}-x^2\sin\frac{1}{x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

26. $f(x)=\begin{cases}e^{\sin\left(x^{3/2}\sin\frac{2}{x}\right)}-1+x^2, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

27. $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{1-2x^3\sin\frac{5}{x}}-1+x, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

28. $f(x)=\begin{cases}x^2e^{|x|}\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

29. $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+2x^2+x^3)}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

30. $f(x)=\begin{cases}\frac{\cos x-\cos 3x}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

31. $f(x)=\begin{cases}1-\cos\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

Задача 2. Составить уравнение нормали (в вариантах 1–12) или уравнение касательной (в вариантах 13–31) к данной кривой в точке с абсциссой x_0.

1. $y=\frac{4x-x^2}{4}$, $x_0=2$.
2. $y=2x^2+3x-1$, $x_0=-2$.
3. $y=x-x^3$, $x_0=-1$.
4. $y=x^2+8\sqrt{x}-32$, $x_0=4$.
5. $y=x+\sqrt{x^3}$, $x_0=1$.
6. $y=\sqrt[3]{x^2}-20$, $x_0=-8$.
7. $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, $x_0=4$.
8. $y=8\sqrt[4]{x}-70$; $x_0=16$.
9. $y=2x^2-3x+1$, $x_0=1$.
10. $y=\frac{x^2-3x+6}{x^2}$, $x_0=3$.
11. $y=\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}$, $x_0=64$.
12. $y=\frac{x^3+2}{x^3-2}$, $x_0=2$.
13. $y=2x^2+3$, $x_0=-1$.
14. $y=\frac{x^{29}+6}{x^4+1}$, $x_0=1$.
15. $y=2x+\frac{1}{x}$, $x_0=1$.
16. $y=-\frac{2(x^8+2)}{3(x^4+1)}$, $x_0=1$.
17. $y=\frac{x^5+1}{x^4+1}$, $x_0=1$.
18. $y=\frac{x^{16}+9}{1-5x^2}$, $x_0=1$.
19. $y=3(\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x})$, $x_0=1$.
20. $y=\frac{1}{3x+2}$, $x_0=2$.
21. $y=\frac{x}{x^2+1}$, $x_0=-2$.
22. $y=\frac{x^2-3x+3}{3}$, $x_0=3$.
23. $y=\frac{2x}{x^2+1}$, $x_0=1$.
24. $y=-2(\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x})$, $x_0=1$.
25. $y=\frac{1+3x^2}{3+x^2}$, $x_0=1$.
26. $y=14\sqrt{x}-15\sqrt[3]{x}+2$, $x_0=1$.
27. $y=3\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}$, $x_0=1$.
28. $y=\frac{3x-2x^3}{3}$, $x_0=1$.
29. $y=\frac{x^2}{10}+3$, $x_0=2$.
30. $y=\frac{x^2-2x-3}{4}$, $x_0=4$.
31. $y=6\sqrt[3]{x}-\frac{16\sqrt[4]{x}}{3}$, $x_0=1$.

Задача 3. Найти дифференциал dy.

1. $y = x\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|,\ x > 0.$
2. $y = \operatorname{tg}\left(2\arccos\sqrt{1 - 2x^2}\right),\ x > 0.$
3. $y = \sqrt{1 + 2x} - \ln\left(x + \sqrt{1 + 2x}\right).$
4. $y = x^2 \operatorname{arctg}\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1}.$
5. $y = \arccos\frac{1}{\sqrt{1 + 2x^2}},\ x > 0.$
6. $y = x\ln\left|x + \sqrt{x^2 + 3}\right| - \sqrt{x^2 + 3}.$
7. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + (\operatorname{sh} x) \times \ln\operatorname{ch} x.$
8. $y = \arccos\frac{(x^2 - 1)}{(x^2\sqrt{2})}.$
9. $y = \ln\left(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x}\right).$
10. $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - \sqrt{1 + x^2}\operatorname{arctg} x.$
11. $y = \frac{\ln|x|}{1 + x^2} - \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1 + x^2}.$
12. $y = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1} + \arcsin e^{-x}\right).$
13. $y = x\sqrt{4 - x^2} + 4\arcsin\left(\frac{x}{2}\right).$
14. $y = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{\sin x}.$
15. $y = 2x + \ln\left|\sin x + 2\cos x\right|.$
16. $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} - \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}{3}.$
17. $y = \ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2x}\right|.$
18. $y = \sqrt[3]{\frac{x + 2}{x - 2}}.$
19. $y = \operatorname{arctg}\frac{x^2 - 1}{x}.$
20. $y = \ln|x^2 - 1| - \frac{1}{x^2 - 1}.$
21. $y = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right).$
22. $y = \ln\left|2x + 2\sqrt{x^2 + x} + 1\right|.$
23. $y = \ln|\cos\sqrt{x}| + \sqrt{x}\operatorname{tg}\sqrt{x}.$
24. $y = e^x(\cos 2x + 2\sin 2x).$
25. $y = x(\sin\ln x - \cos\ln x).$
26. $y = \left(\sqrt{x - 1} - \frac{1}{2}\right)e^{2\sqrt{x - 1}}.$
27. $y = \cos x \cdot \ln\operatorname{tg} x - \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$
28. $y = \sqrt{3 + x^2} - x\ln\left|x + \sqrt{3 + x^2}\right|.$
29. $y = \sqrt{x} - (1 + x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}.$
30. $y = x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1 + x^2}.$
31. $y = x\sqrt{x^2 - 1} + \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|.$

Задача 4. Вычислить приближенно с помощью дифференциала.

1. $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 7{,}76$.
2. $y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}$, $x = 1{,}012$.
3. $y = \frac{x+\sqrt{5-x^2}}{2}$, $x = 0{,}98$.
4. $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 27{,}54$.
5. $y = \arcsin x$, $x = 0{,}08$.
6. $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}$, $x = 0{,}97$.
7. $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 26{,}46$.
8. $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$, $x = 1{,}97$.
9. $y = x^{11}$, $x = 1{,}021$.
10. $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 1{,}21$.
11. $y = x^{21}$, $x = 0{,}998$.
12. $y = \sqrt[3]{x^2}$, $x = 1{,}03$.
13. $y = x^6$, $x = 2{,}01$.
14. $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 8{,}24$.
15. $y = x^7$, $x = 1{,}996$.
16. $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 7{,}64$.
17. $y = \sqrt{4x - 1}$, $x = 2{,}56$.
18. $y = \frac{1}{\sqrt{2x^2+x+1}}$, $x = 1{,}016$.
19. $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 8{,}36$.
20. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x = 4{,}16$.
21. $y = x^7$, $x = 2{,}002$.
22. $y = \sqrt{4x - 3}$, $x = 1{,}78$.
23. $y = \sqrt{x^3}$, $x = 0{,}98$.
24. $y = x^5$, $x = 2{,}997$.
25. $y = \sqrt[5]{x^2}$, $x = 1{,}03$.
26. $y = x^4$, $x = 3{,}998$.
27. $y = \sqrt{1 + x + \sin x}$, $x = 0{,}01$.
28. $y = \sqrt[3]{3x + \cos x}$, $x = 0{,}01$.
29. $y = \sqrt[4]{2x - \sin(\pi x/2)}$, $x = 1{,}02$.
30. $y = \sqrt{x^2 + 5}$, $x = 1{,}97$.
31. $y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$, $x = 1{,}58$.

Задача 5. Найти производную.

1. $y = \frac{2(3x^3+4x^2-x-2)}{15\sqrt{1+x}}$.
2. $y = \frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$.
3. $y = \frac{x^4-8x^2}{2(x^2-4)}$.
4. $y = \frac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$.
5. $y = \frac{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}$.
6. $y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$.
7. $y = \frac{(x^2-6)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^5}$.
8. $y = \frac{(x^2-8)\sqrt{x^2-8}}{6x^3}$.
9. $y = \frac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}$.
10. $y = \sqrt[3]{\frac{(1+x^{3/4})^2}{x^{3/2}}}$.
11. $y = \frac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}$.
12. $y = \frac{(x^2-2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$.
13. $y = \frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$.
14. $y = \frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}$.
15. $y = \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$.
16. $y = \frac{128-8x^3-x^6}{\sqrt{8-x^3}}$.
17. $y = \frac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}$.
18. $y = (1 - x^2)\sqrt[5]{x^3 + \frac{1}{x}}$.
19. $y = \frac{(2x^2+3)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}$.
20. $y = \frac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$.

21. $y = \frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$.
22. $y = 2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$.
23. $y = \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}}$.
24. $y = 3\frac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$.
25. $y = 3\sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)^2}}$.
26. $y = \frac{x+7}{6\sqrt{x^2+2x+7}}$.
27. $y = \frac{x\sqrt{x+1}}{x^2+x+1}$.
28. $y = \frac{x^2+2}{2\sqrt{1-x^4}}$.
29. $y = \frac{(x+3)\sqrt{2x-1}}{2x+7}$.
30. $y = \frac{3x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+2}}$.
31. $y = \frac{3x^6+4x^4-x^2-2}{15\sqrt{1+x^2}}$.

Задача 6. Найти производную.

1. $y = x - \ln\left(2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}\right)$.
2. $y = e^{2x}\frac{2-\sin 2x-\cos 2x}{8}$.
3. $y = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{e^x-3}{2}$.
4. $y = \frac{1}{\ln 4}\ln\frac{1+2^x}{1-2^x}$.
5. $y = 2\sqrt{e^x+1} + \ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}$.
6. $y = \frac{2}{3}\sqrt{(\mathrm{arctg}\,e^x)^3}$.
7. $y = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) - 2\,\mathrm{arctg}\,e^x$.
8. $y = \ln(e^x+1) + \frac{18e^{2x}+27e^x+11}{6(e^x+1)^3}$.
9. $y = 2\frac{\sqrt{2^x-1}-\mathrm{arctg}\sqrt{2^x-1}}{\ln 2}$.
10. $y = 2(x-2)\sqrt{1+e^x} - 2\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)$.
11. $y = e^{\alpha x}\frac{\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2}$.
12. $y = e^{\alpha x}\frac{\beta\sin\beta x+\alpha\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2}$.
13. $y = e^{ax}\left(\frac{1}{2a} + \frac{a\cos 2bx+2b\sin 2bx}{2(a^2+4b^2)}\right)$.
14. $y = x + \frac{1}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$.
15. $y = x - 3\ln\left((1+e^{x/6})\sqrt{1+e^{x/3}}\right) - 3\,\mathrm{arctg}\,e^{x/6}$.
16. $y = x + \frac{8}{1+e^{x/4}}$.
17. $y = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}\right) + \arcsin e^{-x}$.
18. $y = x - e^{-x}\arcsin e^x - \ln\left(1+\sqrt{1-e^{2x}}\right)$.
19. $y = x - \ln(1+e^x) - 2e^{-x/2}\,\mathrm{arctg}\,e^{x/2} - (\mathrm{arctg}\,e^{x/2})^2$.

20. $y=\frac{e^{x^3}}{1+x^3}$.
21. $y=\frac{1}{m\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$.
22. $y=3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2\right)$.
23. $y=\ln\frac{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}-e^x-1}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}-e^x+1}$.
24. $y=e^{\sin x}\left(x-\frac{1}{\cos x}\right)$.
25. $y=\frac{e^x}{2}\left((x^2-1)\cos x+(x-1)^2\sin x\right)$.
26. $y=\operatorname{arctg}(e^x-e^{-x})$.
27. $y=3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^5}-5\sqrt[3]{x^4}+20x-60\sqrt[3]{x^2}+120\sqrt[3]{x}-120\right)$.
28. $y=-\frac{e^{3x}}{3\operatorname{sh}^3 x}$.
29. $y=\arcsin e^x-\sqrt{1-e^{2x}}$.
30. $y=-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^4+2x^2+2)$.
31. $y=\frac{e^{x^2}}{1+x^2}$.

Задача 7. Найти производную.

1. $y=\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+a})-\sqrt{x+a}$.
2. $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$.
3. $y=2\sqrt{x}-4\ln(2+\sqrt{x})$.
4. $y=\ln\frac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}}$.
5. $y=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)$.
6. $y=\ln\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$.
7. $y=\ln^2(x+\cos x)$.
8. $y=\ln^3(1+\cos x)$.
9. $y=\ln\frac{x^2}{1-x^2}$.
10. $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$.
11. $y=\ln\sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}$.
12. $y=x+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right)+a^{\pi\sqrt{2}}$.
13. $y=\ln\sin\frac{2x+4}{x+1}$.
14. $y=\log_{16}\log_5\operatorname{tg}x$.
15. $y=\log_4\log_2\operatorname{tg}x$.
16. $y=\frac{x(\cos\ln x+\sin\ln x)}{2}$.
17. $y=\ln\cos\frac{2x+3}{2x+1}$.
18. $y=\lg\ln\operatorname{ctg}x$.
19. $y=\log_a\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$.
20. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}x+\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x}\right)$.
21. $y=\ln\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$.
22. $y=\ln\arccos\sqrt{1-e^{4x}}$.
23. $y=\ln\left(bx+\sqrt{a^2+b^2x^2}\right)$.
24. $y=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}+x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-x\sqrt{2}}$.
25. $y=\ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.
26. $y=\ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)$.
27. $y=\ln\frac{\sqrt{5}+\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{5}-\operatorname{tg}(x/2)}$.
28. $y=\ln\frac{\ln x}{\sin(1/x)}$.
29. $y=\ln\ln\sin\left(1+\frac{1}{x}\right)$.
30. $y=\ln\ln^3\ln^2 x$.
31. $y=\ln\ln^2\ln^3 x$.

Задача 8. Найти производную.

1. $y = \sin\sqrt{3} + \frac{1}{3}\frac{\sin^2 3x}{\cos 6x}$.
2. $y = \cos\ln 2 - \frac{1}{3}\frac{\cos^2 3x}{\sin 6x}$.
3. $y = \operatorname{tg}\lg\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\frac{\sin^2 4x}{\cos 8x}$.
4. $y = \operatorname{ctg}\sqrt[3]{5} - \frac{1}{8}\frac{\cos^2 4x}{\sin 8x}$.
5. $y = \frac{\cos\sin 5\cdot\sin^2 2x}{2\cos 4x}$.
6. $y = \frac{\sin\cos 3\cdot\cos^2 2x}{4\sin 4x}$.
7. $y = \frac{\cos\ln 7\cdot\sin^2 7x}{7\cos 14x}$.
8. $y = \operatorname{ctg} 2 - \frac{1}{16}\frac{\cos^2 8x}{\sin 16x}$.
9. $y = \operatorname{ctg}\cos 2 + \frac{1}{6}\frac{\sin^2 6x}{\cos 12x}$.
10. $y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2} - \frac{1}{20}\frac{\cos^2 10x}{\sin 20x}$.
11. $y = \frac{1}{3}\cos\operatorname{tg}\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\frac{\sin^2 10x}{\cos 20x}$.
12. $y = \ln\sin\frac{1}{2} - \frac{1}{24}\frac{\cos^2 12x}{\sin 24x}$.
13. $y = 8\sin\operatorname{ctg} 3 + \frac{1}{5}\frac{\sin^2 5x}{\cos 10x}$.
14. $y = \frac{\cos\operatorname{ctg} 3\cdot\cos^2 14x}{28\sin 28x}$.
15. $y = \frac{\cos\operatorname{tg}(1/3)\cdot\sin^2 15x}{15\cos 30x}$.
16. $y = \frac{\sin\operatorname{tg}(1/7)\cdot\cos^2 16x}{32\sin 32x}$.
17. $y = \frac{\operatorname{ctg}\sin(1/3)\cdot\sin^2 17x}{17\cos 34x}$.
18. $y = \frac{\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2}\cdot\cos^2 18x}{36\sin 36x}$.
19. $y = \frac{\operatorname{tg}\ln 2\cdot\sin^2 19x}{19\cos 38x}$.
20. $y = \operatorname{ctg}\cos 5 - \frac{1}{40}\frac{\cos^2 20x}{\sin 40x}$.
21. $y = \sqrt{\operatorname{tg} 4} + \frac{\sin^2 21x}{21\cos 42x}$.
22. $y = \cos\ln 13 - \frac{1}{44}\frac{\cos^2 22x}{\sin 44x}$.
23. $y = \ln\cos\frac{1}{3} + \frac{\sin^2 23x}{23\cos 46x}$.
24. $y = \operatorname{ctg}\sin\frac{1}{13} - \frac{1}{48}\frac{\cos^2 24x}{\sin 48x}$.
25. $y = \sin\ln\frac{1}{2} + \frac{\sin^2 25x}{25\cos 50x}$.
26. $y = \sqrt[3]{\cos\sqrt{2}} - \frac{1}{52}\cdot\frac{\cos^2 26x}{\sin 52x}$.
27. $y = \sqrt[7]{\operatorname{tg}\cos 2} + \frac{\sin^2 27x}{27\cos 54x}$.
28. $y = \sin\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2} - \frac{\cos^2 28x}{56\sin 56x}$.
29. $y = \cos^2\sin 3 + \frac{\sin^2 29x}{29\cos 58x}$.
30. $y = \sin^3\cos 2 - \frac{\cos^2 30x}{60\sin 60x}$.
31. $y = \operatorname{tg}\sqrt{\cos\frac{1}{3}} + \frac{\sin^2 31x}{31\cos 62x}$.

Задача 9. Найти производную.

1. $y = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}}$.
2. $y = \arcsin\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{5x}}$.
3. $y = \frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2} + \frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3}$.
4. $y = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.
5. $y = \arccos\frac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}}$.
6. $y = \sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{6x}}$.
7. $y = \frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.
8. $y = \frac{(x-4)\sqrt{8x-x^2-7}}{2} - 9\arccos\sqrt{\frac{x-1}{6}}$.
9. $y = \frac{(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x^2} + \frac{1}{3x\sqrt{x}}$.

10. $y = \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}$.
11. $y = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1+x}{2x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.
12. $y = \frac{3+x}{2}\sqrt{x(2-x)} + 3\arccos\sqrt{\frac{x}{2}}$.
13. $y = \frac{4+x^4}{x^3}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2} + \frac{4}{x}$.
14. $y = \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \operatorname{arctg}\sqrt{x}$.
15. $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} - \frac{\arccos x}{2x^2}$.
16. $y = 6\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{6+x}{2}\sqrt{x(4-x)}$.
17. $y = \frac{x-3}{2}\sqrt{6x - x^2 - 8} + \arcsin\sqrt{\frac{x}{2} - 1}$.
18. $y = \frac{(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x}}{x}$.
19. $y = \frac{2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$.
20. $y = \frac{2x-5}{4}\sqrt{5x - 4 - x^2} + \frac{9}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-1}{3}}$.
21. $y = \operatorname{arctg} x + \frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}$.
22. $y = \arcsin\frac{x-2}{(x-1)\sqrt{2}}$
23. $y = \sqrt{1-x^2} - x\arcsin\sqrt{1-x^2}$.
24. $y = \sqrt{x} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{2}$.
25. $y = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}$.
26. $y = (2x^2 + 6x + 5)\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2} - x$.
27. $y = \frac{x}{2\sqrt{1-4x^2}}\arcsin 2x + \frac{1}{8}\ln(1-4x^2)$.
28. $y = \left(2x^2 - x + \frac{1}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} - \frac{x^3}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}x$.
29. $y = (x + 2\sqrt{x} + 2)\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \sqrt{x}$.
30. $y = \sqrt{1 + 2x - x^2}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{1+x} - \sqrt{2}\ln(1+x)$.
31. $y = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(x/2)+1}{2}$.

Задача 10. Найти производную.

1. $y = \frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\frac{2+\sqrt{5}\operatorname{th} x}{2-\sqrt{5}\operatorname{th} x}$.
2. $y = \frac{\operatorname{sh} x}{4\operatorname{ch}^4 x} + \frac{3\operatorname{sh} x}{8\operatorname{ch}^2 x} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x)$.
3. $y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\operatorname{th} x}}{1-\sqrt{\operatorname{th} x}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{th} x}$.
4. $y = \frac{3}{8\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\operatorname{th} x}{\sqrt{2}-\operatorname{th} x} - \frac{\operatorname{th} x}{4(2-\operatorname{th}^2 x)}$.

5. $y = \frac{1}{2}\operatorname{th} x + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{1+\sqrt{2}\operatorname{th} x}{1-\sqrt{2}\operatorname{th} x}$.

6. $y = \left(-\frac{1}{2}\ln \operatorname{th}\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh}^2 x}\right)$.

7. $y = \frac{1}{2a\sqrt{1+a^2}} \ln \frac{a+\sqrt{1+a^2}\operatorname{th} x}{a-\sqrt{1+a^2}\operatorname{th} x}$.

8. $y = \frac{1}{18\sqrt{2}} \ln \frac{1+\sqrt{2}\operatorname{cth} x}{1-\sqrt{2}\operatorname{cth} x}$.

9. $y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\operatorname{sh} 2x}}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}$.

10. $y = \frac{1}{6} \ln \frac{1-\operatorname{sh} 2x}{2+\operatorname{sh} 2x}$.

11. $y = \sqrt[4]{\frac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}}$.

12. $y = \frac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch} x}$.

13. $y = \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh} 2x}}$.

14. $y = \frac{\operatorname{sh} 3x}{\sqrt{\operatorname{ch} 6x}}$.

15. $y = \frac{1+8\operatorname{ch}^2 x \ln \operatorname{ch} x}{2\operatorname{ch}^2 x}$.

16. $y = -\frac{12\operatorname{sh}^2 x+1}{3\operatorname{sh}^3 x}$.

17. $y = -\frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x} + \frac{3}{2}\arcsin(\operatorname{th} x)$.

18. $y = \frac{1}{\sqrt{8}} \arcsin \frac{3+\operatorname{ch} x}{1+3\operatorname{ch} x}$.

19. $y = \frac{1}{\sqrt{8}} \ln \frac{4+\sqrt{8}\operatorname{th}\frac{x}{2}}{4-\sqrt{8}\operatorname{th}\frac{x}{2}}$.

20. $y = \left(\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{4}\ln\frac{3+\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)$.

21. $y = -\frac{1}{4}\arcsin\frac{5+3\operatorname{ch} x}{3+5\operatorname{ch} x}$.

22. $y = \frac{1-8\operatorname{ch}^2 x}{4\operatorname{ch}^4 x}$.

23. $y = \frac{2}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{3\operatorname{sh}^3 x} + \frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x} + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\operatorname{sh} x$.

24. $y = \frac{8}{3}\operatorname{cth} 2x - \frac{1}{3\operatorname{ch} x\cdot\operatorname{sh}^3 x}$.

25. $y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) - \frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x}$.

26. $y = \frac{3}{2}\ln\operatorname{th}\frac{x}{2} + \operatorname{ch} x - \frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh}^2 x}$.

27. $y = -\frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{sh} x} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\operatorname{sh} x$.

28. $y = \frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x)$.

29. $y = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} + \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x)\right)$.

30. $y = -\frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh}^2 x} - \frac{1}{2}\ln\operatorname{th}\frac{x}{2}$.

31. $y = \frac{2}{3}\operatorname{cth} x - \frac{\operatorname{ch} x}{3\operatorname{sh}^3 x}$.

Задача 11. Найти производную.

1. $y = (\operatorname{arctg} x)^{(1/2)\ln \operatorname{arctg} x}$.
2. $y = (\sin \sqrt{x})^{\ln \sin \sqrt{x}}$.
3. $y = (\sin x)^{5e^x}$.
4. $y = (\arcsin x)^{e^x}$.
5. $y = (\ln x)^{3^x}$.
6. $y = x^{\arcsin x}$.
7. $y = (\operatorname{ctg} 3x)^{2e^x}$.
8. $y = x^{e^{\operatorname{tg} x}}$.
9. $y = (\operatorname{tg} x)^{4e^x}$.
10. $y = (\cos 5x)^{e^x}$.
11. $y = (x \sin x)^{8\ln(x \sin x)}$.
12. $y = (x-5)^{\operatorname{ch} x}$.
13. $y = (x^3+4)^{\operatorname{tg} x}$.
14. $y = x^{\sin x^3}$.
15. $y = (x^2-1)^{\operatorname{sh} x}$.
16. $y = (x^4+5)^{\operatorname{ctg} x}$.
17. $y = (\sin x)^{5x/2}$.
18. $y = (x^2+1)^{\cos x}$.
19. $y = 19^{x^{19}} x^{19}$.
20. $y = x^{3^x} \cdot 2^x$.
21. $y = (\sin \sqrt{x})^{e^{1/x}}$.
22. $y = x^{e^{\operatorname{ctg} x}}$.
23. $y = x^{e^{\cos x}}$.
24. $y = x^{2^x} \cdot 5^x$.
25. $y = x^{e^{\sin x}}$.
26. $y = (\operatorname{tg} x)^{(\ln \operatorname{tg} x)/4}$.
27. $y = x^{e^{\operatorname{arctg} x}}$.
28. $y = (x^8+1)^{\operatorname{th} x}$.
29. $y = x^{29^x} \cdot 29^x$.
30. $y = (\cos 2x)^{(\ln \cos 2x)/4}$.
31. $y = x^{e^x} x^9$.

Задача 12. Найти производную.

1. $y = \frac{1}{24}(x^2+8)\sqrt{x^2-4} + \frac{x^4}{16} \arcsin \frac{2}{x}$, $x > 0$.
2. $y = \frac{4x+1}{16x^2+8x+3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{4x+1}{\sqrt{2}}$.
3. $y = 2x - \ln\left(1+\sqrt{1-e^{4x}}\right) - e^{-2x} \arcsin(e^{2x})$.
4. $y = \sqrt{9x^2-12x+5}\, \operatorname{arctg}(3x-2) -$
   $- \ln\left(3x-2+\sqrt{9x^2-12x+5}\right)$.
5. $y = \frac{2}{x-1}\sqrt{2x-x^2} + \ln \frac{1+\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$.
6. $y = \frac{x^4}{81} \arcsin \frac{3}{x} + \frac{1}{81}(x^2+18)\sqrt{x^2-9}$, $x > 0$.
7. $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3x-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3x-1}{3x^2-2x+1}$.
8. $y = 3x - \ln\left(1+\sqrt{1-e^{6x}}\right) - e^{-3x} \arcsin(e^{3x})$.
9. $y = \ln\left(4x-1+\sqrt{16x^2-8x+2}\right) - \sqrt{16x^2-8x+2} \times$
   $\times \operatorname{arctg}(4x-1)$.
10. $y = \ln \frac{1+2\sqrt{-x-x^2}}{2x+1} + \frac{4}{2x+1}\sqrt{-x-x^2}$.
11. $y = (2x+3)^4 \cdot \arcsin \frac{1}{2x+3} + \frac{2}{3}(4x^2+12x+11)\sqrt{x^2+3x+2}$,
    $2x+3 > 0$.
12. $y = \frac{x+2}{x^2+4x+6} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{2}}$.
13. $y = 5x - \ln\left(1+\sqrt{1-e^{10x}}\right) - e^{-5x} \arcsin(e^{5x})$.

14. $y=\sqrt{x^2-8x+17}\operatorname{arctg}(x-4)-\ln(x-4+\sqrt{x^2-8x+17})$.
15. $y=\ln\frac{1+\sqrt{-3+4x-x^2}}{2-x}+\frac{2}{2-x}\sqrt{-3+4x-x^2}$.
16. $y=(3x^2-4x+2)\sqrt{9x^2-12x+3}+(3x-2)^4\arcsin\frac{1}{3x-2}$, $3x-2>0$.
17. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}}+\frac{x-1}{x^2-2x+3}$.
18. $y=\ln\left(e^{5x}+\sqrt{e^{10x}-1}\right)+\arcsin(e^{-5x})$.
19. $y=\ln\left(2x-3+\sqrt{4x^2-12x+10}\right)-\sqrt{4x^2-12x+10}\times$ $\times\operatorname{arctg}(2x-3)$.
20. $y=\ln\frac{1+\sqrt{-3-4x-x^2}}{-x-2}-\frac{2}{x+2}\sqrt{-3-4x-x^2}$.
21. $y=\frac{2}{3}(4x^2-4x+3)\sqrt{x^2-x}+(2x-1)^4\arcsin\frac{1}{2x-1}$, $2x-1>0$.
22. $y=\frac{2x-1}{4x^2-4x+3}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{2}}$.
23. $y=\arcsin e^{-4x}+\ln(e^{4x}+\sqrt{e^{8x}-1})$.
24. $y=\ln(5x+\sqrt{25x^2+1})-\sqrt{25x^2+1}\operatorname{arctg}5x$.
25. $y=\frac{2}{3x-2}\sqrt{-3+12x-9x^2}+\ln\frac{1+\sqrt{-3+12x-9x^2}}{3x-2}$.
26. $y=(3x+1)^4\arcsin\frac{1}{3x+1}+(3x^2+2x+1)\sqrt{9x^2+6x}$, $3x+1>0$.
27. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{2}}+\frac{2x+1}{4x^2+4x+3}$.
28. $y=\ln\left(e^{3x}+\sqrt{e^{6x}-1}\right)+\arcsin e^{-3x}$.
29. $y=\sqrt{49x^2+1}\operatorname{arctg}7x-\ln\left(7x+\sqrt{49x^2+1}\right)$.
30. $y=\frac{1}{x}\sqrt{1-4x^2}+\ln\frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x}$.
31. $y=\arcsin e^{-2x}+\ln\left(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}-1}\right)$.

Задача 13. Найти производную.

1. $y=\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}$.
2. $y=4\ln\frac{x}{1+\sqrt{1-4x^2}}-\frac{\sqrt{1-4x^2}}{x^2}$.
3. $y=x(2x^2+5)\sqrt{x^2+1}+3\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.
4. $y=x^3\arcsin x+\frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}$.
5. $y=3\arcsin\frac{3}{4x+1}+2\sqrt{4x^2+2x-2}$, $4x+1>0$.
6. $y=\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.
7. $y=2\arcsin\frac{2}{3x+4}+\sqrt{9x^2+24x+12}$, $3x+4>0$.
8. $y=x(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

9. $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.
10. $y = \sqrt{1 - 3x - 2x^2} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x+3}{\sqrt{17}}$.
11. $y = \sqrt{(4+x)(1+x)} + 3\ln\left(\sqrt{4+x} + \sqrt{1+x}\right)$.
12. $y = \ln \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x} + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.
13. $y = \frac{1}{12} \ln \frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$.
14. $y = 4\arcsin \frac{4}{2x+3} + \sqrt{4x^2 + 12x - 7}$, $2x + 3 > 0$.
15. $y = 2\arcsin \frac{2}{3x+1} + \sqrt{9x^2 + 6x - 3}$, $3x + 1 > 0$.
16. $y = (2 + 3x)\sqrt{x - 1} + \frac{3}{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{x - 1}$.
17. $y = \frac{1}{3}(x - 2)\sqrt{x + 1} + \ln\left(\sqrt{x + 1} + 1\right)$.
18. $y = \sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+1}$.
19. $y = \ln \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2-1}\right)\mathrm{arctg}\,x$.
20. $y = x\ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + \frac{1}{2}(\arcsin x - x)$.
21. $y = \mathrm{arctg}\sqrt{x^2 - 1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$.
22. $y = 3\arcsin \frac{3}{x+2} + \sqrt{x^2 + 4x - 5}$.
23. $y = \sqrt{(3-x)(2+x)} + 5\arcsin\sqrt{\frac{x+2}{5}}$.
24. $y = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1 - x^2}\arcsin x - 2x$.
25. $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arcsin x$.
26. $y = x^3 \arccos x - \frac{x^2+2}{3}\sqrt{1 - x^2}$.
27. $y = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+\sqrt{x^2+2}}{x}$.
28. $y = \frac{x}{4}(10 - x^2)\sqrt{4 - x^2} + 6\arcsin \frac{x}{2}$.
29. $y = \arcsin \frac{1}{2x+3} + 2\sqrt{x^2 + 3x + 2}$, $2x + 3 > 0$.
30. $y = x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \mathrm{arctg}\sqrt{x}$.
31. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}$.

Задача 14. Найти производную.

1. $y = \frac{1}{\sin\alpha} \ln(\mathrm{tg}\,x + \mathrm{ctg}\,\alpha)$.
2. $y = x\cos\alpha + \sin\alpha \ln\sin(x - \alpha)$.
3. $y = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sin\ln x - (\sqrt{2} - 1)\cos\ln x\right) x^{\sqrt{2}+1}$.
4. $y = \mathrm{arctg}\,\frac{\cos x}{\sqrt[4]{\cos 2x}}$.
5. $y = 3\frac{\sin x}{\cos^2 x} + 2\frac{\sin x}{\cos^4 x}$.

6. $y = (a^2+b^2)^{-1/2} \cdot \arcsin\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin x}{b}\right)$, $b > 0$.

7. $y = \frac{7^x(3\sin 3x + \cos 3x \cdot \ln 7)}{(9+\ln^2 7)}$.

8. $y = \ln\frac{\sin x}{\cos x + \sqrt{\cos 2x}}$.

9. $y = \frac{1}{a(1+a^2)}\left(\operatorname{arctg}(a\cos x) + a\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$.

10. $y = -\frac{1}{3\sin^3 x} - \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$.

11. $y = (1+x^2)e^{\operatorname{arctg} x}$.

12. $y = \frac{\operatorname{ctg} x + x}{1 - x\operatorname{ctg} x}$.

13. $y = \frac{1}{2\sin(\alpha/2)}\operatorname{arctg}\frac{2x\sin\frac{\alpha}{2}}{1-x^2}$.

14. $y = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\sqrt{x^4+1}-x^2}}{x}$, $x > 0$.

15. $y = \frac{6^x(\sin 4x \ln 6 - 4\cos 4x)}{16+\ln^2 6}$.

16. $y = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\operatorname{tg} x}}{1-\operatorname{tg} x}$.

17. $y = \operatorname{arctg}\frac{2\sin x}{\sqrt{9\cos^2 x - 4}}$.

18. $y = \frac{5^x(2\sin 2x + \cos 2x \ln 5)}{4+\ln^2 5}$.

19. $y = \ln\frac{\sqrt{2}+\operatorname{th} x}{\sqrt{2}-\operatorname{th} x}$.

20. $y = \frac{3^x(4\sin 4x + \ln 3\cos 4x)}{16+\ln^2 3}$.

21. $y = \frac{4^x((\ln 4)\sin 4x - 4\cos 4x)}{16+\ln^2 4}$.

22. $y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} - 2\cos x - 3\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

23. $y = \frac{5^x(\sin 3x \ln 5 - 3\cos 3x)}{9+\ln^2 5}$.

24. $y = x - \ln(1+e^x) - 2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}$.

25. $y = \frac{2^x(\sin x + \cos x \ln 2)}{1+(\ln 2)^2}$.

26. $y = \frac{\ln(\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}\alpha)}{\sin\alpha}$.

27. $y = 2^{\frac{\cos x}{\sin^4 x}} + 3^{\frac{\cos x}{\sin^2 x}}$.

28. $y = \frac{\cos x}{3(2+\sin x)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}(x/2)+1}{\sqrt{3}}$.

29. $y = \frac{3^x((\ln 3)\sin 2x - 2\cos 2x)}{\ln^2 3 + 4}$.

30. $y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x} - \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{3\cos^3 x}$.

31. $y = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} x + \sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1}{\operatorname{tg} x - \sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1}}$.

Задача 15. Найти производную y'_x.

1. $\begin{cases} x = \frac{3t^2+1}{3t^3}, \\ y = \sin\left(\frac{t^3}{3}+t\right). \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \operatorname{tg}\sqrt{1+t}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = \sqrt{2t-t^2}, \\ y = \frac{1}{\sqrt[3]{(t-1)^2}}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = \arcsin(\sin t), \\ y = \arccos(\cos t). \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right), \\ y = t\sqrt{t^2+1}. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = \sqrt{2t-t^2}, \\ y = \arcsin(t-1). \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = \operatorname{ctg}(2e^t), \\ y = \ln\operatorname{tg}e^t. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = \ln\operatorname{ctg}t, \\ y = \frac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}e^{t/2}, \\ y = \sqrt{e^t+1}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = \ln\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = \ln\frac{1}{\sqrt{1-t^4}}, \\ y = \arcsin\frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = \arcsin\left(\sqrt{1-t^2}\right), \\ y = (\arccos t)^2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \\ y = \frac{\ln(1+\sqrt{1-t^2})}{t}. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = (1+\cos^2 t)^2, \\ y = \frac{\cos t}{\sin^2 t}. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = \ln\frac{1-t}{1+t}, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = \arccos\frac{1}{t}, \\ y = \sqrt{t^2-1}+\arcsin\frac{1}{t}. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = \frac{1}{\ln t}, \\ y = \ln\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = \arcsin\sqrt{t}, \\ y = \sqrt{1+\sqrt{t}}. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = (\arcsin t)^2, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = t\sqrt{t^2+1}, \\ y = \ln\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}t, \\ y = \ln\frac{\sqrt{1+t^2}}{t+1}. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = \ln(1-t^2), \\ y = \arcsin\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}(t+1)/(t-1), \\ y = \arcsin\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = \ln\sqrt{\frac{1-\sin t}{1+\sin t}}, \\ y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 t+\ln\cos t. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = \sqrt{t-t^2}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-t}{t}}, \\ y = \sqrt{t}-\sqrt{1-t}\arcsin\sqrt{t}. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = \ln\operatorname{tg}t, \\ y = \frac{1}{\sin^2 t}. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = \frac{t^2\ln t}{1-t^2}+\ln\sqrt{1-t^2}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t+\ln\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = e^{\sec^2 t}, \\ y = \operatorname{tg} t \ln \cos t + \operatorname{tg} t - t. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t + \ln \sqrt{1-t^2}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{1+t^2}), \\ y = \sqrt{1+t^2} - \ln \frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}. \end{cases}$

Задача 16. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в точке, соответствующей значению параметра $t = t_0$.

1. $\begin{cases} x = a \sin^3 t, \\ y = a \cos^3 t, \quad t_0 = \pi/3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos t \\ y = \sin t, \quad t_0 = \pi/3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \quad t_0 = \pi/3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = \frac{2t+t^2}{1+t^3}, \\ y = \frac{2t-t^2}{1+t^3}, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad t_0 = -1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = t(t \cos t - 2 \sin t), \\ y = t(t \sin t + 2 \cos t), \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^2}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^2}, \quad t_0 = 2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = 2 \ln \operatorname{ctg} t + 1, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t, \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4, \\ y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3, \quad t_0 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = at \cos t, \\ y = at \sin t, \quad t_0 = \pi/2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^2 t, \quad t_0 = \pi/6. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = \frac{1+\ln t}{t^2}, \\ y = \frac{3+2\ln t}{t}, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = \frac{1+t}{t^2}, \\ y = \frac{3}{2t^2} + \frac{2}{t}, \quad t_0 = 2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = a \sin^3 t, \\ y = a \cos^3 t, \quad t_0 = \pi/6. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = a(t \sin t + \cos t), \\ y = a(\sin t - t \cos t), \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = \frac{t+1}{t}, \\ y = \frac{t-1}{t}, \quad t_0 = -1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3, \quad t_0 = 2. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = t(1 - \sin t), \\ y = t \cos t, \quad t_0 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \frac{1+t^3}{t^2-1}, \\ y = \frac{t}{t^2-1}, \quad t_0 = 2. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = t - t^4, \\ y = t^2 - t^3, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2 + t + 1, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = \sin t, \quad t_0 = -\pi/3. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = 2\operatorname{tg} t, \\ y = 2\sin^2 t + \sin 2t, \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2, \quad t_0 = -2. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = a^t, \quad t_0 = 0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t, \quad t_0 = \pi/6. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x = 2e^t, \\ y = e^{-t}, \quad t_0 = 0. \end{cases}$

Задача 17. Найти производную n-го порядка.

1. $y = xe^{ax}$.
2. $y = \sin 2x + \cos(x+1)$.
3. $y = \sqrt[5]{e^{7x-1}}$.
4. $y = \frac{4x+7}{2x+3}$.
5. $y = \lg(5x+2)$.
6. $y = a^{3x}$.
7. $y = \frac{x}{2(3x+2)}$.
8. $y = \lg(x+4)$.
9. $y = \sqrt{x}$.
10. $y = \frac{2x+5}{13(3x+1)}$.
11. $y = 2^{3x+5}$.
12. $y = \sin(x+1) + \cos 2x$.
13. $y = \sqrt[3]{e^{2x+1}}$.
14. $y = \frac{4+15x}{5x+1}$.
15. $y = \lg(3x+1)$.
16. $y = 7^{5x}$.
17. $y = \frac{x}{9(4x+9)}$.
18. $y = \lg(1+x)$.
19. $y = \frac{4}{x}$.
20. $y = \frac{5x+1}{13(2x+3)}$.
21. $y = a^{2x+3}$.
22. $y = \sin(3x+1) + \cos 5x$.
23. $y = \sqrt{e^{3x+1}}$.
24. $y = \frac{11+12x}{6x+5}$.
25. $y = \lg(2x+7)$.
26. $y = 2^{kx}$.
27. $y = \frac{x}{x+1}$.
28. $y = \log_3(x+5)$.
29. $y = \frac{1+x}{1-x}$.
30. $y = \frac{7x+1}{17(4x+3)}$.
31. $y = 3^{2x+5}$.

Задача 18. Найти производную указанного порядка

1. $y = (2x^2 - 7)\ln(x-1)$, $y^{\mathrm{V}} = ?$
2. $y = (3 - x^2)\ln^2 x$, $y^{\mathrm{III}} = ?$
3. $y = x\cos x^2$, $y^{\mathrm{III}} = ?$
4. $y = \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}$, $y^{\mathrm{III}} = ?$
5. $y = \frac{\log_2 x}{x^3}$, $y^{\mathrm{III}} = ?$
6. $y = (4x^3 + 5)e^{2x+1}$, $y^{\mathrm{V}} = ?$
7. $y = x^2 \sin(5x-3)$, $y^{\mathrm{III}} = ?$
8. $y = \frac{\ln x}{x^2}$, $y^{\mathrm{IV}} = ?$
9. $y = (2x+3)\ln^2 x$, $y^{\mathrm{III}} = ?$

10. $y=(1+x^2)\operatorname{arctg}x$, $y^{III}=?$

11. $y=\frac{\ln x}{x^3}$, $y^{IV}=?$

12. $y=(4x+3)2^{-x}$, $y^{V}=?$

13. $y=e^{1-2x}\cdot\sin(2+3x)$, $y^{IV}=?$

14. $y=\frac{\ln(3+x)}{3+x}$, $y^{III}=?$

15. $y=(2x^3+1)\cos x$, $y^{V}=?$

16. $y=(x^2+3)\ln(x-3)$, $y^{IV}=?$

17. $y=(1-x-x^2)e^{(x-1)/2}$, $y^{IV}=?$

18. $y=\frac{1}{x}\sin 2x$, $y^{III}=?$

19. $y=(x+7)\ln(x+4)$, $y^{V}=?$

20. $y=(3x-7)3^{-x}$, $y^{IV}=?$

21. $y=\frac{\ln(2x+5)}{2x+5}$, $y^{III}=?$

22. $y=e^{x/2}\sin 2x$, $y^{IV}=?$

23. $y=\frac{\ln x}{x^5}$, $y^{III}=?$

24. $y=x\ln(1-3x)$, $y^{IV}=?$

25. $y=(x^2+3x+1)e^{3x+2}$, $y^{V}=?$

26. $y=(5x-8)2^{-x}$, $y^{IV}=?$

27. $y=\frac{\ln(x-2)}{x-2}$, $y^{V}=?$

28. $y=e^{-x}(\cos 2x-3\sin 2x)$, $y^{IV}=?$

29. $y=(5x-1)\ln^2 x$, $y^{III}=?$

30. $y=\frac{\log_3 x}{x^2}$, $y^{IV}=?$

31. $y=(x^3+2)e^{4x+3}$, $y^{IV}=?$

Задача 19. Найти производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически.

1. $\begin{cases} x=\cos 2t, \\ y=2\sec^2 t. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}, \\ y=\frac{1}{t}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x=\operatorname{sh}^2 t, \\ y=\frac{1}{ch^2 t}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x=t+\sin t, \\ y=2-\cos t. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x=\frac{1}{t}, \\ y=\frac{1}{1+t^2}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=\frac{1}{\sqrt{1-t}}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\sec t. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x=\operatorname{tg} t, \\ y=\frac{1}{\sin 2t}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x=\sqrt{t-1}, \\ y=\frac{t}{\sqrt{t-1}}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=\sqrt[3]{t-1}. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x=\frac{\cos t}{1+2\cos t}, \\ y=\frac{\sin t}{1+2\cos t}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x=\sqrt{t^3-1}, \\ y=\ln t. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x=\operatorname{sh} t, \\ y=\operatorname{th}^2 t. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x=\sqrt{t-1}, \\ y=\frac{1}{\sqrt{t}}. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x=\cos^2 t, \\ y=\operatorname{tg}^2 t. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = \sqrt{t-3}, \\ y = \ln(t-2). \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln\cos t. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 + \cos t. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \ln\sin t. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = e^t, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^4 \frac{t}{2}. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = \operatorname{ch} t, \\ y = \sqrt[3]{\operatorname{sh}^2 t}. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \frac{t^2}{2}. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 4(2 + \cos t). \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = \sin t - t\cos t, \\ y = \cos t + t\sin t. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = \frac{1}{t^2}, \\ y = \frac{1}{t^2+1}. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = \cos t + \sin t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

Задача 20. Показать, что функция y удовлетворяет данному уравнению.

1. $y = xe^{-x^2/2}$. $xy' = (1 - x^2)y$.
2. $y = \frac{\sin x}{x}$, $xy' + y = \cos x$.
3. $y = 5e^{-2x} + \frac{e^x}{3}$, $y' + 2y = e^x$.
4. $y = 2 + c\sqrt{1 - x^2}$, $(1 - x^2)y' + xy = 2x$.
5. $y = x\sqrt{1 - x^2}$, $yy' = x - 2x^3$.
6. $y = \frac{c}{\cos x}$, $y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0$.
7. $y = -\frac{1}{3x+c}$, $y' = 3y^2$.
8. $y = \ln(c + e^x)$, $y' = e^{x-y}$.
9. $y = \sqrt{x^2 - cx}$, $(x^2 + y^2)dx - 2xy\,dy = 0$.
10. $y = x(c - \ln x)$, $(x - y)dx + x\,dy = 0$.
11. $y = e^{\operatorname{tg}(x/2)}$, $y'\sin x = y\ln y$.
12. $y = \frac{1+x}{1-x}$, $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$.
13. $y = \frac{b+x}{1+bx}$, $y - xy' = b(1 + x^2y')$.
14. $y = \sqrt[3]{2 + 3x - 3x^2}$, $yy' = \frac{1-2x}{y}$.

15. $y=\sqrt{\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2+1}$,
$(1+e^x)yy'=e^x$.
16. $y=\operatorname{tg}\ln 3x$, $(1+y^2)dx=x\,dy$.
17. $y=-\sqrt{\frac{2}{x^2}-1}$, $1+y^2+xyy'=0$.
18. $y=\sqrt[3]{x-\ln x-1}$, $\ln x+y^3-3xy^2y'=0$.
19. $y=a+\frac{7x}{ax+1}$, $y-xy'=a(1+x^2y')$.
20. $y=a\operatorname{tg}\sqrt{\frac{a}{x}-1}$, $a^2+y^2+2x\sqrt{ax-x^2}y'=0$.
21. $y=\sqrt[4]{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$, $8xy'-y=\frac{-1}{y^3\sqrt{x+1}}$.
22. $y=(x^2+1)e^{x^2}$, $y'-2xy=2xe^{x^2}$.
23. $y=\frac{2x}{x^3+1}+\frac{1}{x}$, $x(x^3+1)y'+(2x^3-1)y=\frac{x^3-2}{x}$.
24. $y=e^{x+x^2}+2e^x$, $y'-y=2xe^{x+x^2}$.
25. $y=-x\cos x+3x$, $xy'=y+x^2\sin x$.
26. $y=\frac{1}{\sqrt{\sin x+x}}$, $2(\sin x)y'+y\cos x=y^3(x\cos x-\sin x)$.
27. $y=\frac{x}{x-1}+x^2$, $x(x-1)y'+y=x^2(2x-1)$.
28. $y=\frac{x}{\cos x}$, $y'-y\operatorname{tg}x=\sec x$.
29. $y=(x+1)^n(e^x-1)$, $y'-\frac{ny}{x+1}=e^x(1+x)^n$.
30. $y=2^{\frac{\sin x}{x}}+\cos x$, $x(\sin x)y'+(\sin x-x\cos x)y=\sin x\cos x-$
$-x$.
31. $y=-\sqrt{x^4-x^2}$, $xyy'-y^2=x^4$.

Раздел 3

ГРАФИКИ

§ 3.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1) Условия возрастания функции на отрезке.

2) Условия убывания функции на отрезке.

3) Точки экстремума. Необходимое условие экстремума.

4) Достаточные признаки максимума и минимума функции (изменение знака первой производной).

5) Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке.

6) Выпуклость и вогнутость графика функции. Достаточные условия выпуклости и вогнутости.

7) Точки перегиба графика функции. Необходимое условие перегиба. Достаточные условия перегиба.

8) Исследование функции на экстремум с помощью высших производных.

9) Асимптоты графика функции.

§ 3.2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1) Доказать, что функция $f(x) = x - \sin x$ монотонно возрастает на отрезке: а) $[0, 2\pi]$; б) $[0, 4\pi]$.

Следует ли из монотонности дифференцируемой функции монотонность ее производной?

2) Доказать теорему: *если функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *дифференцируемы на отрезке* $[a, b]$ *и* $\varphi'(x) > \psi'(x) \forall x \in (a, b)$, *а* $\varphi(a) = \psi(a)$, *то* $\varphi(x) > \psi(x) \forall x \in (a, b]$.

Дать геометрическую интерпретацию теоремы.

Указание. При доказательстве теоремы установить и использовать монотонность функции $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$.

3) Доказать неравенство $\frac{2x}{\pi} < \sin x$ для трех случаев:

а) $\forall x \in \left(0, \arccos\frac{2}{\pi}\right]$; б) $\forall x \in \left[\arccos\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right)$; в) $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Дать геометрическую интерпретацию неравенства.

4) Исходя из определений минимума и максимума, доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

имеет в точке $x = 0$ минимум, а функция

$$g(x) = \begin{cases} xe^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

не имеет в точке $x = 0$ экстремума.

5) Исследовать на экстремум в точке x_0 функцию $f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x)$, считая, что производная $\varphi'(x)$ не существует, но функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 и $\varphi(x_0) \neq 0$, n — натуральное число.

6) Исследовать знаки максимума и минимума функции $x^3 - 3x + q$ и выяснить условия, при которых уравнение $x^3 - 3x + q = 0$ имеет:

а) три различных действительных корня;

б) один действительный корень.

7) Определить «отклонение от нуля» многочлена $p(x) = 6x^3 - 27x^2 + 36x - 14$ на отрезке $[0, 3]$, т. е. найти на этом отрезке наибольшее значение функции $|p(x)|$.

8) Установить условия существования асимптот у графика рациональной функции.

§ 3.3. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1. Построить графики функций с помощью производной первого порядка.

1. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$.
2. $y = 3x - x^3$.
3. $y = x^2(x-2)^2$.
4. $y = (x^3 - 9x^2)/4 + 6x - 9$.
5. $y = 2 - 3x^2 - x^3$.
6. $y = (x+1)^2(x-1)^2$.
7. $y = 2x^3 - 3x^2 - 4$.
8. $y = 3x^2 - 2 - x^3$.
9. $y = (x-1)^2(x-3)^2$.
10. $y = (x^3 + 3x^2)/4 - 5$.
11. $y = 6x - 8x^3$.
12. $y = 16x^2(x-1)^2$.
13. $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$.
14. $y = 2 - 12x^2 - 8x^3$.

15. $y=(2x+1)^2(2x-1)^2$.
16. $y=2x^3+9x^2+12x$.
17. $y=12x^2-8x^3-2$.
18. $y=(2x-1)^2(2x-3)^2$.
19. $y=27(x^3-x^2)/4-4$.
20. $y=x(12-x^2)/8$.
21. $y=x^2(x-4)^2/16$.
22. $y=27(x^3+x^2)/4-5$.
23. $y=(16-6x^2-x^3)/8$.
24. $y=-(x^2-4)^2/16$.
25. $y=16x^3-36x^2+24x-9$.
26. $y=(6x^2-x^3-16)/8$.
27. $y=-(x-2)^2(x-6)^2/16$.
28. $y=16x^3-12x^2-4$.
29. $y=(11+9x-3x^2-x^3)/8$.
30. $y=-(x+1)^2(x-3)^2/16$.
31. $y=16x^3+12x^2-5$.

Задача 2. Построить графики функций с помощью производной первого порядка.

1. $y=1-\sqrt[3]{x^2-2x}$.
2. $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}$.
3. $y=\frac{12\sqrt[3]{6(x-2)^2}}{x^2+8}$.
4. $y=-\frac{12\sqrt[3]{6(x-1)^2}}{x^2+2x+9}$.
5. $y=1-\sqrt[3]{x^2+2x}$.
6. $y=2x+6-3\sqrt[3]{(x+3)^2}$.
7. $y=\frac{6\sqrt[3]{6(x-3)^2}}{x^2-2x+9}$.
8. $y=1-\sqrt[3]{x^2+4x+3}$.
9. $y=3\sqrt[3]{(x-3)^2}-2x+6$.
10. $y=-\frac{6\sqrt[3]{6x^2}}{x^2+4x+12}$.
11. $y=4x+8-6\sqrt[3]{(x+2)^2}$.
12. $y=\frac{3\sqrt[3]{6(x-4)^2}}{x^2-4x+12}$.
13. $y=\sqrt[3]{x(x+2)}$.
14. $y=\sqrt[3]{x^2+4x+3}$.
15. $y=-\frac{3\sqrt[3]{6(x+1)^2}}{x^2+6x+17}$.
16. $y=6\sqrt[3]{(x-2)^2}-4x+8$.
17. $y=\frac{3\sqrt[3]{6(x-5)^2}}{x^2-6x+17}$.
18. $y=2+\sqrt[3]{8x(x+2)}$.
19. $y=6x-6-9\sqrt[3]{(x-1)^2}$.
20. $y=\sqrt[3]{x^2+6x+8}$.
21. $y=\sqrt[3]{4x(x-1)}$.
22. $y=-\frac{3\sqrt[3]{6(x+2)^2}}{x^2+8x+24}$.
23. $y=\sqrt[3]{x(x-2)}$.
24. $y=1-\sqrt[3]{x^2-4x+3}$.
25. $y=9\sqrt[3]{(x+1)^2}-6x-6$.
26. $y=\frac{6\sqrt[3]{6(x+3)^2}}{x^2+10x+33}$.
27. $y=8x-16-12\sqrt[3]{(x-2)^2}$.
28. $y=-\frac{6\sqrt[3]{6(x-6)^2}}{x^2-8x+24}$.
29. $y=12\sqrt[3]{(x+2)^2}-8x-16$.
30. $y=\frac{3\sqrt[3]{6(x-1)^2}}{2(x^2+2x+9)}$.
31. $y=3\sqrt[3]{(x+4)^2}-2x-8$.

Задача 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функций на заданных отрезках.

1. $y=x^2+\frac{16}{x}-16$, $[1,4]$.
2. $y=4-x-\frac{4}{x^2}$, $[1,4]$.
3. $y=\sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)}-1$, $[0,6]$.

4. $y = \frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$, $[-3, 3]$.
5. $y = 2\sqrt{x} - x$, $[0, 4]$.
6. $y = 1 + \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}$, $[-1, 5]$.
7. $y = x - 4\sqrt{x} + 5$. $[1, 9]$.
8. $y = \frac{10x}{1+x^2}$, $[0, 3]$.
9. $y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)} - 2$, $[-3, 3]$.
10. $y = 2x^2 + \frac{108}{x} - 59$, $[2, 4]$.
11. $y = 3 - x - \frac{4}{(x+2)^2}$, $[-1, 2]$.
12. $y = \sqrt[3]{2x^2(x-3)}$, $[-1, 6]$.
13. $y = \frac{2(-x^2+7x-7)}{x^2-2x+2}$, $[1, 4]$.
14. $y = x - 4\sqrt{x+2} + 8$, $[-1, 7]$.
15. $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$, $[1, 5]$.
16. $y = \frac{4x}{4+x^2}$, $[-4, 2]$.
17. $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8$, $[-4, -1]$.
18. $y = \sqrt[3]{2x^2(x-6)}$, $[-2, 4]$.
19. $y = \frac{-2x(2x+3)}{x^2+4x+5}$, $[-2, 1]$.
20. $y = -\frac{2(x^2+3)}{x^2+2x+5}$, $[-5, 1]$.
21. $y = \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}$, $[0, 4]$.
22. $y = x^2 - 2x + \frac{16}{x-1} - 13$, $[2, 5]$.
23. $y = 2\sqrt{x-1} - x + 2$, $[1, 5]$.
24. $y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)}$, $[-3, 4]$.
25. $y = -\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{8}{x-2} + 5$, $[-2, 1]$.
26. $y = 8x + \frac{4}{x^2} - 15$, $[\frac{1}{2}, 2]$.
27. $y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(x-4)} + 3$, $[-4, 2]$.
28. $y = x^2 + 4x + \frac{16}{x+2} - 9$, $[-1, 2]$.
29. $y = \frac{4}{x^2} - 8x - 15$, $[-2, -\frac{1}{2}]$.
30. $y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(x-2)}$, $[-2, 5]$.
31. $y = \frac{10x+10}{x^2+2x+2}$, $[-1, 2]$.

Задача 4. *Варианты* 1–10. Рыбаку нужно переправиться с острова A на остров B (рис. 3.1). Чтобы пополнить свои запасы, он должен попасть на участок берега MN. Найти наикратчайший путь рыбака $s = s_1 + s_2$.

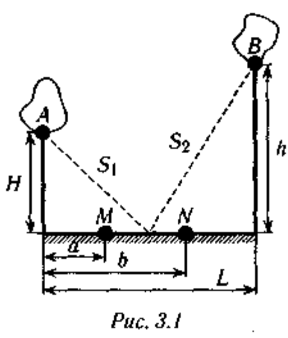

Рис. 3.1

1. $a = 200$, $b = 300$, $H = 400$, $h = 300$, $L = 700$.
2. $a = 400$, $b = 600$, $H = 800$, $h = 600$, $L = 1400$.
3. $a = 600$, $b = 900$, $H = 1200$, $h = 900$, $L = 2100$.
4. $a = 800$, $b = 1200$, $H = 1600$, $h = 1200$, $L = 2800$.
5. $a = 1000$, $b = 1500$, $H = 2000$, $h = 1500$, $L = 3500$.
6. $a = 400$, $b = 500$, $H = 300$, $h = 400$, $L = 700$.

7. $a = 800$, $b = 1000$, $H = 600$, $h = 800$, $L = 1400$.
8. $a = 1200$, $b = 1500$, $H = 900$, $h = 1200$, $L = 2100$.
9. $a = 1600$, $b = 2000$, $H = 1200$, $h = 1600$, $L = 2800$.
10. $a = 2000$, $b = 2500$, $H = 1500$, $h = 2000$, $L = 3500$.

Варианты 11–20. При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\frac{t}{t+k}$-ю часть курса, а забывает αt-ю часть. Сколько дней нужно затратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса?

11. $k = 1/2$, $\alpha = 2/49$.
12. $k = 1/2$, $\alpha = 2/81$.
13. $k = 1/2$, $\alpha = 2/121$.
14. $k = 1/2$, $\alpha = 2/169$.
15. $k = 1$, $\alpha = 1/25$.
16. $k = 1$, $\alpha = 1/16$.
17. $k = 1$, $\alpha = 1/36$.
18. $k = 1$, $\alpha = 1/49$.
19. $k = 2$, $\alpha = 1/18$.
20. $k = 2$, $\alpha = 2/49$.

Варианты 21–31. Тело массой $m_0 = 3000$ кг падает с высоты H м и теряет массу (сгорает) пропорционально времени падения. Коэффициент пропорциональности $k = 100$ кг/с. Считая, что начальная скорость $v_0 = 0$, ускорение $g = 10$ м/с², и пренебрегая сопротивлением воздуха, найти наибольшую кинетическую энергию тела.

21. $H = 500$.
22. $H = 605$.
23. $H = 720$.
24. $H = 845$.
25. $H = 980$.
26. $H = 1125$.
27. $H = 1280$.
28. $H = 1445$.
29. $H = 1620$.
30. $H = 1805$.
31. $H = 2000$.

Задача 5. Исследовать поведение функций в окрестностях заданных точек с помощью производных высших порядков.

1. $y = x^2 - 4x - (x-2)\ln(x-1)$, $x_0 = 2$.
2. $y = 4x - x^2 - 2\cos(x-2)$, $x_0 = 2$.
3. $y = 6e^{x-2} - x^3 + 3x^2 - 6x$, $x_0 = 2$.
4. $y = 2\ln(x+1) - 2x + x^2 + 1$, $x_0 = 0$.
5. $y = 2x - x^2 - 2\cos(x-1)$, $x_0 = 1$.
6. $y = \cos^2(x+1) + x^2 + 2x$, $x_0 = -1$.
7. $y = 2\ln x + x^2 - 4x + 3$, $x_0 = 1$.
8. $y = 1 - 2x - x^2 - 2\cos(x+1)$, $x_0 = -1$.
9. $y = x^2 + 6x + 8 - 2e^{x+2}$, $x_0 = -2$.
10. $y = 4x + x^2 - 2e^{x+1}$, $x_0 = -1$.
11. $y = (x+1)\sin(x+1) - 2x - x^2$, $x_0 = -1$.

12. $y = 6e^{x-1} - 3x - x^3$, $x_0 = 1$.
13. $y = 2x + x^2 - (x+1)\ln(2+x)$, $x_0 = -1$.
14. $y = \sin^2(x+1) - 2x - x^2$, $x_0 = -1$.
15. $y = x^2 + 4x + \cos^2(x+2)$, $x_0 = -2$.
16. $y = x^2 + 2\ln(x+2)$, $x_0 = -1$.
17. $y = 4x - x^2 + (x-2)\sin(x-2)$, $x_0 = 2$.
18. $y = 6e^x - x^3 - 3x^2 - 6x - 5$, $x_0 = 0$.
19. $y = x^2 - 2x - 2e^{x-2}$, $x_0 = 2$.
20. $y = \sin^2(x+2) - x^2 - 4x - 4$, $x_0 = -2$.
21. $y = \cos^2(x-1) + x^2 - 2x$, $x_0 = 1$.
22. $y = x^2 - 2x - (x-1)\ln x$, $x_0 = 1$.
23. $y = (x-1)\sin(x-1) + 2x - x^2$, $x_0 = 1$.
24. $y = x^2 - 4x + \cos^2(x-2)$, $x_0 = 2$.
25. $y = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24(x + 1 - e^x)$, $x_0 = 0$.
26. $y = \sin^2(x-2) - x^2 + 4x - 4$, $x_0 = 2$.
27. $y = 6e^{x+1} - x^3 - 6x^2 - 15x - 16$, $x_0 = -1$.
28. $y = \sin x + \operatorname{sh} x - 2x$, $x_0 = 0$.
29. $y = \sin^2(x-1) - x^2 + 2x$, $x_0 = 1$.
30. $y = \cos x + \operatorname{ch} x$, $x_0 = 0$.
31. $y = x^2 - 2e^{x-1}$, $x_0 = 1$.

Задача 6. Найти асимптоты и построить графики функций.

1. $y = \frac{17-x^2}{4x-5}$.
2. $y = \frac{x^2+1}{\sqrt{4x^2-3}}$.
3. $y = \frac{x^3-4x}{3x^2-4}$.
4. $y = \frac{4x^2+9}{4x+8}$.
5. $y = \frac{4x^3+3x^2-8x-2}{2-3x^2}$.
6. $y = \frac{x^2-3}{\sqrt{3x^2-2}}$.
7. $y = \frac{2x^2-6}{x-2}$.
8. $y = \frac{2x^3+2x^2-3x-1}{2-4x^2}$.
9. $y = \frac{x^3-5x}{5-3x^2}$.
10. $y = \frac{x^2-6x+4}{3x-2}$.
11. $y = \frac{2-x^2}{\sqrt{9x^2-4}}$.
12. $y = \frac{4x^3-3x}{4x^2-1}$.
13. $y = \frac{3x^2-7}{2x+1}$.
14. $y = \frac{x^2+16}{\sqrt{9x^2-8}}$.
15. $y = \frac{x^3+3x^2-2x-2}{2-3x^2}$.
16. $y = \frac{21-x^2}{7x+9}$.
17. $y = \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-2}}$.
18. $y = \frac{2x^3-3x^2-2x+1}{1-3x^2}$.
19. $y = \frac{x^2-11}{4x-3}$.
20. $y = \frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}$.
21. $y = \frac{x^3-2x^2-3x+2}{1-x^2}$.
22. $y = \frac{x^2+2x-1}{2x+1}$.
23. $y = \frac{x^3+x^2-3x-1}{2x^2-2}$.
24. $y = \frac{x^2+6x+9}{x+4}$.

25. $y = \frac{3x^2-10}{\sqrt{4x^2-1}}$.
26. $y = \frac{x^2-2x+2}{x+3}$.
27. $y = \frac{2x^3+2x^2-9x-3}{2x^2-3}$.
28. $y = \frac{3x^2-10}{3-2x}$.
29. $y = \frac{-x^2-4x+13}{4x+3}$.
30. $y = \frac{-8-x^2}{\sqrt{x^2-4}}$.
31. $y = \frac{9-10x^2}{\sqrt{4x^2-1}}$.

Задача 7. Провести полное исследование функций и построить их графики.

1. $y = \frac{x^3+4}{x^2}$.
2. $y = \frac{x^2-x+1}{x-1}$.
3. $y = \frac{2}{x^2+2x}$.
4. $y = \frac{4x^2}{3+x^2}$.
5. $y = \frac{12x}{9+x^2}$.
6. $y = \frac{x^2-3x+3}{x-1}$.
7. $y = \frac{4-x^3}{x^2}$.
8. $y = \frac{x^2-4x+1}{x-4}$.
9. $y = \frac{2x^3+1}{x^2}$.
10. $y = \frac{(x-1)^2}{x^2}$.
11. $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$.
12. $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^2$.
13. $y = \frac{12-3x^2}{x^2+12}$.
14. $y = \frac{9+6x-3x^2}{x^2-2x+13}$.
15. $y = \frac{-8x}{x^2+4}$.
16. $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$.
17. $y = \frac{3x^4+1}{x^3}$.
18. $y = \frac{4x}{(x+1)^2}$.
19. $y = \frac{8(x-1)}{(x+1)^2}$.
20. $y = \frac{1-2x^3}{x^2}$.
21. $y = \frac{4}{x^2+2x-3}$.
22. $y = \frac{4}{3+2x-x^2}$.
23. $y = \frac{x^2+2x-7}{x^2+2x-3}$.
24. $y = \frac{1}{x^4-1}$.
25. $y = -\left(\frac{x}{x+2}\right)^2$.
26. $y = \frac{x^3-32}{x^2}$.
27. $y = \frac{4(x+1)^2}{x^2+2x+4}$.
28. $y = \frac{3x-2}{x^3}$.
29. $y = \frac{x^2-6x+9}{(x-1)^2}$.
30. $y = \frac{x^3-27x+54}{x^3}$.
31. $y = \frac{x^3-4}{x^2}$.

Задача 8. Провести полное исследование функций и построить их графики.

1. $y = (2x+3)e^{-2(x+1)}$.
2. $y = \frac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}$.
3. $y = 3\ln\frac{x}{x-3} - 1$.
4. $y = (3-x)e^{x-2}$.
5. $y = \frac{e^{2-x}}{2-x}$.
6. $y = \ln\frac{x}{x+2} + 1$.
7. $y = (x-2)e^{3-x}$.
8. $y = \frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}$.
9. $y = 3 - 3\ln\frac{x}{x+4}$.
10. $y = -(2x+1)e^{2(x+1)}$.
11. $y = \frac{e^{2(x+2)}}{2(x+2)}$.
12. $y = \ln\frac{x}{x-2} - 2$.
13. $y = (2x+5)e^{-2(x+2)}$.
14. $y = \frac{e^{3-x}}{3-x}$.
15. $y = 2\ln\frac{x}{x+1} - 1$.
16. $y = (4-x)e^{x-3}$.
17. $y = -\frac{e^{-2(x+2)}}{2(x+2)}$.
18. $y = 2\ln\frac{x+3}{x} - 3$.
19. $y = (2x-1)e^{2(1-x)}$.
20. $y = -\frac{e^{-(x+2)}}{x+2}$.
21. $y = 2\ln\frac{x}{x-4} - 3$.
22. $y = -(x+1)e^{(x+2)}$.
23. $y = \frac{e^{x+3}}{x+3}$.
24. $y = \ln\frac{x}{x+5} - 1$.

25. $y = -(2x+3)e^{2(x+2)}$.
26. $y = -\frac{e^{-2(x-1)}}{2(x-1)}$.
27. $y = \ln\frac{x-5}{x} + 2$.
28. $y = (x+4)e^{-(x+3)}$.
29. $y = \frac{e^{x-3}}{x-3}$.
30. $y = \ln\frac{x+6}{x} - 1$.
31. $y = 2\ln\frac{x-1}{x} + 1$.

Задача 9. Провести полное исследование функций и построить их графики.

1. $y = \sqrt[3]{(2-x)(x^2-4x+1)}$.
2. $y = -\sqrt[3]{(x+3)(x^3+6x+6)}$.
3. $y = \sqrt[3]{(x+2)(x^2+4x+1)}$.
4. $y = \sqrt[3]{(x+1)(x^2+2x-2)}$.
5. $y = \sqrt[3]{(x-1)(x^2-2x-2)}$.
6. $y = \sqrt[3]{(x-3)(x^2-6x+6)}$.
7. $y = \sqrt[3]{(x^2-4x+3)^2}$.
8. $y = \sqrt[3]{x^2(x+2)^2}$.
9. $y = \sqrt[3]{x^2(x-2)^2}$.
10. $y = \sqrt[3]{(x^2-2x-3)^2}$.
11. $y = \sqrt[3]{x^2(x+4)^2}$.
12. $y = \sqrt[3]{x^2(x-4)^2}$.
13. $y = \sqrt[3]{(x+3)x^2}$.
14. $y = \sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}$.
15. $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x^2}$.
16. $y = \sqrt[3]{(x+6)x^2}$.
17. $y = \sqrt[3]{(x-4)(x+2)^2}$.
18. $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}$.
19. $y = \sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$.
20. $y = \sqrt[3]{(x-3)x^2}$.
21. $y = \sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2}$.
22. $y = \sqrt[3]{(x+2)(x-4)^2}$.
23. $y = \sqrt[3]{(x-6)x^2}$.
24. $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$.
25. $y = \sqrt[3]{x(x-3)^2}$.
26. $y = \sqrt[3]{x(x+3)^2}$.

27. $y = \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x+3)^2}$.
28. $y = \sqrt[3]{x(x-6)^2}$.
29. $y = \sqrt[3]{x(x+6)^2}$.
30. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x+2)^2}$.
31. $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$.

Задача 10. Провести полное исследование функций и построить их графики.

1. $y = e^{\sin x + \cos x}$.
2. $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{(\sin x + \cos x)}{\sqrt{2}}\right)$.
3. $y = \ln(\cos x + \sin x)$.
4. $y = \frac{1}{(\sin x + \cos x)}$.
5. $y = e^{\sqrt{2}\sin x}$.
6. $y = \operatorname{arctg} \sin x$.
7. $y = \ln(\sqrt{2}\sin x)$.
8. $y = \frac{1}{(\sin x - \cos x)}$.
9. $y = e^{\sin x - \cos x}$.
10. $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}}\right)$.
11. $y = \ln(\sin x - \cos x)$.
12. $y = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$.
13. $y = e^{-\sqrt{2}\cos x}$,
14. $y = -\operatorname{arctg} \cos x$.
15. $y = \ln(-\sqrt{2}\cos x)$.
16. $y = \frac{1}{(\sin x - \cos x)^2}$.
17. $y = e^{-\sin x - \cos x}$.
18. $y = \sqrt[3]{\sin x}$.
19. $y = \ln(-\sin x - \cos x)$.
20. $y = \sqrt{\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}}}$.
21. $y = e^{-\sqrt{2}\sin x}$.
22. $y = \sqrt[3]{\cos x}$.
23. $y = \ln(-\sqrt{2}\sin x)$.
24. $y = \sqrt{\cos x}$.
25. $y = e^{\cos x - \sin x}$.
26. $y = \sqrt[3]{\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}}$.
27. $y = \ln(\cos x - \sin x)$.
28. $y = \sqrt{\sin x}$.
29. $y = e^{\sqrt{2}\cos x}$.
30. $y = \sqrt{\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}}$.
31. $y = \ln(\sqrt{2}\cos x)$.

Раздел 4

ИНТЕГРАЛЫ

§ 4.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1) Понятие первообразной функции. Теоремы о первообразных.

2) Неопределенный интеграл, его свойства.

3) Таблица неопределенных интегралов.

4) Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

5) Разложение дробной рациональной функции на простейшие дроби.

6) Интегрирование простейших дробей. Интегрирование рациональных функций.

7) Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.

8) Интегрирование иррациональных выражений.

9) Понятие определенного интеграла, его геометрический смысл.

10) Основные свойства определенного интеграла.

11) Теорема о среднем.

12) Производная определенного интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона–Лейбница.

13) Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

14) Интегрирование биномиальных дифференциалов.

15) Вычисление площадей плоских фигур.

16) Определение и вычисление длины кривой, дифференциал длины дуги кривой.

§ 4.2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1) Считая, что функция $\frac{\sin x}{x}$ равна 1 при $x = 0$, доказать, что она интегрируема на отрезке $[0, 1]$.

2) Какой из интегралов больше:

$$\int_0^1 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx \quad \text{или} \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx?$$

3) Пусть $f(t)$ — непрерывная функция, а функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ дифференцируемые. Доказать, что

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = f\left(\psi(x)\right)\psi'(x) - f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x).$$

4) Найти $\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{x^2} e^{t^2}\,dt$.

5) Найти точки экстремума функции

$$f(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)e^{-t^2}\,dt.$$

6) Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая функция с периодом T. Доказать, что

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx \quad \forall a.$$

7) Доказать, что если $f(x)$ — четная функция, то

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_0^{+a} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx.$$

8) Доказать, что для нечетной функции $f(x)$ справедливы равенства

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_0^{+a} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0.$$

Чему равен интеграл $\int_{-1}^{+1} \sin^2 x \ln\frac{2+x}{2-x}\,dx$?

9) При каком условии, связывающем коэффициенты a, b, c, интеграл $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,dx$ является рациональной функцией?

10) При каких целых значениях n интеграл $\int \sqrt{1+x^n}\,dx$ выражается элементарными функциями?

§ 4.3. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1. Найти неопределенные интегралы.

1. $\int (4-3x)e^{-3x}\,dx$.

2. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}\,dx$.

3. $\int (3x+4)e^{3x}\,dx$.

4. $\int (4x-2)\cos 2x\,dx$.

5. $\int (4-16x)\sin 4x\,dx$.

6. $\int (5x-2)e^{3x}\,dx$.

7. $\int (1-6x)e^{2x}\,dx$.

8. $\int \ln(x^2+4)\,dx$.

9. $\int \ln(4x^2+1)\,dx$.

10. $\int (2-4x)\sin 2x\,dx$.

11. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{6x-1}\,dx$.

12. $\int e^{-2x}(4x-3)\,dx$.

13. $\int e^{-3x}(2-9x)\,dx$.

14. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}\,dx$.

15. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}\,dx$.

16. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{5x-1}\,dx$.

17. $\int (5x+6)\cos 2x\,dx$.

18. $\int (3x-2)\cos 5x\,dx$.

19. $\int (x\sqrt{2}-3)\cos 2x\,dx$.

20. $\int (4x+7)\cos 3x\,dx$.

21. $\int (2x-5)\cos 4x\,dx$.

22. $\int (8-3x)\cos 5x\,dx$.

23. $\int (x+5)\sin 3x\,dx$.

24. $\int (2-3x)\sin 2x\,dx$.

25. $\int (4x+3)\sin 5x\,dx$.

26. $\int (7x-10)\sin 4x\,dx$.

27. $\int (\sqrt{2}-8x)\sin 3x\,dx$.

28. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

29. $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$.

30. $\int x\sin^2 x\,dx$.

31. $\int \frac{x\cos x\,dx}{\sin^3 x}$.

Задача 2. Вычислить определенные интегралы.

1. $\int\limits_{-2}^{0}(x^2+5x+6)\cos 2x\,dx$.
2. $\int\limits_{-2}^{0}(x^2-4)\cos 3x\,dx$.
3. $\int\limits_{-1}^{0}(x^2+4x+3)\cos x\,dx$.
4. $\int\limits_{-2}^{0}(x+2)^2\cos 3x\,dx$.
5. $\int\limits_{-4}^{0}(x^2+7x+12)\cos x\,dx$.
6. $\int\limits_{0}^{\pi}(2x^2+4x+7)\cos 2x\,dx$.
7. $\int\limits_{0}^{\pi}(9x^2+9x+11)\cos 3x\,dx$.
8. $\int\limits_{0}^{\pi}(8x^2+16x+17)\cos 4x\,dx$.
9. $\int\limits_{0}^{2\pi}(3x^2+5)\cos 2x\,dx$.
10. $\int\limits_{0}^{2\pi}(2x^2-15)\cos 3x\,dx$.
11. $\int\limits_{0}^{2\pi}(3-7x^2)\cos 2x\,dx$.
12. $\int\limits_{0}^{2\pi}(1-8x^2)\cos 4x\,dx$.
13. $\int\limits_{-1}^{0}(x^2+2x+1)\sin 3x\,dx$.
14. $\int\limits_{0}^{3}(x^2-3x)\sin 2x\,dx$.
15. $\int\limits_{0}^{\pi}(x^2-3x+2)\sin x\,dx$.
16. $\int\limits_{0}^{\pi/2}(x^2-5x+6)\sin 3x\,dx$.
17. $\int\limits_{-3}^{0}(x^2+6x+9)\sin 2x\,dx$.
18. $\int\limits_{0}^{\pi/4}(x^2+17{,}5)\sin 2x\,dx$.
19. $\int\limits_{0}^{\pi/2}(1-5x^2)\sin x\,dx$.
20. $\int\limits_{\pi/4}^{3}(3x-x^2)\sin 2x\,dx$.
21. $\int\limits_{1}^{2}x\ln^2 x\,dx$.
22. $\int\limits_{1}^{e^2}\frac{\ln^2 x\,dx}{\sqrt{x}}$.
23. $\int\limits_{1}^{8}\frac{\ln^2 x\,dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

24. $\int\limits_0^1 (x+1)\ln^2(x+1)\,dx.$

25. $\int\limits_2^3 (x-1)^3\ln^2(x-1)\,dx.$

26. $\int\limits_{-1}^0 (x+2)^3\ln^2(x+2)\,dx.$

27. $\int\limits_0^2 (x+1)^2\ln^2(x+1)\,dx.$

28. $\int\limits_1^e \sqrt{x}\ln^2 x\,dx.$

29. $\int\limits_{-1}^1 x^2e^{-x/2}\,dx.$

30. $\int\limits_0^1 x^2e^{3x}\,dx.$

31. $\int\limits_{-2}^0 (x^2+2)e^{x/2}\,dx.$

Задача 3. Найти неопределенные интегралы.

1. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$

2. $\int \dfrac{1+\ln x}{x}dx.$

3. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

4. $\int \dfrac{x^2+\ln x^2}{x}dx.$

5. $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}.$

6. $\int \dfrac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

7. $\int \operatorname{tg} x \ln\cos x\,dx.$

8. $\int \dfrac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx.$

9. $\int \dfrac{x^3}{(x^2+1)^2}dx.$

10. $\int \dfrac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx.$

11. $\int \dfrac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^5}dx.$

12. $\int \dfrac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}dx.$

13. $\int \dfrac{x^3+x}{x^4+1}dx.$

14. $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}dx.$

15. $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt[2]{x-1}}.$

16. $\int \dfrac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx.$

17. $\int \dfrac{(x^2+1)\,dx}{(x^3+3x+1)^5}.$

18. $\int \dfrac{4\operatorname{arctg} x-x}{1+x^2}dx.$

19. $\int \dfrac{x^3}{x^2+4}dx.$

20. $\int \dfrac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}\,dx.$

21. $\int \dfrac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3}\,dx.$

22. $\int \dfrac{8x-\operatorname{arctg}2x}{1+4x^2}\,dx.$

23. $\int \dfrac{1/(2\sqrt{x})+1}{(\sqrt{x}+x)^2}\,dx.$

24. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+1}\,dx.$

25. $\displaystyle\int \frac{x+1/x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$

26. $\displaystyle\int \frac{x-1/x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$

27. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2}\,dx.$

28. $\displaystyle\int \frac{x-(\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2}\,dx.$

29. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx.$

30. $\displaystyle\int \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

31. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx.$

Задача 4. Вычислить определенные интегралы.

1. $\displaystyle\int\limits_{e+1}^{e^2+1} \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}\,dx.$

2. $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^3+3x+1)^2}.$

3. $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{4\operatorname{arctg} x - x}{1+x^2}\,dx.$

4. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2} \frac{x^3\,dx}{x^2+4}.$

5. $\displaystyle\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}\,dx.$

6. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3}\,dx.$

7. $\displaystyle\int\limits_{0}^{1/2} \frac{8x-\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}\,dx.$

8. $\displaystyle\int\limits_{1}^{4} \frac{1/(2\sqrt{x})+1}{(\sqrt{x}+x)^2}\,dx.$

9. $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{x\,dx}{x^4+1}.$

10. $\displaystyle\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x+1/x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$

11. $\displaystyle\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x-1/x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$

12. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2}\,dx.$

13. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x-(\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2}\,dx.$

14. $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3}{x^2+1}\,dx.$

15. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

16. $\displaystyle\int\limits_{1}^{3} \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx.$

17. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

18. $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{1+\ln x}{x}\,dx$.

19. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

20. $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{x^2+\ln x^2}{x}\,dx$.

21. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

22. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^2}$.

23. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \operatorname{tg} x \ln\cos x\,dx$.

24. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)}\,dx$.

25. $\displaystyle\int_{0}^{1/\sqrt{2}} \frac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

26. $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}\,dx$.

27. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^5}\,dx$.

28. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}\,dx$.

29. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^3+x}{x^4+1}\,dx$.

30. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}$.

31. $\displaystyle\int_{2}^{9} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

Задача 5. Найти неопределенные интегралы.

1. $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2-x}\,dx$.

2. $\displaystyle\int \frac{3x^3+1}{x^2-1}\,dx$.

3. $\displaystyle\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3}\,dx$.

4. $\displaystyle\int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2}\,dx$.

5. $\displaystyle\int \frac{2x^3-1}{x^2+x-6}\,dx$.

6. $\displaystyle\int \frac{3x^3+25}{x^2+3x+2}\,dx$.

7. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx$.

8. $\displaystyle\int \frac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x-2)(x-1)}\,dx$.

9. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)}\,dx$.

10. $\displaystyle\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)}\,dx$.

11. $\displaystyle\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)x}\,dx$.

12. $\int \frac{4x^3 + x^2 + 2}{x(x-1)(x-2)}\,dx.$

13. $\int \frac{3x^3 - 2}{x^3 - x}\,dx.$

14. $\int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-2)x}\,dx.$

15. $\int \frac{x^5 - x^3 + 1}{x^2 - x}\,dx.$

16. $\int \frac{x^5 + 3x^3 - 1}{x^2 + x}\,dx.$

17. $\int \frac{2x^5 - 8x^3 + 3}{x^2 - 2x}\,dx.$

18. $\int \frac{3x^5 - 12x^3 - 7}{x^2 + 2x}\,dx.$

19. $\int \frac{-x^5 + 9x^3 + 4}{x^2 + 3x}\,dx.$

20. $\int \frac{-x^5 + 25x^3 + 1}{x^2 + 5x}\,dx.$

21. $\int \frac{x^3 - 5x^2 + 5x + 23}{(x-1)(x+1)(x-5)}\,dx.$

22. $\int \frac{x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 9}{(x+3)(x-1)x}\,dx.$

23. $\int \frac{2x^4 - 5x^2 - 8x - 8}{x(x-2)(x+2)}\,dx.$

24. $\int \frac{4x^4 + 2x^2 - x - 3}{x(x-1)(x+1)}\,dx.$

25. $\int \frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2}{x(x-1)(x+2)}\,dx.$

26. $\int \frac{2x^4 + 2x^3 - 41x^2 + 20}{x(x-4)(x+5)}\,dx.$

27. $\int \frac{x^5 - x^4 - 6x^3 + 13x + 6}{x(x-3)(x+2)}\,dx.$

28. $\int \frac{3x^3 - x^2 - 12x - 2}{x(x+1)(x-2)}\,dx.$

29. $\int \frac{2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 9}{x(x-1)(x+3)}\,dx.$

30. $\int \frac{2x^3 - x^2 - 7x - 12}{x(x-3)(x+1)}\,dx.$

31. $\int \frac{2x^3 - 40x - 8}{x(x+4)(x-2)}\,dx.$

Задача 6. Найти неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 9}{(x+1)(x+2)^3}\,dx.$

2. $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 8}{x(x+2)^3}\,dx.$

3. $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2)(x-2)^3}\,dx.$

4. $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 14x + 10}{(x+1)(x+2)^3}\,dx.$

5. $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 10}{(x+2)(x-2)^3}\,dx.$

6. $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 7}{(x+1)(x+2)^3}\,dx.$

7. $\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 1}{(x-1)(x+1)^3}\,dx.$

8. $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 10x + 10}{(x-1)(x+2)^3}\,dx.$

9. $\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 2}{x(x+1)^3}\,dx.$

10. $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 8}{x(x-2)^3}\,dx.$

11. $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 7}{(x+1)(x-2)^3}\,dx.$

12. $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 14x - 6}{(x+1)(x-2)^3}\,dx.$

13. $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 10x - 10}{(x+1)(x-2)^3}\,dx.$

14. $\int \frac{x^3 + x + 2}{(x+2)x^3}\,dx.$

15. $\int \frac{3x^3 + 9x^2 + 10x + 2}{(x-1)(x+1)^3}\,dx.$

16. $\int \frac{2x^3 + x + 1}{(x+1)x^3}\,dx.$

17. $\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 4}{(x+2)(x+1)^3}\,dx.$

18. $\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 5x}{(x+2)(x+1)^3}\,dx.$

19. $\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x}{(x-2)(x+1)^3}\,dx.$

20. $\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 5x + 4}{(x-2)(x+1)^3}\,dx.$

21. $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 4x + 24}{(x-2)(x+2)^3}\,dx.$

22. $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 14x + 4}{(x-2)(x+2)^3}\,dx.$

23. $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 18x - 4}{(x-2)(x+2)^3}\,dx.$

24. $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 10x + 12}{(x-2)(x+2)^3}\,dx.$

25. $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 14x - 4}{(x+2)(x-2)^3}\,dx.$

26. $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 15x + 2}{(x-2)(x+2)^3}\,dx.$

27. $\int \frac{2x^3 - 6x^2 + 7x - 4}{(x-2)(x-1)^3}\,dx.$

28. $\int \frac{2x^3 - 6x^2 + 7x}{(x+2)(x-1)^3}\,dx.$

29. $\int \frac{x^3 + 6x^2 - 10x + 52}{(x-2)(x+2)^3}\,dx.$

30. $\int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}\,dx.$

31. $\int \frac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^3}\,dx.$

Задача 7. Найти неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{x^3+4x^2+4x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}\,dx.$

2. $\int \frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx.$

3. $\int \frac{2x^3+7x^2+7x-1}{(x+2)^2(x^2+x+1)}\,dx.$

4. $\int \frac{2x^3+4x^2+2x-1}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx.$

5. $\int \frac{x^3+6x^2+9x+6}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx.$

6. $\int \frac{2x^3+11x^2+16x+10}{(x+2)^2(x^2+2x+3)}\,dx.$

7. $\int \frac{3x^3+6x^2+5x-1}{(x+1)^2(x^2+2)}\,dx.$

8. $\int \frac{x^3+9x^2+21x+21}{(x+3)^2(x^2+3)}\,dx.$

9. $\int \frac{x^3+6x^2+8x+8}{(x+2)^2(x^2+4)}\,dx.$

10. $\int \frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2(x^2+4)}\,dx.$

11. $\int \frac{2x^3-4x^2-16x-12}{(x-1)^2(x^2+4x+5)}\,dx.$

12. $\int \frac{-3x^3+13x^2-13x+1}{(x-2)^2(x^2-x+1)}\,dx.$

13. $\int \frac{x^3+2x^2+10x}{(x+1)^2(x^2-x+1)}\,dx.$

14. $\int \frac{3x^3+x+46}{(x-1)^2(x^2+9)}\,dx.$

15. $\int \frac{4x^3+24x^2+20x-28}{(x+3)^2(x^2+2x+2)}\,dx.$

16. $\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,dx.$

17. $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,dx.$

18. $\int \frac{x^2+x+3}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,dx.$

19. $\int \frac{2x^3+4x^2+2x+2}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)}\,dx.$

20. $\int \frac{2x^3+7x^2+7x+9}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)}\,dx.$

21. $\int \frac{4x^2+3x+4}{(x^2+1)(x^2+x+1)}\,dx.$

22. $\int \frac{3x^3+4x^2+6x}{(x^2+2)(x^2+2x+2)}\,dx.$

23. $\int \frac{2x^2-x+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)}\,dx.$

24. $\int \frac{x^3+x^2+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)}\,dx.$

25. $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)}\,dx.$

26. $\int \frac{2x^3+2x+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)}\,dx.$

27. $\int \frac{x^3+2x^2+x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,dx.$

28. $\int \frac{x+4}{(x^2+x+2)(x^2+2)}\,dx.$

29. $\int \frac{2x^3+2x^2+2x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,dx.$

30. $\int \frac{3x^3+7x^2+12x+6}{(x^2+x+3)(x^2+2x+3)}\,dx.$

31. $\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,dx.$

Задача 8. Вычислить определенные интегралы.

1. $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{2\,\mathrm{arctg}\,2} \frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)}$.

2. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{2+\cos x}$.

3. $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{2\,\mathrm{arctg}\,2} \frac{dx}{\sin^2 x(1+\cos x)}$.

4. $\displaystyle\int\limits_{2\,\mathrm{arctg}(1/2)}^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{(1-\cos x)^3}$.

5. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x-\sin x}{(1+\sin x)^2}\, dx$.

6. $\displaystyle\int\limits_{2\,\mathrm{arctg}\,2}^{2\,\mathrm{arctg}\,3} \frac{dx}{\cos x(1-\cos x)}$.

7. $\displaystyle\int\limits_{2\,\mathrm{arctg}(1/3)}^{2\,\mathrm{arctg}(1/2)} \frac{dx}{\sin x(1-\sin x)}$.

8. $\displaystyle\int\limits_{2\,\mathrm{arctg}(1/2)}^{\pi/2} \frac{dx}{(1+\sin x-\cos x)^2}$.

9. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{5+4\cos x}$.

10. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi/3} \frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x}\, dx$.

11. $\displaystyle\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{1+\sin x-\cos x}$.

12. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{(1+\cos x)\, dx}{1+\cos x+\sin x}$.

13. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos x+\sin x}$

14. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\,\mathrm{arctg}(1/2)} \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)^2}\, dx$.

15. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2} \frac{\cos x\, dx}{1+\cos x+\sin x}$.

16. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\,\mathrm{arctg}(1/3)} \frac{\cos x\, dx}{(1+\cos x)(1-\sin x)}$.

17. $\displaystyle\int\limits_{-2\pi/3}^{0} \frac{\cos x\, dx}{1+\cos x-\sin x}$.

18. $\displaystyle\int\limits_{-\pi/2}^{0} \frac{\cos x\, dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.

19. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$

20. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\,\mathrm{arctg}(1/2)} \frac{(1-\sin x)\, dx}{\cos x(1+\cos x)}$.

21. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x\, dx}{(1+\sin x)^2}$.

22. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x\, dx}{(1+\sin x+\cos x)^2}$

23. $\displaystyle\int\limits_{-\pi/2}^{0} \frac{\sin x\,dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.

24. $\displaystyle\int\limits_{-2\pi/3}^{0} \frac{\cos^2 x\,dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.

25. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\,dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$.

26. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi/3} \frac{\cos^2 x\,dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$.

27. $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{2\,\mathrm{arctg}\,2} \frac{dx}{\sin x(1+\sin x)}$.

28. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{(1+\sin x+\cos x)^2}$

29. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{2+\sin x}$.

30. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}$.

31. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{5+3\sin x}$.

Задача 9. Вычислить определенные интегралы.

1. $\displaystyle\int\limits_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}\,3} \frac{dx}{(3\,\mathrm{tg}\,x+5)\sin 2x}$.

2. $\displaystyle\int\limits_{\arccos(4/\sqrt{17})}^{\pi/4} \frac{2\,\mathrm{ctg}\,x+1}{(2\sin x+\cos x)^2}\,dx$.

3. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\arccos(1/\sqrt{7})} \frac{3+2\,\mathrm{tg}\,x}{2\sin^2 x+3\cos^2 x-1}\,dx$

4. $\displaystyle\int\limits_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}\,3} \frac{4\,\mathrm{tg}\,x-5}{1-\sin 2x+4\cos^2 x}\,dx$.

5. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\mathrm{arctg}(1/3)} \frac{(8+\mathrm{tg}\,x)}{18\sin^2 x+2\cos^2 x}\,dx$.

6. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\arccos\sqrt{2/3}} \frac{\mathrm{tg}\,x+2}{\sin^2 x+2\cos^2 x-3}\,dx$.

7. $$\int\limits_{\arcsin(1/\sqrt{37})}^{\pi/4} \frac{6\,\mathrm{tg}\,x\,dx}{3\sin 2x + 5\cos^2 x}.$$

8. $$\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{2\,\mathrm{tg}^2 x - 11\,\mathrm{tg}\,x - 22}{4 - \mathrm{tg}\,x}\,dx.$$

9. $$\int\limits_{-\mathrm{arctg}(1/3)}^{0} \frac{3\,\mathrm{tg}\,x + 1}{2\sin 2x - 5\cos 2x + 1}\,dx.$$

10. $$\int\limits_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}\,3} \frac{1 + \mathrm{ctg}\,x}{(\sin x + 2\cos x)^2}\,dx.$$

11. $$\int\limits_{\pi/4}^{\arccos(1/\sqrt{3})} \frac{\mathrm{tg}\,x}{\sin^2 x - 5\cos^2 x + 4}\,dx.$$

12. $$\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{6\sin^2 x}{3\cos 2x - 4}\,dx.$$

13. $$\int\limits_{0}^{\mathrm{arctg}\,3} \frac{4 + \mathrm{tg}\,x}{2\sin^2 x + 18\cos^2 x}\,dx.$$

14. $$\int\limits_{0}^{\mathrm{arctg}\,2} \frac{12 + \mathrm{tg}\,x}{3\sin^2 x + 12\cos^2 x}\,dx.$$

15. $$\int\limits_{0}^{\mathrm{arctg}(2/3)} \frac{6 + \mathrm{tg}\,x}{9\sin^2 x + 4\cos^2 x}\,dx.$$

16. $$\int\limits_{0}^{\arcsin\sqrt{3/7}} \frac{\mathrm{tg}^2 x\,dx}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x - 7}.$$

17. $$\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{7 + 3\,\mathrm{tg}\,x}{(\sin x + 2\cos x)^2}\,dx.$$

18. $$\int\limits_{\arcsin(2/\sqrt{5})}^{\arcsin(3/\sqrt{10})} \frac{2\operatorname{tg}x+5}{(5-\operatorname{tg}x)\sin 2x}\,dx.$$

19. $$\int\limits_{-\arccos(1/\sqrt{10})}^{0} \frac{3\operatorname{tg}^2 x-50}{2\operatorname{tg}x+7}\,dx.$$

20. $$\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{5\operatorname{tg}x+2}{2\sin 2x+5}\,dx.$$

21. $$\int\limits_{\pi/4}^{\arcsin(2/\sqrt{5})} \frac{4\operatorname{tg}x-5}{4\cos^2 x-\sin 2x+1}\,dx.$$

22. $$\int\limits_{0}^{\arcsin\sqrt{7/8}} \frac{6\sin^2 x\,dx}{4+3\cos 2x}.$$

23. $$\int\limits_{-\arccos(1/\sqrt{5})}^{0} \frac{11-3\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x+3}\,dx.$$

24. $$\int\limits_{0}^{\arcsin(3/\sqrt{10})} \frac{2\operatorname{tg}x-5}{(4\cos x-\sin x)^2}\,dx.$$

25. $$\int\limits_{\pi/4}^{\arccos(1/\sqrt{26})} \frac{36\,dx}{(6-\operatorname{tg}x)\sin 2x}.$$

26. $$\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{4-7\operatorname{tg}x}{2+3\operatorname{tg}x}\,dx.$$

27. $$\int\limits_{-\arcsin(2/\sqrt{5})}^{\pi/4} \frac{2-\operatorname{tg}x}{(\sin x+3\cos x)^2}\,dx.$$

28. $$\int\limits_{\pi/4}^{\arcsin\sqrt{2/3}} \frac{8\operatorname{tg}x\,dx}{3\cos^2 x+8\sin^2 x-7}.$$

29. $\displaystyle\int\limits_{\arccos(1/\sqrt{10})}^{\arccos(1/\sqrt{26})} \frac{12\,dx}{(6+5\operatorname{tg}x)\sin 2x}.$

30. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{4+3\cos 2x}\,dx.$

31. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\arccos(1/\sqrt{6})} \frac{3\operatorname{tg}^2 x-1}{\operatorname{tg}^2 x+5}\,dx.$

Задача 10. Вычислить определенные интегралы.

1. $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2^8\sin^8 x\,dx.$

2. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} 2^4\sin^6 x\cos^2 x\,dx.$

3. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^4 x\cos^4 x\,dx.$

4. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^2\frac{x}{4}\cos^6\frac{x}{4}\,dx.$

5. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} 2^4\cos^8\frac{x}{2}\,dx.$

6. $\displaystyle\int\limits_{-\pi/2}^{0} 2^8\sin^8 x\,dx.$

7. $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2^8\sin^6 x\cos^2 x\,dx.$

8. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} 2^4\sin^4 x\cos^4 x\,dx.$

9. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^2 x\cos^6 x\,dx$

10. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \cos^8\frac{x}{4}\,dx.$

11. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} 2^4\sin^8\frac{x}{2}\,dx.$

12. $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{0} 2^8\sin^6 x\cos^2 x\,dx.$

13. $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2^8\sin^4 x\cos^4 x\,dx.$

14. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} 2^4\sin^2 x\cos^6 x\,dx.$

15. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \cos^8 x\,dx.$

16. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^8\frac{x}{4}\,dx.$

17. $\int\limits_{0}^{\pi} 2^4 \sin^6 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}\, dx.$

18. $\int\limits_{-\pi/2}^{0} 2^8 \sin^4 x \cos^4 x\, dx.$

19. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^2 x \cos^6 x\, dx.$

20. $\int\limits_{0}^{\pi} 2^4 \cos^8 x\, dx.$

21. $\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^8 x\, dx.$

22. $\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^6 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4}\, dx.$

23. $\int\limits_{0}^{\pi} 2^4 \sin^4 \frac{x}{2} \cos^4 \frac{x}{2}\, dx.$

24. $\int\limits_{-\pi/2}^{0} 2^8 \sin^2 x \cos^6 x\, dx.$

25. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \cos^8 x\, dx.$

26. $\int\limits_{0}^{\pi} 2^4 \sin^8 x\, dx.$

27. $\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^6 x \cos^2 x\, dx.$

28. $\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^4 \frac{x}{4} \cos^4 \frac{x}{4}\, dx.$

29. $\int\limits_{0}^{\pi} 2^4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^6 \frac{x}{2}\, dx.$

30. $\int\limits_{-\pi/2}^{0} 2^8 \cos^8 x\, dx.$

31. $\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^4 3x \cos^4 3x\, dx.$

Задача 11. Вычислить определенные интегралы.

1. $\int\limits_{0}^{1} \frac{4\sqrt{1-x} - \sqrt{3x+1}}{\left(\sqrt{3x+1} + 4\sqrt{1-x}\right)(3x+1)^2}\, dx.$

2. $\int\limits_{1}^{64} \frac{1 - \sqrt[6]{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x + 2\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^4}}\, dx.$

3. $\int\limits_{-14/15}^{-7/8} \frac{6\sqrt{x+2}}{(x+2)^2\sqrt{x+1}}\, dx.$

4. $\int\limits_{6}^{9} \sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}}\, dx.$

5. $\displaystyle\int_0^5 e^{\sqrt{\frac{9-x}{9+x}}} \frac{dx}{(5+x)\sqrt{25-x^2}}.$

6. $\displaystyle\int_8^{12} \sqrt{\frac{6-x}{x-14}}\, dx.$

7. $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}.$

8. $\displaystyle\int_{5/2}^{10/3} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})(x-2)^2}\, dx.$

9. $\displaystyle\int_1^8 \frac{5\sqrt{x+24}}{(x+24)^2\sqrt{x}}\, dx.$

10. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+\sqrt{3x-2}-10}{\sqrt{3x-2}+7}\, dx.$

11. $\displaystyle\int_6^{10} \sqrt{\frac{4-x}{x-12}}\, dx.$

12. $\displaystyle\int_0^2 \frac{(4\sqrt{2-x}-\sqrt{2x+2})\,dx}{(\sqrt{2x+2}+4\sqrt{2-x})(2x+2)^2}.$

13. $\displaystyle\int_{-1/2}^0 \frac{x\,dx}{2+\sqrt{2x+1}}.$

14. $\displaystyle\int_0^4 e^{\sqrt{\frac{4-x}{4+x}}} \frac{dx}{(4+x)\sqrt{16-x^2}}.$

15. $\displaystyle\int_{1/8}^1 \frac{15\sqrt{x+3}}{(x+3)^2\sqrt{x}}\, dx.$

16. $\displaystyle\int_{-5/3}^1 \frac{\sqrt[3]{3x+5}+2}{1+\sqrt[3]{3x+5}}\, dx.$

17. $\displaystyle\int_{2}^{3}\sqrt{\frac{3-2x}{2x-7}}\,dx.$

18. $\displaystyle\int_{0}^{7}\frac{\sqrt{x+25}\,dx}{(x+25)^2\sqrt{x+1}}.$

19. $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{(4\sqrt{2-x}-\sqrt{3x+2})\,dx}{(\sqrt{3x+2}+4\sqrt{2-x})(3x+2)^2}.$

20. $\displaystyle\int_{0}^{2}e^{\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}}\frac{dx}{(2+x)\sqrt{4-x^2}}.$

21. $\displaystyle\int_{3}^{5}\sqrt{\frac{2-x}{x-6}}\,dx.$

22. $\displaystyle\int_{1/24}^{1/3}\frac{5\sqrt{x+1}}{(x+1)^2\sqrt{x}}\,dx.$

23. $\displaystyle\int_{9}^{15}\sqrt{\frac{6-x}{x-18}}\,dx.$

24. $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{(4\sqrt{1-x}-\sqrt{2x+1})\,dx}{(\sqrt{2x+1}+4\sqrt{1-x})(2x+1)^2}.$

25. $\displaystyle\int_{1}^{64}\frac{(2+\sqrt[3]{x})\,dx}{(\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\,)\sqrt{x}}.$

26. $\displaystyle\int_{16/15}^{4/3}\frac{4\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x-1}}\,dx.$

27. $\displaystyle\int_{0}^{6}\frac{e^{\sqrt{(6-x)/(6+x)}}\,dx}{(6+x)\sqrt{36-x^2}}.$

28. $\displaystyle\int_{1}^{64}\frac{6-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3}-7x-6\sqrt[4]{x^3}}\,dx.$

29. $\int\limits_0^1 \frac{(4\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1})\,dx}{(\sqrt{x+1}+4\sqrt{1-x})(x+1)^2}$.

30. $\int\limits_0^3 \frac{e^{\sqrt{(3-x)/(3+x)}}\,dx}{(3+x)\sqrt{9-x^2}}$.

31. $\int\limits_0^2 \frac{(4\sqrt{2-x}-\sqrt{x+2})\,dx}{(\sqrt{x+2}+4\sqrt{2-x})(x+2)^2}$.

Задача 12. Вычислить определенные интегралы.

1. $\int\limits_0^{16} \sqrt{256-x^2}\,dx$.

2. $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$.

3. $\int\limits_0^5 \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}$.

4. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}$.

5. $\int\limits_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$.

6. $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,dx$.

7. $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

8. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

9. $\int\limits_0^1 \frac{x^4\,dx}{(2-x^2)^{3/2}}$.

10. $\int\limits_0^2 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

11. $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$.

12. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}}$.

13. $\int\limits_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$.

14. $\int\limits_0^{5/2} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{25-x^2}}$.

15. $\int\limits_0^5 x^2\sqrt{25-x^2}\,dx$.

16. $\int\limits_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$.

17. $\displaystyle\int_0^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}}$.

18. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}\,dx$.

19. $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^4\,dx}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}$.

20. $\displaystyle\int_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

21. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

22. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}$.

23. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}$.

24. $\displaystyle\int_3^{6} \frac{x^2-9}{x^4}\,dx$.

25. $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{4-x^2}\,dx$.

26. $\displaystyle\int_2^{4} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,dx$.

27. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}$.

28. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4\,dx}{(4-x^2)^{3/2}}$.

29. $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

30. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

31. $\displaystyle\int_0^{3/2} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Задача 13. Найти неопределенные интегралы.

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}\,dx$.

2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}}\,dx$.

4. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[9]{x^4}}\,dx$.

5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\sqrt[9]{x^8}}\,dx$.

6. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x\sqrt[9]{x^5}}\,dx$.

7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2\sqrt[9]{x}}\,dx$.

8. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x\sqrt[6]{x^5}}\,dx$.

9. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2}\,dx$.

10. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{x}}\,dx$.

11. $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x\sqrt[8]{x^7}}\,dx$.

12. $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^3}}{x\sqrt[12]{x^7}}\,dx$.

13. $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x^2})^3}}{x^2\sqrt[6]{x}}\,dx$.

14. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2\sqrt[8]{x}}\,dx$.

15. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2}\,dx$.

16. $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}}{x^2\sqrt[4]{x}}\,dx$.

17. $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt{x})^4}\,dx}{x\sqrt[10]{x^9}}$.

18. $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x})^4}\,dx}{x\sqrt[5]{x^3}}$.

19. $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x^2})^4}}{x^2\sqrt[5]{x}}\,dx$.

20. $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[4]{x^3})^4}}{x^2\sqrt[20]{x^7}}\,dx$.

21. $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[5]{x^4})}}{x^2\sqrt[25]{x^{11}}}\,dx$.

22. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\sqrt[5]{x}}\,dx$.

23. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\sqrt[15]{x}}\,dx$.

24. $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[5]{x^4})^2}}{x^2\sqrt[3]{x}}\,dx$.

25. $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[5]{x^4})^3}\,dx}{x^2\sqrt[5]{x^2}}$.

26. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{x\sqrt[3]{x}}\,dx$.

27. $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^2}}{x\sqrt[12]{x^5}}\,dx$.

28. $\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[12]{x^5}}\,dx$.

29. $\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\sqrt[6]{x^5}}\,dx$.

30. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x}}}{x\sqrt[15]{x^4}}\,dx$.

31. $\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[5]{x^2}}\,dx$.

Задача 14. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций.

1. $y=(x-2)^3$, $y=4x-8$.
2. $y=x\sqrt{9-x^2}$, $y=0$ $(0\leqslant x\leqslant 3)$.
3. $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$.
4. $y=\sin x\cos^2 x$, $y=0$ $(0\leqslant x\leqslant \pi/2)$.
5. $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$.

6. $y = x^2\sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 2)$.
7. $y = \cos x \sin^2 x$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi/2)$.
8. $y = \sqrt{e^x - 1}$, $y = 0$, $x = \ln 2$.
9. $y = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e^3$.
10. $y = \arccos x$, $y = 0$, $x = 0$.
11. $y = (x+1)^2$, $y^2 = x + 1$.
12. $y = 2x - x^2 + 3$, $y = x^2 - 4x + 3$.
13. $y = x\sqrt{36 - x^2}$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 6)$.
14. $x = \arccos y$, $x = 0$, $y = 0$.
15. $y = x \operatorname{arctg} x$, $y = 0$, $x = \sqrt{3}$.
16. $y = x^2\sqrt{8 - x^2}$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\sqrt{2})$.
17. $x = \sqrt{e^y - 1}$, $x = 0$, $y = \ln 2$.
18. $y = x\sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 2)$.
19. $y = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 1$.
20. $y = \frac{1}{1+\cos x}$, $y = 0$, $x = \pi/2$, $x = -\pi/2$.
21. $x = (y-2)^3$, $x = 4y - 8$.
22. $y = \cos^5 x \sin 2x$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi/2)$.
23. $y = \frac{x}{(x^2+1)^2}$, $y = 0$, $x = 1$.
24. $x = 4 - y^2$, $x = y^2 - 2y$.
25. $x = \frac{1}{y\sqrt{1+\ln y}}$, $x = 0$, $y = 1$, $y = e^3$.
26. $y = \frac{e^{1/x}}{x^2}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 1$.
27. $y = x^2\sqrt{16 - x^2}$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 4)$.
28. $x = \sqrt{4 - y^2}$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$.
29. $y = (x-1)^2$, $y^2 = x - 1$.
30. $y = x^2 \cos x$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi/2)$.
31. $x = 4 - (y-1)^2$, $x = y^2 - 4y + 3$.

Задача 15. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями.

1. $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 2$ $(x \geqslant 2)$.

2. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$
$y = 2$ $(y \geqslant 2)$.

3. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 4$ $(0 < x < 8\pi,\ y \geqslant 4)$.

4. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 2$ $(x \geqslant 2)$.

5. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 6\sin t, \end{cases}$
$y = 3$ ($y \geqslant 3$).

6. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 3$ ($0 < x < 4\pi$, $y \geqslant 3$).

7. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$
$x = 6\sqrt{3}$ ($x \geqslant 6\sqrt{3}$).

8. $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$
$y = \sqrt{3}$ ($y \geqslant \sqrt{3}$).

9. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 3$ ($0 < x < 6\pi$, $y \geqslant 3$).

10. $\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 4$ ($x \geqslant 4$).

11. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 3\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$
$y = 3$ ($y \geqslant 3$).

12. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 9$ ($0 < x < 12\pi$, $y \geqslant 9$).

13. $\begin{cases} x = 32\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$
$x = 4$ ($x \geqslant 4$).

14. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases}$
$y = 4$ ($y \geqslant 4$).

15. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 6$ ($0<x<12\pi$, $y\geqslant 6$).

16. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 3\sqrt{3}$ ($x \geqslant 3\sqrt{3}$).

17. $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$
$y = 2\sqrt{3}$ ($y \geqslant 2\sqrt{3}$).

18. $\begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 15$ ($0 < x < 20\pi$, $y \geqslant 15$).

19. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 1$ ($x \geqslant 1$).

20. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 4\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$
$y = 4$ ($y \geqslant 4$).

21. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$
$y = 1$ ($0 < x < 2\pi$, $y \geqslant 1$).

22. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 1$ ($x \geqslant 1$).

23. $\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$
$y = 2$ ($y \geqslant 2$).

24. $\begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 12$ ($0 < x < 16\pi$, $y \geqslant 12$).

25. $\begin{cases} x = 24\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 9\sqrt{3}$ ($x \geqslant 9\sqrt{3}$).

26. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases}$
$y = 4\sqrt{3}$ ($y \geqslant 4\sqrt{3}$).

27. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 2$ ($0 < x < 4\pi$, $y \geqslant 2$).

28. $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 2$ ($x \geqslant 2$).

29. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 5\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$
$y = 5$ ($y \geqslant 5$).

30. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 6$ ($0 < x < 8\pi$, $y \geqslant 6$).

31. $\begin{cases} x = 32\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 12\sqrt{3}$ ($x \geqslant 12\sqrt{3}$).

Задача 16. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями в полярных координатах.

1. $r = 4\cos 3\varphi$, $r = 2$ ($r \geqslant 2$).
2. $r = \cos 2\varphi$.
3. $r = \sqrt{3}\cos\varphi$, $r = \sin\varphi$ ($0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$).
4. $r = 4\sin 3\varphi$, $r = 2$ ($r \geqslant 2$).
5. $r = 2\cos\varphi$, $r = 2\sqrt{3}\sin\varphi$ ($0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$).
6. $r = \sin 3\varphi$.
7. $r = 6\sin 3\varphi$, $r = 3$ ($r \geqslant 3$).
8. $r = \cos 3\varphi$.
9. $r = \cos\varphi$, $r = \sqrt{2}\cos(\varphi - \pi/4)$ ($-\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$).
10. $r = \sin\varphi$, $r = \sqrt{2}\cos(\varphi - \pi/4)$ ($0 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/4$).
11. $r = 6\cos 3\varphi$, $r = 3$ ($r \geqslant 3$).
12. $r = \frac{1}{2} + \sin\varphi$.
13. $r = \cos\varphi$, $r = \sin\varphi$ ($0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$).
14. $r = \sqrt{2}\cos(\varphi - \pi/4)$, $r = \sqrt{2}\sin(\varphi - \pi/4)$ ($\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/4$).
15. $r = \cos\varphi$, $r = 2\cos\varphi$.
16. $r = \sin\varphi$, $r = 2\sin\varphi$.
17. $r = 1 + \sqrt{2}\cos\varphi$.
18. $r = \frac{1}{2} + \cos\varphi$.
19. $r = 1 + \sqrt{2}\sin\varphi$.
20. $r = \frac{5}{2}\sin\varphi$, $r = \frac{3}{2}\sin\varphi$.
21. $r = \frac{3}{2}\cos\varphi$, $r = \frac{5}{2}\cos\varphi$.
22. $r = 4\cos 4\varphi$.
23. $r = \sin 6\varphi$.
24. $r = 2\cos\varphi$, $r = 3\cos\varphi$.
25. $r = \cos\varphi + \sin\varphi$.
26. $r = 2\sin 4\varphi$.
27. $r = 2\cos 6\varphi$.
28. $r = \cos\varphi - \sin\varphi$.
29. $r = 3\sin\varphi$, $r = 5\sin\varphi$.
30. $r = 2\sin\varphi$, $r = 4\sin\varphi$.
31. $r = 6\sin\varphi$, $r = 4\sin\varphi$.

Задача 17. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат.

1. $y = \ln x$, $\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{15}$.

2. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$, $1 \leqslant x \leqslant 2$.

3. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{7}{9}$.

4. $y = \ln \frac{5}{2x}$, $\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{8}$.

5. $y = -\ln\cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/6$.

6. $y = e^x + 6$, $\ln\sqrt{8} \leqslant x \leqslant \ln\sqrt{15}$.

7. $y = 2 + \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}$, $\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 1$.

8. $y = \ln(x^2 - 1)$, $2 \leqslant x \leqslant 3$.

9. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{8}{9}$.

10. $y = \ln(1 - x^2)$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}$.

11. $y = 2 + \operatorname{ch} x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

12. $y = 1 - \ln\cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/6$.

13. $y = e^x + 13$, $\ln\sqrt{15} \leqslant x \leqslant \ln\sqrt{24}$.

14. $y = -\arccos\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}$.

15. $y = 2 - e^x$, $\ln\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \ln\sqrt{8}$.

16. $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{15}{16}$.

17. $y = 1 - \ln\sin x$, $\pi/3 \leqslant x \leqslant \pi/2$.

18. $y = 1 - \ln(x^2 - 1)$, $3 \leqslant x \leqslant 4$.

19. $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos\sqrt{x} + 5$, $\frac{1}{9} \leqslant x \leqslant 1$.

20. $y = -\arccos x + \sqrt{1 - x^2} + 1$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{9}{16}$.

21. $y = \ln\sin x$, $\pi/3 \leqslant x \leqslant \pi/2$.

22. $y = \ln 7 - \ln x$, $\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{8}$.

23. $y = \operatorname{ch} x + 3$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

24. $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}$.

25. $y = \ln\cos x + 2$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/6$.

26. $y = e^x + 26$, $\ln\sqrt{8} \leqslant x \leqslant \ln\sqrt{24}$.

27. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 3$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

28. $y = \arccos\sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} + 4$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.

29. $y = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 3}{4}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

30. $y = e^x + e$, $\ln\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \ln\sqrt{15}$.

31. $y = \frac{1 - e^x - e^{-x}}{2}$, $0 \leqslant x \leqslant 3$.

Задача 18. Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями.

1. $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases}$
$0 \leqslant t \leqslant \pi$.

2. $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$
$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

3. $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t), \\ y = 4(\sin t - t\cos t), \end{cases}$
$0 \leqslant t \leqslant 2$.

4. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$
$0 \leqslant t \leqslant \pi$.

5. $\begin{cases} x = 10\cos^3 t, \\ y = 10\sin^3 t, \end{cases}$
$0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

6. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$
$0 \leqslant t \leqslant \pi$.

7. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(t - \cos t), \end{cases}$
$\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$.

8. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t, \\ y = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\sin 2t, \end{cases}$
$\pi/2 \leqslant t \leqslant 2\pi/3$.

9. $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos t), \end{cases}$
$0 \leqslant t \leqslant \pi/3$.

10. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$
$0 \leqslant t \leqslant \pi/3$.

11. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t, \end{cases}$
$0 \leqslant t \leqslant \pi/3$.

12. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$
$\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi$.

13. $\begin{cases} x = 2{,}5(t - \sin t), \\ y = 2{,}5(1 - \cos t), \end{cases}$
$\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi$.

14. $\begin{cases} x = 3{,}5(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3{,}5(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$
$0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

15. $\begin{cases} x = 6(\cos t + t\sin t), \\ y = 6(\sin t - t\cos t), \end{cases}$
$0 \leqslant t \leqslant \pi$.

16. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$
$0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

17. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$
$0 \leqslant t \leqslant \pi/6$.

18. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$
$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

19. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$
$\pi/2 \leqslant t \leqslant 2\pi/3$.

20. $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$
$0 \leqslant t \leqslant \pi/3$.

21. $\begin{cases} x = 8(\cos t + t\sin t), \\ y = 8(\sin t - t\cos t), \end{cases}$
$0 \leqslant t \leqslant \pi/4$.

22. $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \end{cases}$
$0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$

23. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$
$\pi/6 \leqslant t \leqslant \pi/4.$

24. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$
$0 \leqslant t \leqslant 3\pi/2.$

25. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$
$0 \leqslant t \leqslant \pi/2.$

26. $\begin{cases} x = 4(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 4(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$
$0 \leqslant t \leqslant \pi.$

27. $\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t), \\ y = 2(\sin t - t\cos t), \end{cases}$
$0 \leqslant t \leqslant \pi/2.$

28. $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \end{cases}$
$0 \leqslant t \leqslant 3\pi.$

29. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$
$0 \leqslant t \leqslant \pi/4.$

30. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$
$\pi/6 \leqslant t \leqslant \pi/4.$

31. $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \end{cases}$
$0 \leqslant t \leqslant \pi.$

Задача 19. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в полярных координатах.

1. $\rho = 3e^{3\varphi/4}$, $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2.$
2. $\rho = 2e^{4\varphi/3}$, $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2.$
3. $\rho = \sqrt{2}e^{\varphi}$, $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2.$
4. $\rho = 5e^{5\varphi/12}$, $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2.$
5. $\rho = 6e^{12\varphi/5}$, $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2.$
6. $\rho = 3e^{3\varphi/4}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/3.$
7. $\rho = 4e^{4\varphi/3}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/3.$
8. $\rho = \sqrt{2}e^{\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/3.$
9. $\rho = 5e^{5\varphi/12}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/3.$
10. $\rho = 12e^{12\varphi/5}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/3.$
11. $\rho = 1 - \sin\varphi$, $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant -\pi/6.$
12. $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant -\pi/2.$
13. $\rho = 3(1 + \sin\varphi)$, $-\pi/6 \leqslant \varphi \leqslant 0.$
14. $\rho = 4(1 - \sin\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/6.$
15. $\rho = 5(1 - \cos\varphi)$, $-\pi/3 \leqslant \varphi \leqslant 0.$
16. $\rho = 6(1 + \sin\varphi)$, $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 0.$
17. $\rho = 7(1 - \sin\varphi)$, $-\pi/6 \leqslant \varphi \leqslant \pi/6.$
18. $\rho = 8(1 - \cos\varphi)$, $-2\pi/3 \leqslant \varphi \leqslant 0.$
19. $\rho = 2\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 3/4.$
20. $\rho = 2\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 4/3.$
21. $\rho = 2\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{5}{12}.$
22. $\rho = 2\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{12}{5}.$

23. $\rho = 4\varphi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 3/4$.
24. $\rho = 3\varphi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 4/3$.
25. $\rho = 5\varphi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{12}{5}$.
26. $\rho = 2\cos\varphi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/6$.
27. $\rho = 8\cos\varphi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$.
28. $\rho = 6\cos\varphi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/3$.
29. $\rho = 2\sin\varphi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/6$.
30. $\rho = 8\sin\varphi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$.
31. $\rho = 6\sin\varphi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/3$.

Задача 20. Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями.

1. $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1,\ z = y,\ z = 0\ (y \geqslant 0)$.
2. $z = x^2 + 4y^2,\ z = 2$.
3. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1,\ z = 0,\ z = 3$.
4. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = -1,\ z = 12$.
5. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1,\ z = 1,\ z = 0$.
6. $x^2 + y^2 = 9,\ z = y,\ z = 0\ (y \geqslant 0)$.
7. $z = x^2 + 9y^2,\ z = 3$.
8. $\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1,\ z = 0,\ z = 3$.
9. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{64} = -1,\ z = 16$.
10. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1,\ z = 2,\ z = 0$.
11. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1,\ z = y\sqrt{3},\ z = 0\ (y \geqslant 0)$.
12. $z = 2x^2 + 8y^2,\ z = 4$.
13. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} - z^2 = 1,\ z = 0,\ z = 2$.
14. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = -1,\ z = 12$.
15. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1,\ z = 3,\ z = 0$.
16. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{16} = 1,\ z = y\sqrt{3},\ z = 0\ (y \geqslant 0)$.
17. $z = x^2 + 5y^2,\ z = 5$.
18. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1,\ z = 0,\ z = 4$.
19. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{100} = -1,\ z = 20$.
20. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{64} = 1,\ z = 4,\ z = 0$.
21. $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{25} = 1,\ z = \frac{y}{\sqrt{3}},\ z = 0\ (y \geqslant 0)$.
22. $z = 4x^2 + 9y^2,\ z = 6$.
23. $x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1,\ z = 0,\ z = 3$.
24. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{100} = -1,\ z = 20$.
25. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{100} = 1,\ z = 5,\ z = 0$.

26. $\frac{x^2}{27}+y^2=1,\ z=\frac{y}{\sqrt{3}},\ z=0\ (y\geq 0)$.

27. $z=2x^2+18y^2,\ z=6$.

28. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-z^2=1,\ z=0,\ z=2$.

29. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{64}=-1,\ z=16$.

30. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{144}=1,\ z=6,\ z=0$.

31. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{196}=1,\ z=7,\ z=0$.

Задача 21. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций. В вариантах 1–16 ось вращения Ox, в вариантах 17–31 ось вращения Oy.

1. $y=-x^2+5x-6,\ y=0$.

2. $2x-x^2-y=0,$ $2x^2-4x+y=0$.

3. $y=3\sin x,\ y=\sin x,$ $0\leqslant x\leqslant\pi$.

4. $y=5\cos x,\ y=\cos x,$ $x=0,\ x\geqslant 0$.

5. $y=\sin^2 x,\ x=\pi/2,\ y=0$.

6. $x=\sqrt[3]{y-2},\ x=1,\ y=1$.

7. $y=xe^x,\ y=0,\ x=1$.

8. $y=2x-x^2,\ y=-x+2,$ $x=0$.

9. $y=2x-x^2,\ y=-x+2$.

10. $y=e^{1-x},\ y=0,\ x=0,$ $x=1$.

11. $y=x^2,\ y^2-x=0$.

12. $x^2+(y-2)^2=1$.

13. $y=1-x^2,\ x=0,$ $x=\sqrt{y-2},\ x=1$.

14. $y=x^2,\ y=1,\ x=2$.

15. $y=x^3,\ y=\sqrt{x}$.

16. $y=\sin\frac{\pi x}{2},\ y=x^2$.

17. $y=\arccos\frac{x}{3},$ $y=\arccos x,\ y=0$.

18. $y=\arcsin\frac{x}{5},\ y=\arcsin x,$ $y=\frac{\pi}{2}$.

19. $y=x^2,\ x=2,\ y=0$.

20. $y=x^2+1,\ y=x,\ x=0,$ $x=1$.

21. $y=\sqrt{x-1},\ y=0,\ y=1,$ $x=0{,}5$.

22. $y=\ln x,\ x=2,\ y=0$.

23. $y=(x-1)^2,\ y=1$.

24. $y^2=x-2,\ y=0,\ y=x^3,$ $y=1$.

25. $y=x^3,\ y=x^2$.

26. $y=\arccos\frac{x}{5},\ y=\arccos\frac{x}{3},$ $y=0$.

27. $y=\arcsin x,\ y=\arccos x,$ $y=0$.

28. $y=x^2-2x+1,\ x=2,$ $y=0$.

29. $y=x^3,\ y=x$.

30. $y=\arccos x,\ y=\arcsin x,$ $x=0$.

31. $y=(x-1)^2,\ x=0,$ $x=2,\ y=0$.

Задача 22. *Варианты* 1–10. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции (рис. 4.1). Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³, ускорение свободного падения g положить равным 10 м/с².

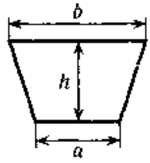

Рис. 4.1

Указание. Давление на глубине x равно $\rho g x$.

1. $a = 4{,}5$ м, $b = 6{,}6$ м, $h = 3{,}0$ м.
2. $a = 4{,}8$ м, $b = 7{,}2$ м, $h = 3{,}0$ м.
3. $a = 5{,}1$ м, $b = 7{,}8$ м, $h = 3{,}0$ м.
4. $a = 5{,}4$ м, $b = 8{,}4$ м, $h = 3{,}0$ м.
5. $a = 5{,}7$ м, $b = 9{,}0$ м, $h = 4{,}0$ м.
6. $a = 6{,}0$ м, $b = 9{,}6$ м $h = 4{,}0$ м.
7. $a = 6{,}3$ м, $b = 10{,}2$ м $h = 4{,}0$ м.
8. $a = 6{,}6$ м, $b = 10{,}8$ м. $h = 4{,}0$ м.
9. $a = 6{,}9$ м, $b = 11{,}4$ м $h = 5{,}0$ м.
10. $a = 7{,}2$ м, $b = 12{,}0$ м $h = 5{,}0$ м.

Варианты 11–20. Определить работу (в джоулях), совершаемую при подъеме спутника с поверхности Земли на высоту H км. Масса спутника равна m т, радиус Земли $R_З = 6380$ км. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли положить равным 10 м/с².

11. $m = 7{,}0$ т, $H = 200$ км.
12. $m = 7{,}0$ т, $H = 250$ км.
13. $m = 6{,}0$ т, $H = 300$ км.
14. $m = 6{,}0$ т, $H = 350$ км.
15. $m = 5{,}0$ т, $H = 400$ км.
16. $m = 5{,}0$ т, $H = 450$ км.
17. $m = 4{,}0$ т, $H = 500$ км.
18. $m = 4{,}0$ т, $H = 550$ км.
19. $m = 3{,}0$ т, $H = 600$ км.
20. $m = 3{,}0$ т, $H = 650$ км.

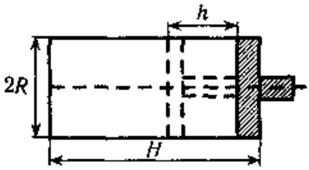

Рис. 4.2

Варианты 21–31. Цилиндр наполнен газом под атмосферным давлением 103,3 кПа. Считая газ идеальным, определить работу (в джоулях) при изотермическом сжатии газа поршнем, переместившимся внутрь цилиндра на h м (рис. 4.2).

Указание. Уравнение состояния газа $pV = \text{const}$, где p — давление, V — объем.

21. $H = 0{,}4$ м, $h = 0{,}35$ м, $R = 0{,}1$ м.
22. $H = 0{,}4$ м, $h = 0{,}3$ м, $R = 0{,}1$ м.
23. $H = 0{,}4$ м, $h = 0{,}2$ м, $R = 0{,}1$ м.
24. $H = 0{,}8$ м, $h = 0{,}7$ м, $R = 0{,}2$ м.
25. $H = 0{,}8$ м, $h = 0{,}6$ м, $R = 0{,}2$ м.
26. $H = 0{,}8$ м, $h = 0{,}4$ м, $R = 0{,}2$ м.
27. $H = 1{,}6$ м, $h = 1{,}4$ м, $R = 0{,}3$ м.
28. $H = 1{,}6$ м, $h = 1{,}2$ м, $R = 0{,}3$ м.
29. $H = 1{,}6$ м, $h = 0{,}8$ м, $R = 0{,}3$ м.
30. $H = 2{,}0$ м, $h = 1{,}5$ м, $R = 0{,}4$ м.
31. $H = 2{,}0$ м, $h = 1{,}0$ м, $R = 0{,}4$ м.

Раздел 5

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 5.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1) Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

2) Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные и приводящиеся к ним.

3) Линейные уравнения первого порядка, уравнение Бернулли.

4) Уравнения в полных дифференциалах.

5) Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка методом изоклин.

6) Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Общее и частное решения. Общий и частный интегралы.

7) Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

8) Линейный дифференциальный оператор, его свойства. Линейное однородное дифференциальное уравнение, свойства его решений.

9) Линейно-зависимые и линейно-независимые системы функций. Необходимое условие линейной зависимости системы функций.

10) Условие линейной независимости решений линейного однородного дифференциального уравнения.

11) Линейное однородное дифференциальное уравнение. Фундаментальная система решений. Структура общего решения.

12) Линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Структура общего решения.

13) Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.

14) Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (случай простых корней характеристического уравнения).

15) Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (случай кратных корней характеристического уравнения).

16) Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод подбора.

§ 5.2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть y_1 — решение дифференциального уравнения $L[y] = 0$. Показать, что введение новой искомой функции $u = y/y_1$ приводит к дифференциальному уравнению, допускающему понижение порядка.

2) Написать уравнение линии, на которой могут находиться точки перегиба графиков решений уравнения $y' = f(x, y)$.

3) Написать уравнение линии, на которой могут находиться точки графиков решений уравнения $y' = f(x, y)$, соответствующие максимумам и минимумам.

Как отличить максимум от минимума?

4) Линейное дифференциальное уравнение останется линейным при замене независимой переменной $x = \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ произвольная, но дифференцируемая достаточное число раз. Доказать это утверждение для линейного дифференциального уравнения второго порядка.

5) Доказать, что линейное дифференциальное уравнение остается линейным при преобразовании искомой функции

$$y = \alpha(x)z + \beta(x).$$

Здесь z — новая искомая функция, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — произвольные, но достаточное число раз дифференцируемые функции.

6) Составить общее решение уравнения $y' + p(x)y = 0$, если известно ненулевое частное решение y_1 этого уравнения.

7) Показать, что произвольные дважды дифференцируемые функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями линейного дифференциального уравнения

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = 0.$$

8) Составить однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, имеющее решения $y_1 = x$, $y_2 = x^2$.

Показать, что функции x и x^2 линейно независимы в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Убедиться в том, что определитель Вронского для этих функций равен нулю в точке $x = 0$. Почему это не противоречит необходимому условию линейной независимости системы решений линейного однородного дифференциального уравнения?

9) Найти общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка, если известны три линейно-независимые частные его решения y_1, y_2 и y_3.

10) Доказать, что для того чтобы любое решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами удовлетворяло условию $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные действительные части.

§ 5.3. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения. (Ответ представить в виде $\psi(x, y) = C$).

1. $4x\,dx - 3y\,dy = 3x^2y\,dy - 2xy^2\,dx$.

2. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$.

3. $\sqrt{4+y^2}\,dx - y\,dy = x^2y\,dy$.

4. $\sqrt{3+y^2}\,dx - y\,dy = x^2y\,dy$.

5. $6x\,dx - 6y\,dy = 2x^2y\,dy - 3xy^2\,dx$.

6. $x\sqrt{3+y^2}\,dx + y\sqrt{2+x^2}\,dy = 0$.

7. $(e^{2x}+5)\,dy + ye^{2x}\,dx = 0$.

8. $y'y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$.

9. $6x\,dx - 6y\,dy = 3x^2y\,dy - 2xy^2\,dx$.

10. $x\sqrt{5+y^2}\,dx + y\sqrt{4+x^2}\,dy = 0$.

11. $y(4+e^x)\,dy - e^x\,dx = 0.$
12. $\sqrt{4-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0.$
13. $2x\,dx - 2y\,dy = x^2y\,dy - 2xy^2\,dx.$
14. $x\sqrt{4+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0.$
15. $(e^x+8)\,dy - ye^x\,dx = 0.$
16. $\sqrt{5+y^2} + y'y\sqrt{1-x^2} = 0.$
17. $6x\,dx - y\,dy = yx^2\,dy - 3xy^2\,dx.$
18. $y\ln y + xy' = 0.$
19. $(1+e^x)y' = ye^x.$
20. $\sqrt{1-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0.$
21. $6x\,dx - 2y\,dy = 2yx^2\,dy - 3xy^2\,dx.$
22. $y(1+\ln y) + xy' = 0.$
23. $(3+e^x)yy' = e^x.$
24. $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2}\,yy' = 0.$
25. $x\,dx - y\,dy = yx^2\,dy - xy^2\,dx.$
26. $\sqrt{5+y^2}\,dx + 4(x^2y+y)\,dy = 0.$
27. $(1+e^x)yy' = e^x.$
28. $3(x^2y+y)\,dy + \sqrt{2+y^2}\,dx = 0.$
29. $2x\,dx - y\,dy = yx^2\,dy - xy^2\,dx.$
30. $2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2}\,y' = 0.$
31. $20x\,dx - 3y\,dy = 3x^2y\,dy - 5xy^2\,dx.$

Задача 2. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

1. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2.$
2. $xy' = \frac{3y^3+2yx^2}{2y^2+x^2}.$
3. $y' = \frac{x+y}{x-y}.$
4. $xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y.$
5. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3.$
6. $xy' = \frac{3y^3+4yx^2}{2y^2+2x^2}.$
7. $y' = \frac{x+2y}{2x-y}.$
8. $xy' = 2\sqrt{x^2+y^2} + y.$
9. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4.$
10. $xy' = \frac{3y^3+6yx^2}{2y^2+3x^2}.$
11. $y' = \frac{x^2+xy-y^2}{x^2-2xy}.$
12. $xy' = \sqrt{2x^2+y^2} + y.$
13. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6.$
14. $xy' = \frac{3y^3+8yx^2}{2y^2+4x^2}.$
15. $y' = \frac{x^2+2xy-y^2}{2x^2-2xy}.$
16. $xy' = 3\sqrt{x^2+y^2} + y.$
17. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8.$
18. $xy' = \frac{3y^3+10yx^2}{2y^2+5x^2}.$
19. $y' = \frac{x^2+3xy-y^2}{3x^2-2xy}.$
20. $xy' = 3\sqrt{2x^2+y^2} + y.$

21. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12$.
22. $xy' = \frac{3y^3+12yx^2}{2y^2+6x^2}$.
23. $y' = \frac{x^2+xy-3y^2}{x^2-4xy}$.
24. $xy' = 2\sqrt{3x^2+y^2} + y$.
25. $4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5$.
26. $xy' = \frac{3y^3+14yx^2}{2y^2+7x^2}$.
27. $y' = \frac{x^2+xy-5y^2}{x^2-6xy}$.
28. $xy' = 4\sqrt{x^2+y^2} + y$.
29. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10$.
30. $xy' = 4\sqrt{2x^2+y^2} + y$.
31. $y' = \frac{x^2+2xy-5y^2}{2x^2-6xy}$.

Задача 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

1. $y' = \frac{x+2y-3}{2x-2}$.
2. $y' = \frac{x+y-2}{2x-2}$.
3. $y' = \frac{3y-x-4}{3x+3}$.
4. $y' = \frac{2y-2}{x+y-2}$.
5. $y' = \frac{x+y-2}{3x-y-2}$.
6. $y' = \frac{2x+y-3}{x-1}$.
7. $y' = \frac{x+7y-8}{9x-y-8}$.
8. $y' = \frac{x+3y+4}{3x-6}$.
9. $y' = \frac{3y+3}{2x+y-1}$.
10. $y' = \frac{x+2y-3}{4x-y-3}$.
11. $y' = \frac{x-2y+3}{-2x-2}$.
12. $y' = \frac{x+8y-9}{10x-y-9}$.
13. $y' = \frac{2x+3y-5}{5x-5}$.
14. $y' = \frac{4y-8}{3x+2y-7}$.
15. $y' = \frac{x+3y-4}{5x-y-4}$.
16. $y' = \frac{y-2x+3}{x-1}$.
17. $y' = \frac{x+2y-3}{x-1}$.
18. $y' = \frac{3x+2y-1}{x+1}$.
19. $y' = \frac{5y+5}{4x+3y-1}$.
20. $y' = \frac{x+4y-5}{6x-y-5}$.
21. $y' = \frac{x+y+2}{x+1}$.
22. $y' = \frac{2x+y-3}{4x-4}$.
23. $y' = \frac{2x+y-3}{2x-2}$.
24. $y' = \frac{y}{2x+2y-2}$.
25. $y' = \frac{x+5y-6}{7x-y-6}$.
26. $y' = \frac{x+y-4}{x-2}$.
27. $y' = \frac{2x+y-1}{2x-2}$.
28. $y' = \frac{3y-2x+1}{3x+3}$.
29. $y' = \frac{6y-6}{5x+4y-9}$.
30. $y' = \frac{x+6y-7}{8x-y-7}$.
31. $y' = \frac{y+2}{2x+y-4}$.

Задача 4. Найти решение задачи Коши.

1. $y' - \frac{y}{x} = x^2$, $y(1) = 0$.
2. $y' - y\operatorname{ctg} x = 2x\sin x$, $y(\pi/2) = 0$.
3. $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, $y(0) = 0$.
4. $y' + y\operatorname{tg} x = \cos^2 x$, $y(\pi/4) = \frac{1}{2}$.
5. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x$, $y(-1) = \frac{3}{2}$.
6. $y' - \frac{1}{x+1}y = e^x(x+1)$, $y(0) = 1$.
7. $y' - \frac{y}{x} = x\sin x$, $y(\pi/2) = 1$.
8. $y' + \frac{y}{x} = \sin x$, $y(\pi) = \frac{1}{\pi}$.
9. $y' + \frac{y}{2x} = x^2$, $y(1) = 1$.
10. $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2}$, $y(0) = \frac{2}{3}$.
11. $y' - \frac{2x-5}{x^2}y = 5$, $y(2) = 4$.

12. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}e^x$, $y(1) = e$.
13. $y' - \frac{y}{x} = -2\frac{\ln x}{x}$, $y(1) = 1$.
14. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}$, $y(1) = 4$.
15. $y' + \frac{2}{x}y = x^3$, $y(1) = -\frac{5}{6}$.
16. $y' + \frac{y}{x} = 3x$, $y(1) = 1$.
17. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$, $y(1) = 3$.
18. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$, $y(1) = 1$.
19. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}$, $y(1) = 1$.
20. $y' + 2xy = -2x^3$, $y(1) = e^{-1}$.
21. $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}$, $y(0) = \frac{2}{3}$.
22. $y' + xy = -x^3$, $y(0) = 3$.
23. $y' - \frac{2}{x+1}y = e^x(x+1)^2$, $y(0) = 1$.
24. $y' + 2xy = xe^{-x^2}\sin x$, $y(0) = 1$.
25. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$, $y(0) = \frac{1}{2}$.
26. $y' - y\cos x = -\sin 2x$, $y(0) = 3$.
27. $y' - 4xy = -4x^3$, $y(0) = -\frac{1}{2}$.
28. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}$, $y(1) = 1$.
29. $y' - 3x^2y = \frac{x^2(1+x^3)}{3}$, $y(0) = 0$.
30. $y' - y\cos x = \sin 2x$, $y(0) = -1$.
31. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}$, $y(1) = 1$.

Задача 5. Решить задачу Коши.

1. $y^2\,dx + (x + e^{2/y})\,dy = 0$, $y|_{x=e} = 2$.
2. $(y^4e^y + 2x)y' = y$, $y|_{x=0} = 1$.
3. $y^2\,dx + (xy - 1)\,dy = 0$, $y|_{x=1} = e$.
4. $2(4y^2 + 4y - x)y' = 1$, $y|_{x=0} = 0$.
5. $(\cos 2y\cos^2 y - x)y' = \sin y\cos y$, $y|_{x=1/4} = \pi/3$.
6. $(x\cos^2 y - y^2)y' = y\cos^2 y$, $y|_{x=\pi} = \pi/4$.
7. $e^{y^2}(dx - 2xy\,dy) = y\,dy$, $y|_{x=0} = 0$.
8. $(104y^3 - x)y' = 4y$, $y|_{x=8} = 1$.
9. $dx + (xy - y^3)\,dy = 0$, $y|_{x=-1} = 0$.
10. $(3y\cos 2y - 2y^2\sin 2y - 2x)y' = y$, $y|_{x=16} = \pi/4$.
11. $8(4y^3 + xy - y)y' = 1$, $y|_{x=0} = 0$.
12. $(2\ln y - \ln^2 y)\,dy = y\,dx - x\,dy$, $y|_{x=4} = e^2$.

13. $2(x+y^4)y' = y$, $y\big|_{x=-2} = -1$.
14. $y^3(y-1)\,dx + 3xy^2(y-1)\,dy = (y+2)\,dy$, $y\big|_{x=1/4} = 2$.
15. $2y^2\,dx + (x+e^{1/y})\,dy = 0$, $y\big|_{x=e} = 1$.
16. $(xy+\sqrt{y})\,dy + y^2\,dx = 0$, $y\big|_{x=-1/2} = 4$.
17. $\sin 2y\,dx = (\sin^2 2y - 2\sin^2 y + 2x)\,dy$, $y\big|_{x=-1/2} = \pi/4$.
18. $(y^2+2y-x)y' = 1$, $y\big|_{x=2} = 0$.
19. $2y\sqrt{y}\,dx - (6x\sqrt{y}+7)\,dy = 0$, $y\big|_{x=-4} = 1$.
20. $dx = (\sin y + 3\cos y + 3x)\,dy$, $y\big|_{x=e^{\pi/2}} = \pi/2$.
21. $2(\cos^2 y\cdot\cos 2y - x)y' = \sin 2y$, $y\big|_{x=3/2} = 5\pi/4$.
22. $\operatorname{ch} y\,dx = (1+x\operatorname{sh} y)\,dy$, $y\big|_{x=1} = \ln 2$.
23. $(13y^3 - x)y' = 4y$, $y\big|_{x=5} = 1$.
24. $y^2(y^2+4)\,dx + 2xy(y^2+4)\,dy = 2dy$, $y\big|_{x=\pi/8} = 2$.
25. $(x+\ln^2 y - \ln y)y' = \frac{y}{2}$, $y\big|_{x=2} = 1$.
26. $(2xy+\sqrt{y})\,dy + 2y^2\,dx = 0$, $y\big|_{x=-1/2} = 1$.
27. $y\,dx + (2x - 2\sin^2 y - y\sin 2y)\,dy = 0$, $y\big|_{x=3/2} = \pi/4$.
28. $2(y^3 - y + xy)\,dy = dx$, $y\big|_{x=-2} = 0$.
29. $(2y + x\operatorname{tg} y - y^2\operatorname{tg} y)\,dy = dx$, $y\big|_{x=0} = \pi$.
30. $4y^2\,dx + (e^{\frac{1}{2y}} + x)\,dy = 0$, $y\big|_{x=e} = \frac{1}{2}$.
31. $dx + (2x + \sin 2y - 2\cos^2 y)\,dy = 0$, $y\big|_{x=-1} = 0$.

Задача 6. Найти решение задачи Коши.

1. $y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2$, $y(0) = 1$.
2. $xy' + y = 2y^2\ln x$, $y(1) = \frac{1}{2}$.
3. $2(xy' + y) = xy^2$, $y(1) = 2$.
4. $y' + 4x^3y = 4(x^3+1)e^{-4x}y^2$, $y(0) = 1$.
5. $xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x$, $y(1) = 1$.
6. $2(y' + xy) = (1+x)e^{-x}y^2$, $y(0) = 2$.
7. $3(xy' + y) = y^2\ln x$, $y(1) = 3$.
8. $2y' + y\cos x = y^{-1}\cos x(1+\sin x)$, $y(0) = 1$.
9. $y' + 4x^3y = 4y^2e^{4x}(1-x^3)$, $y(0) = -1$.
10. $3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}$, $y(0) = -1$.
11. $2xy' - 3y = -(5x^2+3)y^3$, $y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
12. $3xy' + 5y = (4x-5)y^4$, $y(1) = 1$.
13. $2y' + 3y\cos x = e^{2x}(2+3\cos x)y^{-1}$, $y(0) = 1$.

14. $3(xy' + y) = xy^2$, $y(1) = 3$.
15. $y' - y = 2xy^2$, $y(0) = \frac{1}{2}$.
16. $2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3$, $y(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
17. $y' + 2xy = 2x^3y^3$, $y(0) = \sqrt{2}$.
18. $xy' + y = y^2 \ln x$, $y(1) = 1$.
19. $2y' + 3y\cos x = (8 + 12\cos x)e^{2x}y^{-1}$, $y(0) = 2$.
20. $4y' + x^3y = (x^3 + 8)e^{-2x}y^2$, $y(0) = 1$.
21. $8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3$, $y(1) = \sqrt{2}$.
22. $2(y' + y) = xy^2$, $y(0) = 2$.
23. $y' + xy = (x - 1)e^x y^2$, $y(0) = 1$.
24. $2y' - 3y\cos x = -e^{-2x}(2 + 3\cos x)y^{-1}$, $y(0) = 1$.
25. $y' - y = xy^2$, $y(0) = 1$.
26. $2(xy' + y) = y^2 \ln x$, $y(1) = 2$.
27. $y' + y = xy^2$, $y(0) = 1$.
28. $y' + 2y \operatorname{cth} x = y^2 \operatorname{ch} x$, $y(1) = \frac{1}{\operatorname{sh} 1}$.
29. $2(y' + xy) = (x - 1)e^x y^2$, $y(0) = 2$.
30. $y' - y \operatorname{tg} x = -\left(\frac{2}{3}\right) y^4 \sin x$, $y(0) = 1$.
31. $xy' + y = xy^2$, $y(1) = 1$.

Задача 7. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

1. $3x^2e^y\,dx + (x^3e^y - 1)\,dy = 0$.
2. $\left(3x^2 + \frac{2}{y}\cos\frac{2x}{y}\right)\,dx - \frac{2x}{y^2}\cos\frac{2x}{y}dy = 0$.
3. $(3x^2 + 4y^2)\,dx + (8xy + e^y)\,dy = 0$.
4. $\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right)\,dx - \left(2x - \frac{1}{x}\right)\,dy = 0$.
5. $y^2 + y\sec^2 x)\,dx + (2xy + \operatorname{tg} x)\,dy = 0$.
6. $(3x^2y + 2y + 3)\,dx + (x^3 + 2x + 3y^2)\,dy = 0$.
7. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\,dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)\,dy = 0$.
8. $\left(\sin 2x - 2\cos(x + y)\right)\,dx - 2\cos(x + y)\,dy = 0$.
9. $\left(xy^2 + \frac{x}{y^2}\right)\,dx + \left(x^2y - \frac{x^2}{y^3}\right)\,dy = 0$.
10. $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right)\,dx - \frac{2y}{x^3}dy = 0$.
11. $\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx - \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} + 2y\right)\,dy = 0$.
12. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right)dx + \left(x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy = 0$.
13. $\frac{1+xy}{x^2y}dx + \frac{1-xy}{xy^2}dy = 0$.
14. $\frac{dx}{y} - \frac{x+y^2}{y^2}dy = 0$.

15. $\frac{y}{x^2}dx - \frac{xy+1}{x}dy = 0$.
16. $\left(xe^x + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}dy = 0$.
17. $\left(10xy - \frac{1}{\sin y}\right)dx + \left(5x^2 + \frac{x\cos y}{\sin^2 y} - y^2\sin y^3\right)dy = 0$.
18. $\left(\frac{y}{x^2+y^2} + e^x\right)dx - \frac{x\,dy}{x^2+y^2} = 0$.
19. $e^y dx + (\cos y + xe^y)dy = 0$.
20. $(y^3 + \cos x)dx + (3xy^2 + e^y)dy = 0$.
21. $xe^{y^2}dx + (x^2ye^{y^2} + \mathrm{tg}^2 y)dy = 0$.
22. $(5xy^2 - x^3)dx + (5x^2y - y)dy = 0$.
23. $\left(\cos(x + y^2) + \sin x\right)dx + 2y\cos(x + y^2)dy = 0$.
24. $(x^2 - 4xy - 2y^2)dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)dy = 0$.
25. $\left(\sin y + y\sin x + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right)dy = 0$.
26. $\left(1 + \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\right)dx + \left(1 - \frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\right)dy = 0$.
27. $\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2} = 0$.
28. $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0$.
29. $(3x^3 + 6x^2y + 3xy^2)dx + (2x^3 + 3x^2y)dy = 0$.
30. $xy^2dx + y(x^2 + y^2)dy = 0$.
31. $\frac{x\,dx+y\,dy+(x\,dy-y\,dx)}{(x^2+y^2)} = 0$.

Задача 8. Для данного дифференциального уравнения методом изоклин построить интегральную кривую, проходящую через точку M.

1. $y' = y - x^2$, $M(1,2)$.
2. $yy' = -2x$, $M(0,5)$.
3. $y' = 2 + y^2$, $M(1,2)$.
4. $y' = \frac{2x}{3y}$, $M(1,1)$.
5. $y' = (y-1)x$, $M(1,\frac{3}{2})$.
6. $yy' + x = 0$, $M(-2,-3)$.
7. $y' = 3 + y^2$, $M(1,2)$.
8. $xy' = 2y$, $M(2,3)$.
9. $y'(x^2+2) = y$, $M(2,2)$.
10. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$, $M(2,1)$.
11. $y' = y - x$, $M\left(\frac{9}{2},1\right)$.
12. $y' = x^2 - y$, $M\left(1,\frac{1}{2}\right)$.
13. $y' = xy$, $M(0,-1)$.
14. $y' = xy$, $M(0,1)$.
15. $yy' = -\frac{x}{2}$, $M(4,2)$.
16. $2(y + y') = x + 3$, $M\left(1,\frac{1}{2}\right)$
17. $y' = x + 2y$, $M(3,0)$.
18. $xy' = 2y$, $M(1,3)$.
19. $3yy' = x$, $M(-3,-2)$.
20. $y' = y - x^2$, $M(-3,4)$.
21. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$, $M(-2,1)$.
22. $y' = x^2 - y$, $M\left(2,\frac{3}{2}\right)$.
23. $y' = y - x$, $M(2,1)$.
24. $yy' = -x$, $M(2,3)$.
25. $y' = y - x$, $M(4,2)$.
26. $3yy' = x$, $M(1,1)$.

27. $y' = x^2 - y$, $M(0,1)$.
28. $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$, $M(1,3)$.
29. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$, $M(-2,-1)$.
30. $y' = x(y-1)$, $M\left(1,\frac{1}{2}\right)$.
31. $y' = x + 2y$, $M(1,2)$.

Задача 9. Найти линию, проходящую через точку M_0 и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M нормальный вектор $\overline{MN}$ с концом на оси Oy имеет длину, равную a, и образует острый угол с положительным направлением оси Oy.

1. $M_0(15,1)$, $a = 25$.
2. $M_0(12,2)$, $a = 20$.
3. $M_0(9,3)$, $a = 15$.
4. $M_0(6,4)$, $a = 10$.
5. $M_0(3,5)$, $a = 5$.

Найти линию, проходящую через точку M_0, если отрезок любой ее нормали, заключенный между осями координат, делится точкой линии в отношении $a : b$ (считая от оси Oy).

6. $M_0(1,1)$, $a : b = 1 : 2$.
7. $M_0(-2,3)$, $a : b = 1 : 3$.
8. $M_0(0,1)$, $a : b = 2 : 3$.
9. $M_0(1,0)$, $a : b = 3 : 2$.
10. $M_0(2,-1)$, $a : b = 3 : 1$.

Найти линию, проходящую через точку M_0, если отрезок любой ее касательной между точкой касания и осью Oy делится в точке пересечения с осью абсцисс в отношении $a : b$ (считая от оси Oy).

11. $M_0(2,-1)$, $a : b = 1 : 1$.
12. $M_0(1,2)$, $a : b = 2 : 1$.
13. $M_0(-1,1)$, $a : b = 3 : 1$.
14. $M_0(2,1)$, $a : b = 1 : 2$.
15. $M_0(1,-1)$, $a : b = 1 : 3$.

Найти линию, проходящую через точку M_0, если отрезок любой ее касательной, заключенный между осями координат, делится в точке касания в отношении $a : b$ (считая от оси Oy).

16. $M_0(1,2)$, $a : b = 1 : 1$.
17. $M_0(2,1)$, $a : b = 1 : 2$.
18. $M_0(1,3)$, $a : b = 2 : 1$.
19. $M_0(2,-3)$, $a : b = 3 : 1$.
20. $M_0(3,-1)$, $a : b = 3 : 2$.

Найти линию, проходящую через точку M_0 и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M касательный вектор $\overrightarrow{MN}$ с концом на оси Ox имеет проекцию на ось Ox, обратно пропорциональную абсциссе точки M. Коэффициент пропорциональности равен a.

21. $M_0(1, e)$, $a = -\frac{1}{2}$.
22. $M_0(2, e)$, $a = -2$.
23. $M_0(-1, \sqrt{e})$, $a = -1$.
24. $M_0\left(2, \frac{1}{e}\right)$, $a = 2$.
25. $M_0\left(1, \frac{1}{e^2}\right)$, $a = \frac{1}{4}$.

Найти линию, проходящую через точку M_0 и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M касательный вектор $\overrightarrow{MN}$ с концом на оси Oy имеет проекцию на ось Oy, равную a.

26. $M_0(1, 2)$, $a = -1$.
27. $M_0(1, 4)$, $a = 2$.
28. $M_0(1, 5)$, $a = -2$.
29. $M_0(1, 3)$, $a = -4$.
30. $M_0(1, 6)$, $a = 3$.
31. $M_0(1, 1)$, $a = 1$.

Задача 10. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y''' x \ln x = y''$.
2. $xy''' + y'' = 1$.
3. $2xy''' = y''$.
4. $xy''' + y'' = x + 1$.
5. $\operatorname{tg} x \cdot y'' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0$.
6. $x^2 y'' + xy' = 1$.
7. $y''' \operatorname{ctg} 2x + 2y'' = 0$.
8. $x^3 y''' + x^2 y'' = 1$.
9. $\operatorname{tg} x \cdot y''' = 2y''$.
10. $y''' \operatorname{cth} 2x = 2y''$.
11. $x^4 y'' + x^3 y' = 1$.
12. $xy''' + 2y'' = 0$.
13. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3$.
14. $x^5 y''' + x^4 y'' = 1$.
15. $xy''' - y'' + \frac{1}{x} = 0$.
16. $xy''' + y'' + x = 0$.
17. $\operatorname{th} x \cdot y^{\mathrm{IV}} = y'''$.
18. $xy''' + y'' = \sqrt{x}$.
19. $y''' \operatorname{tg} x = y'' + 1$.
20. $y''' \operatorname{tg} 5x = 5y''$.
21. $y''' \operatorname{th} 7x = 7y''$.
22. $x^3 y''' + x^2 y'' = \sqrt{x}$.
23. $\operatorname{cth} x \cdot y'' - y' + \frac{1}{\operatorname{ch} x} = 0$.
24. $(x + 1)y''' + y'' = (x + 1)$.
25. $(1 + \sin x)y''' = \cos x \cdot y''$.
26. $xy''' + y'' = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

27. $-xy''' + 2y'' = \frac{2}{x^2}$.
28. $\operatorname{cth} x \cdot y'' + y' = \operatorname{ch} x$.
29. $x^4y'' + x^3y' = 4$.
30. $y'' + \frac{2x}{x^2+1}y' = 2x$.
31. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 12x^3$.

Задача 11. Найти решение задачи Коши.

1. $4y^3y'' = y^4 - 1$, $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = 1/(2\sqrt{2})$.
2. $y'' = 128y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 8$.
3. $y''y^3 + 64 = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$.
4. $y'' + 2\sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
5. $y'' = 32\sin^3 y \cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 4$.
6. $y'' = 98y^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 7$.
7. $y''y^3 + 49 = 0$, $y(3) = -7$, $y'(3) = -1$.
8. $4y^3y'' = 16y^4 - 1$, $y(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
9. $y'' + 8\sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
10. $y'' = 72y^3$, $y(2) = 1$, $y'(2) = 6$.
11. $y''y^3 + 36 = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.
12. $y'' = 18\sin^3 y \cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 3$.
13. $4y^3y'' = y^4 - 16$, $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
14. $y'' = 50y^3$, $y(3) = 1$, $y'(3) = 5$.
15. $y''y^3 + 25 = 0$, $y(2) = -5$, $y'(2) = -1$.
16. $y'' + 18\sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.
17. $y'' = 8\sin^3 y \cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 2$.
18. $y'' = 32y^3$, $y(4) = 1$, $y'(4) = 4$.
19. $y''y^3 + 16 = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 2$.
20. $y'' + 32\sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.
21. $y'' + 50\sin^3 y \cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 5$.
22. $y'' = 18y^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$.
23. $y''y^3 + 9 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$.
24. $y^3y'' = 4(y^4 - 1)$, $y(0) = \sqrt{2}, y'(0) = \sqrt{2}$.
25. $y'' + 50\sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$.
26. $y'' = 8y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
27. $y''y^3 + 4 = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -2$.
28. $y'' = 2\sin^3 y \cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 1$.
29. $y^3y'' = y^4 - 16$, $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.
30. $y'' = 2y^3$, $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 1$.
31. $y''y^3 + 1 = 0$, $y(1) = -1$, $y'(1) = -1$.

Задача 12. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$.
2. $y''' - y'' = 6x^2 + 3x$.
3. $y''' - y' = x^2 + x$.
4. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x$.
5. $y^{IV} - y''' = 5(x+2)^2$.
6. $y^{IV} - 2y''' + y'' = 2x(1-x)$.
7. $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1$.
8. $y^{V} - y^{IV} = 2x + 3$.
9. $3y^{IV} + y''' = 6x - 1$.
10. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 4x^2$.
11. $y''' + y'' = 5x^2 - 1$.
12. $y^{IV} + 4y''' + 4y'' = x - x^2$.
13. $7y''' - y'' = 12x$.
14. $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x$.
15. $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1$.
16. $y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2$.
17. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3$.
18. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x$.
19. $y''' - 4y'' = 32 - 384x^2$.
20. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2$.
21. $y''' + y'' = 49 - 24x^2$.
22. $y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4$.
23. $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1$.
24. $y^{IV} + y''' = x$.
25. $y''' - y'' = 6x + 5$.
26. $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3$.
27. $y''' - 5y'' + 6y' = (x-1)^2$.
28. $y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1$.
29. $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39$.
30. $y^{IV} + y''' = 12x + 6$.
31. $y''' - 5y'' + 6y' = 6x^2 + 2x - 5$.

Задача 13. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}$.
2. $y''' - 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{x}$.

3. $y''' - y'' - y' + y = (3x+7)e^{2x}$.
4. $y''' - 2y'' + y' = (2x+5)e^{2x}$.
5. $y''' - 3y'' + 4y = (18x-21)e^{-x}$.
6. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x-5)e^{x}$.
7. $y''' - 4y'' + 4y' = (x-1)e^{x}$.
8. $y''' + 2y'' + y' = (18x+21)e^{2x}$.
9. $y''' + y'' - y' - y = (8x+4)e^{x}$.
10. $y''' - 3y' - 2y = -4xe^{x}$.
11. $y''' - 3y' + 2y = (4x+9)e^{2x}$.
12. $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (12x+16)e^{x}$.
13. $y''' - y'' - 2y' = (6x-11)e^{-x}$.
14. $y''' + y'' - 2y' = (6x+5)e^{x}$.
15. $y''' + 4y'' + 4y' = (9x+15)e^{x}$.
16. $y''' - 3y'' - y' + 3y = (4-8x)e^{x}$.
17. $y''' - y'' - 4y' + 4y = (7-6x)e^{x}$.
18. $y''' + 3y'' + 2y' = (1-2x)e^{-x}$.
19. $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = (20-16x)e^{-x}$.
20. $y''' - 4y'' + 3y' = -4xe^{x}$.
21. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = e^{-x}(32x-32)$.
22. $y''' - 6y'' + 9y' = 4xe^{x}$.
23. $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = (8x-12)e^{x}$.
24. $y''' - y'' - 5y' - 3y = -(8x+4)e^{x}$.
25. $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x+20)e^{x}$.
26. $y''' - 2y'' - 3y' = (8x-14)e^{-x}$.
27. $y''' + 2y'' - 3y' = (8x+6)e^{x}$.
28. $y''' + 6y'' + 9y' = (16x+24)e^{x}$.
29. $y''' - y'' - 9y' + 9y = (12-16x)e^{x}$.
30. $y''' + 4y'' + 3y' = 4(1-x)e^{-x}$.
31. $y''' + y'' - 6y' = (20x+14)e^{2x}$.

Задача 14. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y'' + 2y' = 4e^{x}(\sin x + \cos x)$.
2. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 6x$.
3. $y'' + 2y' = -2e^{x}(\sin x + \cos x)$.
4. $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x$.
5. $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$.
6. $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(5\sin x - 3\cos x)$.

7. $y'' + 2y' = e^x(\sin x + \cos x)$.
8. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 3x$.
9. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 4x$.
10. $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x$.
11. $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x$.
12. $y'' - 4y' + 8y = e^x(-3\sin x + 4\cos x)$.
13. $y'' + 2y' = 10e^x(\sin x + \cos x)$.
14. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 5x$.
15. $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x$.
16. $y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x$.
17. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos x$.
18. $y'' - 4y' + 8y = e^x(3\sin x + 5\cos x)$.
19. $y'' + 2y' = 6e^x(\sin x + \cos x)$.
20. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 4x$.
21. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 5x$.
22. $y'' + y = 2\cos 7x - 3\sin 7x$.
23. $y'' + 2y' + 5y = -\cos x$.
24. $y'' - 4y' + 8y = e^x(2\sin x - \cos x)$.
25. $y'' + 2y' = 3e^x(\sin x + \cos x)$.
26. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 4x$.
27. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 8x$.
28. $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x$.
29. $y'' + y = 2\cos 4x + 3\sin 4x$.
30. $y'' - 4y' + 8y = e^x(-\sin x + 2\cos x)$.
31. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 6x$.

Задача 15. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y'' = 2y' = 2\,\mathrm{ch}\, 2x$.
2. $y'' + y = 2\sin x - 6\cos x + 2e^x$.
3. $y''' - y' = 2e^x + \cos x$.
4. $y'' - 3y' = 2\,\mathrm{ch}\, 3x$.
5. $y'' + 4y = -8\sin 2x + 32\cos 2x + 4e^{2x}$.
6. $y''' - y' = 10\sin x + 6\cos x + 4e^x$.
7. $y'' - 4y' = 16\,\mathrm{ch}\, 4x$.
8. $y'' + 9y = -18\sin 3x - 18e^{3x}$.
9. $y''' - 4y' = 24e^{2x} - 4\cos 2x + 8\sin 2x$.
10. $y'' - 5y' = 50\,\mathrm{ch}\, 5x$.

11. $y'' + 16y = 16\cos 4x - 16e^{4x}$.
12. $y''' - 9y' = -9e^{3x} + 18\sin 3x - 9\cos 3x$.
13. $y'' - y' = 2\operatorname{ch} x$.
14. $y'' + 25y = 20\cos 5x - 10\sin 5x + 50e^{5x}$.
15. $y''' - 16y' = 48e^{4x} + 64\cos 4x - 64\sin 4x$.
16. $y'' + 2y' = 2\operatorname{sh} 2x$.
17. $y'' + 36y = 24\sin 6x - 12\cos 6x + 36e^{6x}$.
18. $y''' - 25y' = 25(\sin 5x + \cos 5x) - 50e^{5x}$.
19. $y'' + 3y' = 2\operatorname{sh} 3x$.
20. $y'' + 49y = 14\sin 7x + 7\cos 7x - 98e^{7x}$.
21. $y''' - 36y' = 36e^{6x} - 72(\cos 6x + \sin 6x)$.
22. $y'' + 4y' = 16\operatorname{sh} 4x$.
23. $y'' + 64y = 16\sin 8x - 16\cos 8x - 64e^{8x}$.
24. $y''' - 49y' = 14e^{7x} - 49(\cos 7x + \sin 7x)$.
25. $y'' + 5y' = 50\operatorname{sh} 5x$.
26. $y'' + 81y = 9\sin 9x + 3\cos 9x + 162e^{9x}$.
27. $y''' - 64y' = 128\cos 8x - 64e^{8x}$.
28. $y'' + y' = 2\operatorname{sh} x$.
29. $y'' + 100y = 20\sin 10x - 30\cos 10x - 200e^{10x}$.
30. $y''' - 81y' = 162\cdot e^{9x} + 81\sin 9x$.
31. $y''' - 100y' = 20e^{10x} + 100\cos 10x$.

Задача 16. Найти решение задачи Коши.

1. $y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\cos \pi x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.
2. $y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1+e^{3x}}$, $y(0) = \ln 4$, $y'(0) = 3(1 - \ln 2)$.
3. $y'' + 4y = 8\operatorname{ctg} 2x$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$.
4. $y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{1+e^{-2x}}$, $y(0) = 1 + 2\ln 2$, $y'(0) = 6\ln 2$.
5. $y'' - 9y' + 18y = \frac{9e^{3x}}{1+e^{-3x}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
6. $y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\sin \pi x}$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2}$.
7. $y'' + \frac{1}{\pi^2} y = \frac{1}{\pi^2 \cos(x/\pi)}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.
8. $y'' - 3y' = \frac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}}$, $y(0) = 4\ln 4$, $y'(0) = 3(3\ln 4 - 1)$.
9. $y'' + y = 4\operatorname{ctg} x$, $y(\pi/2) = 4$, $y'(\pi/2) = 4$.
10. $y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{2+e^{-2x}}$, $y(0) = 1 + 3\ln 3$, $y'(0) = 10\ln 3$.
11. $y'' + 6y' + 8y = \frac{4e^{-2x}}{2+e^{2x}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
12. $y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x}$, $y(\pi/6) = 4$, $y'(\pi/6) = 3\pi/2$.

13. $y'' + 9y = \frac{9}{\cos 3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
14. $y'' - y' = \frac{e^{-x}}{2+e^{-x}}$, $y(0) = \ln 27$, $y'(0) = \ln 9 - 1$.
15. $y'' + 4y = 4\operatorname{ctg} 2x$, $y(\pi/4) = 3$, $y'(\pi/4) = 2$.
16. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{3+e^{-x}}$, $y(0) = 1 + 8\ln 2$, $y'(0) = 14\ln 2$.
17. $y'' - 6y' + 8y = \frac{4e^{2x}}{1+e^{-2x}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
18. $y'' + 16y = \frac{16}{\sin 4x}$, $y(\pi/8) = 3$, $y'(\pi/8) = 2\pi$.
19. $y'' + 16y = \frac{16}{\cos 4x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.
20. $y'' - 2y' = \frac{4e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$, $y(0) = \ln 4$, $y'(0) = \ln 4 - 2$.
21. $y'' + \frac{y}{4} = \frac{1}{4}\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)$, $y(\pi) = 2$, $y'(\pi) = \frac{1}{2}$.
22. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2+e^{-x}}$, $y(0) = 1 + 3\ln 3$, $y'(0) = 5\ln 3$.
23. $y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-x}}{2+e^{x}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
24. $y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x}$, $y(\pi/4) = 2$, $y'(\pi/4) = \pi$.
25. $y'' + 4y = \frac{4}{\cos 2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.
26. $y'' + y' = \frac{e^{x}}{2+e^{x}}$, $y(0) = \ln 27$, $y'(0) = 1 - \ln 9$.
27. $y'' + y = 2\operatorname{ctg} x$, $y(\pi/2) = 1$, $y'(\pi/2) = 2$.
28. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}}$, $y(0) = 1 + 2\ln 2$, $y'(0) = 3\ln 2$.
29. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{x}}{1+e^{-x}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
30. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$, $y(\pi/2) = 1$, $y'(\pi/2) = \pi/2$.
31. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Раздел 6

РЯДЫ

§ 6.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1) Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости ряда.

2) Теоремы сравнения.

3) Признаки Даламбера и Коши.

4) Интегральный признак сходимости ряда.

5) Теорема Лейбница. Оценка остатка знакочередующегося ряда.

6) Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

7) Понятие равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса.

8) Теорема о непрерывности суммы функционального ряда.

9) Теоремы о почленном интегрировании и почленном дифференцировании функционального ряда.

10) Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.

11) Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. Непрерывность суммы ряда.

12) Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

13) Разложение функции в степенной ряд. Ряд Тейлора.

14) Разложение по степеням x бинома $(1+x)^m$.

15) Условия разложимости функции в ряд Тейлора.

16) Разложение по степеням x функций e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$.

§ 6.2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1) Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, если $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$.

Указание. Рассмотреть неравенства $0 \leqslant c_n - a_n \leqslant b_n - a_n$.

2) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geqslant 0)$ сходится. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ тоже сходится. Показать, что обратное утверждение неверно.

3) Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n||b_n|$ тоже сходится.

Указание. Доказать и использовать неравенство $|ab| \leqslant a^2 + b^2$.

4) Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ тоже сходится.

5) Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Можно ли утверждать, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$?

Рассмотреть пример

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right).$$

6) Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ также сходится равномерно на этом отрезке.

7) Может ли функциональный ряд на отрезке:

а) сходиться равномерно и не сходиться абсолютно,

б) сходиться абсолютно и не сходиться равномерно?

Рассмотреть примеры:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + x^2}$, отрезок $[a, b]$ произвольный;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x(1 - x)^n$, отрезок $[0, 1]$.

8) Показать, что функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{10^n}$$

всюду непрерывна.

9) Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}$ сходится равномерно в интервале $(-\infty, +\infty)$. Можно ли его почленно дифференцировать в этом интервале?

10) Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-nx}$ сходится в точке x_0, то он сходится абсолютно $\forall x > x_0$.

§ 6.3. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1. Найти сумму ряда.

1. $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 14n + 48}$.
2. $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{18}{n^2 - 13n + 40}$.
3. $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{4}{n^2 - 12n + 35}$.
4. $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{36}{n^2 - 11n + 28}$.
5. $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{6}{n^2 - 10n + 24}$.
6. $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{54}{n^2 - 9n + 18}$.
7. $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{8}{n^2 - 8n + 15}$.
8. $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{72}{n^2 - 7n + 10}$.
9. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{10}{n^2 - 6n + 8}$.
10. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{90}{n^2 - 5n + 4}$.
11. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{12}{n^2 - 4n + 3}$.
12. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{18}{n^2 - n - 2}$.
13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{n^2 + 4n + 3}$.
14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{36}{n^2 + 7n + 10}$.
15. $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{30}{n^2 - 14n + 48}$.
16. $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{54}{n^2 - 11n + 28}$.
17. $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{36}{n^2 - 12n + 35}$.
18. $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{72}{n^2 - 9n + 18}$.
19. $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{12}{n^2 - 10n + 24}$.
20. $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{18}{n^2 - 7n + 10}$.
21. $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{60}{n^2 - 8n + 15}$.
22. $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{36}{n^2 - 5n + 4}$.

23. $\sum\limits_{n=6}^{\infty} \frac{48}{n^2-6n+8}$.

24. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{54}{n^2+n-2}$.

25. $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \frac{6}{n^2-4n+3}$.

26. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{18}{n^2-n-2}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{24}{n^2+4n+3}$.

28. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{36}{n^2+n-2}$.

29. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{72}{n^2+6n+8}$.

30. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{54}{n^2+5n+4}$.

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{72}{n^2+5n+4}$.

Задача 2. Исследовать на сходимость ряд.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 n}{n^3}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n^2}{n(n+1)(n+2)}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3-\sin n}{n-\ln n}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos n}{n^3+2}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+\cos n\pi)}{2n^2-1}$.

8. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{3+\sin n}{\sqrt[3]{n^3-n}}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2+1}$.

10. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^2+2}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos^2 n}{n^3+5}$.

13. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n\ln n}{n^2-3}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3(2+\cos n\pi)}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3-\cos n}{\sqrt[4]{n^3}}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3+n+1}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^3 n}{n^4+3}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2+\cos n\pi)\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7+5}}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-\sin n}{(n+1)(n+2)}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 2^n}{n^2}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^5+n}}$.

23. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n + \sqrt[3]{\ln^2 n}}$.

24. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2-\cos n}{\sqrt{n^2-n}}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arcctg}^2 n}{n(n+1)}$.

26. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2+\cos n}{\sqrt[4]{n^4-1}}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin n}{n(n+2)}$.

28. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2-\sin n}{\sqrt[3]{n^3-1}}$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n(2+n^2)}}$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2}{n^3+n}$.

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2(2+\sin n)}$.

Задача 3. Исследовать на сходимость ряд.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(1-\cos\frac{1}{n+1}\right)$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4} \operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2+5}{n^2+4}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+4}} \sin\frac{1}{n+1}$.

5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}$.

6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\frac{n^2+3}{n^2-n}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{\sqrt{n}-1}{n^3}}-1\right)$.

8. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sqrt{n} \arcsin\frac{n+1}{n^3-2}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1\right)$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n+1}} \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \operatorname{arctg}\frac{\pi}{4\sqrt{n}}$.

12. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sqrt[3]{n} \operatorname{tg}\frac{n-1}{n^3-n}$.

13. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}} \sin\frac{1}{n-1}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}+2} \operatorname{arctg}\frac{n+3}{n^2+5}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+1}{n^2-n+2}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^3}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3+2}{n^3+1}$.

19. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} n^3 \operatorname{tg}^5 \frac{\pi}{n}$.

20. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{(\sqrt[3]{n}-1)(n\sqrt[4]{n^3}-1)}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}$.

23. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(e^{\frac{\sqrt{n}}{n^3-1}}-1\right)$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{2\pi}{2n+1}$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3+7n}{5^n+n}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2$.

29. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{(n-1)\sqrt[5]{n^2+1}}$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n}{n^2\sqrt[3]{n}+5}$.

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{n}{(n^2+3)^{5/2}}$.

Задача 4. Исследовать на сходимость ряд.

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n(n-1)!}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n!)^2}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^n n!}{(2n)!}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{2^n(3n+5)}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n!} \sin \frac{2}{3^n}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \operatorname{arctg} \frac{5}{n}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} \operatorname{tg} \frac{1}{5^n}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(n^2-1)}{n!}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n^2}{(n+2)!}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{(3n)!}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3^n (n+1)!}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n-1}}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty} n! \sin \frac{\pi}{2^n}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n+1)!}{(2n)!}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)! 4^n}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (2n+5)}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n+3}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n n^2}$.

28. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^{n-1}\sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \sqrt[3]{n}}{3^n+2}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$.

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{2^{n+1} n!}$.

Задача 5. Исследовать на сходимость ряд.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{2n}{3n+5}\right)^{n}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{4^n}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^{n} n^3$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^2}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin^n \frac{\pi}{4n}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \frac{n}{5^n}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^n$

14. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n \frac{\pi}{2n}$.

19. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln n)^n}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^3}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{arctg}^n \frac{\pi}{3n}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^5}{(2n+1)^n}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} e^{-n}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{n/2}}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n 3^{n+2}}{5^n}$.

30. $\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt[3]{n} \left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{3n}$.

31. $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \operatorname{arctg}^{2n} \frac{\pi}{4n}$.

Задача 6. Исследовать на сходимость ряд.

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(3n+1)}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(2n+1)}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$.

4. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln^2(n\sqrt{5}+2)}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\sqrt{2}+1)\ln^2(n\sqrt{3}+1)}$.

8. $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-2)\ln(n-3)}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln(2n)}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(2n)}$.

11. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln n}$.

12. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}$.

13. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2}{(2n-3)\ln(3n+1)}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^2 n}$.

15. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln^2(2n)}$.

16. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}$.

17. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n-1)}$.

18. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n\sqrt{\ln(3n-1)}}$.

19. $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-2)\sqrt{\ln(n-3)}}$.

20. $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(n-2)}}$.

21. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\ln^2(n+1)}$.

22. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln^2(n+7)}$.

23. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{(n^3+1)\ln n}$.

24. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n}{(n^2-3)\ln^2 n}$.

25. $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(n-3)\ln^2(n/2)}$

26. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2+5)\ln n}$.

27. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3n}{(2n^2+3)\ln n}$.

28. $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{n+1}{(5n^2-9)\ln(n-2)}$.

29. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{2n+1}{(3n^2+2)\ln(n/2)}$.

30. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2-1)\ln n}$.

31. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3n}{(n^2-2)\ln(2n)}$.

Задача 7. Исследовать на сходимость ряд.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^{n}$.

3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$.

4. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{n\ln n(\ln\ln n)}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{2n^2}{n^4-n^2+1}$.

6. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{(n+1)\ln n}$.

7. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{n\ln(n+1)}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[4]{2n+3}}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{\sqrt{3n+1}}\sin\dfrac{\pi}{2\sqrt{n}}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\dfrac{3n-1}{n}\right)^{n}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n!}$.

12. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{n\ln(2n)}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\operatorname{tg}\dfrac{1}{n}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{n^2}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{2n}(n+1)}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{\sqrt[3]{3n}\cos(\pi/3n)}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(3/2)^{n}(n+1)}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{2n-1}{3n}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{(n+3)!}{2^{n}}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{n+1}{\sqrt{n^3}}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{\sqrt{5n-1}}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4\sqrt{n}}$.

22. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{2^{2n+1}(2n+1)}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{n+\cos(2/\sqrt{n+4})}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin\dfrac{\pi}{2^{n}}$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin^{n}\dfrac{\pi}{2n}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{\sin 3^{n}}{3^{n}}$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{n}\cdot \operatorname{tg}\frac{1}{n}$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{(n+1)!}$.

Задача 8. Вычислить сумму ряда с точностью α.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n^2}$, $\alpha=0{,}01$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$, $\alpha=0{,}01$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^3}$, $\alpha=0{,}001$.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)}$, $\alpha=0{,}001$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n^3(n+1)}$, $\alpha=0{,}01$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$, $\alpha=0{,}0001$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}$, $\alpha=0{,}1$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{3^n}$, $\alpha=0{,}1$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$, $\alpha=0{,}001$.

10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}$, $\alpha=0{,}0001$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!!}$, $\alpha=0{,}001$.

12. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n$, $\alpha=0{,}01$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{7^n}$, $\alpha=0{,}0001$.

14. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$, $\alpha=0{,}1$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$, $\alpha=0{,}001$.

16. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n!}$, $\alpha=0{,}01$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!\,2n}$, $\alpha=0{,}00001$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n)!n!}$, $\alpha=0{,}001$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}$, $\alpha=0{,}001$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n!}$, $\alpha=0{,}0001$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!n!}$, $\alpha=0{,}00001$.

22. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(n+1)}$, $\alpha=0{,}001$.

23. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}$, $\alpha = 0{,}001$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$, $\alpha = 0{,}01$.

25. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(n+1)^n}$, $\alpha = 0{,}001$.

26. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^n}$, $\alpha = 0{,}001$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$, $\alpha = 0{,}01$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n^2(n+3)}$, $\alpha = 0{,}01$.

29. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^3+1)^2}$, $\alpha = 0{,}001$.

30. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2+n^3}$, $\alpha = 0{,}01$.

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(1+n^3)^2}$, $\alpha = 0{,}001$.

Задача 9. Найти область сходимости ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^n+1}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln(1+x)}}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+1)^{x+2}}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{4}{n}\right)^n e^{n(x^2-4)+x\sqrt{n}}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{x^2+n^2}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{n^2 \sin \frac{x^2+1}{n}}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^{3x-x^2}}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \arcsin 3^{-nx}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{arctg} 2^{nx}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^{x^2+1}+4}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right)^n 4^{\frac{n^2}{x}}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{nx}+1}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n e^{n(x^2-4x+3)+x\sqrt{n}}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+e^{-nx}}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \sin \frac{x^2+1}{n}}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+x^n}{1-x^n}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln(1+x^2)}}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(\sqrt{n^3}+n\right)^{x+1}}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \arcsin 3^{nx}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(n+e^x)}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{arctg} 2^{-nx}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^{2+3x-x^2}}$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n e^{-\frac{n}{1+x^2}+x\sqrt{n}}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n+|x|^{-n}}{2}$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(3+\frac{1}{n}\right)^n 4^{-\frac{n^2}{x}}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n^{x^2+2}+3}$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln|x|}}$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+e^x)(n^2+1)}$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-(x\sqrt{n}-1)^2}$.

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n^2+\sqrt{n}+1)^{x+1}}$.

Задача 10. Найти область сходимости ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)^3}{2n+3}(x+3)^{2n}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)5^n}(x-3)^n$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{(n+3)^2 2^{n-1}}(x+7)^n$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}(x-2)^{2n}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3)\ln(n+3)}(x+6)^n$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+2)3^n}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{(2n-1)4^n}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{(5n-8)^3}(x-2)^{3n}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{3^n}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)3^n}(x+6)^n$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(3n+1)^3}(x-4)^{2n}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+3)2^n}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2 2^n}(x-3)^n$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)3^n}(x+4)^n$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}(x+1)^{2n-1}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n-1)2^n}(x+3)^n$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(3n+1)^3}(x-1)^{3n}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+3)!}(x+4)^{2n+1}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n-1)2^n}(x+2)^n$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-1)^3}(x-4)^{3n}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)\ln(n+2)}(x+1)^n$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^4+1)^2}(x-3)^n$.

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1}x^{2n}$.

Задача 11. Найти область сходимости ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n(x^2-6x+13)^n}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n^2}\sin^{3n} x$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n 3^{\frac{n}{x-1}}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}(x^2-4x+6)^n$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} 8^n n^2 \sin^{3n} x$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}2^{\frac{4}{4-x}}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n(x^2-5x+10)^n}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}}\sin^{2n}(2x)$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(x+e)}{n+e}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-6x+12)^n}{4^n(n^2+1)}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \operatorname{tg}^{2n} x$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{n}{\cos x}}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2(x^2+2)^n}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4} \sin^4(3x)$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 4^{\frac{n}{x-2}}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-5x+11)^n}{5^n(n^2+5)}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2} \sin^{2n} x$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{2^n n^2}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(x^2-2x+3)^n}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \operatorname{tg}^n(2x)$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n \sin x}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2+1)^n}{2^n(n+1)}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{tg}^n x$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} n 5^{\frac{n}{3-x}}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2(x^2-4x+5)^n}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 3^{n/2}} \operatorname{tg}^n x$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n (x-e)}{n-e}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-2x+2)^n}{2^n(n^2+2)}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n/2}}{\sqrt{n}} \operatorname{tg}^n(2x)$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{n \sin x}$.

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^3(x^2-4x+7)^n}$.

Задача 12. Найти сумму ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n(n-1)}$.

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)x^n}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n x^{4n-4}}$.

8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)x^{3n}}$.

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n+1}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^5)^{n-1}}{n}$.

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x^4)^n}{n+1}$.

10. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{nx^{n-1}}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x^2)^{n-1}}{n}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n(n+1)}$.

14. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)x^{5n}}$.

15. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^n x}{n+1}$.

16. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+2)}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{nx^{3n-3}}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x^4)^{n-1}}{n}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+3}}{n(n+1)}$.

20. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(n+1)x^{2n}}$.

21. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-x^3)^n}{n+1}$.

22. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+4}}{(n+1)(n+2)}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nx^{5n-5}}$.

24. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos^n x}{n+1}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+5}}{n(n+1)}$.

26. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)x^{4n}}$.

27. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-x^5)^n}{n+1}$.

28. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+6}}{(n+1)(n+2)}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{nx^{2n-2}}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x^3)^{n-1}}{n}$.

31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^{n-1} x}{n}$.

Задача 13. Найти сумму ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(n+5)x^{n-1}$.

2. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+5)x^{2n}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(n+4)x^{n-1}$.

4. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+4)x^{3n}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(n+3)x^{n-1}$.

6. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^{4n}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)x^{n-1}$.

8. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{5n}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^{n-1}$.

10. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{6n}$.
11. $\sum_{n=2}^{\infty}nx^{n-2}$.
12. $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{6n}$.
13. $\sum_{n=2}^{\infty}(n+4)x^{n-2}$.
14. $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{5n}$.
15. $\sum_{n=2}^{\infty}(n+3)x^{n-2}$.
16. $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{4n}$.
17. $\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)x^{n-2}$.
18. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{3n+3}$.
19. $\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)x^{n-2}$.
20. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n+2}$.
21. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n}$.
22. $\sum_{n=3}^{\infty}(n+1)x^{n-3}$.
23. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{3n}$.
24. $\sum_{n=3}^{\infty}(n+2)x^{n-3}$.
25. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^{4n}$.
26. $\sum_{n=3}^{\infty}(n+3)x^{n-3}$.
27. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+4)x^{5n}$.
28. $\sum_{n=3}^{\infty}(n+4)x^{n-3}$.
29. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+5)x^{6n}$.
30. $\sum_{n=3}^{\infty}(n+5)x^{n-3}$.
31. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+6)x^{7n}$.

Задача 14. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

1. $\frac{9}{20-x-x^2}$.
2. $\frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$.
3. $\ln(1-x-6x^2)$.
4. $2x\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-x$.
5. $\frac{\operatorname{sh}2x}{x}-2$.
6. $\frac{7}{12+x-x^2}$.
7. $\frac{x}{\sqrt[3]{27-2x}}$.
8. $\ln(1+x-6x^2)$.
9. $(x-1)\sin 5x$.
10. $\frac{\operatorname{ch}3x-1}{x^2}$.
11. $\frac{6}{8+2x-x^2}$.
12. $\frac{1}{\sqrt[4]{16-3x}}$.
13. $\ln(1-x-12x^2)$.
14. $(3+e^{-x})^2$.
15. $\frac{\arcsin x}{x}-1$.
16. $\frac{7}{12-x-x^2}$.
17. $x^2\sqrt{4-3x}$.
18. $\ln(1+2x-8x^2)$.
19. $2x\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)-x$.
20. $(x-1)\operatorname{sh}x$.
21. $\frac{5}{6+x-x^2}$.
22. $x\sqrt[3]{27-2x}$.
23. $\ln(1+x-12x^2)$.
24. $\frac{\sin 3x}{x}-\cos 3x$.
25. $\frac{\operatorname{arctg}x}{x}$.
26. $\frac{5}{6-x-x^2}$.
27. $\sqrt[4]{16-5x}$.
28. $\ln(1-x-20x^2)$.
29. $(2-e^x)^2$.

30. $(x-1)\operatorname{ch} x$.

31. $\frac{3}{2-x-x^2}$.

Задача 15. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

1. $\int\limits_0^{0,1} e^{-6x^2}\,dx$.

2. $\int\limits_0^{0,1} \sin(100x^2)\,dx$.

3. $\int\limits_0^{1} \cos x^2\,dx$.

4. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

5. $\int\limits_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x}\,dx$.

6. $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1+x/5)}{x}\,dx$.

7. $\int\limits_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$.

8. $\int\limits_0^{0,2} e^{-3x^2}\,dx$.

9. $\int\limits_0^{0,2} \sin(25x^2)\,dx$.

10. $\int\limits_0^{0,5} \cos(4x^2)\,dx$.

11. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$.

12. $\int\limits_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$.

13. $\int\limits_0^{0,4} \frac{\ln(1+x/2)}{x}\,dx$.

14. $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$.

15. $\int\limits_0^{0,3} e^{-2x^2}\,dx$.

16. $\int\limits_0^{0,4} \sin\left(\frac{5x}{2}\right)^2\,dx$.

17. $\int\limits_0^{0,2} \cos(25x^2)\,dx$.

18. $\int\limits_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$.

19. $\int\limits_0^{0,4} \frac{1-e^{-x/2}}{x}\,dx$.

20. $\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x}\,dx$.

21. $\int\limits_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}$.

22. $\int\limits_0^{0,4} e^{-3x^2/4}\,dx.$

23. $\int\limits_0^{0,5} \sin(4x^2)\,dx.$

24. $\int\limits_0^{0,4} \cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2\,dx.$

25. $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}.$

26. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}.$

27. $\int\limits_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}.$

28. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}.$

29. $\int\limits_0^{0,5} e^{-3x^2/25}\,dx.$

30. $\int\limits_0^{1} \sin x^2\,dx.$

31. $\int\limits_0^{0,1} \cos(100x^2)\,dx.$

Раздел 7

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 7.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1) Определения двойного и тройного интегралов. Их геометрический и физический смысл.

2) Основные свойства двойных и тройных интегралов.

3) Теорема о среднем для двойного и тройного интегралов.

4) Вычисление двойных интегралов двумя последовательными интегрированиями (случай прямоугольной области).

5) Вычисление двойных интегралов двумя последовательными интегрированиями (общий случай).

6) Замена переменных в двойном интеграле.

7) Якобиан, его геометрический смысл.

8) Двойной интеграл в полярных координатах.

9) Тройной интеграл в цилиндрических координатах.

10) Тройной интеграл в сферических координатах.

§ 7.2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1) Пользуясь определением двойного интеграла, доказать, что

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} x^m y^n\,dx\,dy = 0,$$

если m и n — натуральные числа и, по меньшей мере, одно из них нечетно.

2) С помощью теоремы о среднем найти

$$\lim_{R\to 0}\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} f(x,y)\,dx\,dy,$$

где $f(x,y)$ — непрерывная функция.

3) Оценить интеграл

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}, \quad x_0^2+y_0^2+z_0^2>R^2,$$

т. е. указать, между какими значениями заключена его величина.

4) Вычислить двойной интеграл $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, если область D — прямоугольник $\{a\leqslant x\leqslant b,\ \ c\leqslant y\leqslant d\}$, а $f(x,y)=F''_{xy}(x,y)$.

5) Доказать равенство

$$\iint\limits_D f(x)g(y)\,dx\,dy=\int\limits_a^b f(x)\,dx\int\limits_c^d g(y)\,dy,$$

если область D — прямоугольник $\{a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$.

6) Доказать формулу Дирихле

$$\int\limits_0^a dx\int\limits_0^x f(x,y)\,dy=\int\limits_0^a dy\int\limits_y^a f(x,y)\,dx, \quad a>0.$$

7) Пользуясь формулой Дирихле, доказать равенство

$$\int\limits_0^a dy\int\limits_0^y f(x)\,dx=\int\limits_0^a (a-x)f(x)\,dx.$$

8) Какой из интегралов больше

$$\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 f(x,y,z)\,dz \quad \text{или} \quad \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_0^{1-x-y} f(x,y,z)\,dz,$$

если $f(x,y,z)>0$?

§ 7.3. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1. Изменить порядок интегрирования.

1. $\displaystyle\int\limits_{-2}^{-1} dy\int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f\,dx+\int\limits_{-1}^{0} dy\int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f\,dx.$

2. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f\,dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f\,dx.$

3. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y} f\,dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f\,dx.$

4. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f\,dx + \int\limits_1^{2} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f\,dx.$

5. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f\,dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_x^{0} f\,dy.$

6. $\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\arcsin y} f\,dx + \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} dy \int\limits_0^{\arccos y} f\,dx.$

7. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_0^{\sqrt{2+y}} f\,dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_0^{\sqrt{-y}} f\,dx.$

8. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f\,dx + \int\limits_1^{e} dy \int\limits_{-1}^{-\ln y} f\,dx.$

9. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f\,dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_0^{x^2} f\,dy.$

10. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f\,dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f\,dy.$

11. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x^2}^{1} f\,dy + \int\limits_1^{e} dx \int\limits_{\ln x}^{1} f\,dy.$

12. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f\,dx + \int\limits_1^{2} dy \int\limits_0^{2-y} f\,dx.$

13. $\int\limits_0^{\pi/4} dy \int\limits_0^{\sin y} f\,dx + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int\limits_0^{\cos y} f\,dx.$

14. $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-(2+x)}^{0} f\,dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{0} f\,dy.$

15. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f\,dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^{1} f\,dx.$

16. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} f\,dx.$

17. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y}^{0} f\,dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f\,dx.$

18. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^3} f\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f\,dx.$

19. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f\,dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f\,dy.$

20. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-(2+y)}^{0} f\,dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0} f\,dx.$

21. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y} f\,dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^{1} f\,dx.$

22. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f\,dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f\,dy.$

23. $\int\limits_0^{\pi/4} dx \int\limits_0^{\sin x} f\,dy + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int\limits_0^{\cos x} f\,dy.$

24. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f\,dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y}^{0} f\,dx.$

25. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^3} f\,dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{2-x} f\,dy.$

26. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f\,dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f\,dy.$

27. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{0} f\,dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x}}^{0} f\,dy.$

28. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} f\,dy + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f\,dy.$

29. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f\,dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f\,dx.$

30. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{x}} f\,dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x}} f\,dy.$

31. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f\,dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f\,dy.$

Задача 2. Вычислить.

1. $\iint\limits_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3)\,dx\,dy;\ D\colon x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}.$

2. $\iint\limits_D (9x^2y^2 + 48x^3y^3)\,dx\,dy;\ D\colon x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^2.$

3. $\iint\limits_D (36x^2y^2 - 96x^3y^3)\,dx\,dy;\ D\colon x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^3.$

4. $\iint\limits_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)\,dx\,dy;\ D\colon x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt[3]{x}.$

5. $\iint\limits_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3)\,dx\,dy$; D: $x = 1$, $y = x^2$, $y = -\sqrt[3]{x}$ $(x \geqslant 0)$.

6. $\iint\limits_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)\,dx\,dy$; D: $x = 1$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = -x^2$ $(x \geqslant 0)$.

7. $\iint\limits_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)\,dx\,dy$; D: $x = 1$, $y = x^3$, $y = -\sqrt{x}$.

8. $\iint\limits_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3)\,dx\,dy$; D: $x = 1$, $y = \sqrt{x}$, $y = -x^3$.

9. $\iint\limits_D (4xy + 3x^2y^2)\,dx\,dy$; D: $x = 1$, $y = x^2$, $y = -\sqrt{x}$.

10. $\iint\limits_D (12xy + 9x^2y^2)\,dx\,dy$; D: $x = 1$, $y = \sqrt{x}$, $y = -x^2$.

11. $\iint\limits_D (8xy + 9x^2y^2)\,dx\,dy$, D: $x = 1$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = -x^3$.

12. $\iint\limits_D (24xy + 18x^2y^2)\,dx\,dy$, D: $x = 1$, $y = x^3$, $y = -\sqrt[3]{x}$.

13. $\iint\limits_D (12xy + 27x^2y^2)\,dx\,dy$, D: $x = 1$, $y = x^2$, $y = -\sqrt[3]{x}$ $(x \geqslant 0)$.

14. $\iint\limits_D (8xy + 18x^2y^2)\,dx\,dy$, D: $x = 1$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = -x^2$ $(x \geqslant 0)$.

15. $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy + \frac{9}{11}x^2y^2\right)\,dx\,dy$, D: $x = 1$, $y = x^3$, $y = -\sqrt{x}$.

16. $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy + 9x^2y^2\right)\,dx\,dy$, D: $x = 1$, $y = \sqrt{x}$, $y = -x^3$.

17. $\iint\limits_D (24xy - 48x^3y^3)\,dx\,dy$, D: $x = 1$, $y = x^2$, $y = -\sqrt{x}$.

18. $\iint\limits_D (6xy + 24x^3y^3)\,dx\,dy$, D: $x = 1$, $y = \sqrt{x}$, $y = -x^2$.

19. $\iint\limits_D (4xy + 16x^3y^3)\,dx\,dy$, D: $x = 1$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = -x^3$.

20. $\iint\limits_D (4xy + 16x^3y^3)\,dx\,dy$, D: $x = 1$, $y = x^3$, $y = -\sqrt[3]{x}$.

21. $\iint\limits_D (44xy + 16x^3y^3)\,dx\,dy$, D: $x = 1$, $y = x^2$, $y = -\sqrt[3]{x}$ $(x \geqslant 0)$.
22. $\iint\limits_D (4xy + 176x^3y^3)\,dx\,dy$, D: $x = 1$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = -x^3$ $(x \geqslant 0)$.
23. $\iint\limits_D (xy - 4x^3y^3)\,dx\,dy$; D: $x = 1$, $y = x^3$, $y = -\sqrt{x}$.
24. $\iint\limits_D (4xy + 176x^3y^3)\,dx\,dy$; D: $x = 1$, $y = \sqrt{x}$, $y = -x^3$.
25. $\iint\limits_D \left(6x^2y^2 + \dfrac{25}{3}x^4y^4\right)\,dx\,dy$, D: $x = 1$, $y = x^2$, $y = -\sqrt{x}$.
26. $\iint\limits_D (9x^2y^2 + 25x^4y^4)\,dx\,dy$, D: $x = 1$, $y = \sqrt{x}$, $y = -x^2$.
27. $\iint\limits_D \left(3x^2y^2 + \dfrac{50}{3}x^4y^4\right)\,dx\,dy$, D: $x = 1$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = -x^3$.
28. $\iint\limits_D (9x^2y^2 + 25x^4y^4)\,dx\,dy$; D: $x = 1$, $y = x^3$, $y = -\sqrt[3]{x}$.
29. $\iint\limits_D (54x^2y^2 + 150x^4y^4)\,dx\,dy$; D: $x = 1$, $y = x^2$, $y = -\sqrt[3]{x}$ $(x \geqslant 0)$.
30. $\iint\limits_D (xy - 9x^5y^5)\,dx\,dy$; D: $x = 1$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = -x^2$ $(x \geqslant 0)$.
31. $\iint\limits_D 54x^2y^2 + 150x^4y^4)\,dx\,dy$; D: $x = 1$, $y = x^3$, $y = -\sqrt{x}$.

Задача 3. Вычислить.

1. $\iint\limits_D ye^{xy/2}\,dx\,dy$; D: $y = \ln 2$, $y = \ln 3$, $x = 2$, $x = 4$.
2. $\iint\limits_D y^2 \sin \dfrac{xy}{2}\,dx\,dy$; D: $x = 0$, $y = \sqrt{\pi}$, $y = \dfrac{x}{2}$.
3. $\iint\limits_D y \cos xy\,dx\,dy$; D: $y = \dfrac{\pi}{2}$, $y = \pi$, $x = 1$, $x = 2$.
4. $\iint\limits_D y^2 e^{-xy/4}\,dx\,dy$; D: $x = 0$, $y = 2$, $y = x$.
5. $\iint\limits_D y \sin xy\,dx\,dy$; D: $y = \dfrac{\pi}{2}$, $y = \pi$, $x = 1$, $x = 2$.

6. $\iint\limits_D y^2 \cos\frac{xy}{2}\,dx\,dy$; D: $x=0$, $y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $y=\frac{x}{2}$.

7. $\iint\limits_D 4ye^{2xy}\,dx\,dy$; D: $y=\ln 3$, $y=\ln 4$, $x=\frac{1}{2}$, $x=1$.

8. $\iint\limits_D 4y^2 \sin xy\,dx\,dy$; D: $x=0$, $y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $y=x$.

9. $\iint\limits_D y\cos 2xy\,dx\,dy$; D: $y=\frac{\pi}{2}$, $y=\pi$, $x=\frac{1}{2}$, $x=1$.

10. $\iint\limits_D y^2 e^{-xy/8}\,dx\,dy$; D: $x=0$, $y=2$, $y=\frac{x}{2}$.

11. $\iint\limits_D 12y\sin 2xy\,dx\,dy$; D: $y=\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{\pi}{2}$, $x=2$, $x=3$.

12. $\iint\limits_D y^2\cos xy\,dx\,dy$; D: $x=0$, $y=\sqrt{\pi}$, $y=x$.

13. $\iint\limits_D ye^{xy/4}\,dx\,dy$; D: $y=\ln 2$, $y=\ln 3$, $x=4$, $x=8$.

14. $\iint\limits_D 4y^2\sin 2xy\,dx\,dy$; D: $x=0$, $y=\sqrt{2\pi}$, $y=2x$.

15. $\iint\limits_D 2y\cos 2xy\,dx\,dy$; D: $y=\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{\pi}{2}$, $x=1$, $x=2$.

16. $\iint\limits_D y^2 e^{-xy/2}\,dx\,dy$; D: $x=0$, $y=\sqrt{2}$, $y=x$.

17. $\iint\limits_D y\sin xy\,dx\,dy$; D: $y=\pi$, $y=2\pi$, $x=\frac{1}{2}$, $x=1$.

18. $\iint\limits_D y^2\cos 2xy\,dx\,dy$; D: $x=0$, $y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $y=\frac{x}{2}$.

19. $\iint\limits_D 8ye^{4xy}\,dx\,dy$; D: $y=\ln 3$, $y=\ln 4$, $x=\frac{1}{4}$, $x=\frac{1}{2}$

20. $\iint\limits_D 3y^2\sin\frac{xy}{2}\,dx\,dy$; D: $x=0$, $y=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}$, $y=\frac{2}{3}x$.

21. $\iint\limits_D y\cos xy\,dx\,dy$; D: $y=\pi$, $y=3\pi$, $x=\frac{1}{2}$, $x=1$.

22. $\iint\limits_D y^2 e^{-xy/2}\,dx\,dy$; D: $x=0$, $y=1$, $y=\frac{x}{2}$.

23. $\iint\limits_D y\sin 2xy\,dx\,dy$; D: $y=\dfrac{\pi}{2}$, $y=\dfrac{3\pi}{2}$, $x=\dfrac{1}{2}$, $x=3$.

24. $\iint\limits_D y^2\cos xy\,dx\,dy$; D: $x=0$, $y=\sqrt{\pi}$, $y=2x$.

25. $\iint\limits_D 6ye^{xy/3}\,dx\,dy$; D: $y=\ln 2$, $y=\ln 3$, $x=3$, $x=6$.

26. $\iint\limits_D y^2\sin\dfrac{xy}{2}dx\,dy$; D: $x=0$, $y=\sqrt{\pi}$, $y=x$.

27. $\iint\limits_D y\cos 2xy\,dx\,dy$; D: $y=\dfrac{\pi}{2}$, $y=\dfrac{3\pi}{2}$, $x=\dfrac{1}{2}$, $x=2$.

28. $\iint\limits_D y^2e^{-xy/8}\,dx\,dy$; D: $x=0$, $y=4$, $y=2x$.

29. $\iint\limits_D 3y\sin xy\,dx\,dy$; D: $y=\dfrac{\pi}{2}$, $y=3\pi$, $x=1$, $x=3$.

30. $\iint\limits_D y^2\cos\dfrac{xy}{2}dx\,dy$; D: $x=0$, $y=\sqrt{2\pi}$, $y=2x$

31. $\iint\limits_D 12ye^{6xy}\,dx\,dy$; D: $y=\ln 3$, $y=\ln 4$, $x=\dfrac{1}{6}$, $x=\dfrac{1}{3}$.

Задача 4. Вычислить.

1. $\iiint\limits_V 2y^2e^{xy}\,dx\,dy\,dz$; $V\begin{cases}x=0, & y=1, \quad y=x,\\ z=0, & z=1.\end{cases}$

2. $\iiint\limits_V x^2z\sin(xyz)\,dx\,dy\,dz$; $V\begin{cases}x=2, & y=\pi, \quad z=1,\\ x=0, & y=0, \quad z=0.\end{cases}$

3. $\iiint\limits_V y^2\operatorname{ch}(2xy)\,dx\,dy\,dz$; $V\begin{cases}x=0, & y=-2, \quad y=4x,\\ z=0, & z=2.\end{cases}$

4. $\iiint\limits_V 8y^2ze^{2xyz}\,dx\,dy\,dz$; $V\begin{cases}x=-1, & y=2, \quad z=1,\\ x=0, & y=0, \quad z=0.\end{cases}$

5. $\iiint\limits_V x^2\operatorname{sh}(3xy)\,dx\,dy\,dz$; $V\begin{cases}x=1, & y=2x, \quad y=0,\\ z=0, & z=36.\end{cases}$

6. $\iiint\limits_V y^2z\cos xyz\,dx\,dy\,dz$; $V\begin{cases}x=1, & y=\pi, \quad z=2,\\ x=0, & y=0, \quad z=0.\end{cases}$

7. $\iiint\limits_V y^2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}xy\right)\,dx\,dy\,dz$; $V\begin{cases}x=0, & y=-1, \quad y=\dfrac{x}{2},\\ z=0, & z=-\pi^2.\end{cases}$

8. $\iiint\limits_V x^2 z \sin\frac{xyz}{4}\,dx\,dy\,dz;\ V \begin{cases} x=1, & y=2\pi, \quad z=4, \\ x=0, & y=0, \quad z=0. \end{cases}$

9. $\iiint\limits_V y^2 e^{-xy}\,dx\,dy\,dz;\ V \begin{cases} x=0, & y=-2, \quad y=4x, \\ z=0, & z=1. \end{cases}$

10. $\iiint\limits_V 2y^2 z e^{xyz}\,dx\,dy\,dz;\ V \begin{cases} x=1, & y=1, \quad z=1, \\ x=0, & y=0, \quad z=0. \end{cases}$

11. $\iiint\limits_V y^2 \operatorname{ch}(2xy)\,dx\,dy\,dz;\ V \begin{cases} x=0, & y=1, \quad y=x, \\ z=0, z=8. \end{cases}$

12. $\iiint\limits_V x^2 z \operatorname{sh}(xyz)\,dx\,dy\,dz;\ V \begin{cases} x=2, & y=1, \quad z=1, \\ x=0, & y=0, \quad z=0. \end{cases}$

13. $\iiint\limits_V y^2 e^{xy/2}\,dx\,dy\,dz;\ V \begin{cases} x=0, & y=2, \quad y=2x, \\ z=0, & z=-1. \end{cases}$

14. $\iiint\limits_V y^2 z \cos\frac{xyz}{3}\,dx\,dy\,dz;\ V \begin{cases} x=3, & y=1, \quad z=2\pi, \\ x=0, & y=0, \quad z=0. \end{cases}$

15. $\iiint\limits_V y^2 \cos\left(\frac{\pi xy}{2}\right)\,dx\,dy\,dz;\ V \begin{cases} x=0, & y=-1, \quad y=x, \\ z=0, & z=2\pi^2. \end{cases}$

16. $\iiint\limits_V 2x^2 z \operatorname{sh}(xyz)\,dx\,dy\,dz;\ V \begin{cases} x=1, & y=-1, \quad z=1, \\ x=0, & y=0, \quad z=0. \end{cases}$

17. $\iiint\limits_V y^2 \cos(\pi xy)\,dx\,dy\,dz;\ V \begin{cases} x=0, & y=1, \quad y=2x, \\ z=0, & z=\pi^2. \end{cases}$

18. $\iiint\limits_V 2x^2 z \operatorname{sh}(2xyz)\,dx\,dy\,dz;\ V \begin{cases} x=2, & y=\frac{1}{2}, \quad z=\frac{1}{2}, \\ x=0, & y=0, \quad z=0. \end{cases}$

19. $\iiint\limits_V x^2 \operatorname{sh}(2xy)\,dx\,dy\,dz;\ V \begin{cases} x=-1, & y=x, \quad y=0, \\ z=0, & z=8. \end{cases}$

20. $\iiint\limits_V x^2 z \sin\frac{xyz}{2}\,dx\,dy\,dz;\ V \begin{cases} x=1, & y=4, \quad z=\pi, \\ x=0, & y=0, \quad z=0. \end{cases}$

21. $\iiint\limits_V y^2 \operatorname{ch}(xy)\,dx\,dy\,dz;\ V \begin{cases} x=0, & y=-1, \quad y=x, \\ z=0, & z=2. \end{cases}$

22. $\iiint\limits_V y^2 z \operatorname{ch}(xyz)\,dx\,dy\,dz;\ V \begin{cases} x=1, & y=1, \quad z=1, \\ x=0, & y=0, \quad z=0. \end{cases}$

23. $\iiint\limits_V x^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}xy\right)\,dx\,dy\,dz;\ V \begin{cases} x=2, & y=x, \quad y=0, \\ z=0, & z=\pi. \end{cases}$

24. $\iiint\limits_V y^2 z \cos\frac{xyz}{9}\,dx\,dy\,dz$; $V \begin{cases} x=9, & y=1, & z=2\pi, \\ x=0, & y=0, & z=0. \end{cases}$

25. $\iiint\limits_V x^2 \sin(\pi xy)\,dx\,dy\,dz$; $V\colon x=1,\ y=2x,\ y=0,\ z=0,$ $z=4\pi$.

26. $\iiint\limits_V y^2 z\,\mathrm{ch}\left(\frac{xyz}{2}\right)\,dx\,dy\,dz$; $V\colon x=2,\ y=-1,\ z=2,$ $x=0,\ y=0,\ z=0$.

27. $\iiint\limits_V y^2\,\mathrm{ch}(3xy)\,dx\,dy\,dz$; $V\colon x=0,\ y=2,\ y=6x,\ z=0,$ $z=-3$.

28. $\iiint\limits_V 2y^2 z\,\mathrm{ch}(2xyz)\,dx\,dy\,dz$; $V\colon x=\frac{1}{2},\ y=2,\ z=-1,$ $x=0,\ y=0,\ z=0$.

29. $\iiint\limits_V x^2 \sin(4\pi xy)\,dx\,dy\,dz$; $V\colon x=1,\ y=\frac{x}{2},\ y=0,\ z=0,$ $z=8\pi$.

30. $\iiint\limits_V 8y^2 z e^{-xyz}\,dx\,dy\,dz$; $V\colon x=2,\ y=-1,\ z=2,\ x=0,$ $y=0,\ z=0$.

31. $\iiint\limits_V x^2\,\mathrm{sh}(xy)\,dx\,dy\,dz$; $V\colon x=2,\ y=\frac{x}{2},\ y=0,\ z=0,$ $z=1$.

Задача 5. Вычислить.

1. $\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz$; $V\colon y=10x,\ y=0,\ x=1,\ z=xy,\ z=0$.

2. $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}\right)^4}$; $V\colon \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1,\ x=0,\ y=0,$ $z=0$.

3. $\iiint\limits_V 15(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$; $V\colon z=x+y,\ x+y=1,\ x=0,$ $y=0,\ z=0$.

4. $\iiint\limits_V (3x+4y)\,dx\,dy\,dz$; $V\colon y=x,\ y=0,\ x=1,$ $z=5(x^2+y^2),\ z=0$.

5. $\iiint\limits_V (1+2x^3)\,dx\,dy\,dz$; $V\colon y=9x,\ y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},$ $z=0$.

6. $\iiint\limits_V (27+54y^3)\,dx\,dy\,dz$; $V: y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},$ $z=0.$

7. $\iiint\limits_V y\,dx\,dy\,dz$; $V: y=15x,\ y=0,\ x=1,\ z=xy,\ z=0.$

8. $\iiint\limits_V \dfrac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}\right)^5}$; $V: \dfrac{x}{16}+\dfrac{y}{8}+\dfrac{z}{3}=1,\ x=0,\ y=0,$ $z=0.$

9. $\iiint\limits_V (3x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$; $V: z=10y,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,$ $z=0.$

10. $\iiint\limits_V (15x+30z)\,dx\,dy\,dz$; $V: z=x^2+3y^2,\ z=0,\ y=x,$ $y=0,\ x=1.$

11. $\iiint\limits_V (4+8z^3)\,dx\,dy\,dz$; $V: y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},$ $z=0.$

12. $\iiint\limits_V (1+2x^3)\,dx\,dy\,dz$; $V: y=36x,\ y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},$ $z=0.$

13. $\iiint\limits_V 21xz\,dx\,dy\,dz$; $V: y=x,\ y=0,\ x=2,\ z=xy,\ z=0.$

14. $\iiint\limits_V \dfrac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\frac{x}{10}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}\right)^6}$; $V: \dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{8}+\dfrac{z}{3}=1,\ x=0,\ y=0,$ $z=0.$

15. $\iiint\limits_V (x^2+3y^2)\,dx\,dy\,dz$; $V: z=10x,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,$ $z=0.$

16. $\iiint\limits_V (60y+90z)\,dx\,dy\,dz$; $V: y=x,\ y=0,\ x=1,$ $z=x^2+y^2,\ z=0.$

17. $\iiint\limits_V \left(\dfrac{10}{3}x+\dfrac{5}{3}\right)\,dx\,dy\,dz$; $V: y=9x,\ y=0,\ x=1,$ $z=\sqrt{xy},\ z=0.$

18. $\iiint\limits_V (9+18z)\,dx\,dy\,dz$; $V: y=4x,\ y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},$ $z=0.$

19. $\iiint\limits_V 3y^2\,dx\,dy\,dz$; $V: y=2x,\ y=0,\ x=2,\ z=xy,\ z=0.$

20. $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}\right)^4}$; $V:\ \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1,\ x=0,\ y=0,$ $z=0.$

21. $\iiint\limits_V x^2\,dx\,dy\,dz$; $V: z=10(x+3y),\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,$ $z=0.$

22. $\iiint\limits_V (8y+12z)\,dx\,dy\,dz$; $V: y=x,\ y=0,\ x=1,$

$z=3x^2+2y^2,\ z=0.$

23. $\iiint\limits_V 63(1+2\sqrt{y})\,dx\,dy\,dz$; $V: y=x,\ y=0,\ x=1,$

$z=\sqrt{xy},\ z=0.$

24. $\iiint\limits_V (x+y)\,dx\,dy\,dz$; $V: y=x,\ y=0,\ x=1,$

$z=30x^2+60y^2,\ z=0.$

25. $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{16}\right)^5}$; $V:\ \frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{16}=1,\ x=0,\ y=0,$ $z=0.$

26. $\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz$; $V: y=x,\ y=0,\ x=2,\ z=xy,\ z=0.$

27. $\iiint\limits_V y^2\,dx\,dy\,dz$; $V: z=10(3x+y),\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,$ $z=0.$

28. $\iiint\limits_V \left(5x+\frac{3z}{2}\right)dx\,dy\,dz$; $V: y=x,\ y=0,\ x=1,$

$z=x^2+15y^2,\ z=0.$

29. $\iiint\limits_V (x^2+4y^2)\,dx\,dy\,dz$; $V: z=20(2x+y),\ x+y=1,\ x=0,$ $y=0,\ z=0.$

30. $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\frac{x}{8}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}\right)^6}$; $V:\ \frac{x}{8}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=1,\ x=0,\ y=0,$ $z=0.$

31. $\iiint\limits_V x^2z\,dx\,dy\,dz$; $V: y=3x,\ y=0,\ x=2,\ z=xy,\ z=0.$

Задача 6. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

1. $y=\frac{3}{x},\ y=4e^x,\ y=3,\ y=4.$

2. $x = \sqrt{36 - y^2}$, $x = 6 - \sqrt{36 - y^2}$.
3. $x^2 + y^2 = 72$, $6y = -x^2$ $(y \leqslant 0)$.
4. $x = 8 - y^2$, $x = -2y$.
5. $y = \frac{3}{x}$, $y = 8e^x$, $y = 3$, $y = 8$.
6. $y = \frac{\sqrt{x}}{2}$, $y = \frac{1}{2x}$, $x = 16$.
7. $x = 5 - y^2$, $x = -4y$.
8. $x^2 + y^2 = 12$, $-\sqrt{6}y = x^2$ $(y \leqslant 0)$.
9. $y = \sqrt{12 - x^2}$, $y = 2\sqrt{3} - \sqrt{12 - x^2}$, $x = 0, (x \geqslant 0)$.
10. $y = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, $y = \frac{3}{2x}$, $x = 9$.
11. $y = \sqrt{24 - x^2}$, $2\sqrt{3}y = x^2$, $x = 0$ $(x \geqslant 0)$.
12. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ $(x \geqslant 0)$.
13. $y = 20 - x^2$, $y = -8x$.
14. $y = \sqrt{18 - x^2}$, $y = 3\sqrt{2} - \sqrt{18 - x^2}$.
15. $y = 32 - x^2$, $y = -4x$.
16. $y = \frac{2}{x}$, $y = 5e^x$, $y = 2$, $y = 5$.
17. $x^2 + y^2 = 36$, $3\sqrt{2}y = x^2$ $(y \geqslant 0)$.
18. $y = 3\sqrt{x}$, $y = \frac{3}{x}$, $x = 4$.
19. $y = 6 - \sqrt{36 - x^2}$, $y = \sqrt{36 - x^2}$, $x = 0, (x \geqslant 0)$.
20. $y = \frac{25}{4} - x^2$, $y = x - \frac{5}{2}$.
21. $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 16$.
22. $y = \frac{2}{x}$, $y = 7e^x$, $y = 2$, $y = 7$.
23. $x = 27 - y^2$, $x = -6y$.
24. $x = \sqrt{72 - y^2}$, $6x = y^2$, $y = 0$ $(y \geqslant 0)$.
25. $y = \sqrt{6 - x^2}$, $y = \sqrt{6} - \sqrt{6 - x^2}$.
26. $y = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, $y = \frac{3}{2x}$, $x = 4$.
27. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ $(x \leqslant 0)$.
28. $y = \frac{1}{x}$, $y = 6e^x$, $y = 1$, $y = 6$.
29. $y = 3\sqrt{x}$, $y = \frac{3}{x}$, $x = 9$.
30. $y = 11 - x^2$, $y = -10x$.
31. $x^2 + y^2 = 12$, $x\sqrt{6} = y^2$ $(x \geqslant 0)$.

Задача 7. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

1. $y^2 - 2y + x^2 = 0$, $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{3}x$.
2. $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $x^2 - 8x + y^2 = 0$, $y = 0$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$
3. $y^2 - 6y + x^2 = 0$, $y^2 - 8y + x^2 = 0$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{3}x$.

4. $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $y = 0$, $y = x$.
5. $y^2 - 8y + x^2 = 0$, $y^2 - 10y + x^2 = 0$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{3}x$.
6. $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $x^2 - 8x + y^2 = 0$, $y = 0$, $y = x$.
7. $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y^2 - 6y + x^2 = 0$, $y = x$, $x = 0$.
8. $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $x^2 - 10x + y^2 = 0$, $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$.
9. $y^2 - 6y + x^2 = 0$, $y^2 - 10y + x^2 = 0$, $y = x$, $x = 0$.
10. $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{3}x$.
11. $y^2 - 2y + x^2 = 0$, $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y = \sqrt{3}x$, $x = 0$.
12. $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $x^2 - 6x + y^2 = 0$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{3}x$.
13. $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y^2 - 6y + x^2 = 0$, $y = \sqrt{3}x$, $x = 0$.
14. $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $x^2 - 8x + y^2 = 0$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{3}x$.
15. $y^2 - 2y + x^2 = 0$, $y^2 - 6y + x^2 = 0$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $x = 0$.
16. $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $y = 0$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$.
17. $y^2 - 2y + x^2 = 0$, $y^2 - 10y + x^2 = 0$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{3}x$.
18. $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $x^2 - 6x + y^2 = 0$, $y = 0$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$.
19. $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y^2 - 10y + x^2 = 0$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{3}x$.
20. $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $x^2 - 6x + y^2 = 0$, $y = 0$, $y = x$.
21. $y^2 - 2y + x^2 = 0$, $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y = x$, $x = 0$.
22. $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$.
23. $y^2 - 6y + x^2 = 0$, $y^2 - 8y + x^2 = 0$, $y = x$, $x = 0$.
24. $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $x^2 - 8x + y^2 = 0$, $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$.
25. $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y^2 - 8y + x^2 = 0$, $y = x$, $x = 0$.
26. $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $x^2 - 8x + y^2 = 0$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{3}x$.
27. $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y^2 - 8y + x^2 = 0$, $y = \sqrt{3}x$, $x = 0$.
28. $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $x^2 - 6x + y^2 = 0$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{3}x$.
29. $y^2 - 2y + x^2 = 0$, $y^2 - 10y + x^2 = 0$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $x = 0$.
30. $x^2 - 6x + y^2 = 0$, $x^2 - 10x + y^2 = 0$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{3}x$.
31. $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y^2 - 8y + x^2 = 0$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $x = 0$.

Задача 8. Пластинка D задана ограничивающими ее кривыми, μ — поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

1. D: $x = 1$, $y = 0$, $y^2 = 4x$ $(y \geqslant 0)$; $\mu = 7x^2 + y$.
2. D: $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $x = 0$, $y = 0$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$; $\mu = \frac{x+y}{x^2+y^2}$.
3. D: $x = 1$, $y = 0$, $y^2 = 4x$ $(y \geqslant 0)$; $\mu = \frac{7x^2}{2} + 5y$.
4. D: $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 16$, $x = 0$, $y = 0$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$; $\mu = \frac{2x+5y}{x^2+y^2}$.

5. $D: x = 2,\ y = 0,\ y^2 = 2x\ (y \geqslant 0);\ \mu = \frac{7x^2}{8} + 2y$.

6. $D: x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 16,\ x = 0,\ y = 0\ (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0);$ $\mu = \frac{x+y}{x^2+y^2}$.

7. $D: x = 2,\ y = 0,\ y^2 = \frac{x}{2}\ (y \geqslant 0);\ \mu = \frac{7x^2}{2} + 6y$.

8. $D: x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 25,\ x = 0,\ y = 0\ (x \geqslant 0,\ y \leqslant 0);$ $\mu = \frac{2x-3y}{x^2+y^2}$.

9. $D: x = 1,\ y = 0,\ y^2 = 4x\ (y \geqslant 0);\ \mu = x + 3y^2$.

10. $D: x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 9,\ x = 0,\ y = 0\ (x \geqslant 0,\ y \leqslant 0);$ $\mu = \frac{x-y}{x^2+y^2}$.

11. $D: x = 1,\ y = 0,\ y^2 = x\ (y \geqslant 0);\ \mu = 3x + 6y^2$.

12. $D: x^2 + y^2 = 9,\ x^2 + y^2 = 25,\ x = 0,\ y = 0\ (x \leqslant 0,\ y \geqslant 0);$ $\mu = \frac{2y-x}{x^2+y^2}$.

13. $D: x = 2,\ y = 0,\ y^2 = \frac{x}{2}\ (y \geqslant 0);\ \mu = 2x + 3y^2$.

14. $D: x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 16,\ x = 0,\ y = 0\ (x \leqslant 0,\ y \geqslant 0);$ $\mu = \frac{2y-3x}{x^2+y^2}$.

15. $D: x = \frac{1}{2},\ y = 0,\ y^2 = 8x\ (y \geqslant 0),\ \mu = 7x + 3y^2$.

16. $D: x^2 + y^2 = 9,\ x^2 + y^2 = 16,\ x = 0,\ y = 0\ (x \leqslant 0,\ y \geqslant 0);$ $\mu = \frac{2y-5x}{x^2+y^2}$.

17. $D: x = 1,\ y = 0,\ y^2 = 4x\ (y \geqslant 0);\ \mu = 7x^2 + 2y$.

18. $D: x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 16,\ x = 0,\ y = 0\ (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0);$ $\mu = \frac{x+3y}{x^2+y^2}$.

19. $D: x = 2,\ y^2 = 2x,\ y = 0\ (y \geqslant 0);\ \mu = \frac{7x^2}{4} + \frac{y}{2}$.

20. $D: x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 4,\ x = 0,\ y = 0\ (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0);$ $\mu = \frac{x+2y}{x^2+y^2}$.

21. $D: x = 2,\ y = 0,\ y^2 = 2x\ (y \geqslant 0);\ \mu = \frac{7x^2}{4} + y$.

22. $D: x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 9,\ x = 0,\ y = 0\ (x \geqslant 0,\ y \leqslant 0);$ $\mu = \frac{2x-y}{x^2+y^2}$.

23. $D: x = 2,\ y = 0,\ y^2 = \frac{x}{2}\ (y \geqslant 0);\ \mu = \frac{7x^2}{2} + 8y$.

24. $D: x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 25,\ x = 0,\ y = 0\ (x \geqslant 0,\ y \leqslant 0);$ $\mu = \frac{x-4y}{x^2+y^2}$.

25. $D: x = 1,\ y = 0,\ y^2 = 4x\ (y \geqslant 0);\ \mu = 6x + 3y^2$.

26. $D: x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 16,\ x = 0,\ y = 0\ (x \geqslant 0,\ y \leqslant 0);$ $\mu = \frac{3x-y}{x^2+y^2}$.

27. $D: x = 2,\ y = 0,\ y^2 = \frac{x}{2}\ (y \geqslant 0);\ \mu = 4x + 6y^2$.

28. $D: x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 9,\ x = 0,\ y = 0\ (x \leqslant 0,\ y \geqslant 0);$ $\mu = \frac{y-4x}{x^2+y^2}$.

29. $D\colon x=\frac{1}{2},\ y=0,\ y^2=2x\ (y\geq 0);\ \mu=4x+9y^2$.
30. $D\colon x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=9,\ x=0,\ y=0\ (x\leqslant 0,\ y\geqslant 0)$; $\mu=\frac{y-2x}{x^2+y^2}$.
31. $D\colon x=\frac{1}{4},\ y=0,\ y^2=16x\ (y\geqslant 0);\ \mu=16x+\frac{9y^2}{2}$.

Задача 9. Пластинка D задана неравенствами, μ — поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

1. $D\colon x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1;\ \mu=y^2$.
2. $D\colon 1\leqslant\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leqslant 2;\ y\geqslant 0,\ y\leqslant\frac{2}{3}x;\ \mu=\frac{y}{x}$.
3. $D\colon \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}\leqslant 1,\ y\geqslant 0;\ \mu=x^2y$.
4. $D\colon \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}\leqslant 1,\ y\geqslant 0;\ \mu=\frac{7x^2y}{18}$.
5. $D\colon 1\leqslant\frac{x^2}{4}+y^2\leqslant 4,\ y\geqslant 0,\ y\leqslant\frac{x}{2};\ \mu=\frac{8y}{x^3}$.
6. $D\colon \frac{x^2}{9}+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0;\ \mu=7xy^6$.
7. $D\colon \frac{x^2}{4}+y^2\leqslant 1;\ \mu=4y^4$.
8. $D\colon 1\leqslant\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leqslant 4,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant\frac{3x}{2};\ \mu=\frac{x}{y}$.
9. $D\colon 1\leqslant\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}\leqslant 4,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant\frac{x}{2},\ \mu=\frac{x}{y}$.
10. $D\colon \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0;\ \mu=x^3y$.
11. $D\colon \frac{x^2}{4}+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0;\ \mu=6x^3y^3$.
12. $D\colon 1\leqslant\frac{x^2}{4}+y^2\leqslant 25,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant\frac{x}{2};\ \mu=\frac{x}{y^3}$.
13. $D\colon \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leqslant 1;\ \mu=x^2y^2$.
14. $D\colon \frac{x^2}{16}+y^2\leq 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0;\ \mu=5xy^7$.
15. $D\colon \frac{x^2}{4}+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0;\ \mu=30x^3y^7$.
16. $D\colon 1\leqslant\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leqslant 3,\ y\geqslant 0,\ y\leqslant\frac{2}{3}x;\ \mu=\frac{y}{x}$.
17. $D\colon x^2+\frac{y^2}{25}\leqslant 1,\ y\geqslant 0;\ \mu=7x^4y$.
18. $D\colon x^2+\frac{y^2}{9}\leqslant 1,\ y\geqslant 0;\ \mu=35x^4y^3$.
19. $D\colon \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1;\ \mu=x^2$.
20. $D\colon 1\leqslant x^2+\frac{y^2}{16}\leqslant 9,\ y\geqslant 0,\ y\leqslant 4x;\ \mu=\frac{y}{x^3}$.
21. $D\colon \frac{x^2}{9}+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0;\ \mu=11xy^8$.
22. $D\colon 1\leqslant\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}\leqslant 5,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 2x;\ \mu=\frac{x}{y}$.
23. $D\colon 1\leqslant\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leqslant 5,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant\frac{2x}{3};\ \mu=\frac{x}{y}$.

24. $D\colon \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0;\ \mu=x^5y.$

25. $D\colon \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}\leqslant 1;\ \mu=x^4.$

26. $D\colon x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0;\ \mu=15x^5y^3.$

27. $D\colon 1\leqslant \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leqslant 36,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant \frac{3}{2}x;\ \mu=\frac{9x}{y^3}.$

28. $D\colon \frac{x^2}{100}+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geq 0;\ \mu=6xy^9.$

29. $D\colon \frac{x^2}{16}+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0;\ \mu=105x^3y^9.$

30. $D\colon 1\leqslant \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}\leqslant 2,\ y\geqslant 0,\ y\leqslant \frac{4}{3}x;\ \mu=\frac{27y}{x^5}.$

31. $D\colon 1\leqslant \frac{x^2}{16}+y^2\leqslant 3,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant \frac{x}{4};\ \mu=\frac{x}{y^5}.$

Задача 10. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

1. $y=16\sqrt{2x},\ y=\sqrt{2x},\ z=0,\ x+z=2.$
2. $y=5\sqrt{x},\ y=\frac{5x}{3},\ z=0,\ z=5+\frac{5\sqrt{x}}{3}.$
3. $x^2+y^2=2,\ y=\sqrt{x},\ y=0,\ z=0,\ z=15x.$
4. $x+y=2,\ y=\sqrt{x},\ z=12y,\ z=0.$
5. $x=20\sqrt{2y},\ x=5\sqrt{2y},\ z=0,\ z+y=\frac{1}{2}.$
6. $x=\frac{5\sqrt{y}}{2},\ x=\frac{5y}{6},\ z=0,\ z=\frac{5}{6}(3+\sqrt{y}).$
7. $x^2+y^2=2,\ x=\sqrt{y},\ x=0,\ z=0,\ z=30y.$
8. $x+y=2,\ x=\sqrt{y},\ z=\frac{12x}{5},\ z=0.$
9. $y=17\sqrt{2x},\ y=2\sqrt{2x},\ z=0,\ x+z=\frac{1}{2}.$
10. $y=\frac{5\sqrt{x}}{3},\ y=\frac{5x}{9},\ z=0,\ z=\frac{5(3+\sqrt{x})}{9}.$
11. $x^2+y^2=8,\ y=\sqrt{2x},\ y=0,\ z=0,\ z=\frac{15x}{11}.$
12. $x+y=4,\ y=\sqrt{2x},\ z=3y,\ z=0.$
13. $x=\frac{5}{6}\sqrt{y},\ x=\frac{5}{18}y,\ z=0,\ z=\frac{5}{18}(3+\sqrt{y}).$
14. $x=19\sqrt{2y},\ x=4\sqrt{2y},\ z=0,\ z+y=2.$
15. $x^2+y^2=8,\ x=\sqrt{2y},\ x=0,\ z=\frac{30y}{11},\ z=0.$
16. $x+y=4,\ x=\sqrt{2y},\ z=\frac{3x}{5},\ z=0.$
17. $y=6\sqrt{3x},\ y=\sqrt{3x},\ z=0,\ x+z=3.$
18. $y=\frac{5}{6}\sqrt{x},\ y=\frac{5}{18}x,\ z=0,\ z=\frac{5}{18}(3+\sqrt{x}).$
19. $x^2+y^2=18,\ y=\sqrt{3x},\ y=0,\ z=0,\ z=\frac{5x}{11}.$
20. $x+y=6,\ y=\sqrt{3x},\ z=4y,\ z=0.$
21. $x=7\sqrt{3y},\ x=2\sqrt{3y},\ z=0,\ z+y=3.$
22. $x=\frac{5\sqrt{y}}{3},\ x=\frac{5y}{9},\ z=0,\ z=\frac{5(3+\sqrt{y})}{9}.$
23. $x^2+y^2=18,\ x=\sqrt{3y},\ x=0,\ z=0,\ z=\frac{10y}{11}.$

24. $x + y = 6,\ x = \sqrt{3y},\ z = \frac{4x}{5},\ z = 0.$
25. $y = \sqrt{15x},\ y = \sqrt{15x},\ z = 0,\ z = \sqrt{15}(1 + \sqrt{x}).$
26. $x^2 + y^2 = 50,\ y = \sqrt{5x},\ y = 0,\ z = 0,\ z = \frac{3x}{11}.$
27. $x + y = 8,\ y = \sqrt{4x},\ z = 3y,\ z = 0.$
28. $x = 16\sqrt{2y},\ x = \sqrt{2y},\ z + y = 2,\ z = 0.$
29. $x = 15\sqrt{y},\ x = 15y,\ z = 0,\ z = 15(1 + \sqrt{y}).$
30. $x^2 + y^2 = 50,\ x = \sqrt{5y},\ x = 0,\ z = 0,\ z = \frac{6y}{11}.$
31. $x = 17\sqrt{2y},\ x = 2\sqrt{2y},\ z = 0,\ z + y = \frac{1}{2}.$

Задача 11. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

1. $x^2 + y^2 = 2y,\ z = \frac{5}{4} - x^2,\ z = 0.$
2. $x^2 + y^2 = y,\ x^2 + y^2 = 4y,\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 0.$
3. $x^2 + y^2 = 8\sqrt{2}x,\ z = x^2 + y^2 - 64,\ z = 0\ (z \geqslant 0).$
4. $x^2 + y^2 + 4x = 0,\ z = 8 - y^2,\ z = 0.$
5. $x^2 + y^2 = 6x,\ x^2 + y^2 = 9x,\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 0,\ y = 0\ (y \leqslant 0).$
6. $x^2 + y^2 = 6\sqrt{2}y,\ z = x^2 + y^2 - 36,\ z = 0\ (z \geqslant 0).$
7. $x^2 + y^2 = 2y,\ z = \frac{9}{4} - x^2,\ z = 0.$
8. $x^2 + y^2 = 2y,\ x^2 + y^2 = 5y,\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 0.$
9. $x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}y = 0,\ z = x^2 + y^2 - 4,\ z = 0\ (z \geqslant 0).$
10. $x^2 + y^2 = 4x,\ z = 10 - y^2,\ z = 0.$
11. $x^2 + y^2 = 7x,\ x^2 + y^2 = 10x,\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 0,\ y = 0\ (y \leqslant 0).$
12. $x^2 + y^2 = 8\sqrt{2}y,\ z = x^2 + y^2 - 64,\ z = 0\ (z \geqslant 0).$
13. $x^2 + y^2 = 2y,\ z = \frac{13}{4} - x^2,\ z = 0.$
14. $x^2 + y^2 = 3y,\ x^2 + y^2 = 6y,\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 0.$
15. $x^2 + y^2 = 6\sqrt{2}x,\ z = x^2 + y^2 - 36,\ z = 0\ (z \geqslant 0).$
16. $x^2 + y^2 = 2\sqrt{2}y,\ z = x^2 + y^2 - 4,\ z = 0\ (z \geqslant 0).$
17. $x^2 + y^2 = 4x,\ z = 12 - y^2,\ z = 0.$
18. $x^2 + y^2 = 8x,\ x^2 + y^2 = 11x,\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 0,\ y = 0\ (y \leqslant 0).$
19. $x^2 + y^2 = 4\sqrt{2}x,\ z = x^2 + y^2 - 16,\ z = 0\ (z \geqslant 0).$
20. $x^2 + y^2 = 4y,\ z = 4 - x^2,\ z = 0.$
21. $x^2 + y^2 = 4y,\ x^2 + y^2 = 7y,\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 0.$
22. $x^2 + y^2 = 4\sqrt{2}y,\ z = x^2 + y^2 = 16,\ z = 0\ (z \geqslant 0).$
23. $x^2 + y^2 + 2x = 0,\ z = \frac{17}{4} - y^2,\ z = 0.$

24. $x^2 + y^2 = 9x$, $x^2 + y^2 = 12x$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$, $y = 0$ $(y \geqslant 0)$.
25. $x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x = 0$, $z = x^2 + y^2 - 4$, $z = 0$ $(z \geqslant 0)$.
26. $x^2 + y^2 = 4y$, $z = 6 - x^2$, $z = 0$.
27. $x^2 + y^2 = 10x$, $x^2 + y^2 = 13x$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$, $y = 0$ $(y \geqslant 0)$.
28. $x^2 + y^2 = 2\sqrt{2x}$, $z = x^2 + y^2 - 4$, $z = 0$ $(z \geqslant 0)$.
29. $x^2 + y^2 = 2x$, $z = \frac{21}{4} - y^2$, $z = 0$.
30. $x^2 + y^2 = 5y$, $x^2 + y^2 = 8y$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$.
31. $x^2 + y^2 + 2x = 0$, $z = \frac{25}{4} - y^2$, $z = 0$.

Задача 12. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

1. $y = 5x^2 + 2$, $y = 7$, $z = 3y^2 - 7x^2 - 2$, $z = 3y^2 - 7x^2 - 5$.
2. $y = 5x^2 - 2$, $y = -4x^2 + 7$, $z = 4 + 9x^2 + 5y^2$, $z = -1 + 9x^2 + 5y^2$.
3. $x = -5y^2 + 2$, $x = -3$, $z = 3x^2 + y^2 + 1$, $z = 3x^2 + y^2 - 5$.
4. $x = 2y^2 - 3$, $x = -7y^2 + 6$, $z = 1 + \sqrt{x^2 + 16y^2}$, $z = -3 + \sqrt{x^2 + 16y^2}$.
5. $y = -6x^2 + 8$, $y = 2$, $z = x - x^2 - y^2 - 1$, $z = x - x^2 - y^2 - 5$.
6. $y = 5x^2 - 1$, $y = -3x^2 + 1$, $z = -2 + \sqrt{3x^2 + y^2}$, $z = -5 + \sqrt{3x^2 + y^2}$.
7. $x = 5y^2 - 9$, $x = -4$, $z = x^2 + 4x - y^2 - 4$, $z = x^2 + 4x - y^2 + 2$.
8. $y = 6x^2 - 1$, $y = 5$, $z = 2x^2 + x - y^2$, $z = 2x^2 + x - y^2 + 4$.
9. $x = 5y^2 - 1$, $x = -3y^2 + 1$, $z = 2 - \sqrt{x^2 + 6y^2}$, $z = -1 - \sqrt{x^2 + 6y^2}$.
10. $x = -3y^2 + 7$, $x = 4$, $z = 2 + \sqrt{6x^2 + y^2}$, $z = 3 + \sqrt{6x^2 + y^2}$.
11. $y = -5x^2 + 3$, $y = -2$, $z = 2x^2 - 3y - 6y^2 - 1$, $z = 2x^2 - 3y - 6y^2 + 2$.
12. $y = x^2 - 5$, $y = -x^2 + 3$, $z = 4 + \sqrt{5x^2 + 8y^2}$, $z = 1 + \sqrt{5x^2 + 8y^2}$.
13. $x = 3y^2 - 5$, $x = -2$, $z = 2 - \sqrt{x^2 + 16y^2}$, $z = 8 - \sqrt{x^2 + 16y^2}$.
14. $x = y^2 - 2$, $x = -4y^2 + 3$, $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} + 2$, $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} - 1$.
15. $y = 2x^2 - 1$, $y = 1$, $z = x^2 - 5y^2 - 3$, $z = x^2 - 5y^2 - 6$.

16. $y = x^2 - 2$, $y = -4x^2 + 3$, $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = -1 + \sqrt{x^2 + y^2}$.

17. $x = -4y^2 + 1$, $x = -3$, $z = x^2 - 7y^2 - 1$, $z = x^2 - 7y^2 + 2$.

18. $x = 7y^2 - 6$, $x = -2y^2 + 3$, $z = 3 + 5x^2 - 8y^2$, $z = -2 + 5x^2 - 8y^2$.

19. $y = 1 - 2x^2$, $y = -1$, $z = x^2 + 2y + y^2 - 2$, $z = x^2 + 2y + y^2 + 1$.

20. $y = x^2 - 7$, $y = -8x^2 + 2$, $z = 3 - 12y^2 + 5x^2$, $z = -2 - 12y^2 + 5x^2$.

21. $x = 2y^2 + 3$, $x = 5$, $z = 1 + \sqrt{9x^2 + 4y^2}$, $z = 4 + \sqrt{9x^2 + 4y^2}$.

22. $y = 3x^2 + 4$, $y = 7$, $z = 5 - \sqrt{2x^2 + 3y^2}$, $z = 1 - \sqrt{2x^2 + 3y^2}$.

23. $x = 5y^2 - 2$, $x = -4y^2 + 7$, $z = 4 - \sqrt{2x^2 + 3y^2}$, $z = -1 - \sqrt{2x^2 + 3y^2}$.

24. $x = -2y^2 + 5$, $x = 3$. $z = 5 - \sqrt{x^2 + 25y^2}$, $z = 2 - \sqrt{x^2 + 25y^2}$.

25. $y = -3x^2 + 5$, $y = 2$, $x = 3 + \sqrt{5x^2 + y^2}$, $z = -1 + \sqrt{5x^2 + y^2}$.

26. $y = 3x^2 - 5$, $y = -6x^2 + 4$, $z = 2 + 10x^2 - y^2$, $z = -2 + 10x^2 - y^2$.

27. $x = 4y^2 + 2$, $x = 6$, $z = x^2 + 4y^2 + y + 1$, $z = x^2 + 4y^2 + y + 4$.

28. $x = 3y^2 - 2$, $x = -4y^2 + 5$, $z = 4 - 7x^2 - 9y^2$, $z = 1 - 7x^2 - 9y^2$.

29. $y = 2x^2 - 5$, $y = -3$, $z = 2 + \sqrt{x^2 + 4y^2}$, $z = -1 + \sqrt{x^2 + 4y^2}$.

30. $y = 2x^2 - 3$, $y = -7x^2 + 6$, $z = 1 - 5x^2 - 6y^2$, $z = -3 - 5x^2 - 6y^2$.

31. $y = -2x^2 + 7$, $y = 5$, $z = 1 - 2x^2 + 3y^2$, $z = 4 - 2x^2 + 3y^2$.

Задача 13. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

1. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $\frac{9z}{2} = x^2 + y^2$.

2. $z = \frac{15\sqrt{x^2+y^2}}{2}$, $z = \frac{17}{2} - x^2 - y^2$.

3. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{255}}$.

4. $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$, $z = 1$, $x^2 + y^2 = 60$ (внутри цилиндра).

5. $z = \sqrt{\frac{16}{9} - x^2 - y^2}$, $2z = x^2 + y^2$.

6. $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 10 - x^2 - y^2$.

7. $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{99}}$.

8. $z = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$, $z = 6$, $x^2 + y^2 = 51$ (внутри цилиндра).
9. $z = \frac{21\sqrt{x^2+y^2}}{2}$, $z = \frac{23}{2} - x^2 - y^2$.
10. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, $6z = x^2 + y^2$.
11. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{80}}$.
12. $z = \sqrt{81 - x^2 - y^2}$, $z = 5$, $x^2 + y^2 = 45$ (внутри цилиндра).
13. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $\frac{3z}{2} = x^2 + y^2$.
14. $x = 6\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 16 - x^2 - y^2$.
15. $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{\frac{(x^2+y^2)}{63}}$.
16. $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$, $z = 4$, $x^2 + y^2 = 39$ (внутри цилиндра).
17. $z - \sqrt{144 - x^2 - y^2}$, $18z = x^2 + y^2$.
18. $z = 3\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$, $z = \frac{5}{2} - x^2 - y^2$.
19. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{\frac{(x^2+y^2)}{35}}$.
20. $z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$, $z = 3$, $x^2 + y^2 = 33$ (внутри цилиндра).
21. $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$, $9z = x^2 + y^2$.
22. $z = 9\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 22 - x^2 - y^2$.
23. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{\frac{(x^2+y^2)}{15}}$.
24. $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$, $z = 2$, $x^2 + y^2 = 27$ (внутри цилиндра).
25. $z = \sqrt{\frac{4}{9} - x^2 - y^2}$, $z = x^2 + y^2$.
26. $z = 12\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 28 - x^2 - y^2$.
27. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{8}}$.
28. $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, $z = 1$, $x^2 + y^2 = 21$ (внутри цилиндра).
29. $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$, $12z = x^2 + y^2$.
30. $z = \frac{9\sqrt{x^2+y^2}}{2}$, $z = \frac{11}{2} - x^2 - y^2$.
31. $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{\frac{(x^2+y^2)}{3}}$.

Задача 14. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

1. $z = 2 - 12(x^2 + y^2)$, $z = 24x + 2$.
2. $z = 10\left((x-1)^2 + y^2\right) + 1$, $z = 21 - 20x$.
3. $z = 8(x^2 + y^2) + 3$, $z = 16x + 3$.
4. $z = 2 - 20\left((x+1)^2 + y^2\right)$, $z = -40x - 38$.

5. $z = 4 - 14(x^2 + y^2)$, $z = 4 - 28x$.
6. $z = 28\left((x+1)^2 + y^2\right) + 3$, $z = 56x + 59$.
7. $z = 32(x^2 + y^2) + 3$, $z = 3 - 64x$.
8. $z = 4 - 6\left((x-1)^2 + y^2\right)$, $z = 12x - 8$.
9. $z = 2 - 4(x^2 + y^2)$, $z = 8x + 2$.
10. $z = 22\left((x-1)^2 + y^2\right) + 3$, $z = 47 - 44x$.
11. $z = 24(x^2 + y^2) + 1$, $z = 48x + 1$.
12. $z = 2 - 18\left((x+1)^2 + y^2\right)$, $z = -36x - 34$.
13. $z = -16(x^2 + y^2) - 1$, $z = -32x - 1$.
14. $z = 30\left((x+1)^2 + y^2\right) + 1$, $z = 60x + 61$.
15. $z = 26(x^2 + y^2) - 2$, $z = -52x - 2$.
16. $z = -2\left((x-1)^2 + y^2\right) - 1$, $z = 4x - 5$.
17. $z = -2(x^2 + y^2) - 1$, $z = 4y - 1$.
18. $z = 26\left((x-1)^2 + y^2\right) - 2$, $z = 50 - 52x$.
19. $z = 30(x^2 + y^2) + 1$, $z = 60y + 1$.
20. $z = -16\left((x+1)^2 + y^2\right) - 1$, $z = -32x - 33$.
21. $z = 2 - 18(x^2 + y^2)$, $z = 2 - 36y$.
22. $x = 24\left((x+1)^2 + y^2\right) + 1$, $z = 48x + 49$.
23. $z = 22(x^2 + y^2) + 3$, $z = 3 - 44y$.
24. $z = 2 - 4\left((x-1)^2 + y^2\right)$, $z = 8x - 6$.
25. $z = 4 - 6(x^2 + y^2)$, $z = 12y + 4$.
26. $z = 32\left((x-1)^2 + y^2\right) + 3$, $z = 67 - 64x$.
27. $z = 28(x^2 + y^2) + 3$, $z = 56y + 3$.
28. $z = 4 - 14\left((x+1)^2 + y^2\right)$, $z = -28x - 24$.
29. $z = 2 - 20(x^2 + y^2)$, $z = 2 - 40y$.
30. $z = 8\left((x+1)^2 + y^2\right) + 3$, $z = 16x + 19$.
31. $z = 10(x^2 + y^2) + 1$, $z = 1 - 20y$.

Задача 15. Найти объем тела, заданного неравенствами.

1. $1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 49$, $-\sqrt{\frac{x^2+y^2}{35}} \leqslant z \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$, $-x \leqslant y \leqslant 0$.
2. $4 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 64$, $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{15}} \leqslant z \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$, $-\sqrt{3}x \leqslant y \leqslant 0$.
3. $4 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 64$, $z \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$, $-\frac{x}{\sqrt{3}} \leqslant y \leqslant 0$.
4. $4 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 36$, $z \geqslant -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{63}}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{x}{\sqrt{3}}$.
5. $1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 36$, $z \geqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{99}}$, $-\sqrt{3}x \leqslant y \leqslant \sqrt{3}x$.

6. $25 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 100$, $z \leqslant -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{99}}$, $\sqrt{3}x \leqslant y \leqslant -\sqrt{3}x$.

7. $1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 49$, $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{24}}$, $y \leqslant -\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = -\sqrt{3}x$.

8. $25 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 121$, $-\sqrt{\frac{x^2+y^2}{24}} \leqslant z \leqslant 0$, $y \geqslant -x\sqrt{3}$, $y \geqslant -\sqrt{3}x$.

9. $4 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 64$, $-\sqrt{\frac{x^2+y^2}{35}} \leqslant z \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$. $x \leqslant y \leqslant 0$.

10. $16 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 100$, $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{15}} \leqslant z \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$, $\sqrt{3}x \leqslant y \leqslant 0$.

11. $16 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 100$, $z \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$, $-\sqrt{3}x \leqslant y \leqslant -\frac{x}{\sqrt{3}}$.

12. $16 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 64$, $z \geqslant -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{63}}$, $-\frac{x}{\sqrt{3}} \leqslant y \leqslant -\sqrt{3}x$.

13. $4 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 49$, $z \geqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{99}}$, $y \leqslant 0$, $y \leqslant \sqrt{3}x$.

14. $36 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 121$, $z \leqslant -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{99}}$, $y \geqslant \sqrt{3}x$, $y \geqslant 0$.

15. $4 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 64$, $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{24}}$, $y \leqslant \sqrt{3}x$, $y \leqslant \frac{x}{\sqrt{3}}$.

16. $36 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 144$, $-\sqrt{\frac{x^2+y^2}{24}} \leqslant z \leqslant 0$, $y \geqslant \sqrt{3}x$, $y \geqslant \frac{x}{\sqrt{3}}$.

17. $9 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 81$, $-\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} \leqslant z \leqslant \sqrt{\frac{(x^2+y^2)}{35}}$, $0 \leqslant y \leqslant -x$.

18. $36 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 144$, $-\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} \leqslant z \leqslant -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{15}}$, $0 \leqslant y \leqslant -\sqrt{3}x$.

19. $36 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 144$, $z \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$, $\sqrt{3}x \leqslant y \leqslant \frac{x}{\sqrt{3}}$.

20. $36 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 100$, $z \geqslant -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{63}}$, $\frac{x}{\sqrt{3}} \leqslant y \leqslant \sqrt{3}x$.

21. $9 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 64$, $z \geqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{99}}$, $y \leqslant \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y \leqslant -\frac{x}{\sqrt{3}}$.

22. $49 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 144$, $z \leqslant -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{99}}$, $y \geqslant \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y \geqslant -\frac{x}{\sqrt{3}}$.

23. $9 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 81$, $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{24}}$, $y \leqslant 0$, $y \leqslant \frac{x}{\sqrt{3}}$.

24. $49 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 169$, $-\sqrt{\frac{x^2+y^2}{24}} \leqslant z \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $y \geqslant \frac{x}{\sqrt{3}}$.

25. $16 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 100$, $-\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} \leqslant z \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{35}}$, $0 \leqslant y \leqslant x$.

26. $64 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 196$, $-\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} \leqslant z \leqslant -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{15}}$, $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{3}x$.

27. $64 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 196$, $z \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$, $\frac{x}{\sqrt{3}} \leqslant y \leqslant 0$.

28. $64 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 144$, $z \geqslant -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{63}}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{x}{\sqrt{3}}$.

29. $16 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 81$, $z \geqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{99}}$, $y \leqslant 0$, $y \leqslant -\sqrt{3}x$.

30. $64 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 169$, $z \leqslant -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{99}}$, $y \geqslant 0$, $y \geqslant -\sqrt{3}x$.

31. $16 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 100$, $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{24}}$, $y \leqslant 0$, $y \leqslant -\frac{x}{\sqrt{3}}$.

Задача 16. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ — плотность. Найти массу тела.

1. $64(x^2+y^2) = z^2$, $x^2+y^2=4$, $y=0$, $z=0$ ($y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$), $\mu = \frac{5(x^2+y^2)}{4}$.
2. $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=1$ ($x^2+y^2 \leqslant 1$), $x=0$ ($x \geqslant 0$); $\mu = 4|z|$.
3. $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=2z$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$); $\mu = 10x$.
4. $x^2+y^2=\frac{16}{49}z^2$, $x^2+y^2=\frac{4}{7}z$, $x=0$, $y=0$ ($x \geqslant 0$, $y \geq 0$); $\mu = 80yz$.
5. $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2=4z^2$, $x=0$, $y=0$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$); $\mu = 20z$.
6. $36(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=1$, $x=0$, $z=0$ ($x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$); $\mu = \frac{5}{6}(x^2+y^2)$.
7. $x^2+y^2+z^2=16$, $x^2+y^2=4$ ($x^2+y^2 \leqslant 4$); $\mu = 2|z|$.
8. $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=8z$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$); $\mu = 5x$.
9. $x^2+y^2=\frac{4}{25}z^2$, $x^2+y^2=\frac{2}{5}z$, $x=0$, $y=0$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$); $\mu = 28xz$.
10. $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=z^2$, $x=0$, $y=0$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$); $\mu = 6z$.
11. $25(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$); $\mu = 2(x^2+y^2)$.
12. $x^2+y^2+z^2=9$, $x^2+y^2=4$ ($x^2+y^2 \leqslant 4$), $y=0$ ($y \geqslant 0$); $\mu = |z|$.
13. $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=6z$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$); $\mu = 90y$.

14. $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{25}$, $x^2 + y^2 = \frac{z}{5}$, $x = 0$, $y = 0$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$); $\mu = 14yz$.

15. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9z^2$, $x = 0$, $y = 0$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$); $\mu = 10z$.

16. $9(x^2 + y^2) = z^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$); $\mu = \frac{5(x^2+y^2)}{3}$.

17. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 1$ ($x^2 + y^2 \leqslant 1$); $\mu = 6|z|$.

18. $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = z$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$); $\mu = 10y$.

19. $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{49}$, $x^2 + y^2 = \frac{z}{7}$, $x = 0$, $y = 0$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$); $\mu = 10xz$.

20. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 4z^2$, $x = 0$, $y = 0$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$); $\mu = 10z$.

21. $16(x^2 + y^2) = z^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$); $\mu = 5(x^2 + y^2)$.

22. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 = 4$ ($x^2 + y^2 \leqslant 4$); $\mu = |z|$.

23. $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 4z$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ($x \geqslant 0$, $y \geq 0$); $\mu = 5y$.

24. $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 = z$, $x = 0$, $y = 0$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$); $\mu = 35yz$.

25. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 = z^2$, $x = 0$, $y = 0$ ($x \geq 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$); $\mu = 32z$.

26. $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$); $\mu = \frac{5(x^2+y^2)}{2}$.

27. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 4$ ($x^2 + y^2 \leqslant 4$), $z = 0$ ($z \geqslant 0$); $\mu = 2z$.

28. $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 3z$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$), $\mu = 15x$.

29. $x^2 + y^2 = \frac{4z^2}{49}$, $x^2 + y^2 = \frac{2z}{7}$, $x = 0$, $y = 0$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$); $\mu = 20xz$.

30. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 = 9z^2$, $x = 0$, $y = 0$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$); $\mu = 5z$.

31. $4(x^2 + y^2) = z^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $y = 0$, $z = 0$ ($y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$); $\mu = 10(x^2 + y^2)$.

Раздел 8

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

§ 8.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1) Скалярное поле. Производная по направлению.

2) Градиент, его свойства. Инвариантное определение градиента.

3) Векторное поле. Поток векторного поля через поверхность, его физический смысл.

4) Формула Остроградского.

5) Дивергенция векторного поля, ее физический смысл. Инвариантное определение дивергенции. Свойства дивергенции.

6) Соленоидальное поле, его основные свойства.

7) Линейный интеграл в векторном поле, его свойства и физический смысл.

8) Циркуляция векторного поля, ее гидродинамический смысл.

9) Формула Стокса.

10) Ротор векторного поля, его свойства. Инвариантное определение ротора.

11) Условия независимости линейного интеграла от формы пути интегрирования.

12) Потенциальное поле. Условия потенциальности.

§ 8.2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1) Найти производную скалярного поля $u = u(x, y, z)$ по направлению градиента скалярного поля $v = v(x, y, z)$.

2) Найти градиент скалярного поля $u = \boldsymbol{C}\boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{C}$ — постоянный вектор, а $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор. Каковы поверхности

уровня этого поля и как они расположены по отношению к вектору $\boldsymbol{C}$?

3) Доказать, что если S — замкнутая кусочно-гладкая поверхность и $\boldsymbol{C}$ — ненулевой постоянный вектор, то

$$\oint\!\!\oint_S \cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{C}})\,dS = 0,$$

где n — вектор, нормальный к поверхности S.

4) Доказать формулу

$$\oint\!\!\oint_S \varphi \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}^0\,dS = \iiint_V (\varphi \operatorname{div} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \operatorname{grad} \varphi)\,dV,$$

где $\varphi = \varphi(x, y, z)$; S — поверхность, ограничивающая объем V; $\boldsymbol{n}^0$ — орт внешней нормали к поверхности S. Установить условия применимости формулы.

5) Доказать, что если функция $u(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad \text{то} \quad \oint\!\!\oint_S \frac{\partial u}{\partial n}\,dS = 0,$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по направлению нормали к кусочно-гладкой замкнутой поверхности S.

6) Доказать, что если функция $u(x, y, z)$ является многочленом второй степени и S — кусочно-гладкая замкнутая поверхность, то интеграл $\oint\!\!\oint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS$ пропорционален объему, ограниченному поверхностью S.

7) Пусть $\boldsymbol{a} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$, где P, Q, R — линейные функции от x, y, z, и пусть Γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая, расположенная в некоторой плоскости. Доказать, что если циркуляция $\oint_\Gamma \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}$ отлична от нуля, то она пропорциональна площади фигуры, ограниченной контуром Γ.

8) Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси, проходящей через начало координат. Вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j} + \omega_z\boldsymbol{k}$. Определить ротор и дивергенцию поля линейных скоростей $\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]$ точек тела (здесь $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор).

§ 8.3. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке M по направлению проходящей через эту точку нормали к поверхности S, образующей острый угол с положительным направлением оси Oz.

1. $u = 4\ln(3 + x^2) - 8xyz$, S: $x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1$, $M(1, 1, 1)$.
2. $u = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}$; S: $4z + 2x^2 - y^2 = 8$, $M(2, 4, 4)$.
3. $u = -2\ln(x^2 - 5) - 4xyz$, S: $x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 1$, $M(1, 1, 1)$.
4. $u = \frac{1}{4}x^2y - \sqrt{x^2 + 5z^2}$, S: $z^2 = x^2 + 4y^2 - 4$, $M\left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$.
5. $u = xz^2 - \sqrt{x^3y}$, S: $x^2 - y^2 - 3z + 12 = 0$, $M(2, 2, 4)$.
6. $u = x\sqrt{y} - yz^2$, S: $x^2 + y^2 = 4z + 9$, $M(2, 1, -1)$.
7. $u = 7\ln(\frac{1}{13} + x^2) - 4xyz$, S: $7x^2 - 4y^2 + 4z^2 = 7$, $M(1, 1, 1)$.
8. $u = \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) + xz$, S: $x^2 + y^2 - 2z = 10$, $M(2, 2, -1)$.
9. $u = \ln(1 + x^2) - xy\sqrt{z}$, S: $4x^2 - y^2 + z^2 = 16$, $M(1, -2, 4)$.
10. $u = \sqrt{x^2 + y^2} - z$, S: $x^2 + y^2 = 24z + 1$, $M(3, 4, 1)$.
11. $u = x\sqrt{y} - (z + y)\sqrt{x}$, S: $x^2 - y^2 + z^2 = 4$, $M(1, 1, -2)$.
12. $u = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}$, S: $z = x^2 - y^2$, $M(1, 1, 0)$.
13. $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$, S: $2x^2 - y^2 + z^2 - 7 = 0$, $M(0, -3, 4)$.
14. $u = \ln(1 + x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + z^2}$, S: $x^2 - 6x + 9y^2 + z^2 = 4z + 23$, $M(3, 0, -4)$.

Найти производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке M по направлению вектора $\boldsymbol{l}$.

15. $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$, $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $M(1, 1, 1)$.
16. $u = x + \ln(z^2 + y^2)$, $\boldsymbol{l} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $M(2, 1, 1)$.
17. $u = x^2y - \sqrt{xy + z^2}$, $\boldsymbol{l} = 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, $M(1, 5, -2)$.
18. $u = y\ln(1 + x^2) - \operatorname{arctg} z$, $\boldsymbol{l} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, $M(0, 1, 1)$.
19. $u = x(\ln y - \operatorname{arctg} z)$, $\boldsymbol{l} = 8\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$, $M(-2, 1, -1)$.
20. $u = \ln(3 - x^2) + xy^2z$, $\boldsymbol{l} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, $M(1, 3, 2)$.
21. $u = \sin(x + 2y) + \sqrt{xyz}$, $\boldsymbol{l} = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$, $M(\pi/2, 3\pi/2, 3)$.
22. $u = x^2y^2z - \ln(z - 1)$, $\boldsymbol{l} = 5\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 2\sqrt{5}\boldsymbol{k}$, $M(1, 1, 2)$.
23. $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}$, $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $M(1, -3, 4)$.
24. $u = \frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{yz}{x + \sqrt{y}}$, $\boldsymbol{l} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$, $M(4, 1, -2)$.
25. $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}$, $\boldsymbol{l} = -2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $M(1, 1, 0)$.
26. $u = 2\sqrt{x + y} + y\operatorname{arctg} z$, $\boldsymbol{l} = 4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{k}$, $M(3, -2, 1)$.
27. $u = z^2 + 2\operatorname{arctg}(x - y)$, $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, $M(1, 2, -1)$.
28. $u = \ln(x^2 + y^2) + xyz$, $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$, $M(1, -1, 2)$.

29. $u = xy - \frac{x}{z}$, $\boldsymbol{l} = 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $M(-4, 3, -1)$.

30. $u = \ln\left(x + \sqrt{y^2 + z^2}\right)$, $\boldsymbol{l} = -2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $M(1, -3, 4)$.

31. $u = x^2 - \operatorname{arctg}(y + z)$, $\boldsymbol{l} = 3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$, $M(2, 1, 1)$.

Задача 2. Найти угол между градиентами скалярных полей $u(x, y, z)$ и $\nu(x, y, z)$ в точке M.

1. $\nu = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$, $u = \frac{yz^2}{x^2}$, $M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
2. $\nu = \frac{4\sqrt{6}}{x} - \frac{\sqrt{6}}{9y} + \frac{3}{z}$, $u = x^2yz^3$, $M\left(2, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.
3. $\nu = 9\sqrt{2}x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}}$, $u = \frac{z^3}{xy^2}$, $M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.
4. $\nu = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}$, $u = \frac{z}{x^3y^2}$, $M\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.
5. $\nu = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$, $u = \frac{x^2}{yz^2}$, $M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
6. $\nu = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2$, $u = \frac{z^2}{xy^2}$, $M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.
7. $\nu = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3$, $u = \frac{xz^2}{y}$, $M\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 1\right)$
8. $\nu = \frac{\sqrt{6}}{2x} - \frac{\sqrt{6}}{2y} + \frac{2}{3z}$, $u = \frac{yz^2}{x}$, $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
9. $\nu = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2$, $u = \frac{xy^2}{z^2}$, $M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.
10. $\nu = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}$, $u = \frac{x^3y^2}{z}$, $M\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.
11. $\nu = -\frac{4\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{9y} + \frac{1}{\sqrt{3}z}$, $u = \frac{1}{x^2yz}$, $M\left(2, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.
12. $\nu = \frac{6}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z}$, $u = \frac{x^2}{y^2z^3}$, $M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
13. $\nu = x^2 + 9y^2 + 6z^2$, $u = xyz$, $M\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.
14. $\nu = \frac{2}{x} + \frac{3}{2y} - \frac{\sqrt{6}}{4z}$, $u = \frac{y^3}{x^2z}$, $M\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\right)$.
15. $\nu = \sqrt{2}x^2 - \frac{3y^2}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2}z^2$, $u = xy^2z$, $M\left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.
16. $\nu = -\frac{\sqrt{6}}{2x} + \frac{\sqrt{6}}{2y} - \frac{2}{3z}$, $u = \frac{x}{yz^2}$, $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
17. $\nu = \frac{6}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z}$, $u = \frac{y^2z^3}{x^2}$, $M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
18. $\nu = \frac{1}{\sqrt{2}x} - \frac{2\sqrt{2}}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2z}$, $u = \frac{y^2z^3}{x}$, $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
19. $\nu = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3$, $u = \frac{y}{xz^2}$, $M\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 1\right)$.
20. $\nu = x^2 - y^2 - 3z^2$, $u = \frac{yz^2}{x}$, $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

21. $\nu = \frac{3x^2}{\sqrt{2}} - \frac{y^2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}z^2$, $u = \frac{z^2}{x^2y^2}$, $M\left(\frac{2}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

22. $\nu = \frac{x^3}{\sqrt{2}} - \frac{y^3}{\sqrt{2}} - \frac{8z^3}{\sqrt{3}}$, $u = \frac{x^2}{y^2z^3}$, $M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

23. $\nu = \frac{3}{2}x^2 + 3y^2 - 2z^2$, $u = x^2yz^3$, $M\left(2, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

24. $\nu = 9\sqrt{2}x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}}$, $u = \frac{xy^2}{z^3}$, $M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

25. $\nu = \sqrt{2}x^2 - \frac{3y^2}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2}z^2$, $u = \frac{1}{xy^2z}$, $M\left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

26. $\nu = x^2 + 9y^2 + 6z^2$, $u = \frac{1}{xyz}$, $M\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

27. $\nu = \frac{1}{\sqrt{2}x} - \frac{2\sqrt{2}}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2z}$, $u = \frac{x}{y^2z^3}$, $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

28. $\nu = -\frac{4\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{9y} + \frac{1}{\sqrt{3}x}$, $u = x^2yz$, $M\left(2, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

29. $\nu = \frac{x^3}{\sqrt{2}} - \frac{y^3}{\sqrt{2}} - \frac{8z^3}{\sqrt{3}}$, $u = \frac{y^2z^3}{x^2}$, $M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

30. $\nu = -\frac{3x^3}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}y^3}{3} + 8\sqrt{3}z^3$, $u = \frac{x^2z}{y^3}$, $M\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\right)$.

31. $\nu = x^2 - y^2 - 3z^2$, $u = \frac{x}{yz^2}$, $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Задача 3. Найти векторные линии в векторном поле $\boldsymbol{a}$.

1. $\boldsymbol{a} = 4y\boldsymbol{i} - 9x\boldsymbol{j}$.
2. $\boldsymbol{a} = 2y\boldsymbol{i} + 3x\boldsymbol{j}$.
3. $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + 4y\boldsymbol{j}$.
4. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + 3y\boldsymbol{j}$.
5. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + 4y\boldsymbol{j}$.
6. $\boldsymbol{a} = 3x\boldsymbol{i} + 6z\boldsymbol{k}$.
7. $\boldsymbol{a} = 4z\boldsymbol{i} - 9x\boldsymbol{k}$.
8. $\boldsymbol{a} = 2z\boldsymbol{i} + 3x\boldsymbol{k}$.
9. $\boldsymbol{a} = 4y\boldsymbol{j} + 8z\boldsymbol{k}$.
10. $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{j} + 3z\boldsymbol{k}$.
11. $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + 8z\boldsymbol{k}$.
12. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + 3z\boldsymbol{k}$.
13. $\boldsymbol{a} = 4z\boldsymbol{j} - 9y\boldsymbol{k}$.
14. $\boldsymbol{a} = 2z\boldsymbol{j} + 3y\boldsymbol{k}$.
15. $\boldsymbol{a} = 5x\boldsymbol{i} + 10y\boldsymbol{j}$.
16. $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + 6y\boldsymbol{j}$.
17. $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{j} + 4z\boldsymbol{k}$.
18. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$.
19. $\boldsymbol{a} = 9y\boldsymbol{i} - 4x\boldsymbol{j}$.
20. $\boldsymbol{a} = 5y\boldsymbol{i} + 7x\boldsymbol{j}$.
21. $\boldsymbol{a} = 6x\boldsymbol{i} + 12z\boldsymbol{k}$.
22. $\boldsymbol{a} = 2y\boldsymbol{j} + 6z\boldsymbol{k}$.
23. $\boldsymbol{a} = 4x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$.
24. $\boldsymbol{a} = 9z\boldsymbol{i} - 4x\boldsymbol{k}$.
25. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{k}$.
26. $\boldsymbol{a} = 5z\boldsymbol{i} + 7x\boldsymbol{k}$.
27. $\boldsymbol{a} = 7y\boldsymbol{j} + 14z\boldsymbol{k}$.
28. $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + 6z\boldsymbol{k}$.
29. $\boldsymbol{a} = 4x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{k}$.
30. $\boldsymbol{a} = 5z\boldsymbol{j} + 7y\boldsymbol{k}$.
31. $\boldsymbol{a} = 9z\boldsymbol{j} - 4y\boldsymbol{k}$.

Задача 4. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a}$ через часть поверхности S, вырезаемую плоскостями P_1, P_2 (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

1. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $S\colon x^2 + y^2 = 1$, $P_1\colon z = 0$, $P_2\colon z = 2$.
2. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$, $S\colon x^2 + y^2 = 1$, $P_1\colon z = 0$, $P_2\colon z = 4$.
3. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$, $S\colon x^2 + y^2 = 1$, $P_1\colon z = 0$, $P_2\colon z = 3$.

4. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z^3\boldsymbol{k}$, $S\colon x^2 + y^2 = 1$, $P_1\colon z = 0$, $P_2\colon z = 1$.
5. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + xyz\boldsymbol{k}$, $S\colon x^2 + y^2 = 1$, $P_1\colon z = 0$, $P_2\colon z = 5$.
6. $\boldsymbol{a} = (x - y)\boldsymbol{i} + (x + y)\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$, $S\colon x^2 + y^2 = 1$, $P_1\colon z = 0$, $P_2\colon z = 2$.
7. $\boldsymbol{a} = (x + y)\boldsymbol{i} - (x - y)\boldsymbol{j} + xyz\boldsymbol{k}$, $S\colon x^2 + y^2 = 1$, $P_1\colon z = 0$, $P_2\colon z = 4$.
8. $\boldsymbol{a} = (x^3 + xy^2)\boldsymbol{i} + (y^3 + x^2y)\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$, $S\colon x^2 + y^2 = 1$, $P_1\colon z = 0$, $P_2\colon z = 3$.
9. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + \sin z\boldsymbol{k}$, $S\colon x^2 + y^2 = 1$, $P_1\colon z = 0$, $P_2\colon z = 5$.
10. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $S\colon x^2 + y^2 = 1$, $P_1\colon z = 0$, $P_2\colon z = 1$.

Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a}$ через часть поверхности S, вырезаемую плоскостью P (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

11. $\boldsymbol{a} = (x + xy^2)\boldsymbol{i} + (y - yx^2)\boldsymbol{j} + (z - 3)\boldsymbol{k}$, $S\colon x^2 + y^2 = z^2$ $(z \geqslant 0)$, $P\colon z = 1$.
12. $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $S\colon x^2 + y^2 = z^2$ $(z \geqslant 0)$, $P\colon z = 4$.
13. $\boldsymbol{a} = xy\boldsymbol{i} - x^2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, $S\colon x^2 + y^2 = z^2$ $(z \geqslant 0)$, $P\colon z = 1$.
14. $\boldsymbol{a} = xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + (z^2 - 1)\boldsymbol{k}$, $S\colon x^2 + y^2 = z^2$ $(z \geqslant 0)$, $P\colon z = 4$.
15. $\boldsymbol{a} = y^2x\boldsymbol{i} - yx^2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $S\colon x^2 + y^2 = z^2$ $(z \geqslant 0)$, $P\colon z = 5$.
16. $\boldsymbol{a} = (xz + y)\boldsymbol{i} + (yz - x)\boldsymbol{j} + (z^2 - 2)\boldsymbol{k}$, $S\colon x^2 + y^2 = z^2$ $(z \geqslant 0)$, $P\colon z = 3$.
17. $\boldsymbol{a} = xyz\boldsymbol{i} - x^2z\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, $S\colon x^2 + y^2 = z^2$ $(z \geqslant 0)$, $P\colon z = 2$.
18. $\boldsymbol{a} = (x + xy)\boldsymbol{i} + (y - x^2)\boldsymbol{j} + (z - 1)\boldsymbol{k}$, $S\colon x^2 + y^2 = z^2$ $(z \geqslant 0)$, $P\colon z = 3$.
19. $\boldsymbol{a} = (x + y)\boldsymbol{i} + (y - x)\boldsymbol{j} + (z - 2)\boldsymbol{k}$, $S\colon x^2 + y^2 = z^2$ $(z \geqslant 0)$, $P\colon z = 2$.
20. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + (z - 2)\boldsymbol{k}$, $S\colon x^2 + y^2 = z^2$ $(z \geqslant 0)$, $P\colon z = 1$.
21. $\boldsymbol{a} = (x + xz)\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + (z - x^2)\boldsymbol{k}$, $S\colon x^2 + y^2 + z^2 = 4$ $(z \geqslant 0)$, $P\colon z = 0$.
22. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + (y + yz^2)\boldsymbol{j} + (z - zy^2)\boldsymbol{k}$, $S\colon x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $P\colon z = 0$ $(z \geqslant 0)$.
23. $\boldsymbol{a} = (x + z)\boldsymbol{i} + (y + z)\boldsymbol{j} + (z - x - y)\boldsymbol{k}$, $S\colon x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $P\colon z = 0$ $(z \geqslant 0)$.
24. $\boldsymbol{a} = (x + xy)\boldsymbol{i} + (y - x^2)\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $S\colon x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $P\colon z = 0$ $(z \geqslant 0)$.
25. $\boldsymbol{a} = (x + z) + y\boldsymbol{j} + (z - x)\boldsymbol{k}$, $S\colon x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $P\colon z = 0$ $(z \geqslant 0)$.

26. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + (y + yz)\boldsymbol{j} + (z - y^2)\boldsymbol{k}$, S: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, P: $z = 0$ $(z \geqslant 0)$.
27. $\boldsymbol{a} = (x - y)\boldsymbol{i} + (x + y)\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, S: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, P: $z = 0$ $(z \geqslant 0)$.
28. $\boldsymbol{a} = (x + xz^2)\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + (z - zx^2)\boldsymbol{k}$, S: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, P: $z = 0$ $(z \geqslant 0)$.
29. $\boldsymbol{a} = (x + y)\boldsymbol{i} + (y - x)\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, S: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, P: $z = 0$ $(z \geqslant 0)$.
30. $\boldsymbol{a} = (x + xy^2)\boldsymbol{i} + (y - yx^2)\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, S: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, P: $z = 0$ $(z \geqslant 0)$.
31. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + (y + z)\boldsymbol{j} + (z - y)\boldsymbol{k}$, S: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, P: $z = 0$ $(z \geqslant 0)$.

Задача 5. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a}$ через часть плоскости P, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz.

1. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, P: $x + y + z = 1$.
2. $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, P: $x + y + z = 1$.
3. $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, P: $x + y + z = 1$.
4. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + 3y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$, P: $x + y + z = 1$.
5. $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + 3y\boldsymbol{j}$, P: $x + y + z = 1$.
6. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, P: $\frac{x}{2} + y + z = 1$.
7. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, P: $\frac{x}{2} + y + z = 1$.
8. $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{j} + 3z\boldsymbol{k}$, P: $\frac{x}{2} + y + z = 1$.
9. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, P: $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.
10. $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, P: $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.
11. $\boldsymbol{a} = 3x\boldsymbol{i} + 2z\boldsymbol{k}$, P: $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.
12. $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + 3y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, P: $\frac{x}{3} + y + \frac{z}{2} = 1$.
13. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + 3y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$, P: $\frac{x}{3} + y + \frac{z}{2} = 1$.
14. $\boldsymbol{a} = -2x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + 4z\boldsymbol{k}$, P: $\frac{x}{3} + y + \frac{z}{2} = 1$.
15. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} + 6z\boldsymbol{k}$, P: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = 1$.
16. $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + 5y\boldsymbol{j} + 5z\boldsymbol{k}$, P: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = 1$.
17. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, P: $2x + \frac{y}{2} + z = 1$.
18. $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - 2z\boldsymbol{k}$, P: $2x + \frac{y}{2} + z = 1$.
19. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$, P: $2x + \frac{y}{2} + z = 1$.
20. $\boldsymbol{a} = -x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + 12z\boldsymbol{k}$, P: $2x + \frac{y}{2} + z = 1$.
21. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + 3y\boldsymbol{j} + 8z\boldsymbol{k}$, P: $x + 2y + \frac{z}{2} = 1$.
22. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} + 6z\boldsymbol{k}$, P: $x + 2y + \frac{z}{2} = 1$.

23. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 5z\boldsymbol{k}$, $P\colon x + 2y + \frac{z}{2} = 1$.
24. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + 4y\boldsymbol{j} + 5z\boldsymbol{k}$, $P\colon x + 2y + \frac{z}{2} = 1$.
25. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $P\colon 2x + 3y + z = 1$.
26. $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $P\colon 2x + 3y + z = 1$.
27. $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + 3y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $P\colon 2x + 3y + z = 1$.
28. $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + 3y\boldsymbol{j} + 4z\boldsymbol{k}$, $P\colon 2x + 3y + z = 1$.
29. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + 9y\boldsymbol{j} + 8z\boldsymbol{k}$, $P\colon x + 2y + 3z = 1$.
30. $\boldsymbol{a} = 8x\boldsymbol{i} + 11y\boldsymbol{j} + 17z\boldsymbol{k}$, $P\colon x + 2y + 3z = 1$.
31. $\boldsymbol{a} = -x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $P\colon x + 2y + 3z = 1$.

Задача 6. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a}$ через часть плоскости P, расположенную в I октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

1. $\boldsymbol{a} = 7x\boldsymbol{i} + (5\pi y + 2)\boldsymbol{j} + 4\pi z\boldsymbol{k}$, $P\colon x + \frac{y}{2} + 4z = 1$.
2. $\boldsymbol{a} = 2\pi x\boldsymbol{i} + (7y + 2)\boldsymbol{j} + 7\pi z\boldsymbol{k}$, $P\colon x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.
3. $\boldsymbol{a} = 9\pi x\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 3z\boldsymbol{k}$, $P\colon \frac{x}{3} + y + z = 1$.
4. $\boldsymbol{a} = (2x + 1)\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} + 3\pi z\boldsymbol{k}$, $P\colon \frac{x}{3} + y + 2z = 1$.
5. $\boldsymbol{a} = 7x\boldsymbol{i} + 9\pi y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $P\colon x + \frac{y}{3} + z = 1$.
6. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 5y\boldsymbol{j} + 11\pi z\boldsymbol{k}$, $P\colon x + y + \frac{z}{3} = 1$.
7. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + (\pi z - 1)\boldsymbol{k}$, $P\colon 2x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.
8. $\boldsymbol{a} = 5\pi x\boldsymbol{i} + (9y + 1)\boldsymbol{j} + 4\pi z\boldsymbol{k}$, $P\colon \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$.
9. $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} + \frac{3\pi}{2}z\boldsymbol{k}$, $P\colon \frac{x}{3} + y + \frac{z}{4} = 1$.
10. $\boldsymbol{a} = 9\pi x\boldsymbol{i} + (5y + 1)\boldsymbol{j} + 2\pi z\boldsymbol{k}$, $P\colon 3x + y + \frac{z}{9} = 1$.
11. $\boldsymbol{a} = 7\pi x\boldsymbol{i} + 2\pi y\boldsymbol{j} + (7z + 2)\boldsymbol{k}$, $P\colon x + y + \frac{z}{2} = 1$.
12. $\boldsymbol{a} = \pi y\boldsymbol{j} + (4 - 2z)\boldsymbol{k}$, $P\colon 2x + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$.
13. $\boldsymbol{a} = (3\pi - 1)x\boldsymbol{i} + (9\pi y + 1)\boldsymbol{j} + 6\pi z\boldsymbol{k}$, $P\colon \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{9} = 1$.
14. $\boldsymbol{a} = \pi x\boldsymbol{i} + \frac{\pi}{2}y\boldsymbol{j} + (4 - 2z)\boldsymbol{k}$, $P\colon x + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$.
15. $\boldsymbol{a} = (5y + 3)\boldsymbol{j} + 11\pi z\boldsymbol{k}$, $P\colon x + \frac{y}{3} + 4z = 1$.
16. $\boldsymbol{a} = 9\pi y\boldsymbol{j} + (7z + 1)\boldsymbol{k}$, $P\colon x + y + z = 1$.
17. $\boldsymbol{a} = \pi y\boldsymbol{j} + (1 - 2z)\boldsymbol{k}$, $P\colon \frac{x}{4} + \frac{y}{3} + z = 1$.
18. $\boldsymbol{a} = (27\pi - 1)x\boldsymbol{i} + (34\pi y + 3)\boldsymbol{j} + 20\pi z\boldsymbol{k}$, $P\colon 3x + \frac{y}{9} + z = 1$.
19. $\boldsymbol{a} = \pi x\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\pi z\boldsymbol{k}$, $P\colon \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = 1$.
20. $\boldsymbol{a} = 4\pi x\boldsymbol{i} + 7\pi y\boldsymbol{j} + (2z + 1)\boldsymbol{k}$, $P\colon 2x + \frac{y}{3} + 2z = 1$.
21. $\boldsymbol{a} = 3\pi x\boldsymbol{i} + 6\pi y\boldsymbol{j} + 10\boldsymbol{k}$, $P\colon 2x + y + \frac{z}{3} = 1$.
22. $\boldsymbol{a} = \pi x\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $P\colon 2x + \frac{y}{6} + z = 1$.
23. $\boldsymbol{a} = (21\pi - 1)x\boldsymbol{i} + 62\pi y\boldsymbol{j} + (1 - 2\pi z)\boldsymbol{k}$, $P\colon 8x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.
24. $\boldsymbol{a} = \pi x\boldsymbol{i} + 2\pi y\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $P\colon \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$.
25. $\boldsymbol{a} = 9\pi x\boldsymbol{i} + 2\pi y\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$, $P\colon 2x + 8y + \frac{z}{3} = 1$.

26. $a = 7\pi x i + (4y+1) j + 2\pi z k$, P: $\frac{x}{3} + 2y + z = 1$.
27. $a = 6\pi x i + 3\pi y j + 10 k$, P: $2x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.
28. $a = (\pi - 1) x i + 2\pi y j + (1 - \pi z) k$, P: $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.
29. $a = \frac{\pi}{2} x i + \pi y j + (4 - 2z) k$, P: $x + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$.
30. $a = 7\pi x i + 4\pi y j + 2(z+1) k$, P: $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + z = 1$.
31. $a = 5\pi x i + (1 - 2y) j + 4\pi z k$, P: $\frac{x}{2} + 4y + \frac{z}{3} = 1$.

Задача 7. Найти поток векторного поля a через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя).

1. $a = (e^x + 2x) i + e^x j + e^y k$, S: $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
2. $a = (3z^2 + x) i + (e^x - 2y) j + (2z - xy) k$, S: $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$, $z = 4$.
3. $a = (\ln y + 7x) i + (\sin z - 2y) j + (e^y - 2z) k$, S: $x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y + 2z - 2$.
4. $a = (\cos z + 3x) i + (x - 2y) j + (3z + y^2) k$, S: $z^2 = 36(x^2 + y^2)$, $z = 6$.
5. $a = (e^{-z} - x) i + (xz + 3y) j + (z + x^2) k$, S: $2x + y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
6. $a = (6x - \cos y) i - (e^x + z) j - (2y + 3z) k$, S: $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$, $z = 2$.
7. $a = (4x - 2y^2) i + (\ln z - 4y) j + \left(x + \frac{3z}{4}\right) k$, S: $x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 3$.
8. $a = (1 + \sqrt{z}) i + (4y - \sqrt{x}) j + xy k$, S: $z^2 = 4(x^2 + y^2)$, $z = 3$.
9. $a = (\sqrt{z} - x) i + (x - y) j + (y^2 - z) k$, S: $3x - 2y + z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
10. $a = (yz + x) i + (x^2 + y) j + (xy^2 + z) k$, S: $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.
11. $a = (e^{2y} + x) i + (x - 2y) j + (y^2 + 3z) k$, S: $x - y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
12. $a = (\sqrt{z} - 2x) i + (e^x + 3y) j + \sqrt{y + x} k$, S: $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 2$, $z = 5$.
13. $a = \left(e^x + \frac{x}{4}\right) i + \left(\ln x + \frac{y}{4}\right) j + \frac{z}{4} k$, S: $x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y - 2z - 2$.
14. $a = (3x - 2z) i + (z - 2y) j + (1 + 2z) k$, S: $z^2 = 4(x^2 + y^2)$, $z = 2$.
15. $a = (e^y + 2x) i + (x - y) j + (2z - 1) k$, S: $x + 2y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

16. $\boldsymbol{a} = (x + y^2)\boldsymbol{i} + (xz + y)\boldsymbol{j} + (\sqrt{x^2 + 1} + z)\boldsymbol{k}$, S: $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 2$, $z = 3$.

17. $\boldsymbol{a} = (e^y + 2x)\boldsymbol{i} + (xz - y)\boldsymbol{j} + \frac{1}{4}(e^{xy} - z)\boldsymbol{k}$,
S: $x^2 + y^2 + z^2 = 2y + 3$.

18. $\boldsymbol{a} = (\sqrt{z} + y)\boldsymbol{i} + 3x\boldsymbol{j} + (3z + 5x)\boldsymbol{k}$, S: $z^2 = 8(x^2 + y^2)$, $z = 2$.

19. $\boldsymbol{a} = (8yz - x)\boldsymbol{i} + (x^2 - 1)\boldsymbol{j} + (xy - 2z)\boldsymbol{k}$, S: $2x + 3y - z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

20. $\boldsymbol{a} = (y + z^2)\boldsymbol{i} + (x^2 + 3y)\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$, S: $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$.

21. $\boldsymbol{a} = (2yz - x)\boldsymbol{i} + (xz + 2y)\boldsymbol{j} + (x^2 + z)\boldsymbol{k}$, S: $y - x + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

22. $\boldsymbol{a} = (\sin z + 2x)\boldsymbol{i} + (\sin x - 3y)\boldsymbol{j} + (\sin y + 2z)\boldsymbol{k}$, S: $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 3$, $z = 6$.

23. $\boldsymbol{a} = \left(\cos z + \frac{x}{4}\right)\boldsymbol{i} + \left(e^x + \frac{y}{4}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{z}{4} - 1\right)\boldsymbol{k}$,
$S: x^2 + y^2 + z^2 = 2z + 3$.

24. $\boldsymbol{a} = (\sqrt{z} + 1 + x)\boldsymbol{i} + (2x + y)\boldsymbol{j} + (\sin x + z)\boldsymbol{k}$,

$$S\colon \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, \\ z = 1. \end{cases}$$

25. $\boldsymbol{a} = (5x - 6y)\boldsymbol{i} + (11x^2 + 2y)\boldsymbol{j} + (x^2 - 4z)\boldsymbol{k}$

$$S\colon \begin{cases} x + y + 2z = 2, \\ x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0. \end{cases}$$

26. $\boldsymbol{a} = (y^2 + z^2 + 6x)\boldsymbol{i} + (e^x - 2y + x)\boldsymbol{j} + (x + y - z)\boldsymbol{k}$,

$$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = 1, \quad z = 3. \end{cases}$$

27. $\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}(x + z)\boldsymbol{i} + \frac{1}{4}(xz - y)\boldsymbol{j} + (xy - 2)\boldsymbol{k}$,
S: $x^2 + y^2 + z^2 = 4x - 2y + 4z - 8$.

28. $\boldsymbol{a} = (3yz - x)\boldsymbol{i} + (x^2 - y)\boldsymbol{j} + (6z - 1)\boldsymbol{k}$,

$$S\colon \begin{cases} z^2 = 9(x^2 + y^2), \\ z = 3. \end{cases}$$

29. $\boldsymbol{a} = (yz - 2x)\boldsymbol{i} + (\sin x + y)\boldsymbol{j} + (x - 2z)\boldsymbol{k}$,

$$S\colon \begin{cases} x + 2y - 3z = 6, \\ x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0. \end{cases}$$

30. $\boldsymbol{a} = (8x + 1)\boldsymbol{i} + (zx - 4y)\boldsymbol{j} + (e^x - z)\boldsymbol{k}$,
S: $x^2 + y^2 + z^2 = 2y$.

31. $\boldsymbol{a} = (2y - 5x)\boldsymbol{i} + (x - 1)\boldsymbol{j} + (2\sqrt{xy} + 2z)\boldsymbol{k}$,

$$S\colon \begin{cases} 2x + 2y - z = 4, \\ x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0. \end{cases}$$

Задача 8. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя).

1. $\boldsymbol{a} = (x+z)\boldsymbol{i} + (z+y)\boldsymbol{k}$,
$S\colon \begin{cases} x^2+y^2=9, \\ z=x, \quad z=0 \quad (z \geqslant 0). \end{cases}$

2. $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{k}$,
$S\colon \begin{cases} z=3x^2+2y^2+1, \\ x^2+y^2=4, \quad z=0. \end{cases}$

3. $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$,
$S\colon \begin{cases} y=x^2, \quad y=4x^2, \quad y=1 \quad (x \geqslant 0), \\ z=y, \quad z=0. \end{cases}$

4. $\boldsymbol{a} = 3x\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j}$,
$S\colon \begin{cases} z=6-x^2-y^2, \\ z^2=x^2+y^2 \quad (z \geqslant 0). \end{cases}$

5. $\boldsymbol{a} = (z+y)\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - x\boldsymbol{k}$,
$S\colon \begin{cases} x^2+z^2=2y, \\ y=2. \end{cases}$

6. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} - (x+2y)\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$,
$S\colon \begin{cases} x^2+y^2=1, \quad z=0, \\ x+2y+3z=6. \end{cases}$

7. $\boldsymbol{a} = 2(z-y)\boldsymbol{i} + (x-z)\boldsymbol{k}$,
$S\colon \begin{cases} z=x^2+3y^2+1, \quad z=0, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

8. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{k}$,
$S\colon \begin{cases} z=4-2(x^2+y^2), \\ z=2(x^2+y^2). \end{cases}$

9. $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{i} - 4y\boldsymbol{j} + 2x\boldsymbol{k}$,
$S\colon \begin{cases} z=x^2+y^2, \\ z=1. \end{cases}$

10. $\boldsymbol{a} = 4x\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$,
$S\colon \begin{cases} 3x+2y=12, \quad 3x+y=6, \quad y=0, \\ x+y+z=6, \quad z=0. \end{cases}$

11. $\boldsymbol{a} = 8x\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$,
$S\colon \begin{cases} x+y=1, \quad x=0, \quad y=0, \\ z=x^2+y^2, \quad z=0. \end{cases}$

12. $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$,
$S\colon \begin{cases} 4z=x^2+y^2, \\ z=4. \end{cases}$

13. $\boldsymbol{a} = 6x\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$,

$$S: \begin{cases} z = 3 - 2(x^2 + y^2), \\ z^2 = x^2 + y^2 \quad (z \geqslant 0). \end{cases}$$

14. $\boldsymbol{a} = (z + y)\boldsymbol{i} + (x - z)\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$,

$$S: \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4, \\ 3x + 4y + z = 12, \quad z = 1. \end{cases}$$

15. $\boldsymbol{a} = (y + 2z)\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} + 3x\boldsymbol{k}$,

$$S: \begin{cases} 3z = 27 - 2(x^2 + y^2), \\ z^2 = x^2 + y^2 \quad (z \geqslant 0). \end{cases}$$

16. $\boldsymbol{a} = (y + 6x)\boldsymbol{i} + 5(x + z)\boldsymbol{j} + 4y\boldsymbol{k}$,

$$S: \begin{cases} y = x, \quad y = 2x, \quad y = 2, \\ z = x^2 + y^2, \quad z = 0. \end{cases}$$

17. $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + 5y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$,

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = x, \quad z = 0 \quad (z \geqslant 0). \end{cases}$$

18. $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{i} + (3y - x)\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$,

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = x^2 + y^2 + 2, \quad z = 0. \end{cases}$$

19. $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + (x + 2y)\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$,

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ z = x^2 + y^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

20. $\boldsymbol{a} = (x + y + z)\boldsymbol{i} + (2y - x)\boldsymbol{j} + (3z + y)\boldsymbol{k}$,

$$S: \begin{cases} y = x, \quad y = 2x, \quad x = 1, \\ z = x^2 + y^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

21. $\boldsymbol{a} = 7x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + (x - y + 5z)\boldsymbol{k}$,

$$S: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = x^2 + 2y^2, \\ y = x, \quad y = 2x, \quad x = 1. \end{cases}$$

22. $\boldsymbol{a} = 17x\boldsymbol{i} + 7y\boldsymbol{j} + 11z\boldsymbol{k}$,

$$S: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 2(x^2 + y^2), \\ y = x^2, \quad y = x. \end{cases}$$

23. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j} + 3z\boldsymbol{k}$,

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ z = 2x. \end{cases}$$

24. $\boldsymbol{a} = (2x + y)\boldsymbol{j} + (y + 2z)\boldsymbol{k}$,

$S\colon \begin{cases} z = 2 - 4(x^2 + y^2), \\ z = 4(x^2 + y^2). \end{cases}$

25. $\boldsymbol{a} = (2y - 3z)\boldsymbol{i} + (3x + 2z)\boldsymbol{j} + (x + y + z)\boldsymbol{k}$,

$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 4 - x - y, \quad z = 0. \end{cases}$

26. $\boldsymbol{a} = -2x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + (x + y)\boldsymbol{k}$,

$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = 2y, \\ z = x^2 + y^2, \quad z = 0. \end{cases}$

27. $\boldsymbol{a} = (2y - 15x)\boldsymbol{i} + (z - y)\boldsymbol{j} - (x - 3y)\boldsymbol{k}$,

$S\colon \begin{cases} z = 3x^2 + y^2 + 1, \quad z = 0, \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$

28. $\boldsymbol{a} = (y + z)\boldsymbol{i} + (x - 2y + z)\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$,

$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = x^2 + y^2, \quad z = 0. \end{cases}$

29. $\boldsymbol{a} = (3x - y - z)\boldsymbol{i} + 3y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$, $S\colon z = x^2 + y^2$, $z = 2y$.

30. $\boldsymbol{a} = (x + y)\boldsymbol{i} + (y + z)\boldsymbol{j} + (z + x)\boldsymbol{k}$,

$S\colon \begin{cases} y = 2x, \quad y = 4x, \quad x = 1, \\ z = y^2, \quad z = 0. \end{cases}$

31. $\boldsymbol{a} = (x + z)\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{k}$,

$S\colon \begin{cases} z = 8 - x^2 - y^2, \\ z = x^2 + y^2. \end{cases}$

Задача 9. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя).

1. $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$,

$S\colon \begin{cases} z = x^2 + y^2, \quad z = 1, \\ x = 0, \quad y = 0 \quad \text{(первый октант)}. \end{cases}$

2. $\boldsymbol{a} = (x^2 + y^2)\boldsymbol{i} + (y^2 + x^2)\boldsymbol{j} + (y^2 + z^2)\boldsymbol{k}$,

$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, \quad z = 1. \end{cases}$

3. $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$,

$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = z^2 \quad (z \geqslant 0). \end{cases}$

4. $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$,

$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = 0 \quad (z \geqslant 0). \end{cases}$

5. $\boldsymbol{a} = xz\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$,
$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - z, \\ z = 0. \end{cases}$

6. $\boldsymbol{a} = 3xz\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$,
$S\colon \begin{cases} x + y + z = 2, \quad x = 1, \\ x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0. \end{cases}$

7. $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$,
$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2, \\ z = 0 \quad (z \geqslant 0). \end{cases}$

8. $\boldsymbol{a} = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + z^3\boldsymbol{k}$, $S\colon x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

9. $\boldsymbol{a} = (zx + y)\boldsymbol{i} + (zy - x)\boldsymbol{j} - (x^2 + y^2)\boldsymbol{k}$,
$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = 0 \quad (z \geqslant 0). \end{cases}$

10. $\boldsymbol{a} = y^2x\boldsymbol{i} + z^2y\boldsymbol{j} + x^2z\boldsymbol{k}$, $S\colon x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

11. $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$,
$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \\ \text{(первый октант)}. \end{cases}$

12. $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + 3z\boldsymbol{k}$,
$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = 4. \end{cases}$

13. $\boldsymbol{a} = (zx + y)\boldsymbol{i} + (xy - z)\boldsymbol{j} + (x^2 + yz)\boldsymbol{k}$,
$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ z = 0, \quad z = 1. \end{cases}$

14. $\boldsymbol{a} = xy^2\boldsymbol{i} + x^2y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$,
$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 1, \\ x = 0, \quad y = 0 \\ \text{(первый октант)}. \end{cases}$

15. $\boldsymbol{a} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + zx\boldsymbol{k}$,
$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 + y^2 = z^2 \quad (z \geqslant 0). \end{cases}$

16. $\boldsymbol{a} = 3x^2\boldsymbol{i} - 2x^2y\boldsymbol{j} + (2x - 1)z\boldsymbol{k}$,
$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, \quad z = 1. \end{cases}$

17. $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$,
$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{4}, \\ z = 0, \quad z = 2. \end{cases}$

18. $\boldsymbol{a} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$,

$$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0, \quad z = 1. \end{cases}$$

19. $\boldsymbol{a} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + zx\boldsymbol{k}$,

$$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \\ \text{(первый октант)}. \end{cases}$$

20. $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} - xy\boldsymbol{k}$,

$$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0, \quad z = 1. \end{cases}$$

21. $\boldsymbol{a} = (zx + y)\boldsymbol{i} - (2y - x)\boldsymbol{j} - (x^2 + y^2)\boldsymbol{k}$,

$$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = 0 \quad (z \geqslant 0). \end{cases}$$

22. $\boldsymbol{a} = (x^2 + xy)\boldsymbol{i} + (y^2 + yz)\boldsymbol{j} + (z^2 + xz)\boldsymbol{k}$,

$$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = z^2 \quad (z \geqslant 0). \end{cases}$$

23. $\boldsymbol{a} = 3x^2\boldsymbol{i} - 2x^2y\boldsymbol{j} + (1 - 2x)\boldsymbol{k}$,

$$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, \quad z = 1. \end{cases}$$

24. $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i}$,

$$S\colon \begin{cases} z = 1 - x - y, \\ x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0. \end{cases}$$

25. $\boldsymbol{a} = (y^2 + xz)\boldsymbol{i} + (yx - z)\boldsymbol{j} + (yz + x)\boldsymbol{k}$,

$$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, \quad z = \sqrt{2}. \end{cases}$$

26. $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + yz\boldsymbol{k}$,

$$S\colon \begin{cases} z = x^2 + y^2, \quad z = 1, \\ x = 0, \quad y = 0 \\ \text{(первый октант)}. \end{cases}$$

27. $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + 2zy\boldsymbol{j} + 2z^2\boldsymbol{k}$,

$$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - z, \\ z = 0. \end{cases}$$

28. $\boldsymbol{a} = 2xy\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$,

$$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{2}, \\ z = 0 \quad (z \geqslant 0). \end{cases}$$

29. $\boldsymbol{a} = y^2x\boldsymbol{i} + x^2y\boldsymbol{j} + \frac{z^3}{3}\boldsymbol{k}$,
$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = 0 \quad (z \geqslant 0). \end{cases}$
30. $\boldsymbol{a} = -x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + yz\boldsymbol{k}$,
$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = 4. \end{cases}$
31. $\boldsymbol{a} = (y^2 + z^2)\boldsymbol{i} + (xy + y^2)\boldsymbol{j} + (xz + z)\boldsymbol{k}$,
$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, \quad z = 1. \end{cases}$

Задача 10. Найти работу силы $\boldsymbol{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N.

1. $\boldsymbol{F} = (x^2 - 2y)\boldsymbol{i} + (y^2 - 2x)\boldsymbol{j}$, L: отрезок MN, $M(-4,0)$, $N(0,2)$.
2. $\boldsymbol{F} = (x^2 + 2y)\boldsymbol{i} + (y^2 + 2x)\boldsymbol{j}$, L: отрезок MN, $M(-4,0)$, $N(0,2)$.
3. $\boldsymbol{F} = (x^2 + 2y)\boldsymbol{i} + (y^2 + 2x)\boldsymbol{j}$, $L\colon 2 - \frac{x^2}{8} = y$, $M(-4,0)$, $N(0,2)$.
4. $\boldsymbol{F} = (x + y)\boldsymbol{i} + 2x\boldsymbol{j}$, $L\colon x^2 + y^2 = 4$ $(y \geqslant 0)$, $M(2,0)$, $N(-2,0)$.
5. $\boldsymbol{F} = x^3\boldsymbol{i} - y^3\boldsymbol{j}$, $L\colon x^2 + y^2 = 4$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$, $M(2,0)$, $N(0,2)$.
6. $\boldsymbol{F} = (x + y)\boldsymbol{i} + (x - y)\boldsymbol{j}$, $L\colon y = x^2$, $M(-1,1)$, $N(1,1)$.
7. $\boldsymbol{F} = x^2y\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$, L: отрезок MN, $M(-1,0)$, $N(0,1)$.
8. $\boldsymbol{F} = (2x - y)\boldsymbol{i} + (x^2 + x)\boldsymbol{j}$, $L\colon x^2 + y^2 = 9$ $(y \geqslant 0)$, $M(3,0)$, $N(-3,0)$.
9. $\boldsymbol{F} = (x + y)\boldsymbol{i} + (x - y)\boldsymbol{j}$, $L\colon x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$, $M(1,0)$, $N(0,3)$.
10. $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$, $L\colon x^2 + y^2 = 1$ $(y \geqslant 0)$, $M(1,0)$, $N(-1,0)$.
11. $\boldsymbol{F} = (x^2 + y^2)\boldsymbol{i} + (x^2 - y^2)\boldsymbol{j}$,
$L\colon \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 2 - x, & 1 \leqslant x \leqslant 2; \end{cases}$ $M(2,0)$, $N(0,0)$.
12. $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$, $L\colon x^2 + y^2 = 2$ $(y \geqslant 0)$, $M(\sqrt{2},0)$, $N(-\sqrt{2},0)$.
13. $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}$, $L\colon x^2 + y^2 = 1$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$, $M(1,0)$, $N(0,1)$.
14. $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$, $L\colon 2x^2 + y^2 = 1$ $(y \geqslant 0)$, $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $N\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

15. $\boldsymbol{F} = (x^2 + y^2)(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j})$, L: $x^2 + y^2 = R^2$ $(y \geqslant 0)$, $M(R,0)$, $N(-R,0)$.
16. $\boldsymbol{F} = \left(x + y\sqrt{x^2 + y^2}\right)\boldsymbol{i} + \left(y - x\sqrt{x^2 + y^2}\right)\boldsymbol{j}$, L: $x^2 + y^2 = 1$ $(y \geqslant 0)$, $M(1,0)$, $N(-1,0)$.
17. $\boldsymbol{F} = x^2y\boldsymbol{i} - xy^2\boldsymbol{j}$, L: $x^2 + y^2 = 4$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$, $M(2,0)$, $N(0,2)$.
18. $\boldsymbol{F} = \left(x + y\sqrt{x^2 + y^2}\right)\boldsymbol{i} + \left(y - \sqrt{x^2 + y^2}\right)\boldsymbol{j}$, L: $x^2 + y^2 = 16$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$, $M(4,0)$, $N(0,4)$.
19. $\boldsymbol{F} = y^2\boldsymbol{i} - x^2\boldsymbol{j}$, L: $x^2 + y^2 = 9$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$, $M(3,0)$, $N(0,3)$.
20. $\boldsymbol{F} = (x + y)^2\boldsymbol{i} - (x^2 + y^2)\boldsymbol{j}$, L: отрезок MN, $M(1,0)$, $N(0,1)$.
21. $\boldsymbol{F} = (x^2 + y^2)\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j}$, L: отрезок MN, $M(2,0)$, $N(0,2)$.
22. $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{j}$, L: $x^2 + y^2 = 9$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$, $M(3,0)$, $N(0,3)$.
23. $\boldsymbol{F} = (y^2 - y)\boldsymbol{i} + (2xy + x)\boldsymbol{j}$, L: $x^2 + y^2 = 9$ $(y \geqslant 0)$, $M(3,0)$, $N(-3,0)$.
24. $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i}$, L: $y = \sin x$, $M(\pi,0)$, $N(0,0)$.
25. $\boldsymbol{F} = (xy - y^2)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$, L: $y = 2x^2$, $M(0,0)$, $N(1,2)$.
26. $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$, L: отрезок MN, $M(1,0)$, $N(0,3)$.
27. $\boldsymbol{F} = (xy - x)\boldsymbol{i} + \frac{x^2}{2}\boldsymbol{j}$, L: $y = 2\sqrt{x}$, $M(0,0)$, $N(1,2)$.
28. $\boldsymbol{F} = -x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$, L: $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$, $M(1,0)$, $N(0,3)$.
29. $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$, L: $y = x^3$, $M(0,0)$, $N(2,8)$.
30. $\boldsymbol{F} = (x^2 - y^2)\boldsymbol{i} + (x^2 + y^2)\boldsymbol{j}$, L: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ $(y \geqslant 0)$, $M(3,0)$, $N(-3,0)$.
31. $\boldsymbol{F} = (x - y)\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$, L: $x^2 + y^2 = 4$ $(y \geqslant 0)$, $M(2,0)$, $N(-2,0)$.

Задача 11. Найти циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{a}$ вдоль контура Γ (в направлении, соответствующем возрастанию параметра t).

1. $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, \\ z = \sin t. \end{cases}$$

2. $\boldsymbol{a} = -x^2y^3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = \sqrt[3]{4}\cos t, \quad y = \sqrt[3]{4}\sin t, \\ z = 3. \end{cases}$$

3. $\boldsymbol{a} = (y - z)\boldsymbol{i} + (z - x)\boldsymbol{j} + (x - y)\boldsymbol{k}$,
$\Gamma\colon \begin{cases} x = \cos t, \quad y = \sin t, \\ z = 2(1 - \cos t). \end{cases}$

4. $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$,
$\Gamma\colon \begin{cases} x = \cos t, \quad y = \frac{\sqrt{2}\sin t}{2}, \\ z = \frac{\sqrt{2}\cos t}{2}. \end{cases}$

5. $\boldsymbol{a} = (y - z)\boldsymbol{i} + (z - x)\boldsymbol{j} + (x - y)\boldsymbol{k}$,
$\Gamma\colon \begin{cases} x = 4\cos t, \quad y = 4\sin t, \\ z = 1 - \cos t. \end{cases}$

6. $\boldsymbol{a} = 2y\boldsymbol{i} - 3x\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$,
$\Gamma\colon \begin{cases} x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \\ z = 2 - 2\cos t - 2\sin t. \end{cases}$

7. $\boldsymbol{a} = 2z\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$,
$\Gamma\colon \begin{cases} x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \\ z = 1. \end{cases}$

8. $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$,
$\Gamma\colon \begin{cases} x = \cos t, \quad y = \sin t, \\ z = 3. \end{cases}$

9. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$,
$\Gamma\colon \begin{cases} x = \cos t, \quad x = 2\sin t, \\ z = 2\cos t - 2\sin t - 1. \end{cases}$

10. $\boldsymbol{a} = 3y\boldsymbol{i} - 3x\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$,
$\Gamma\colon \begin{cases} x = 3\cos t, \quad y = 3\sin t, \\ z = 3 - 3\cos t - 3\sin t. \end{cases}$

11. $\boldsymbol{a} = -x^2y^3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$,
$\Gamma\colon \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \quad y = \sqrt{2}\sin t, \\ z = 1. \end{cases}$

12. $\boldsymbol{a} = 6zi - x\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$,
$\Gamma\colon \begin{cases} x = 3\cos t, \quad y = 3\sin t, \\ z = 3. \end{cases}$

13. $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} - x\boldsymbol{k}$,
$\Gamma\colon \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \quad y = 2\sin t, \\ z = \sqrt{2}\cos t. \end{cases}$

14. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + 2z^2\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$,
$\Gamma\colon \begin{cases} x = \cos t, \quad y = 3\sin t, \\ z = 2\cos t - 3\sin t - 2. \end{cases}$

15. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} - \frac{1}{3}z^2\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x = \frac{\cos t}{2}, \quad y = \frac{\sin t}{3}, \\ z = \cos t - \frac{\sin t}{3} - \frac{1}{4}. \end{cases}$

16. $\boldsymbol{a} = 4y\boldsymbol{i} - 3x\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x = 4\cos t, \quad y = 4\sin t, \\ z = 4 - 4\cos t - 4\sin t. \end{cases}$

17. $\boldsymbol{a} = -z\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x = 5\cos t, \quad y = 5\sin t, \\ z = 4. \end{cases}$

18. $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \\ z = 0. \end{cases}$

19. $\boldsymbol{a} = (y - z)\boldsymbol{i} + (z - x)\boldsymbol{j} + (x - y)\boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x = 3\cos t, \quad y = 3\sin t, \\ z = 2(1 - \cos t). \end{cases}$

20. $\boldsymbol{a} = 2y\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x = \cos t, \quad y = \sin t, \\ z = 4 - \cos t - \sin t. \end{cases}$

21. $\boldsymbol{a} = xz\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x = \cos t, \quad y = \sin t, \\ z = \sin t. \end{cases}$

22. $\boldsymbol{a} = -x^2y^3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x = \cos t, \quad y = \sin t, \\ z = 5. \end{cases}$

23. $\boldsymbol{a} = 7z\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + yz\boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x = 6\cos t, \quad y = 6\sin t, \\ z = \frac{1}{3}. \end{cases}$

24. $\boldsymbol{a} = xy\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y^2\boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x = \cos t, \quad y = \sin t, \\ z = \sin t. \end{cases}$

25. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} - z^2\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x = 2\cos t, \quad y = 3\sin t, \\ z = 4\cos t - 3\sin t - 3. \end{cases}$

26. $\boldsymbol{a} = (y - z)\boldsymbol{i} + (z - x)\boldsymbol{j} + (x - y)\boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \\ y = 3 \quad (1 - \cos t). \end{cases}$

27. $\boldsymbol{a} = -2z\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x = \frac{\cos t}{3}, \ y = \frac{\sin t}{3}, \\ z = 8. \end{cases}$

28. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} - 3z^2\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x = \cos t, \quad y = 4\sin t, \\ z = 2\cos t - 4\sin t + 3. \end{cases}$

29. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} - 2z^2\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x = 3\cos t, \quad y = 4\sin t, \\ z = 6\cos t - 4\sin t + 1. \end{cases}$

30. $\boldsymbol{a} = -x^2y^3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \\ z = 4. \end{cases}$

31. $\boldsymbol{a} = \frac{y}{3}\boldsymbol{i} - 3x\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \\ z = 1 - 2\cos t - 2\sin t. \end{cases}$

Задача 12. Найти модуль циркуляции векторного поля $\boldsymbol{a}$ вдоль контура Γ.

1. $\boldsymbol{a} = (x^2 - y)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases}$

2. $\boldsymbol{a} = xz\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} z = 5(x^2 + y^2) - 1, \\ z = 4. \end{cases}$

3. $\boldsymbol{a} = yz\boldsymbol{i} + 2xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 9 \quad (z > 0). \end{cases}$

4. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} - x\boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$

5. $\boldsymbol{a} = (x - y)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 5. \end{cases}$

6. $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} z = 3(x^2 + y^2) + 1, \\ z = 4. \end{cases}$

7. $\boldsymbol{a} = yz\boldsymbol{i} + 2xz\boldsymbol{j} + y^2\boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 16 \quad (z > 0). \end{cases}$

8. $\boldsymbol{a} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + zx\boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$

9. $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + (1 - x)\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = 1 \quad (z > 0). \end{cases}$

10. $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 4. \end{cases}$

11. $\boldsymbol{a} = 4x\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - xy\boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} z = 2(x^2 + y^2) + 1, \\ z = 7. \end{cases}$

12. $\boldsymbol{a} = 2y\boldsymbol{i} - 3x\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ z = 1. \end{cases}$

13. $\boldsymbol{a} = -3z\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + 2y\boldsymbol{k}$, $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x - 3y - 2z = 1. \end{cases}$

14. $\boldsymbol{a} = 2y\boldsymbol{i} + 5z\boldsymbol{j} + 3x\boldsymbol{k}$, $\Gamma: \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 1, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$

15. $\boldsymbol{a} = 2y\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2yz\boldsymbol{k}$, $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ z = 2. \end{cases}$

16. $\boldsymbol{a} = (x - y)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$, $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 - 4z^2 = 0, \\ z = \frac{1}{2}. \end{cases}$

17. $\boldsymbol{a} = xz\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$, $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ z = 1. \end{cases}$

18. $\boldsymbol{a} = 2yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} - x^2\boldsymbol{k}$, $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 9 \quad (z > 0). \end{cases}$

19. $\boldsymbol{a} = 4x\boldsymbol{i} - yz\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$, $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$

20. $\boldsymbol{a} = -y\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ z = 1. \end{cases}$

21. $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + 3x\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$, $\Gamma: \begin{cases} z = x^2 + y^2 - 1, \\ z = 3. \end{cases}$

22. $\boldsymbol{a} = 2yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + y^2\boldsymbol{k}$, $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 16 \quad (z > 0). \end{cases}$

23. $\boldsymbol{a} = (2 - xy)\boldsymbol{i} - yz\boldsymbol{j} - xz\boldsymbol{k}$, $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$

24. $\boldsymbol{a} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + 3z^2\boldsymbol{k}$, $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 1 \quad (z > 0). \end{cases}$

25. $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$, $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0, \\ z = 2. \end{cases}$

26. $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$, $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ z = 4. \end{cases}$

27. $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$, $\Gamma: \begin{cases} z = 4(x^2 + y^2) + 2, \\ z = 6. \end{cases}$

28. $\boldsymbol{a} = 3z\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j} + 2y\boldsymbol{k}$, $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ 2x - 3y - 2z = 1. \end{cases}$

29. $\boldsymbol{a} = (x + y)\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$, $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 2. \end{cases}$

30. $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i} + 3x\boldsymbol{j} + 3xz\boldsymbol{k}$, $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ z = 3. \end{cases}$

31. $\boldsymbol{a} = yz\boldsymbol{i} - xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$, $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$

Раздел 9

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 9.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1) Векторы. Линейные операции над векторами.

2) Скалярное произведение, его свойства. Длина вектора. Угол между двумя векторами.

3) Определители, их свойства.

4) Векторное произведение. Свойства. Геометрический смысл.

5) Смешанное произведение, его свойства. Геометрический смысл. Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов.

6) Плоскость. Уравнение плоскости.

7) Расстояние от точки до плоскости.

8) Уравнения прямой в пространстве. Нахождение точки пересечения прямой и плоскости.

§ 9.2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны и $\overrightarrow{AB} = \frac{\alpha}{2}\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC} = 4(\beta\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$, $\overrightarrow{CD} = -4\beta\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{DA} = \boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$. Найти α и β и доказать коллинеарность векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$.

2) Разложить вектор $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ по трем некомпланарным векторам $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{p} = 2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$.

3) Найти угол между единичными векторами $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, если известно, что векторы $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{b} = 5\boldsymbol{e}_1 - 4\boldsymbol{e}_2$ взаимно перпендикулярны.

4) Доказать компланарность векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, зная, что

$$[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{c}\boldsymbol{a}] = 0.$$

5) Доказать, что уравнение плоскости, проходящей через точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) перпендикулярно плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

6) Доказать, что уравнение плоскости, проходящей через пересекающиеся прямые

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_2}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \quad \text{и} \quad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2},$$

можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

7) Доказать, что уравнения прямой, проходящей через точку (x_1, y_1, z_1) параллельно плоскостям $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, можно записать в виде

$$\frac{x - x_1}{\begin{vmatrix} B_1 C_1 \\ B_2 C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_1}{-\begin{vmatrix} A_1 C_1 \\ A_2 C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_1}{\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}}.$$

8) Доказать, что необходимым и достаточным условием принадлежности двух прямых

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \quad \text{и} \quad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

одной плоскости является выполнение равенства

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

9) Доказать, что расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и имеющей направляющий вектор S, определяется формулой

$$d = \frac{|[S, \overrightarrow{AB}]|}{|S|}.$$

10) Даны две скрещивающиеся прямые, проходящие соответственно через точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Их направляющие векторы $\boldsymbol{S}_1$ и $\boldsymbol{S}_2$ известны. Доказать, что расстояние между ними определяется формулой

$$d = \frac{|\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\overrightarrow{AB}|}{|[\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2]|}.$$

§ 9.3. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1. Написать разложение вектора $\boldsymbol{x}$ по векторам $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$.

1. $\boldsymbol{x} = \{-2, 4, 7\}$, $\boldsymbol{p} = \{0, 1, 2\}$, $\boldsymbol{q} = \{1, 0, 1\}$, $\boldsymbol{r} = \{-1, 2, 4\}$.

2. $\boldsymbol{x} = \{6, 12, -1\}$, $\boldsymbol{p} = \{1, 3, 0\}$, $\boldsymbol{q} = \{2, -1, 1\}$, $\boldsymbol{r} = \{0, -1, 2\}$.

3. $\boldsymbol{x} = \{1, -4, 4\}$, $\boldsymbol{p} = \{2, 1, -1\}$, $\boldsymbol{q} = \{0, 3, 2\}$, $\boldsymbol{r} = \{1, -1, 1\}$.

4. $\boldsymbol{x} = \{-9, 5, 5\}$, $\boldsymbol{p} = \{4, 1, 1\}$, $\boldsymbol{q} = \{2, 0, -3\}$, $\boldsymbol{r} = \{-1, 2, 1\}$.

5. $\boldsymbol{x} = \{-5, -5, 5\}$, $\boldsymbol{p} = \{-2, 0, 1\}$, $\boldsymbol{q} = \{1, 3, -1\}$, $\boldsymbol{r} = \{0, 4, 1\}$.

6. $\boldsymbol{x} = \{13, 2, 7\}$, $\boldsymbol{p} = \{5, 1, 0\}$, $\boldsymbol{q} = \{2, -1, 3\}$, $\boldsymbol{r} = \{1, 0, -1\}$.

7. $\boldsymbol{x} = \{-19, -1, 7\}$, $\boldsymbol{p} = \{0, 1, 1\}$, $\boldsymbol{q} = \{-2, 0, 1\}$, $\boldsymbol{r} = \{3, 1, 0\}$.

8. $\boldsymbol{x} = \{3, -3, 4\}$, $\boldsymbol{p} = \{1, 0, 2\}$, $\boldsymbol{q} = \{0, 1, 1\}$, $\boldsymbol{r} = \{2, -1, 4\}$.

9. $\boldsymbol{x} = \{3, 3, -1\}$, $\boldsymbol{p} = \{3, 1, 0\}$, $\boldsymbol{q} = \{-1, 2, 1\}$, $\boldsymbol{r} = \{-1, 0, 2\}$.

10. $\boldsymbol{x} = \{-1, 7, -4\}$, $\boldsymbol{p} = \{-1, 2, 1\}$, $\boldsymbol{q} = \{2, 0, 3\}$, $\boldsymbol{r} = \{1, 1, -1\}$.

11. $\boldsymbol{x} = \{6, 5, -14\}$, $\boldsymbol{p} = \{1, 1, 4\}$, $\boldsymbol{q} = \{0, -3, 2\}$, $\boldsymbol{r} = \{2, 1, -1\}$.

12. $\boldsymbol{x} = \{6, -1, 7\}$, $\boldsymbol{p} = \{1, -2, 0\}$, $\boldsymbol{q} = \{-1, 1, 3\}$, $\boldsymbol{r} = \{1, 0, 4\}$.

13. $\boldsymbol{x} = \{5, 15, 0\}$, $\boldsymbol{p} = \{1, 0, 5\}$, $\boldsymbol{q} = \{-1, 3, 2\}$, $\boldsymbol{r} = \{0, -1, 1\}$.

14. $\boldsymbol{x} = \{2, -1, 11\}$, $\boldsymbol{p} = \{1, 1, 0\}$, $\boldsymbol{q} = \{0, 1, -2\}$, $\boldsymbol{r} = \{1, 0, 3\}$.

15. $\boldsymbol{x} = \{11, 5, -3\}$, $\boldsymbol{p} = \{1, 0, 2\}$, $\boldsymbol{q} = \{-1, 0, 1\}$, $\boldsymbol{r} = \{2, 5, -3\}$.

16. $\boldsymbol{x} = \{8, 0, 5\}$, $\boldsymbol{p} = \{2, 0, 1\}$, $\boldsymbol{q} = \{1, 1, 0\}$, $\boldsymbol{r} = \{4, 1, 2\}$.

17. $\boldsymbol{x} = \{3, 1, 8\}$, $\boldsymbol{p} = \{0, 1, 3\}$, $\boldsymbol{q} = \{1, 2, -1\}$, $\boldsymbol{r} = \{2, 0, -1\}$.

18. $\boldsymbol{x} = \{8, 1, 12\}$, $\boldsymbol{p} = \{1, 2, -1\}$, $\boldsymbol{q} = \{3, 0, 2\}$, $\boldsymbol{r} = \{-1, 1, 1\}$.

19. $\boldsymbol{x} = \{-9, -8, -3\}$, $\boldsymbol{p} = \{1, 4, 1\}$, $\boldsymbol{q} = \{-3, 2, 0\}$, $\boldsymbol{r} = \{1, -1, 2\}$.

20. $\boldsymbol{x} = \{-5, 9, -13\}$, $\boldsymbol{p} = \{0, 1, -2\}$, $\boldsymbol{q} = \{3, -1, 1\}$, $\boldsymbol{r} = \{4, 1, 0\}$.

21. $\boldsymbol{x} = \{-15, 5, 6\}$, $\boldsymbol{p} = \{0, 5, 1\}$, $\boldsymbol{q} = \{3, 2, -1\}$, $\boldsymbol{r} = \{-1, 1, 0\}$.

22. $x = \{8, 9, 4\}$,
$p = \{1, 0, 1\}$,
$q = \{0, -2, 1\}$,
$r = \{1, 3, 0\}$.

23. $x = \{23, -14, -30\}$,
$p = \{2, 1, 0\}$,
$q = \{1, -1, 0\}$,
$r = \{-3, 2, 5\}$.

24. $x = \{3, 1, 3\}$,
$p = \{2, 1, 0\}$,
$q = \{1, 0, 1\}$,
$r = \{4, 2, 1\}$.

25. $x = \{-1, 7, 0\}$,
$p = \{0, 3, 1\}$,
$q = \{1, -1, 2\}$,
$r = \{2, -1, 0\}$.

26. $x = \{11, -1, 4\}$,
$p = \{1, -1, 2\}$,
$q = \{3, 2, 0\}$,
$r = \{-1, 1, 1\}$.

27. $x = \{-13, 2, 18\}$,
$p = \{1, 1, 4\}$,
$q = \{-3, 0, 2\}$,
$r = \{1, 2, -1\}$.

28. $x = \{0, -8, 9\}$,
$p = \{0, -2, 1\}$,
$q = \{3, 1, -1\}$,
$r = \{4, 0, 1\}$.

29. $x = \{8, -7, -13\}$,
$p = \{0, 1, 5\}$,
$q = \{3, -1, 2\}$,
$r = \{-1, 0, 1\}$.

30. $x = \{2, 7, 5\}$,
$p = \{1, 0, 1\}$,
$q = \{1, -2, 0\}$,
$r = \{0, 3, 1\}$.

31. $x = \{15, -20, -1\}$,
$p = \{0, 2, 1\}$,
$q = \{0, 1, -1\}$,
$r = \{5, -3, 2\}$.

Задача 2. Коллинеарны ли векторы c_1 и c_2, построенные по векторам a и b?

1. $a = \{1, -2, 3\}$, $b = \{3, 0, -1\}$, $c_1 = 2a + 4b$, $c_2 = 3b - a$.
2. $a = \{1, 0, 1\}$, $b = \{-2, 3, 5\}$, $c_1 = a + 2b$, $c_2 = 3a - b$.
3. $a = \{-2, 4, 1\}$, $b = \{1, -2, 7\}$, $c_1 = 5a + 3b$, $c_2 = 2a - b$.
4. $a = \{1, 2, -3\}$, $b = \{2, -1, -1\}$, $c_1 = 4a + 3b$, $c_2 = 8a - b$.
5. $a = \{3, 5, 4\}$, $b = \{5, 9, 7\}$, $c_1 = -2a + b$, $c_2 = 3a - 2b$.
6. $a = \{1, 4, -2\}$, $b = \{1, 1, -1\}$, $c_1 = a + b$, $c_2 = 4a + 2b$.
7. $a = \{1, -2, 5\}$, $b = \{3, -1, 0\}$, $c_1 = 4a - 2b$, $c_2 = b - 2a$.
8. $a = \{3, 4, -1\}$, $b = \{2, -1, 1\}$, $c_1 = 6a - 3b$, $c_2 = b - 2a$.
9. $a = \{-2, -3, -2\}$, $b = \{1, 0, 5\}$, $c_1 = 3a + 9b$, $c_2 = -a - 3b$.
10. $a = \{-1, 4, 2\}$, $b = \{3, -2, 6\}$, $c_1 = 2a - b$, $c_2 = 3b - 6a$.
11. $a = \{5, 0, -1\}$, $b = \{7, 2, 3\}$, $c_1 = 2a - b$, $c_2 = 3b - 6a$.
12. $a = \{0, 3, -2\}$, $b = \{1, -2, 1\}$, $c_1 = 5a - 2b$, $c_2 = 3a + 5b$.
13. $a = \{-2, 7, -1\}$, $b = \{-3, 5, 2\}$, $c_1 = 2a + 3b$, $c_2 = 3a + 2b$.
14. $a = \{3, 7, 0\}$, $b = \{1, -3, 4\}$, $c_1 = 4a - 2b$, $c_2 = b - 2a$.
15. $a = \{-1, 2, -1\}$, $b = \{2, -7, 1\}$, $c_1 = 6a - 2b$, $c_2 = b - 3a$.

16. $a = \{7, 9, -2\}$, $b = \{5, 4, 3\}$, $c_1 = 4a - b$, $c_2 = 4b - a$.
17. $a = \{5, 0, -2\}$, $b = \{6, 4, 3\}$, $c_1 = 5a - 3b$, $c_2 = 6b - 10a$.
18. $a = \{8, 3, -1\}$, $b = \{4, 1, 3\}$, $c_1 = 2a - b$, $c_2 = 2b - 4a$.
19. $a = \{3 - 1, 6\}$, $b = \{5, 7, 10\}$, $c_1 = 4a - 2b$, $c_2 = b - 2a$.
20. $a = \{1, -2, 4\}$, $b = \{7, 3, 5\}$, $c_1 = 6a - 3b$, $c_2 = b - 2a$.
21. $a = \{3, 7, 0\}$, $b = \{4, 6, -1\}$, $c_1 = 3a + 2b$, $c_2 = 5a - 7b$.
22. $a = \{2, -1, 4\}$, $b = \{3, -7, -6\}$, $c_1 = 2a - 3b$, $c_2 = 3a - 2b$.
23. $a = \{5, -1, -2\}$, $b = \{6, 0, 7\}$, $c_1 = 3a - 2b$, $c_2 = 4b - 6a$.
24. $a = \{-9, 5, 3\}$, $b = \{7, 1, -2\}$, $c_1 = 2a - b$, $c_2 = 3a + 5b$.
25. $a = \{4, 2, 9\}$, $b = \{0, -1, 3\}$, $c_1 = 4b - 3a$, $c_2 = 4a - 3b$.
26. $a = \{2, -1, 6\}$, $b = \{-1, 3, 8\}$, $c_1 = 5a - 2b$, $c_2 = 2a - 5b$.
27. $a = \{5, 0, 8\}$, $b = \{-3, 1, 7\}$, $c_1 = 3a - 4b$, $c_2 = 12b - 9a$.
28. $a = \{-1, 3, 4\}$, $b = \{2, -1, 0\}$, $c_1 = 6a - 2b$, $c_2 = b - 3a$.
29. $a = \{4, 2, -7\}$, $b = \{5, 0, -3\}$, $c_1 = a - 3b$, $c_2 = 6b - 2a$.
30. $a = \{2, 0, -5\}$, $b = \{1, -3, 4\}$, $c_1 = 2a - 5b$, $c_2 = 5a - 2b$.
31. $a = \{-1, 2, 8\}$, $b = \{3, 7, -1\}$, $c_1 = 4a - 3b$, $c_2 = 9b - 12a$.

Задача 3. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

1. $A(1, -2, 3)$, $B(0, -1, 2)$, $C(3, -4, 5)$.
2. $A(0, -3, 6)$, $B(-12, -3, -3)$, $C(-9, -3, -6)$.
3. $A(3, 3, -1)$, $B(5, 5, -2)$, $C(4, 1, 1)$.
4. $A(-1, 2, -3)$, $B(3, 4, -6)$, $C(1, 1, -1)$.
5. $A(-4, -2, 0)$, $B(-1, -2, 4)$, $C(3, -2, 1)$.
6. $A(5, 3, -1)$, $B(5, 2, 0)$, $C(6, 4, -1)$.
7. $A(-3, -7, -5)$, $B(0, -1, -2)$, $C(2, 3, 0)$.
8. $A(2, -4, 6)$, $B(0, -2, 4)$, $C(6, -8, 10)$.
9. $A(0, 1, -2)$, $B(3, 1, 2)$, $C(4, 1, 1)$.
10. $A(3, 3, -1)$, $B(1, 5, -2)$, $C(4, 1, 1)$.
11. $A(2, 1, -1)$, $B(6, -1, -4)$, $C(4, 2, 1)$.
12. $A(-1, -2, 1)$, $B(-4, -2, 5)$, $C(-8, -2, 2)$.
13. $A(6, 2, -3)$, $B(6, 3, -2)$, $C(7, 3, -3)$.
14. $A(0, 0, 4)$, $B(-3, -6, 1)$, $C(-5, -10, -1)$.
15. $A(2, -8, -1)$, $B(4, -6, 0)$, $C(-2, -5, -1)$.
16. $A(3, -6, 9)$, $B(0, -3, 6)$, $C(9, -12, 15)$.
17. $A(0, 2, -4)$, $B(8, 2, 2)$, $C(6, 2, 4)$.
18. $A(3, 3, -1)$, $B(5, 1, -2)$, $C(4, 1, 1)$.

19. $A(-4,3,0)$, $B(0,1,3)$, $C(-2,4,-2)$.

20. $A(1,-1,0)$, $B(-2,-1,4)$, $C(8,-1,-1)$.

21. $A(7,0,2)$, $B(7,1,3)$, $C(8,-1,2)$.

22. $A(2,3,2)$, $B(-1,-3,-1)$, $C(-3,-7,-3)$.

23. $A(2,2,7)$, $B(0,0,6)$, $C(-2,5,7)$.

24. $A(-1,2,-3)$, $B(0,1,-2)$, $C(-3,4,-5)$.

25. $A(0,3,-6)$, $B(9,3,6)$, $C(12,3,3)$.

26. $A(3,3,-1)$, $B(5,1,-2)$, $C(4,1,-3)$.

27. $A(-2,1,1)$, $B(2,3,-2)$, $C(0,0,3)$.

28. $A(1,4,-1)$, $B(-2,4,-5)$, $C(8,4,0)$.

29. $A(0,1,0)$, $B(0,2,1)$, $C(1,2,0)$.

30. $A(-4,0,4)$, $B(-1,6,7)$, $C(1,10,9)$.

31. $A(-2,4,-6)$, $B(0,2,-4)$, $C(-6,8,-10)$.

Задача 4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

1. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$; $|\boldsymbol{p}|=1$, $|\boldsymbol{q}|=2$, $(\widehat{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}})=\pi/6$.

2. $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}-2\boldsymbol{q}$; $|\boldsymbol{p}|=4$, $|\boldsymbol{q}|=1$, $(\widehat{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}})=\pi/4$.

3. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{p}-3\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}$; $|\boldsymbol{p}|=\frac{1}{5}$, $|\boldsymbol{q}|=1$, $(\widehat{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}})=\pi/2$.

4. $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{p}-2\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}+5\boldsymbol{q}$; $|\boldsymbol{p}|=4$, $|\boldsymbol{q}|=\frac{1}{2}$, $(\widehat{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}})=5\pi/6$.

5. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{p}-2\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$; $|\boldsymbol{p}|=2$, $|\boldsymbol{q}|=3$, $(\widehat{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}})=3\pi/4$.

6. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{p}+3\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}-2\boldsymbol{q}$; $|\boldsymbol{p}|=2$, $|\boldsymbol{q}|=3$, $(\widehat{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}})=\pi/3$.

7. $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}+3\boldsymbol{q}$; $|\boldsymbol{p}|=3$, $|\boldsymbol{q}|=2$, $(\widehat{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}})=\pi/2$.

8. $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$; $|\boldsymbol{p}|=7$, $|\boldsymbol{q}|=2$, $(\widehat{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}})=\pi/4$.

9. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{p}-4\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$; $|\boldsymbol{p}|=1$, $|\boldsymbol{q}|=2$, $(\widehat{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}})=\pi/6$.

10. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{p}+4\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$; $|\boldsymbol{p}|=7$, $|\boldsymbol{q}|=2$, $(\widehat{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}})=\pi/3$.

11. $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$; $|\boldsymbol{p}|=10$, $|\boldsymbol{q}|=1$, $(\widehat{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}})=\pi/2$.

12. $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}$; $|\boldsymbol{p}|=5$, $|\boldsymbol{q}|=4$, $(\widehat{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}})=\pi/4$.

13. $a = 2p + 3q$, $b = p - 2q$; $|p| = 6$, $|q| = 7$, $(\widehat{pq}) = \pi/3$.
14. $a = 3p - q$, $b = p + 2q$; $|p| = 3$, $|q| = 4$, $(\widehat{pq}) = \pi/3$.
15. $a = 2p + 3q$, $b = p - 2q$; $|p| = 2$, $|q| = 3$, $(\widehat{pq}) = \pi/4$.
16. $a = 2p - 3q$, $b = 3p + q$; $|p| = 4$, $|q| = 1$, $(\widehat{pq}) = \pi/6$.
17. $a = 5p + q$, $b = p - 3q$; $|p| = 1$, $|q| = 2$, $(\widehat{pq}) = \pi/3$.
18. $a = 7p - 2q$, $b = p + 3q$; $|p| = \frac{1}{2}$, $|q| = 2$, $(\widehat{pq}) = \pi/2$.
19. $a = 6p - q$, $b = p + q$; $|p| = 3$, $|q| = 4$, $(\widehat{pq}) = \pi/4$.
20. $a = 10p + q$, $b = 3p - 2q$; $|p| = 4$, $|q| = 1$, $(\widehat{pq}) = \pi/6$.
21. $a = 6p - q$, $b = p + 2q$; $|p| = 8$, $|q| = \frac{1}{2}$, $(\widehat{pq}) = \pi/3$.
22. $a = 3p + 4q$, $b = q - p$; $|p| = 2{,}5$, $|q| = 2$, $(\widehat{pq}) = \pi/2$.
23. $a = 7p + q$, $b = p - 3q$; $|p| = 3$, $|q| = 1$, $(\widehat{pq}) = 3\pi/4$.
24. $a = p + 3q$, $b = 3p - q$; $|p| = 3$, $|q| = 5$, $(\widehat{pq}) = 2\pi/3$.
25. $a = 3p + q$, $b = p - 3q$; $|p| = 7$, $|q| = 2$, $(\widehat{pq}) = \pi/4$.
26. $a = 5p - q$, $b = p + q$; $|p| = 5$, $|q| = 3$, $(\widehat{pq}) = 5\pi/6$.
27. $a = 3p - 4q$, $b = p + 3q$; $|p| = 2$, $|q| = 3$, $(\widehat{pq}) = \pi/4$.
28. $a = 6p - q$, $b = 5q + p$; $|p| = \frac{1}{2}$, $|q| = 4$, $(\widehat{pq}) = 5\pi/6$.
29. $a = 2p + 3q$, $b = p - 2q$; $|p| = 2$, $|q| = 1$, $(\widehat{pq}) = \pi/3$.
30. $a = 2p - 3q$, $b = 5p + q$; $|p| = 2$, $|q| = 3$, $(\widehat{pq}) = \pi/2$.
31. $a = 3p + 2q$, $b = 2p - q$; $|p| = 4$, $|q| = 3$, $(\widehat{pq}) = 3\pi/4$.

Задача 5. Компланарны ли векторы a, b и c?

1. $a = \{2, 3, 1\}$, $b = \{-1, 0, -1\}$, $c = \{2, 2, 2\}$.
2. $a = \{3, 2, 1\}$, $b = \{2, 3, 4\}$, $c = \{3, 1, -1\}$.
3. $a = \{1, 5, 2\}$, $b = \{-1, 1, -1\}$, $c = \{1, 1, 1\}$.
4. $a = \{1, -1, -3\}$, $b = \{3, 2, 1\}$, $c = \{2, 3, 4\}$.

5. $a = \{3, 3, 1\}$, $b = \{1, -2, 1\}$, $c = \{1, 1, 1\}$.
6. $a = \{3, 1, -1\}$, $b = \{-2, -1, 0\}$, $c = \{5, 2, -1\}$.
7. $a = \{4, 3, 1\}$, $b = \{1, -2, 1\}$, $c = \{2, 2, 2\}$.
8. $a = \{4, 3, 1\}$, $b = \{6, 7, 4\}$, $c = \{2, 0, -1\}$.
9. $a = \{3, 2, 1\}$, $b = \{1, -3, -7\}$, $c = \{1, 2, 3\}$.
10. $a = \{3, 7, 2\}$, $b = \{-2, 0, -1\}$, $c = \{2, 2, 1\}$.
11. $a = \{1, -2, 6\}$, $b = \{1, 0, 1\}$, $c = \{2, -6, 17\}$.
12. $a = \{6, 3, 4\}$, $b = \{-1, -2, -1\}$, $c = \{2, 1, 2\}$.
13. $a = \{7, 3, 4\}$, $b = \{-1, -2, -1\}$, $c = \{4, 2, 4\}$.
14. $a = \{2, 3, 2\}$, $b = \{4, 7, 5\}$, $c = \{2, 0, -1\}$.
15. $a = \{5, 3, 4\}$, $b = \{-1, 0, -1\}$, $c = \{4, 2, 4\}$.
16. $a = \{3, 10, 5\}$, $b = \{-2, -2, -3\}$, $c = \{2, 4, 3\}$.
17. $a = \{-2, -4, -3\}$, $b = \{4, 3, 1\}$, $c = \{6, 7, 4\}$.
18. $a = \{3, 1, -1\}$, $b = \{1, 0, -1\}$, $c = \{8, 3, -2\}$.
19. $a = \{4, 2, 2\}$, $b = \{-3, -3, -3\}$, $c = \{2, 1, 2\}$.
20. $a = \{4, 1, 2\}$, $b = \{9, 2, 5\}$, $c = \{1, 1, -1\}$.
21. $a = \{5, 3, 4\}$, $b = \{4, 3, 3\}$, $c = \{9, 5, 8\}$.
22. $a = \{3, 4, 2\}$, $b = \{1, 1, 0\}$, $c = \{8, 11, 6\}$.
23. $a = \{4, -1, -6\}$, $b = \{1, -3, -7\}$, $c = \{2, -1, -4\}$.
24. $a = \{3, 1, 0\}$, $b = \{-5, -4, -5\}$, $c = \{4, 2, 4\}$.
25. $a = \{3, 0, 3\}$, $b = \{8, 1, 6\}$, $c = \{1, 1, -1\}$.
26. $a = \{1, -1, 4\}$, $b = \{1, 0, 3\}$, $c = \{1, -3, 8\}$.
27. $a = \{6, 3, 4\}$, $b = \{-1, -2, -1\}$, $c = \{2, 1, 2\}$.
28. $a = \{4, 1, 1\}$, $b = \{-9, -4, -9\}$, $c = \{6, 2, 6\}$.
29. $a = \{-3, 3, 3\}$, $b = \{-4, 7, 6\}$, $c = \{3, 0, -1\}$.
30. $a = \{-7, 10, -5\}$, $b = \{0, -2, -1\}$, $c = \{-2, 4, -1\}$.
31. $a = \{7, 4, 6\}$, $b = \{2, 1, 1\}$, $c = \{19, 11, 17\}$.

Задача 6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

1. $A_1(1, 3, 6)$,	**2.** $A_1(-4, 2, 6)$,	**3.** $A_1(7, 2, 4)$,
$A_2(2, 2, 1)$,	$A_2(2, -3, 0)$,	$A_2(7, -1, -2)$,
$A_3(-1, 0, 1)$,	$A_3(-10, 5, 8)$,	$A_3(3, 3, 1)$,
$A_4(-4, 6, -3)$.	$A_4(-5, 2, -4)$.	$A_4(-4, 2, 1)$.

4. $A_1(2,1,4)$, $A_2(-1,5,-2)$, $A_3(-7,-3,2)$, $A_4(-6,-3,6)$.

5. $A_1(-1,-5,2)$, $A_2(-6,0,-3)$, $A_3(3,6,-3)$, $A_4(-10,6,7)$.

6. $A_1(0,-1,-1)$, $A_2(-2,3,5)$, $A_3(1,-5,-9)$, $A_4(-1,-6,3)$.

7. $A_1(5,2,0)$, $A_2(2,5,0)$, $A_3(1,2,4)$, $A_4(-1,1,1)$.

8. $A_1(2,-1,-2)$, $A_2(1,2,1)$, $A_3(5,0,-6)$, $A_4(-10,9,-7)$.

9. $A_1(-2,0,-4)$, $A_2(-1,7,1)$, $A_3(4,-8,-4)$, $A_4(1,-4,6)$.

10. $A_1(14,4,5)$, $A_2(-5,-3,2)$, $A_3(-2,-6,-3)$, $A_4(-2,2,-1)$.

11. $A_1(1,2,0)$, $A_2(3,0,-3)$, $A_3(5,2,6)$, $A_4(8,4,-9)$.

12. $A_1(2,-1,2)$, $A_2(1,2,-1)$, $A_3(3,2,1)$, $A_4(-4,2,5)$.

13. $A_1(1,1,2)$, $A_2(-1,1,3)$, $A_3(2,-2,4)$, $A_4(-1,0,-2)$.

14. $A_1(2,3,1)$, $A_2(4,1,-2)$, $A_3(6,3,7)$, $A_4(7,5,-3)$.

15. $A_1(1,1,-1)$, $A_2(2,3,1)$, $A_3(3,2,1)$, $A_4(5,9,-8)$.

16. $A_1(1,5,-7)$, $A_2(-3,6,3)$, $A_3(-2,7,3)$, $A_4(-4,8,-12)$.

17. $A_1(-3,4,-7)$, $A_2(1,5,-4)$, $A_3(-5,-2,0)$, $A_4(2,5,4)$.

18. $A_1(-1,2,-3)$, $A_2(4,-1,0)$, $A_3(2,1,-2)$, $A_4(3,4,5)$.

19. $A_1(4,-1,3)$, $A_2(-2,1,0)$, $A_3(0,-5,1)$, $A_4(3,2,-6)$.

20. $A_1(1,-1,1)$, $A_2(-2,0,3)$, $A_3(2,1,-1)$, $A_4(2,-2,-4)$.

21. $A_1(1,2,0)$, $A_2(1,-1,2)$, $A_3(0,1,-1)$, $A_4(-3,0,1)$.

22. $A_1(1,0,2)$, $A_2(1,2,-1)$, $A_3(2,-2,1)$, $A_4(2,1,0)$.

23. $A_1(1,2,-3)$, $A_2(1,0,1)$, $A_3(-2,-1,6)$, $A_4(0,-5,-4)$.

24. $A_1(3,10,-1)$, $A_2(-2,3,-5)$, $A_3(-6,0,-3)$, $A_4(1,-1,2)$.

25. $A_1(-1,2,4)$, $A_2(-1,-2,-4)$, $A_3(3,0,-1)$, $A_4(7,-3,1)$.

26. $A_1(0,-3,1)$, $A_2(-4,1,2)$, $A_3(2,-1,5)$, $A_4(3,1,-4)$.

27. $A_1(1,3,0)$, $A_2(4,-1,2)$, $A_3(3,0,1)$, $A_4(-4,3,5)$.

28. $A_1(-2,-1,-1)$, $A_2(0,3,2)$, $A_3(3,1,-4)$, $A_4(-4,7,3)$.

29. $A_1(-3,-5,6)$, $A_2(2,1,-4)$, $A_3(0,-3,-1)$, $A_4(-5,2,-8)$.

30. $A_1(2,-4,-3)$, $A_2(5,-6,0)$, $A_3(-1,3,-3)$, $A_4(-10,-8,7)$.

31. $A_1(1,-1,2)$, $A_2(2,1,2)$, $A_3(1,1,4)$, $A_4(6,-3,8)$.

Задача 7. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3.

1. $M_1(-3,4,-7)$, $M_2(1,5,-4)$, $M_3(-5,-2,0)$, $M_0(-12,7,-1)$.
2. $M_1(-1,2,-3)$, $M_2(4,-1,0)$, $M_3(2,1,-2)$, $M_0(1,-6,-5)$.
3. $M_1(-3,-1,1)$, $M_2(-9,1,-2)$, $M_3(3,-5,4)$, $M_0(-7,0,-1)$.
4. $M_1(1,-1,1)$, $M_2(-2,0,3)$, $M_3(2,1,-1)$, $M_0(-2,4,2)$.
5. $M_1(1,2,0)$, $M_2(1,-1,2)$, $M_3(0,1,-1)$, $M_0(2,-1,4)$.
6. $M_1(1,0,2)$, $M_2(1,2,-1)$, $M_3(2,-2,1)$, $M_0(-5,-9,1)$.
7. $M_1(1,2,-3)$, $M_2(1,0,1)$, $M_3(-2,-1,6)$, $M_0(3,-2,-9)$.
8. $M_1(3,10,-1)$, $M_2(-2,3,-5)$, $M_3(-6,0,-3)$, $M_0(-6,7,-10)$.
9. $M_1(-1,2,4)$, $M_2(-1,-2,-4)$, $M_3(3,0,-1)$, $M_0(-2,3,5)$.
10. $M_1(0,-3,1)$, $M_2(-4,1,2)$, $M_3(2,-1,5)$, $M_0(-3,4,-5)$.
11. $M_1(1,3,0)$, $M_2(4,-1,2)$, $M_3(3,0,1)$, $M_0(4,3,0)$.
12. $M_1(-2,-1,-1)$, $M_2(0,3,2)$, $M_3(3,1,-4)$, $M_0(-21,20,-16)$.
13. $M_1(-3,-5,6)$, $M_2(2,1,-4)$, $M_3(0,-3,-1)$, $M_0(3,6,68)$.
14. $M_1(2,-4,-3)$, $M_2(5,-6,0)$, $M_3(-1,3,-3)$, $M_0(2,-10,8)$.
15. $M_1(1,-1,2)$, $M_2(2,1,2)$, $M_3(1,1,4)$, $M_0(-3,2,7)$.
16. $M_1(1,3,6)$, $M_2(2,2,1)$, $M_3(-1,0,1)$, $M_0(5,-4,5)$.
17. $M_1(-4,2,6)$, $M_2(2,-3,0)$, $M_3(-10,5,8)$, $M_0(-12,1,8)$.
18. $M_1(7,2,4)$, $M_2(7,-1,-2)$, $M_3(-5,-2,-1)$, $M_0(10,1,8)$.
19. $M_1(2,1,4)$, $M_2(3,5,-2)$, $M_3(-7,-3,2)$, $M_0(-3,1,8)$.
20. $M_1(-1,-5,2)$, $M_2(-6,0,-3)$, $M_3(3,6,-3)$, $M_0(10,-8,-7)$.
21. $M_1(0,-1,-1)$, $M_2(-2,3,5)$, $M_3(1,-5,-9)$, $M_0(-4,-13,6)$.

22. $M_1(5,2,0)$, $M_2(2,5,0)$, $M_3(1,2,4)$, $M_0(-3,-6,-8)$.

23. $M_1(2,-1,-2)$, $M_2(1,2,1)$, $M_3(5,0,-6)$, $M_0(14,-3,7)$.

24. $M_1(-2,0,-4)$, $M_2(-1,7,1)$, $M_3(4,-8,-4)$, $M_0(-6,5,5)$.

25. $M_1(14,4,5)$, $M_2(-5,-3,2)$, $M_3(-2,-6,-3)$, $M_0(-1,-8,7)$.

26. $M_1(1,2,0)$, $M_2(3,0,-3)$, $M_3(5,2,6)$, $M_0(-13,-8,16)$.

27. $M_1(2,-1,2)$, $M_2(1,2,-1)$, $M_3(3,2,1)$, $M_0(-5,3,7)$.

28. $M_1(1,1,2)$, $M_2(-1,1,3)$, $M_3(2,-2,4)$, $M_0(2,3,8)$.

29. $M_1(2,3,1)$, $M_2(4,1,-2)$, $M_3(6,3,7)$, $M_0(-5,-4,8)$.

30. $M_1(1,1,-1)$, $M_2(2,3,1)$, $M_3(3,2,1)$, $M_0(-3,-7,6)$.

31. $M_1(1,5,-7)$, $M_2(-3,6,3)$, $M_3(-2,7,3)$, $M_0(1,-1,2)$.

Задача 8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$.

1. $A(1,0,-2)$, $B(2,-1,3)$, $C(0,-3,2)$.

2. $A(-1,3,4)$, $B(-1,5,0)$, $C(2,6,1)$.

3. $A(4,-2,0)$, $B(1,-1,-5)$, $C(-2,1,-3)$.

4. $A(-8,0,7)$, $B(-3,2,4)$, $C(-1,4,5)$.

5. $A(7,-5,1)$, $B(5,-1,-3)$, $C(3,0,-4)$.

6. $A(-3,5,-2)$, $B(-4,0,3)$, $C(-3,2,5)$.

7. $A(1,-1,8)$, $B(-4,-3,10)$, $C(-1,-1,7)$.

8. $A(-2,0,-5)$, $B(2,7,-3)$, $C(1,10,-1)$.

9. $A(1,9,-4)$, $B(5,7,1)$, $C(3,5,0)$.

10. $A(-7,0,3)$, $B(1,-5,-4)$, $C(2,-3,0)$.

11. $A(0,-3,5)$, $B(-7,2,6)$, $C(-3,2,4)$.

12. $A(5,-1,2)$, $B(2,-4,3)$, $C(4,-1,3)$.

13. $A(-3,7,2)$, $B(3,5,1)$, $C(4,5,3)$.

14. $A(0,-2,8)$, $B(4,3,2)$, $C(1,4,3)$.

15. $A(1,-1,5)$, $B(0,7,8)$, $C(-1,3,8)$.

16. $A(-10,0,9)$, $B(12,4,11)$, $C(8,5,15)$.

17. $A(3,-3,-6)$, $B(1,9,-5)$, $C(6,6,-4)$.

18. $A(2,1,7)$, $B(9,0,2)$, $C(9,2,3)$.

19. $A(-7,1,-4)$, $B(8,11,-3)$, $C(9,9,-1)$.
20. $A(1,0,-6)$, $B(-7,2,1)$, $C(-9,6,1)$.
21. $A(-3,1,0)$, $B(6,3,3)$, $C(9,4,-2)$.
22. $A(-4,-2,5)$, $B(3,-3,-7)$, $C(9,3,-7)$.
23. $A(0,-8,10)$, $B(-5,5,7)$, $C(-8,0,4)$.
24. $A(1,-5,-2)$, $B(6,-2,1)$, $C(2,-2,-2)$.
25. $A(0,7,-9)$, $B(-1,8,-11)$, $C(-4,3,-12)$.
26. $A(-3,-1,7)$, $B(0,2,-6)$, $C(2,3,-5)$.
27. $A(5,3,-1)$, $B(0,0,-3)$, $C(5,-1,0)$.
28. $A(-1,2,-2)$, $B(13,14,1)$, $C(14,15,2)$.
29. $A(7,-5,0)$, $B(8,3,-1)$, $C(8,5,1)$.
30. $A(-3,6,4)$, $B(8,-3,5)$, $C(0,-3,7)$.
31. $A(2,5,-3)$, $B(7,8,-1)$, $C(9,7,4)$.

Задача 9. Найти угол между плоскостями.

1. $x-3y+5=0$, $2x-y+5z-16=0$.
2. $x-3y+z-1=0$, $x+z-1=0$.
3. $4x-5y+3z-1=0$, $x-4y-z+9=0$.
4. $3x-y+2z+15=0$, $5x+9y-3z-1=0$.
5. $6x+2y-4z+17=0$, $9x+3y-6z-4=0$.
6. $x-y\sqrt{2}+z-1=0$, $x+y\sqrt{2}-z+3=0$.
7. $3y-z=0$, $2y+z=0$.
8. $6x+3y-2z=0$, $x+2y+6z-12=0$.
9. $x+2y+2z-3=0$, $16x+12y-15z-1=0$.
10. $2x-y+5z+16=0$, $x+2y+3z+8=0$.
11. $2x+2y+z-1=0$, $x+z-1=0$.
12. $3x+y+z-4=0$, $y+z+5=0$.
13. $3x-2y-2z-16=0$, $x+y-3z-7=0$.
14. $2x+2y+z+9=0$, $x-y+3z-1=0$.
15. $x+2y+2z-3=0$, $2x-y+2z+5=0$.
16. $3x+2y-3z-1=0$, $x+y+z-7=0$.
17. $x-3y-2z-8=0$, $x+y-z+3=0$.
18. $3x-2y+3z+23=0$, $y+z+5=0$.
19. $x+y+3z-7=0$, $y+z-1=0$.
20. $x-2y+2z+17=0$, $x-2y-1=0$.
21. $x+2y-1=0$, $x+y+6=0$.

22. $2x - z + 5 = 0,\ 2x + 3y - 7 = 0.$
23. $5x + 3y + z - 18 = 0,\ 2y + z - 9 = 0.$
24. $4x + 3z - 2 = 0,\ x + 2y + 2z + 5 = 0.$
25. $x + 4y - z + 1 = 0,\ 2x + y + 4z - 3 = 0.$
26. $2y + z - 9 = 0,\ x - y + 2z - 1 = 0.$
27. $2x - 6y + 14z - 1 = 0,\ 5x - 15y + 35z - 3 = 0.$
28. $x - y + 7z - 1 = 0,\ 2x - 2y - 5 = 0.$
29. $3x - y - 5 = 0,\ 2x + y - 3 = 0.$
30. $x + y + z\sqrt{2} - 3 = 0,\ x - y + z\sqrt{2} - 1 = 0.$
31. $x + 2y - 2z - 7 = 0,\ x + y - 35 = 0.$

Задача 10. Найти координаты точки A, равноудаленной от точек B и C.

1. $A(0,0,z)$, $B(5,1,0)$, $C(0,2,3)$.
2. $A(0,0,z)$, $B(3,3,1)$, $C(4,1,2)$.
3. $A(0,0,z)$, $B(3,1,3)$, $C(1,4,2)$.
4. $A(0,0,z)$, $B(-1,-1,-6)$, $C(2,3,5)$.
5. $A(0,0,z)$, $B(-13,4,6)$, $C(10,-9,5)$.
6. $A(0,0,z)$, $B(-5,-5,6)$, $C(-7,6,2)$.
7. $A(0,0,z)$, $B(-18,1,0)$, $C(15,-10,2)$.
8. $A(0,0,z)$, $B(10,0,-2)$, $C(9,-2,1)$.
9. $A(0,0,z)$, $B(-6,7,5)$, $C(8,-4,3)$.
10. $A(0,0,z)$, $B(6,-7,1)$, $C(-1,2,5)$.
11. $A(0,0,z)$, $B(7,0,-15)$, $C(2,10,-12)$.
12. $A(0,y,0)$, $B(3,0,3)$, $C(0,2,4)$.
13. $A(0,y,0)$, $B(1,6,4)$, $C(5,7,1)$.
14. $A(0,y,0)$, $B(-2,8,10)$, $C(6,11,-2)$.
15. $A(0,y,0)$, $B(-2,-4,6)$, $C(7,2,5)$.
16. $A(0,y,0)$, $B(2,2,4)$, $C(0,4,2)$.
17. $A(0,y,0)$, $B(0,-4,1)$, $C(1,-3,5)$.
18. $A(0,y,0)$, $B(0,5,-9)$, $C(-1,0,5)$.
19. $A(0,y,0)$, $B(-2,4,-6)$, $C(8,5,1)$.
20. $A(0,y,0)$, $B(7,3,-4)$, $C(1,5,7)$.
21. $A(0,y,0)$, $B(0,-2,4)$, $C(-4,0,4)$.
22. $A(x,0,0)$, $B(0,1,3)$, $C(2,0,4)$.
23. $A(x,0,0)$, $B(4,0,5)$, $C(5,4,2)$.
24. $A(x,0,0)$, $B(8,1,-7)$, $C(10,-2,1)$.
25. $A(x,0,0)$, $B(3,5,6)$, $C(1,2,3)$.

26. $A(x,0,0)$, $B(4,5,-2)$, $C(2,3,4)$.
27. $A(x,0,0)$, $B(-2,0,6)$, $C(0,-2,-4)$.
28. $A(x,0,0)$, $B(1,5,9)$, $C(3,7,11)$.
29. $A(x,0,0)$, $B(4,6,8)$, $C(2,4,6)$.
30. $A(x,0,0)$, $B(1,2,3)$, $C(2,6,10)$.
31. $A(x,0,0)$, $B(-2,-4,-6)$, $C(-1,-2,-3)$.

Задача 11. Пусть k — коэффициент гомотетии с центром в начале координат. Верно ли, что точка A принадлежит образу плоскости α?

1. $A(1,2,-1)$, $\alpha\colon 2x+3y+z-1=0$, $k=2$.
2. $A(2,1,2)$, $\alpha\colon x-2y+z+1=0$, $k=-2$.
3. $A(-1,1,1)$, $\alpha\colon 3x-y+2z+4=0$, $k=\frac{1}{2}$.
4. $A(-2,4,1)$, $\alpha\colon 3x+y+2z+2=0$, $k=3$.
5. $A(1,\frac{1}{3},-2)$, $\alpha\colon x-3y+z+6=0$, $k=\frac{1}{3}$.
6. $A(\frac{1}{2},\frac{1}{3},1)$, $\alpha\colon 2x-3y+3z-2=0$, $k=1{,}5$.
7. $A(2,0,-1)$, $\alpha\colon x-3y+5z-1=0$, $k=-1$.
8. $A(1,-2,1)$, $\alpha\colon 5x+y-z+6=0$, $k=\frac{2}{3}$.
9. $A(2,-5,4)$, $\alpha\colon 5x+2y-z+3=0$, $k=\frac{4}{3}$.
10. $A(2,-3,1)$, $\alpha\colon x+y-2z+2=0$, $k=\frac{5}{2}$.
11. $A(-2,3,-3)$, $\alpha\colon 3x+2y-z-2=0$, $k=\frac{3}{2}$.
12. $A(\frac{1}{4},\frac{1}{3},1)$, $\alpha\colon 4x-3y+5z-10=0$, $k=\frac{1}{2}$.
13. $A(0,1,-1)$, $\alpha\colon 6x-5y+3z-4=0$, $k=-\frac{3}{4}$.
14. $A(2,3,-2)$, $\alpha\colon 3x-2y+4z-6=0$, $k=-\frac{4}{3}$.
15. $A(-2,-1,1)$, $\alpha\colon x-2y+6z-10=0$, $k=\frac{3}{5}$.
16. $A(5,0,-1)$, $\alpha\colon 2x-y+3z-1=0$, $k=3$.
17. $A(1,1,1)$, $\alpha\colon 7x-6y+z-5=0$, $k=-2$.
18. $A(\frac{1}{3},1,1)$, $\alpha\colon 3x-y+5z-6=0$, $k=\frac{5}{6}$.
19. $A(2,5,1)$, $\alpha\colon 5x-2y+z-3=0$, $k=\frac{1}{3}$.
20. $A(-1,2,3)$, $\alpha\colon x-3y+z+2=0$, $k=2{,}5$.
21. $A(4,3,1)$, $\alpha\colon 3x-4y+5z-6=0$, $k=\frac{5}{6}$.
22. $A(3,5,2)$, $\alpha\colon 5x-3y+z-4=0$, $k=\frac{1}{2}$.
23. $A(4,0,-3)$, $\alpha\colon 7x-y+3z-1=0$, $k=3$.
24. $A(-1,1,-2)$, $\alpha\colon 4x-y+3z-6=0$, $k=-\frac{5}{3}$.
25. $A(2,-5,-1)$, $\alpha\colon 5x+2y-3z-9=0$, $k=\frac{1}{3}$.
26. $A(-3,-2,4)$, $\alpha\colon 2x-3y+z-5=0$, $k=-\frac{4}{5}$.
27. $A(5,0,-6)$, $\alpha\colon 6x-y-z+7=0$, $k=\frac{2}{7}$.

28. $A(1,2,2)$, α: $3x - z + 5 = 0$, $k = -\frac{1}{5}$.
29. $A(3,2,4)$, α: $2x - 3y + z - 6 = 0$, $k = \frac{2}{3}$.
30. $A(7,0,-1)$, α: $x - y - z - 1 = 0$, $k = 4$.
31. $A(0,3,-1)$, α: $2x - y + 3z - 1 = 0$, $k = 2$.

Задача 12. Написать канонические уравнения прямой.

1. $2x + y + z - 2 = 0$, $2x - y - 3z + 6 = 0$.
2. $x - 3y + 2z + 2 = 0$, $x + 3y + z + 14 = 0$.
3. $x - 2y + z - 4 = 0$, $2x + 2y - z - 8 = 0$.
4. $x + y + z - 2 = 0$, $x - y - 2z + 2 = 0$.
5. $2x + 3y + z + 6 = 0$, $x - 3y - 2z + 3 = 0$.
6. $3x + y - z - 6 = 0$, $3x - y + 2z = 0$.
7. $x + 5y + 2z + 11 = 0$, $x - y - z - 1 = 0$.
8. $3x + 4y - 2z + 1 = 0$, $2x - 4y + 3z + 4 = 0$.
9. $5x + y - 3z + 4 = 0$, $x - y + 2z + 2 = 0$.
10. $x - y - z - 2 = 0$, $x - 2y + z + 4 = 0$.
11. $4x + y - 3z + 2 = 0$, $2x - y + z - 8 = 0$.
12. $3x + 3y - 2z - 1 = 0$, $2x - 3y + z + 6 = 0$.
13. $6x - 7y - 4z - 2 = 0$, $x + 7y - z - 5 = 0$.
14. $8x - y - 3z - 1 = 0$, $x + y + z + 10 = 0$.
15. $6x - 5y - 4z + 8 = 0$, $6x + 5y + 3z + 4 = 0$.
16. $x + 5y - z - 5 = 0$, $2x - 5y + 2z + 5 = 0$.
17. $2x - 3y + z + 6 = 0$, $x - 3y - 2z + 3 = 0$.
18. $5x + y + 2z + 4 = 0$, $x - y - 3z + 2 = 0$.
19. $4x + y + z + 2 = 0$, $2x - y - 3z - 8 = 0$.
20. $2x + y - 3z - 2 = 0$, $2x - y + z + 6 = 0$.
21. $x + y - 2z - 2 = 0$, $x - y + z + 2 = 0$.
22. $x + 5y - z + 11 = 0$, $x - y + 2z - 1 = 0$.
23. $x - y + z - 2 = 0$, $x - 2y - z + 4 = 0$.
24. $6x - 7y - z - 2 = 0$, $x + 7y - 4z - 5 = 0$.
25. $x + 5y + 2z - 5 = 0$, $2x - 5y - z + 5 = 0$.
26. $x - 3y + z + 2 = 0$, $x + 3y + 2z + 14 = 0$.
27. $2x + 3y - 2z + 6 = 0$, $x - 3y + z + 3 = 0$.
28. $3x + 4y + 3z + 1 = 0$, $2x - 4y - 2z + 4 = 0$.
29. $3x + 3y + z - 1 = 0$, $2x - 3y - 2z + 6 = 0$.
30. $6x - 5y + 3z + 8 = 0$, $6x + 5y - 4z + 4 = 0$.
31. $2x - 3y - 2z + 6 = 0$, $x - 3y + z + 3 = 0$.

Задача 13. Найти точку пересечения прямой и плоскости.

1. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}$, $x + 2y + 3z - 14 = 0$.
2. $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5}$, $x + 2y - 5z + 20 = 0$.
3. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2}$, $x - 3y + 7z - 24 = 0$.
4. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{2}$, $2x - y + 4z = 0$.
5. $\frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0}$, $3x + y - 5z - 12 = 0$.
6. $\frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2}$, $x + 3y - 5z + 9 = 0$.
7. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$, $x - 2y + 5z + 17 = 0$.
8. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{1}$, $x - 2y + 4z - 19 = 0$.
9. $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{-1}$, $2x - y + 3z + 23 = 0$.
10. $\frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{0}$, $2x - 3y - 5z - 7 = 0$.
11. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}$, $4x + 2y - z - 11 = 0$.
12. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{-1}$, $3x - 2y - 4z - 8 = 0$.
13. $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}$, $x + 2y - z - 2 = 0$.
14. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+2}{3}$, $5x - y + 4z + 3 = 0$.
15. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}$, $x + 3y + 5z - 42 = 0$.
16. $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-4}{2}$, $7x + y + 4z - 47 = 0$.
17. $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{5}$, $2x + 3y + 7z - 52 = 0$.
18. $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2}$, $3x + 4y + 7z - 16 = 0$.
19. $\frac{x-5}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{-1}$, $2x - 5y + 4z + 24 = 0$.
20. $\frac{x-1}{8} = \frac{y-8}{-5} = \frac{z+5}{12}$, $x - 2y - 3z + 18 = 0$.
21. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{0}$, $x + 7y + 3z + 11 = 0$.
22. $\frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{2}$, $3x + 7y - 5z - 11 = 0$.
23. $\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-1}$, $4x + y - 6z - 5 = 0$.
24. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-8}{0}$, $5x + 9y + 4z - 25 = 0$.
25. $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}$, $x + 4y + 13z - 23 = 0$.
26. $\frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{3}$, $3x - 2y + 5z - 3 = 0$.
27. $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{-2}$, $3x - y + 4z = 0$.
28. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-3}{-2}$, $x + 2y - 5z + 16 = 0$.
29. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+2}{-2}$, $3x - 7y - 2z + 7 = 0$.
30. $\frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+5}{11}$, $5x + 7y + 9z - 32 = 0$.
31. $\frac{x-7}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$, $2x + y + 7z - 3 = 0$.

Задача 14. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой (для вариантов 1–15) или плоскости (для вариантов 16–31).

1. $M(0,-3,-2)$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1,5}{-1}=\frac{z}{1}$.

2. $M(2,-1,1)$, $\frac{x-4,5}{1}=\frac{y+3}{-0,5}=\frac{z-2}{1}$.

3. $M(1,1,1)$, $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1,5}{-2}=\frac{z-1}{1}$.

4. $M(1,2,3)$, $\frac{x-0,5}{0}=\frac{y+1,5}{-1}=\frac{z-1,5}{1}$.

5. $M(1,0,-1)$, $\frac{x-3,5}{2}=\frac{y-1,5}{2}=\frac{z}{0}$.

6. $M(2,1,0)$, $\frac{x-2}{0}=\frac{y+1,5}{-1}=\frac{z+0,5}{1}$.

7. $M(-2,-3,0)$, $\frac{x+0,5}{1}=\frac{y+1,5}{0}=\frac{z-0,5}{1}$.

8. $M(-1,0,-1)$, $\frac{x}{-1}=\frac{y-1,5}{0}=\frac{z-2}{1}$.

9. $M(0,2,1)$, $\frac{x-1,5}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{1}$.

10. $M(3,-3,-1)$, $\frac{x-6}{5}=\frac{y-3,5}{4}=\frac{z+0,5}{0}$.

11. $M(3,3,3)$, $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1,5}{0}=\frac{z-3}{1}$.

12. $M(-1,2,0)$, $\frac{x+0,5}{1}=\frac{y+0,7}{-0,2}=\frac{z-2}{2}$

13. $M(2,-2,-3)$, $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+0,5}{0}=\frac{z+1,5}{0}$.

14. $M(-1,0,1)$, $\frac{x+0,5}{0}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-4}{2}$.

15. $M(0,-3,-2)$, $\frac{x-0,5}{0}=\frac{y+1,5}{-1}=\frac{z-1,5}{1}$.

16. $M(1,0,1)$, $4x+6y+4z-25=0$.

17. $M(-1,0,-1)$, $2x+6y-2z+11=0$.

18. $M(0,2,1)$, $2x+4y-3=0$.

19. $M(2,1,0)$, $y+z+2=0$.

20. $M(-1,2,0)$, $4x-5y-z-7=0$.

21. $M(2,-1,1)$, $x-y+2z-2=0$.

22. $M(1,1,1)$, $x+4y+3z+5=0$.

23. $M(1,2,3)$, $2x+10y+10z-1=0$.

24. $M(0,-3,-2)$, $2x+10y+10z-1=0$.

25. $M(1,0,-1)$, $2y+4z-1=0$.

26. $M(3,-3,-1)$, $2x-4y-4z-13=0$.

27. $M(-2,-3,0)$, $x+5y+4=0$.

28. $M(2,-2,-3)$, $y+z+2=0$.

29. $M(-1,0,1)$, $2x+4y-3=0$.

30. $M(3,3,3)$, $8x+6y+8z-25=0$.

31. $M(-2,0,3)$, $2x-2y+10z+1=0$.

Раздел 10

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

§ 10.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1) Линейное пространство. Базис. Координаты.

2) Преобразование координат вектора при переходе к новому базису.

3) Линейный оператор. Матрица оператора.

4) Преобразование матрицы оператора при переходе к новому базису.

5) Действия над линейными операторами.

6) Собственные векторы и собственные значения.

7) Евклидово пространство. Неравенство Коши–Буняковского.

8) Сопряженные и самосопряженные операторы. Их матрицы.

9) Ортогональное преобразование; свойства; матрица.

10) Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования.

§ 10.2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1) Найти какой-нибудь базис и размерность подпространства L пространства R_3, если L задано уравнением $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.

2) Доказать, что все симметрические матрицы третьего порядка образуют линейное подпространство всех квадратных матриц третьего порядка. Найти базис и размерность этого подпространства.

3) Найти координаты многочлена $P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ в базисе $1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3$.

4) Линейный оператор A в базисе (e_1, e_2, e_3) имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого же оператора в базисе $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$.

5) Найти ядро и образ оператора дифференцирования в пространстве многочленов, степени которых меньше или равны трем.

6) Пусть $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — собственные векторы линейного оператора $\boldsymbol{A}$, относящиеся к различным собственным значениям. Доказать, что вектор $\boldsymbol{z} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, не является собственным вектором оператора $\boldsymbol{A}$.

7) Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{Ax} = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3)$. Будет ли оператор A самосопряженным?

8) Доказать, что если матрица оператора A — симметрическая в некотором базисе, то она является симметрической в любом базисе (базисы — ортонормированные).

§ 10.3. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1. Образует ли линейное пространство заданное множество, в котором определены сумма любых двух элементов a и b и произведение любого элемента a на любое действительное число α?

1. Множество всех векторов трехмерного пространства, координаты которых — целые числа;
   сумма: $a + b$, произведение: $\alpha \cdot a$.
2. Множество всех векторов, лежащих на одной оси;
   сумма: $a + b$, произведение: $\alpha \cdot a$.
3. Множество всех векторов на плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей;
   сумма: $a + b$, произведение: $\alpha \cdot a$.
4. Множество всех векторов трехмерного пространства;
   сумма: $[a \cdot b]$, произведение: $\alpha \cdot a$.
5. Множество всех векторов, лежащих на одной оси;
   сумма: $a + b$, произведение: $\alpha \cdot |a|$.

6. Множество всех векторов, являющихся линейными комбинациями векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$;
сумма: $a+b$, произведение: $\alpha \cdot a$.
7. Множество всех функций $a = f(t)$, $b = g(t)$, принимающих положительные значения;
сумма: $f(t) \cdot g(t)$, произведение $f^{\alpha}(t)$.
8. Множество всех непрерывных функций $a = f(t)$, $b = g(t)$, заданных на отрезке $[0, 1]$;
сумма: $f(t) + g(t)$, произведение: $\alpha \cdot f(t)$.
9. Множество всех четных функций $a = f(t)$, $b = g(t)$, заданных на отрезке $[-1, +1]$;
сумма: $f(t) \cdot g(t)$, произведение: $\alpha \cdot f(t)$.
10. Множество всех нечетных функций $a = f(t)$, $b = g(t)$, заданных на отрезке $[-1, +1]$;
сумма: $f(t) + g(t)$, произведение: $\alpha \cdot f(t)$.
11. Множество всех линейных функций $a = f(x_1, x_2)$, $b = g(x_1, x_2)$;
сумма: $f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)$, произведение $\alpha f(x_1, x_2)$.
12. Множество всех многочленов третьей степени от переменной x;
сумма: $a+b$, произведение: $\alpha \cdot a$.
13. Множество всех многочленов степени меньшей или равной трем от переменных x, y;
сумма: $a+b$, произведение: $\alpha \cdot a$.
14. Множество всех упорядоченных наборов из n чисел $a = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $b = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$;
сумма: $\{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n\}$,
произведение: $\{\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n\}$.
15. Множество всех упорядоченных наборов из n чисел $a = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $b = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$;
сумма $\{x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n\}$,
произведение $\{\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n\}$.
16. Множество всех сходящихся последовательностей
$a = \{u_n\}$, $b = \{v_n\}$;
сумма: $\{u_n + v_n\}$, произведение: $\{\alpha u_n\}$.
17. Множество всех многочленов от одной переменной степени меньшей или равной n;
сумма: $a+b$, произведение: $\alpha \cdot a$.

18. Множество всех многочленов от одной переменной степени n;
сумма: $a+b$, произведение: $\alpha \cdot a$.

19. Множество всех диагональных матриц
$a=\|a_{ik}\|$, $b=\|b_{ik}\|$, $i,k=1,2,\ldots,n$;
сумма: $\|a_{ik}+b_{ik}\|$, произведение: $\|\alpha a_{ik}\|$.

20. Множество всех невырожденных матриц
$a=\|a_{ik}\|$, $b=\|b_{ik}\|$, $i,k=1,2,\ldots,n$;
сумма: $\|a_{ik}\|\cdot\|b_{ik}\|$, произведение: $\|\alpha a_{ik}\|$.

21. Множество всех квадратных матриц
$a=\|a_{ik}\|$, $b=\|b_{ik}\|$, $i,k=1,2,\ldots,n$;
сумма: $\|a_{ik}+b_{ik}\|$, произведение: $\|\alpha a_{ik}\|$.

22. Множество всех диагональных матриц
$a=\|a_{ik}\|$, $b=\|b_{ik}\|$, $i,k=1,2,\ldots,n$;
сумма: $\|a_{ik}\|\cdot\|b_{ik}\|$, произведение: $\|\alpha a_{ik}\|$.

23. Множество всех прямоугольных матриц
$a=\|a_{ik}\|$, $b=\|b_{ik}\|$, $i=1,2,\ldots,m$; $k=1,2,\ldots,n$;
сумма: $\|a_{ik}+b_{ik}\|$, произведение: $\|\alpha a_{ik}\|$.

24. Множество всех симметрических матриц
$a=\|a_{ik}\|$ $(a_{ki}=a_{ik})$, $b=\|b_{ik}\|$ $(b_{ki}=b_{ik})$,
$i,k=1,2,\ldots,n$;
сумма: $\|a_{ik}+b_{ik}\|$, произведение: $\|\alpha a_{ik}\|$.

25. Множество всех целых чисел;
сумма: $a+b$, произведение: αa.

26. Множество всех действительных чисел;
сумма: $a+b$, произведение: αa.

27. Множество всех положительных чисел;
сумма: $a\cdot b$, произведение: a^{α}.

28. Множество всех отрицательных чисел; сумма: $-|a|\cdot|b|$, произведение: $-|a|^{\alpha}$.

29. Множество всех действительных чисел;
сумма: $a\cdot b$, произведение: $\alpha\cdot a$.

30. Множество всех дифференцируемых функций $a=f(t)$, $b=g(t)$;
сумма: $f(t)+g(t)$, произведение: $\alpha\cdot f(t)$.

31. Множество всех дифференцируемых функций $a=f(t)$, $b=g(t)$;
сумма $f(t)\cdot g(t)$, произведение: $\alpha\cdot f(t)$.

Задача 2. *Исследовать на линейную зависимость систему векторов.*

1. $a = \{1, 4, 6\}$,
$b = \{1, -1, 1\}$,
$c = \{1, 1, 3\}$.

2. $\sin x$,
$\cos x$,
$\operatorname{tg} x$ на $(-\pi/2, \pi/2)$.

3. $a = \{2, -3, 1\}$,
$b = \{3, -1, 5\}$,
$c = \{1, -4, 3\}$.

4. 2,
$\sin x$,
$\sin^2 x$,
$\cos^2 x$ на $(-\infty, +\infty)$.

5. $a = \{5, 4, 3\}$,
$b = \{3, 3, 2\}$,
$c = \{8, 1, 3\}$.

6. 1,
x,
$\sin x$ на $(-\infty, +\infty)$.

7. $a = \{1, 1, 1\}$,
$b = \{0, 1, 1\}$,
$c = \{0, 0, 1\}$.

8. e^x,
e^{2x},
e^{3x} на $(-\infty, +\infty)$.

9. $a = \{1, -1, 2\}$,
$b = \{-1, 1, -1\}$,
$c = \{2, -1, 1\}$.

10. x,
x^2,
$(1 + x)^2$ на $(-\infty, +\infty)$.

11. $a = \{1, 2, 3\}$,
$b = \{4, 5, 6\}$,
$c = \{7, 8, 9\}$.

12. 1,
x,
x^2,
$(1 + x)^2$ на $(-\infty, \infty)$.

13. $a = \{1, 1, 1\}$,
$b = \{1, 2, 3\}$,
$c = \{1, 3, 6\}$.

14. $\cos x$,
$\sin x$,
$\sin 2x$ на $(-\pi/2, \pi/2)$.

15. $a = \{3, 4, -5\}$,
$b = \{8, 7, -2\}$,
$c = \{2, -1, 8\}$.

16. e^x,
e^{-x},
e^{2x} на $(-\infty, +\infty)$.

17. $a = \{3, 2, -4\}$,
$b = \{4, 1, -2\}$,
$c = \{5, 2, -3\}$.

18. $1 + x + x^2$,
$1 + 2x + x^2$,
$1 + 3x + x^2$ на $(-\infty, +\infty)$.

19. $a = \{0, 1, 1\}$,
$b = \{1, 0, 1\}$,
$c = \{1, 1, 0\}$.

20. 1,
e^x,
$\operatorname{sh} x$ на $(-\infty, +\infty)$.

21. $a = \{5, -6, 1\}$,
$b = \{3, -5, -2\}$,
$c = \{2, -1, 3\}$.

22. $\frac{1}{x}$,
x,
1 на $(0, 1)$.

23. $\boldsymbol{a} = \{7, 1, -3\}$,
$\boldsymbol{b} = \{2, 2, -4\}$,
$\boldsymbol{c} = \{3, -3, 5\}$.

24. 1,
$\operatorname{tg} x$,
$\operatorname{ctg} x$ на $(0, \pi/2)$.

25. $\boldsymbol{a} = \{1, 2, 3\}$,
$\boldsymbol{b} = \{6, 5, 9\}$,
$\boldsymbol{c} = \{7, 8, 9\}$.

26. x,
$1 + x$,
$(1 + x)^2$ на $(-\infty, +\infty)$.

27. $\boldsymbol{a} = \{2, 1, 0\}$,
$\boldsymbol{b} = \{-5, 0, 3\}$,
$\boldsymbol{c} = \{3, 4, 3\}$.

28. e^x,
xe^x,
x^2e^x на $(-\infty, +\infty)$.

29. $\boldsymbol{a} = \{2, 0, 2\}$,
$\boldsymbol{b} = \{1, -1, 0\}$,
$\boldsymbol{c} = \{0, -1, -2\}$.

30. e^x,
$\operatorname{sh} x$,
$\operatorname{ch} x$ на $(-\infty, +\infty)$.

31. $\boldsymbol{a} = \{-2, 1, 5\}$,
$\boldsymbol{b} = \{4, -3, 0\}$,
$\boldsymbol{c} = \{0, -1, 10\}$.

Задача 3. Найти общее решение для каждой из данных систем и проанализировать его структуру (указать базис пространства решений однородной системы, установить размерность пространства, выделить частное решение неоднородной системы).

1. $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 + 34x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 5, \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 4. \end{cases}$$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 + x_5 = 7, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 9x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 3. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_5 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$

13. $$\begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0, \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 4x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$$

14. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 6x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 1, \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 = 2. \end{cases}$$

15. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 1. \end{cases}$$

16. $$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_5 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 2. \end{cases}$$

17. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4. \end{cases}$$

18. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_5 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 3. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 + x_5 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_5 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 7x_5 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_5 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 1. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 1. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 6x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 3. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 + x_4 + 6x^5 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 4x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 3. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$

Задача 4. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$, если он задан в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$.

1. $\boldsymbol{x} = \{6, -1, 3\}$.

$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 2e_3, \\ e'_2 = 2e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$

2. $\boldsymbol{x} = \{1, 2, 4\}$.

$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 3e_3, \\ e'_2 = \frac{3}{2}e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$

3. $x = \{1, 3, 6\}$.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 4e_3, \\ e_2' = \frac{4}{3}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

4. $x = \{2, 4, 1\}$.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{3}{2}e_3, \\ e_2' = 3e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

5. $x = \{6, 3, 1\}$.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{4}{3}e_3, \\ e_2' = 4e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

6. $x = \{1, 4, 8\}$.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 5e_3, \\ e_2' = \frac{5}{4}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

7. $x = \{8, 4, 1\}$.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{5}{4}e_3, \\ e_2' = 5e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

8. $x = \{2, 5, 10\}$.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 6e_3, \\ e_2' = \frac{6}{5}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

9. $x = \{10, 5, 1\}$.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{6}{5}e_3, \\ e_2' = 6e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

10. $x = \{1, 6, 12\}$.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 7e_3, \\ e_2' = \frac{7}{6}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

11. $x = \{-12, 6, 1\}$.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{7}{6}e_3, \\ e_2' = 7e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

12. $x = \{-1, 7, 14\}$.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 8e_3, \\ e_2' = \frac{8}{7}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

13. $x = \{-3, 2, 4\}$.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - e_3, \\ e_2' = \frac{1}{2}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

14. $x = \{2, 4, 3\}$.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{1}{2}e_3, \\ e_2' = -e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

15. $x = \{2, 6, -3\}$.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 2e_3, \\ e_2' = \frac{2}{3}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

16. $x = \{12, 3, -1\}$.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{2}{3}e_3, \\ e_2' = -2e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

17. $x = \{1, -4, 8\}$.
$$\begin{cases} e_1 = e_1 + e_2 - 3e_3, \\ e_2' = \frac{3}{4}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

18. $x = \{1, 4, -8\}$.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 3e_3, \\ e_2' = \frac{3}{4}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

19. $x = \{7, -5, 10\}$.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 4e_3, \\ e_2' = \frac{4}{5}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

20. $x = \{5, -5, 4\}$.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{4}{5}e_3, \\ e_2' = -4e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

21. $x = \{1, -6, 6\}$.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 5e_3, \\ e_2' = \frac{5}{6}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

22. $x = \{6, 6, 2\}$.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{5}{6}e_3, \\ e_2' = -5e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

23. $x = \{1, 7, -7\}$.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 6e_3, \\ e_2' = \frac{6}{7}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

24. $x = \{7, 7, 2\}$.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{6}{7}e_3, \\ e_2' = -6e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

25. $x = \{3, -8, 8\}$.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 7e_3, \\ e_2' = \frac{7}{8}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

26. $x = \{1, -9, 9\}$.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 8e_3, \\ e_2' = \frac{8}{9}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

27. $x = \{9, 9, 2\}$.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{8}{9}e_3, \\ e_2' = -8e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

28. $x = \{3, -10, 10\}$.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 9e_3, \\ e_2' = \frac{9}{10}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

29. $x = \{10, 10, 7\}$.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{9}{10}e_3, \\ e_2' = -9e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

30. $x = \{1, 9, 18\}$.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 10e_3, \\ e_2' = \frac{10}{9}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

31. $x = \{1, 10, 10\}$.
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 11e_3, \\ e_2' = \frac{11}{10}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задача 5. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

1. $Ax = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, -3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2x_3)$,

$Bx = (6 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2)$,

$Cx = (x_3^4, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2x_3)$.

2. $Ax = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_2 + 2)$,
$Bx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 0, x_2^4 + 2x_3)$,
$Cx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_2 + 2x_3)$.
3. $Ax = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1, x_1 + 2x_2^4 + 3x_3)$,
$Bx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$,
$Cx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1, x_1 + 2x_2 + 3)$.
4. $Ax = (3x_1 + 2x_2 + x_3, x_3, 2x_1 - 3x_2 - 4x_3)$,
$Bx = (3x_1 + 2x_2 + x_3, 1, 2x_1 - 3x_2 - 4)$,
$Cx = (3x_1 + 2x_2 + x_3, x_3, 2x_1^4 - 3x_2 - 4x_3)$.
5. $Ax = (x_1, x_1 - 2x_2 - 3, 4x_1 - 5x_2 - 6)$,
$Bx = (x_1, x_1 - 2x_2 - 3x_3, 4x_1^4 - 5x_2 - 6x_3)$,
$Cx = (x_1, x_1 - 2x_2 - 3x_3, 4x_1 - 5x_2 - 6x_3)$.
6. $Ax = (2x_1 + x_2, x_2 - 2x_3, 3x_1 - 4x_2^2 - 5x_3)$,
$Bx = (2x_1 + x_2, x_2 - 2x_3, 3x_1 - 4x_2 - 5x_3)$,
$Cx = (2x_1 + x_2, x_2 - 2, 3x_1 - 4x_2 - 5)$.
7. $Ax = (x_1, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3)$,
$Bx = (x_1, x_1 + 2x_2 + 3, 4x_1 + 5x_2 + 6)$,
$Cx = (x_1, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1^4 + 5x_2 + 6x_3)$.
8. $Ax = (3x_1 - 2x_2 - x_3, 1, x_1 + 2x_2 + 3)$,
$Bx = (3x_1 - 2x_2 - x_3, 0, x_1^3 + 2x_2 + 3x_3)$,
$Cx = (3x_1 - 2x_2 - x_3, x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$.
9. $Ax = (2x_1 - x_2, x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3^4)$,
$Bx = (2x_1 - x_2, x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$,
$Cx = (2x_1 - x_2, 1, x_1 + 2x_2 + 3)$.
10. $Ax = (x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, 5x_1 + 6x_2 + 7x_3)$,
$Bx = (x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4, 5x_1 + 6x_2 + 7)$,
$Cx = (x_3, 0, 5x_1^4 + 6x_2 + 7x_3)$.
11. $Ax = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, 0)$,
$Bx = (6x_1 - 5x_2 - 4, 3x_1 - 2x_2 - x_3, 0)$,
$Cx = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3^2, 0)$.
12. $Ax = (5x_1 - 4x_2 - 3, 2x_1 - x_2, x_3^2)$,
$Bx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, 1)$,
$Cx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_3)$.
13. $Ax = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1^2, x_2 + 2x_3)$,
$Bx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1, x_2 + 2x_3)$,
$Cx = (4x_1 - 3x_2 - 2, x_1, x_2 + 2)$.

14. $Ax = (3x_1 + 2x_2 + x_3, 0, x_1 - 2x_2 - 3x_3)$,
$Bx = (3x_1 + 2x_2 + 1, 0, x_1 - 2x_2 - 3)$,
$Cx = (3x_1 + 2x_2 + x_3, 0, x_1^2 - 2x_2 - 3x_3)$.

15. $Ax = (x_1, x_2 - 2x_3, 3x_1 - 4x_2 - 5)$,
$Bx = (x_1, x_2^2 - 2x_3, 3x_1 - 4x_2 - 5)$,
$Cx = (x_1, x_2 - 2x_3, 3x_1 - 4x_2 - 5x_3)$.

16. $Ax = (2x_1 + x_2, x_3^2, 2x_1 - 3x_2 - 4x_3)$,
$Bx = (2x_1 + x_2, x_3, 2x_1 - 3x_2 - 4x_3)$,
$Cx = (2x_1 + x_2, x_3, 2x_1 - 3x_2 - 4)$.

17. $Ax = (x_1, x_2 + 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$,
$Bx = (x_1, x_2 + 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5)$,
$Cx = (x_1, x_2^2 + 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$.

18. $Ax = (3x_1 - 2x_2 - 1, 0, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$,
$Bx = (3x_1^2 - 2x_2 - x_3, 0, 0)$,
$Cx = (3x_1 - 2x_2 - x_3, 0, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$.

19. $Ax = (2x_1^2 - x_2, x_3, 2x_2 + 3x_3)$,
$Bx = (2x_1 - x_2, x_3, 2x_2 + 3x_3)$,
$Cx = (2x_1 - x_2, x_3, 2x_2 + 3)$.

20. $Ax = (0, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3)$,
$Bx = (0, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6)$,
$Cx = (0, x_1^2 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3)$.

21. $Ax = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2)$,
$Bx = (6x_1 - 5x_2 - 4, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2)$,
$Cx = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3^3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, 0)$.

22. $Ax = (5x_1 - 4x_2 - 3, 2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$,
$Bx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3^3, 2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$,
$Cx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$.

23. $Ax = (4x_1 - 3x_2^3 - 2x_3, x_1 + x_3, 0)$,
$Bx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3)$,
$Cx = (4x_1 - 3x_2 - 2, x_1 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3)$.

24. $Ax = (3x_1 + 4x_2 + 5x_3, 6x_1 + 7x_2 + 8x_3, 9x_1 + x_3)$,
$Bx = (3x_1 + 4x_2 + 5, 6x_1 + 7x_2 + 8, 9x_1 + x_3)$,
$Cx = (3x_1 + 4x_2 + 5x_3^3, 6x_1 + 7x_2 + 8x_3, 0)$.

25. $Ax = (2x_1 + 3x_2 + 4, 5x_1 + 6x_2 + 7, 8x_1 + x_3)$,
$Bx = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3^3, 5x_1 + 6x_2 + 7x_3, 0)$,
$Cx = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3, 5x_1 + 6x_2 + 7x_3, 8x_1 + x_3)$.

26. $Ax = (x_1^3 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, 0)$,
$Bx = (x_1 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, 5x_1 + 6x_2 + 7x_3)$,
$Cx = (x_1 + 1, 2x_1 + 3x_2 + 4, 5x_1 + 6x_2 + 7x_3)$.
27. $Ax = (3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$,
$Bx = (3x_1 - 2x_2 - 1, x_2 + 2, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$,
$Cx = (3x_1 - 2x_2 - x_3^3, x_2 + 2x_3, 0)$.
28. $Ax = (2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 + 3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3)$,
$Bx = (2x_1 - x_2^3, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 0)$,
$Cx = (2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3)$.
29. $Ax = (x_1^3 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3, 7x_1 + 8x_2)$,
$Bx = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3, 7x_1 + 8x_2)$,
$Cx = (x_1 + 2x_2 + 3, 4x_1 + 5x_2 + 6, 7x_1 + 8x_2)$.
30. $Ax = (x_2 + 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3, 6x_1 + 7x_2 + 8x_3)$,
$Bx = (x_2 + 2, 3x_1 + 4x_2 + 5, 6x_1 + 7x_2 + 8x_3)$,
$Cx = (x_2^3 + 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3, 6x_1 + 7x_2 + 8x_3)$.
31. $Ax = (x_1^2, x_1 - x_3, x_2 + x_3)$,
$Bx = (1, x_1 - x_3, x_2 + x_3)$,
$Cx = (x_1, x_1 - x_3, x_2 + x_3)$.

Задача 6. Пусть $x = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Ax = \{x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_3\}$, $Bx = \{x_2, 2x_3, x_1\}$. Найти:

1. ABx.
2. A^2x.
3. $(A^2 - B)x$.
4. B^4x.
5. B^2x.
6. $(2A + 3B^2)x$.
7. $(A^2 + B^2)x$.
8. $(B^2 + A)x$.
9. BAx.
10. $B(2A - B)x$.
11. $A(2B - A)x$.
12. $2(AB + 2A)x$.
13. $(A - B)^2x$.
14. $(B - 2A^2)x$.
15. BA^2x.
16. $(3A^2 + B)x$.
17. $(A^2 + B)x$.
18. $(A^2 - B^2)x$.
19. $(2B - A^2)x$.
20. B^3x.
21. $(B^2 - 2A)x$.
22. $(A(B + A))x$.
23. $(AB^2)x$.
24. $(A(B - A))x$.
25. $2(B + 2A^2 + B^2)x$.
26. $(B(A - B))x$.
27. $(B - A + B^2)x$.
28. $(B(A + B))x$.
29. $(A + BA - B)x$.
30. $(3B + 2A^2)x$.
31. $(B(2A + B))x$.

Задача 7. Найти матрицу линейного оператора в базисе (e_1', e_2', e_3'), где $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$, если она задана в базисе (e_1, e_2, e_3).

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. **12.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **23.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. **13.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **24.** $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. **14.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. **25.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **15.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **26.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **16.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. **17.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **27.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **18.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. **28.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **19.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **29.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. **20.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. **21.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **30.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. **22.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **31.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 8. Доказать линейность, найти матрицу (в базисе $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$), образ и ядро оператора:

1. Проектирования на ось Ox.
2. Проектирования на плоскость $z = 0$.
3. Проектирования на ось Oz.
4. Зеркального отражения относительно плоскости Oyz.
5. Проектирования на ось Oy.
6. Проектирования на плоскость $y = 0$.
7. Зеркального отражения относительно плоскости $x - y = 0$.
8. Зеркального отражения относительно плоскости $y + z = 0$.
9. Проектирования на плоскость $y - z = 0$.
10. Проектирования на плоскость $y = \sqrt{3}x$.
11. Проектирования на плоскость Oyz.
12. Зеркального отражения относительно плоскости $x - z = 0$.
13. Зеркального отражения относительно плоскости Oxy.
14. Поворота относительно оси Ox на угол $\pi/2$ в положительном направлении.
15. Проектирования на плоскость $x - y = 0$.
16. Проектирования на плоскость $y + z = 0$.
17. Зеркального отражения относительно плоскости $x + y = 0$.
18. Зеркального отражения относительно плоскости $y - z = 0$.
19. Проектирования на плоскость $x + y = 0$.
20. Проектирования на плоскость $x - z = 0$.
21. Зеркального отражения относительно плоскости $x + z = 0$.
22. Поворота относительно оси Oz в положительном направлении на угол $\pi/2$.
23. Проектирования на плоскость $\sqrt{3}y + z = 0$.
24. Зеркального отражения относительно плоскости Oxz.
25. Поворота в положительном направлении относительно оси Oy на угол $\pi/2$.
26. Проектирования на плоскость $x + z = 0$.
27. Проектирования на плоскость $y + \sqrt{3}z = 0$.
28. Проектирования на плоскость $\sqrt{3}x + z = 0$.
29. Проектирования на плоскость $\sqrt{3}x + y = 0$.
30. Поворота относительно оси Oz в положительном направлении на угол $\pi/4$.
31. Проектирования на плоскость $x - \sqrt{3}z = 0$.

Задача 9. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей

1. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & -4 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 19 & 2 & -2 \\ 6 & 15 & -6 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

24. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

26. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

27. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & -13 \end{pmatrix}$.

29. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

30. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

31. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Задача 10. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.

1. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3+4x_3^2$.
2. $4x_1^2+4x_1x_2+8x_1x_3-3x_2^2+4x_3^2$.
3. $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+x_3^2$.
4. $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2-2x_3^2$.
5. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$.
6. $x_1^2+4x_1x_1+4x_2x_3+x_3^2$.
7. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-3x_2^2-6x_2x_3-2x_3^2$.
8. $x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+3x_2^2+2x_2x_3+x_3^2$.
9. $x_1^2+4x_1x_3-x_2^2-2x_2x_3+4x_3^2$.
10. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+x_3^2$.
11. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2^2+12x_2x_3+4x_3^2$.
12. $4x_1^2+4x_1x_2+8x_1x_3+5x_2^2+8x_2x_3+4x_3^2$.
13. $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+8x_2^2+8x_2x_3+x_3^2$.
14. $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+5x_2^2+8x_2x_3+4x_3^2$.
15. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+5x_2^2+12x_2x_3+7x_3^2$.
16. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2^2+16x_2x_3+7x_3^2$.
17. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+5x_2^2+10x_2x_3+4x_3^2$.
18. $x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+5x_2^2+6x_2x_3+x_3^2$.
19. $x_1^2+4x_1x_3+x_2^2+2x_2x_3+4x_3^2$.
20. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$.
21. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3+2x_3^2$.
22. $4x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3-3x_2^2+2x_3^2$.
23. $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+x_3^2$.
24. $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2-4x_3^2$.
25. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2+4x_2x_3-x_3^2$.
26. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3-x_3^2$.
27. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-3x_2^2-6x_2x_3-4x_3^2$.
28. $x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+3x_2^2+2x_2x_3-x_3^2$.
29. $x_1^2+4x_1x_3-x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2$.
30. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-x_3^2$.
31. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+3x_3^2$.

Задача 11. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием.

1. $4x_2^2-3x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$.
2. $4x_1^2+4x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2\sqrt{3}x_2x_3$.

3. $2x_1^2 + 2x_2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.
4. $2x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.
5. $-4x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.
6. $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2\sqrt{3}x_2x_3$.
7. $4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
8. $3x_1^2 + x_2^2 - \frac{3}{2}x_3^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 - x_1x_3 + \sqrt{3}x_2x_3$.
9. $-x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_2x_3$.
10. $x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.
11. $\frac{5\sqrt{2}}{4}x_1^2 + \frac{5\sqrt{2}}{4}x_2^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}x_3^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.
12. $3x_1^2 - 7x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.
13. $x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3$.
14. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{4}{3}x_1x_2 - \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$.
15. $-2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_4 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3$.
16. $-\frac{1}{2}x_1^2 + 5x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 - 4x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2x_3$.
17. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
18. $-2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.
19. $2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 - 4\sqrt{2}x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_2x_3$.
20. $-4x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
21. $10x_1^2 + 14x_2^2 + 7x_3^2 - 10x_1x_2 - \sqrt{2}x_1x_3 - 5\sqrt{2}x_2x_3$.
22. $\frac{3}{2}x_1^2 - 5x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 + 4x_1x_2 - x_1x_3 - 4x_2x_3$.
23. $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3$.
24. $2x_2^2 - 3x_3^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4\sqrt{3}x_2x_3$.
25. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \frac{4}{3}x_1x_2 + \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$.
26. $x_1^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 4\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3$.
27. $5x_1^2 + 13x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$.
28. $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + \frac{2}{3}x_1x_2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}x_2x_3$.
29. $5x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2\sqrt{2}x_1x_3 + 4\sqrt{2}x_2x_3$.
30. $-2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.
31. $-3x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Задача 12. Исследовать кривую второго порядка и построить ее.

1. $-x^2 - y^2 + 4xy + 2x - 4y + 1 = 0$.
2. $2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$.
3. $4xy + 4x - 4y = 0$.
4. $-2x^2 - 2y^2 + 2xy - 6x + 6y + 3 = 0$.
5. $-3x^2 - 3y^2 + 4xy - 6x + 4y + 2 = 0$.

6. $-2xy - 2x - 2y + 1 = 0$.
7. $-x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 2y + 2 = 0$.
8. $-4x^2 - 4y^2 + 2xy + 10x - 10y + 1 = 0$.
9. $4xy + 4x - 4y - 2 = 0$.
10. $x^2 + y^2 + 2xy - 8x - 8y + 1 = 0$.
11. $x^2 + y^2 + 4xy - 8x - 4y + 1 = 0$.
12. $x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y - 7 = 0$.
13. $2xy + 2x + 2y - 3 = 0$.
14. $4x^2 + 4y^2 + 2xy + 12x + 12y + 1 = 0$.
15. $3x^2 + 3y^2 + 4xy + 8x + 12y + 1 = 0$.
16. $x^2 + y^2 - 8xy - 20x + 20y + 1 = 0$.
17. $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 6x + 2y + 1 = 0$.
18. $4xy + 4x + 4y + 1 = 0$.
19. $3x^2 + 3y^2 - 4xy + 6x - 4y - 7 = 0$.
20. $-4xy - 4x + 4y + 6 = 0$.
21. $5x^2 + 5y^2 - 2xy + 10x - 2y + 1 = 0$.
22. $2x^2 + 2y^2 + 4xy + 8x + 8y + 1 = 0$.
23. $-x^2 - y^2 + 2xy + 2x - 2y + 1 = 0$.
24. $2x^2 + 2y^2 - 4xy - 8x + 8y + 1 = 0$.
25. $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 12x - 4y + 1 = 0$.
26. $-4xy + 8x + 8y + 1 = 0$.
27. $2x^2 + 2y^2 - 2xy + 6x - 6y - 6 = 0$.
28. $x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y - 5 = 0$.
29. $4xy + 4x - 4y + 4 = 0$.
30. $3x^2 + 3y^2 - 4xy + 4x + 4y + 1 = 0$.
31. $x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 2y + 1 = 0$.

Раздел 11

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§ 11.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1) Основные уравнения. Постановка краевых задач.

2) Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности и волнового уравнения с однородными граничными условиями методом Фурье.

3) Сведение смешанной задачи с неоднородными граничными условиями к задаче с однородными граничными условиями.

4) Решение смешанной задачи для неоднородного уравнения.

5) Уравнение Лапласа. Решение краевых задач для уравнения Лапласа в круге и в круговом секторе методом Фурье.

§ 11.2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1) Показать, что функция

$$u(x, y) = \frac{\varphi(x) + \psi(y)}{x - y},$$

где $\varphi(x)$, $\psi(y)$ — произвольные непрерывно дифференцируемые функции, является решением уравнения

$$u_{xy} = \frac{u_x - u_y}{x - y}.$$

2) Дан тонкий однородный стержень с теплоизолированной боковой поверхностью. На его конце $x = 0$ поддерживается температура, равная нулю, а на конце $x = l$ температура изменяется по закону $u(l, t) = Ae^{-t}$ (A — постоянная). Начальная температура $u(x, 0) = A\frac{x}{l}$. Найти распределение температуры в стержне при $t > 0$.

3) Решить задачу об остывании тонкого однородного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная температура $u(x,0) = \varphi(x)$, один конец теплоизолирован, а другой поддерживается при постоянной температуре.

4) Найти стационарное распределение температуры в кольце, ограниченном двумя концентрическими окружностями, если на каждой из окружностей поддерживается постоянная температура.

5) Найти стационарное распределение температуры в сферическом слое, ограниченном сферами, которые имеют общий центр, если на каждой из сфер поддерживается постоянная температура.

6) Подобрать решение задачи Дирихле

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (0 < x < 1, \quad 0 < y < 1),\\ &u\big|_{x=0} = 0, \qquad u\big|_{x=1} = y \quad (0 \leqslant y \leqslant 1),\\ &u\big|_{y=0} = 0, \qquad u\big|_{y=1} = x \quad (0 \leqslant x \leqslant 1). \end{aligned}$$

7) Найти гармоническую функцию внутри кругового сектора $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$, удовлетворяющую граничным условиям $u(r,0) = u(r,\alpha) = 0$, $u(R,\varphi) = A\varphi$ (A — постоянная).

8) Найти решения волнового уравнения типа плоской волны

$$u = f(t - Ax - By - Cz)$$

и сферической волны

$$u = \frac{f(t - A\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

9) Доказать, что если функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ являются решениями смешанных задач для одного и того же волнового уравнения с одними и теми же нулевыми граничными условиями и начальными условиями вида соответственно

$$u_1\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u_1}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0$$

и

$$u_2\big|_{t=0} = 0, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x),$$

то сумма $u_1(x,t)+u_2(x,t) = u(x,t)$ является решением смешанной задачи для этого волнового уравнения с теми же нулевыми граничными условиями и с начальными условиями вида

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x).$$

§ 11.3. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1. Решить смешанную задачу.

1. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x,0) = \sin 3\pi x$; $u(0,t) = u(8,t) = 0$.
2. $u_t = 9u_{xx}$; $u(x,0) = 2\sin 2\pi x + 3\sin 3\pi x$; $u(0,t) = u(1,t) = 0$.
3. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x,0) = 3\sin 2\pi x$; $u(0,t) = u(7,t) = 0$.
4. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x,0) = 4\sin 3\pi x + 5\sin 4\pi x$; $u(0,t) = u(2,t) = 0$.
5. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x,0) = 5\sin 3\pi x$; $u(0,t) = u(6,t) = 0$.
6. $u_t = 7u_{xx}$; $u(x,0) = 6\sin 2\pi x + 7\sin 3\pi x$; $u(0,t) = u(3,t) = 0$.
7. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x,0) = 7\sin 2\pi x$; $u(0,t) = u(5,t) = 0$.
8. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x,0) = 8\sin 3\pi x + 9\sin 4\pi x$; $u(0,t) = u(4,t) = 0$.
9. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x,0) = 9\sin 3\pi x$; $u(0,t) = u(4,t) = 0$.
10. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x,0) = 10\sin 2\pi x + 3\sin 3\pi x$; $u(0,t) = u(5,t) = 0$.
11. $u_t = 7u_{xx}$; $u(x,0) = 11\sin 2\pi x$; $u(0,t) = u(3,t) = 0$.
12. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x,0) = 12\sin 3\pi x + 5\sin 4\pi x$; $u(0,t) = u(6,t) = 0$.
13. $u_t = 8u_{xx}$; $u(x,0) = 13\sin 3\pi x$; $u(0,t) = u(2,t) = 0$.
14. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x,0) = 14\sin 2\pi x + 7\sin 3\pi x$; $u(0,t) = u(7,t) = 0$.
15. $u_t = 9u_{xx}$; $u(x,0) = 15\sin 2\pi x$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$.
16. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x,0) = 16\sin 3\pi x + 9\sin 4\pi x$; $u(0,t) = u(8,t) = 0$.
17. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x,0) = 17\sin 2\pi x$; $u(0,t) = u(2,t) = 0$.
18. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x,0) = 18\sin 3\pi x + 3\sin 4\pi x$; $u(0,t) = u(7,t) = 0$.
19. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x,0) = 19\sin 3\pi x$; $u(0,t) = u(3,t) = 0$.
20. $u_t = 8u_{xx}$; $u(x,0) = 20\sin 2\pi x + 7\sin 3\pi x$; $u(0,t) = u(6,t) = 0$.
21. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x,0) = 21\sin 2\pi x$; $u(0,t) = u(4,t) = 0$.
22. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x,0) = 22\sin 3\pi x + 5\sin 4\pi x$; $u(0,t) = u(5,t) = 0$.
23. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x,0) = 23\sin 3\pi x$; $u(0,t) = u(5,t) = 0$.
24. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x,0) = 24\sin 2\pi x + 9\sin 3\pi x$; $u(0,t) = u(4,t) = 0$.

25. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x,0) = 25\sin 2\pi x$; $u(0,t) = u(6,t) = 0$.
26. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x,0) = 26\sin 3\pi x + 3\sin 4\pi x$;
$u(0,t) = u(3,t) = 0$.
27. $u_t = 7u_{xx}$; $u(x,0) = 27\sin 3\pi x$; $u(0,t) = u(7,t) = 0$.
28. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x,0) = 28\sin 2\pi x + 5\sin 3\pi x$;
$u(0,t) = u(2,t) = 0$.
29. $u_t = 8u_{xx}$; $u(x,0) = 29\sin 2\pi x$; $u(0,t) = u(8,t) = 0$.
30. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x,0) = 30\sin 3\pi x + 7\sin 4\pi x$;
$u(0,t) = u(1,t) = 0$.
31. $u_t = 9u_{xx}$; $u(x,0) = 31\sin 3\pi x$; $u(0,t) = u(9,t) = 0$.

Задача 2. Решить смешанную задачу.

1. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x,0) = \cos 3\pi x + 2\cos 4\pi x$;
$u_x(0,t) = u_x(8,t) = 0$.
2. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x,0) = 2\cos 2\pi x$; $u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0$.
3. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x,0) = 3\cos 3\pi x + 4\cos 4\pi x$;
$u_x(0,t) = u_x(7,t) = 0$.
4. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x,0) = 4\cos 3\pi x$; $u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0$.
5. $u_t = 8u_{xx}$; $u(x,0) = 5\cos 2\pi x + 6\cos 3\pi x$;
$u_x(0,t) = u_x(6,t) = 0$.
6. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x,0) = 6\cos 2\pi x$; $u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0$.
7. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x,0) = 7\cos 3\pi x + 8\cos 4\pi x$;
$u_x(0,t) = u_x(5,t) = 0$.
8. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x,0) = 8\cos 3\pi x$; $u_x(0,t) = u_x(5,t) = 0$.
9. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x,0) = 9\cos 2\pi x + 10\cos 3\pi x$;
$u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0$.
10. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x,0) = 10\cos 2\pi x$; $u_x(0,t) = u_x(6,t) = 0$.
11. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x,0) = 11\cos 3\pi x + 12\cos 4\pi x$;
$u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0$.
12. $u_t = 7u_{xx}$; $u(x,0) = 12\cos 3\pi x$; $u_x(0,t) = u_x(7,t) = 0$.
13. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x,0) = 13\cos 2\pi x + 14\cos 3\pi x$;
$u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0$.
14. $u_t = 8u_{xx}$; $u(x,0) = 14\cos 2\pi x$; $u_x(0,t) = u_x(8,t) = 0$.
15. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x,0) = 15\cos 3\pi x + 16\cos 4\pi x$;
$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$.
16. $u_t = 9u_{xx}$; $u(x,0) = 16\cos 3\pi x$; $u_x(0,t) = u_x(9,t) = 0$.
17. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x,0) = 17\cos 3\pi x + 18\cos 4\pi x$;
$u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0$.

18. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x,0) = 18\cos 3\pi x$; $u_x(0,t) = u_x(6,t) = 0$.
19. $u_t = 7u_{xx}$; $u(x,0) = 19\cos 2\pi x + 20\cos 3\pi x$; $u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0$.
20. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x,0) = 20\cos 2\pi x$; $u_x(0,t) = u_x(5,t) = 0$.
21. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x,0) = 21\cos 3\pi x + 22\cos 4\pi x$; $u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0$.
22. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x,0) = 22\cos 3\pi x$; $u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0$.
23. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x,0) = 23\cos 2\pi x + 24\cos 3\pi x$; $u_x(0,t) = u_x(5,t) = 0$.
24. $u_t = 7u_{xx}$; $u(x,0) = 24\cos 2\pi x$; $u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0$.
25. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x,0) = 25\cos 3\pi x + 26\cos 4\pi x$; $u_x(0,t) = u_x(6,t) = 0$.
26. $u_t = 8u_{xx}$; $u(x,0) = 26\cos 3\pi x$; $u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0$.
27. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x,0) = 27\cos 2\pi x + 28\cos 3\pi x$; $u_x(0,t) = u_x(7,t) = 0$.
28. $u_t = 9u_{xx}$; $u(x,0) = 28\cos 2\pi x$, $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$.
29. $u_t = 9u_{xx}$; $u(x,0) = 29\cos 2\pi x + 30\cos 3\pi x$; $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$.
30. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x,0) = 30\cos 2\pi x$; $u_x(0,t) = u_x(7,t) = 0$.
31. $u_t=2u_{xx}$; $u(x,0)=31\cos 3\pi x+\cos 4\pi x$; $u_x(0,t)=u_x(6,t)=0$.

Задача 3. Решить смешанную задачу.

1. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x,0) = 19\sin 5\pi x$; $u(0,t) = 0$, $u_x(0{,}5;t) = 0$.
2. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x,0) = 8\cos \pi x$; $u_x(0,t) = 0$, $u(1{,}5;t) = 0$.
3. $u_t = 8u_{xx}$; $u(x,0) = 17\sin 3\pi x$; $u(0,t) = 0$, $u_x(2{,}5;t) = 0$.
4. $u_t = u_{xx}$; $u(x,0) = 6\cos 9\pi x$; $u_x(0,t) = 0$, $u(3{,}5;t) = 0$.
5. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x,0) = 15\sin 3\pi x$; $u(0,t) = 0$, $u_x(4{,}5;t) = 0$.
6. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x,0) = 4\cos 5\pi x$; $u_x(0,t) = 0$, $u(3{,}5;t) = 0$.
7. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x,0) = 13\sin 5\pi x$; $u(0,t) = 0$, $u_x(2{,}5;t) = 0$.
8. $u_t = u_{xx}$; $u(x,0) = 2\cos 7\pi x$; $u_x(0,t) = 0$, $u(1{,}5;t) = 0$.
9. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x,0) = 19\sin 3\pi x$; $u(0,t) = 0$, $u_x(0{,}5;t) = 0$.
10. $u_t = u_{xx}$; $u(x,0) = 8\cos 5\pi x$; $u_x(0,t) = 0$, $u(1{,}5;t) = 0$.
11. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x,0) = 17\sin 3\pi x$; $u(0,t) = 0$, $u_x(2{,}5;t) = 0$.
12. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x,0) = 6\cos 7\pi x$; $u_x(0,t) = 0$, $u(3{,}5;t) = 0$.
13. $u_t = u_{xx}$; $u(x,0) = 15\sin 9\pi x$; $u(0,t) = 0$, $u_x(4{,}5;t) = 0$.
14. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x,0) = 4\cos 5\pi x$; $u_x(0,t) = 0$, $u(3{,}5;t) = 0$.
15. $u_t = 7u_{xx}$; $u(x,0) = 13\sin 3\pi x$; $u(0,t) = 0$, $u_x(2{,}5;t) = 0$.
16. $u_t = 9u_{xx}$; $u(x,0) = 12\cos 3\pi x$; $u_x(0,t) = 0$, $u(1{,}5;t) = 0$.

17. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x,0) = 9\sin 7\pi x$; $u(0,t) = 0$, $u_x(2{,}5;t) = 0$.
18. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x,0) = 18\cos \pi x$; $u_x(0,t) = 0$, $u(3{,}5;t) = 0$.
19. $u_t = 8u_{xx}$; $u(x,0) = 7\sin 3\pi x$; $u(0,t) = 0$, $u_x(4{,}5;t) = 0$.
20. $u_t = u_{xx}$; $u(x,0) = 16\cos 9\pi x$; $u_x(0,t) = 0$, $u(3{,}5;t) = 0$.
21. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x,0) = 5\sin 3\pi x$; $u(0,t) = 0$, $u_x(2{,}5;t) = 0$.
22. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x,0) = 14\cos 5\pi x$; $u_x(0,t) = 0$, $u(1{,}5;t) = 0$.
23. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x,0) = 3\sin 5\pi x$; $u(0,t) = 0$, $u_x(0{,}5;t) = 0$.
24. $u_t = u_{xx}$; $u(x,0) = 12\cos 7\pi x$; $u_x(0,t) = 0$, $u(1{,}5;t) = 0$.
25. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x,0) = 9\sin 3\pi x$; $u(0,t) = 0$, $u_x(2{,}5;t) = 0$.
26. $u_t = u_{xx}$; $u(x,0) = 18\cos 5\pi x$; $u_x(0,t) = 0$, $u(3{,}5;t) = 0$.
27. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x,0) = 7\sin 3\pi x$; $u(0,t) = 0$, $u_x(4{,}5;t) = 0$.
28. $u_t = 2u_{xx}$; $u(x,0) = 16\cos 7\pi x$; $u_x(0,t) = 0$, $u(3{,}5;t) = 0$.
29. $u_t = u_{xx}$; $u(x,0) = 5\sin 9\pi x$; $u(0,t) = 0$, $u_x(2{,}5;t) = 0$.
30. $u_t = 3u_{xx}$; $u(x,0) = 14\cos 5\pi x$; $u_x(0,t) = 0$, $u(1{,}5;t) = 0$.
31. $u_t = 7u_{xx}$; $u(x,0) = 3\sin 3\pi x$; $u(0,t) = 0$, $u_x(0{,}5;t) = 0$.

Задача 4. Решить смешанную задачу.

1. $u_t = 9u_{xx}$;
$u(x,0) = 5\sin 2\pi x - 1 + 3x$;
$u(0,t) = -1$, $u(2,t) = 5$.
2. $u_t = 8u_{xx}$;
$u(x,0) = 6\sin 3\pi x + 2 - 3x$;
$u(0,t) = 2$, $u(3,t) = -7$.
3. $u_t = 7u_{xx}$;
$u(x,0) = 7\sin 2\pi x - 3 + 4x$;
$u(0,t) = -3$, $u(1,t) = 1$.
4. $u_t = 6u_{xx}$;
$u(x,0) = 8\sin 4\pi x + 4 - 5x$;
$u(0,t) = 4$, $u(2,t) = -6$.
5. $u_t = 5u_{xx}$;
$u(x,0) = 9\sin 3\pi x - 5 + 2x$;
$u(0,t) = -5$, $u(3,t) = 1$.
6. $u_t = 9u_{xx}$;
$u(x,0) = 8\sin 3\pi x + 6 - 2x$;
$u(0,t) = 6$, $u(4,t) = -2$.
7. $u_t = 8u_{xx}$;
$u(x,0) = 7\sin 2\pi x - 7 + 3x$;
$u(0,t) = -7$, $u(3,t) = 2$.
8. $u_t = 7u_{xx}$;
$u(x,0) = 6\sin 3\pi x + 8 - 3x$;
$u(0,t) = 8$, $u(4,t) = -4$.
9. $u_t = 4u_{xx}$;
$u(x,0) = 5\sin 4\pi x - 9 + 5x$;
$u(0,t) = -9$, $u(2,t) = 1$.
10. $u_t = 3u_{xx}$;
$u(x,0) = 4\sin 5\pi x + 9 - 4x$;
$u(0,t) = 9$, $u(3,t) = -3$.
11. $u_t = 2u_{xx}$;
$u(x,0) = 3\sin 6\pi x - 8 + 5x$;
$u(0,t) = -8$, $u(2,t) = 2$.
12. $u_t = 3u_{xx}$;
$u(x,0) = 2\sin 4\pi x + 7 - 5x$;
$u(0,t) = 7$, $u(1,t) = 2$.
13. $u_t = 5u_{xx}$;
$u(x,0) = 3\sin 3\pi x - 6 + 4x$;
$u(0,t) = -6$, $u(3,t) = 6$.
14. $u_t = 6u_{xx}$;
$u(x,0) = 4\sin 4\pi x + 5 - 4x$;
$u(0,t) = 5$, $u(2,t) = -3$.

15. $u_t = 8u_{xx}$;
$u(x,0) = 5\sin 2\pi x - 4 + 3x$;
$u(0,t) = -4$, $u(1,t) = -1$.

16. $u_t = 7u_{xx}$;
$u(x,0) = 6\sin 3\pi x + 3 + 2x$;
$u(0,t) = 3$;
$u(2,t) = 7$.

17. $u_t = 6u_{xx}$;
$u(x,0) = 7\sin 4\pi x - 2 + x$;
$u(0,t) = -2$, $u(3,t) = 1$.

18. $u_t = 2u_{xx}$;
$u(x,0) = 8\sin 7\pi x + 1 - x$;
$u(0,t) = 1$, $u(2,t) = -1$.

19. $u_t = 4u_{xx}$;
$u(x,0) = 9\sin 3\pi x - 1 - 2x$;
$u(0,t) = -1$, $u(1,t) = -3$.

20. $u_t = 6u_{xx}$;
$u(x,0) = 8\sin 4\pi x + 3 - 4x$;
$u(0,t) = 3$, $u(2,t) = -5$.

21. $u_t = 7u_{xx}$;
$u(x,0) = 7\sin 3\pi x - 5 + 6x$;
$u(0,t) = -5$, $u(1,t) = 1$.

22. $u_t = 8u_{xx}$;
$u(x,0) = 6\sin 2\pi x + 7 - 5x$;
$u(0,t) = 7$, $u(2,t) = -3$.

23. $u_t = 9u_{xx}$;
$u(x,0) = 5\sin 3\pi x - 9 + 4x$;
$u(0,t) = -9$, $u(3,t) = 3$.

24. $u_t = 8u_{xx}$;
$u(x,0) = 4\sin 3\pi x + 8 - 3x$;
$u(0,t) = 8$, $u(2,t) = 2$.

25. $u_t = 7u_{xx}$;
$u(x,0) = 3\sin 2\pi x - 6 + 2x$;
$u(0,t) = -6$, $u(3,t) = 0$.

26. $u_t = 6u_{xx}$;
$u(x,0) = 2\sin 4\pi x + 4 + x$;
$u(0,t) = 4$, $u(4,t) = 8$.

27. $u_t = 5u_{xx}$;
$u(x,0) = 3\sin 3\pi x - 2 - x$;
$u(0,t) = -2$, $u(3,t) = -5$.

28. $u_t = 3u_{xx}$;
$u(x,0) = 4\sin 5\pi x + 3 - 2x$;
$u(0,t) = 3$, $u(2,t) = -1$.

29. $u_t = 2u_{xx}$;
$u(x,0) = 5\sin 7\pi x - 1 - 3x$;
$u(0,t) = -1$, $u(1,t) = -4$.

30. $u_t = 4u_{xx}$;
$u(x,0) = 6\sin 4\pi x + 2 - 4x$;
$u(0,t) = 2$, $u(2,t) = -6$.

31. $u_t = 5u_{xx}$;
$u(x,0) = 7\sin 3\pi x - 4 - 5x$;
$u(0,t) = -4$, $u(1,t) = -9$.

Задача 5. Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальным и граничными условиями $u(x,0) = 0$; $u(0,t) = 0$, $u(\pi,t) = 0$.

1. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 5\sin 2t\sin 3x$.

2. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + e^{-2t}\sin 4x$.

3. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 10\cos 3t\sin 2x$.

4. $u_t = 2u_{xx} + 7e^{-18t}\sin 3x$.

5. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 10\sin 3t\sin 4x$.

6. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 2e^{-3t}\sin 2x$.

7. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 2\cos t\sin 3x$.

8. $u_t = 3u_{xx} + 8e^{-48t}\sin 4x$.

9. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 5\sin 2t\sin 2x$.

10. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 3e^{-4t}\sin 3x$.

11. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 10\cos 3t\sin 4x$.

12. $u_t = 5u_{xx} + 6e^{-45t}\sin 3x$.

13. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 2\sin t\sin 3x$.

14. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 4e^{-5t}\sin 4x$.

15. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 10\cos 3t \sin 3x$.
16. $u_t = 4u_{xx} + 5e^{-64t}\sin 4x$.
17. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 2\sin t \sin 4x$.
18. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + e^{-2t}\sin 2x$.
19. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 5\cos 2t \sin 3x$.
20. $u_t = 7u_{xx} + 4e^{-63t}\sin 3x$.
21. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 10\sin 3t \sin 2x$.
22. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 2e^{-3t}\sin 3x$.
23. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 5\cos 2t \sin 4x$.
24. $u_t = 5u_{xx} + 3e^{-20t}\sin 2x$.
25. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 10\sin 3t \sin 3x$.
26. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 3e^{-4t}\sin 4x$.
27. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 5\cos 2t \sin 2x$.
28. $u_t = 6u_{xx} + 2e^{-24t}\sin 2x$.
29. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 5\sin 2t \sin 4x$.
30. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 4e^{-5t}\sin 2x$.
31. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 2\cos t \sin 4x$.

Задача 6. Решить смешанную задачу.

1. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 5\cos 2t \sin 2x$; $u(x,0) = \sin 4x$; $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.
2. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 5\sin 2t \sin 3x$; $u(x,0) = 2\sin 9x$; $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.
3. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 10\cos 3t \sin 4x$; $u(x,0) = 3\sin 16x$; $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.
4. $u_t = \frac{1}{25}u_{xx} + 10\sin 3t \sin 5x$; $u(x,0) = 4\sin 10x$; $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.
5. $u_t = \frac{1}{36}u_{xx} + 17\cos 4t \sin 6x$; $u(x,0) = 5\sin 18x$; $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.
6. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 17\sin 4t \sin 2x$; $u(x,0) = 6\sin 8x$; $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.
7. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 26\cos 5t \sin 3x$; $u(x,0) = 7\sin 6x$; $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.
8. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 26\sin 5t \sin 4x$; $u(x,0) = 8\sin 12x$; $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.
9. $u_t = \frac{1}{25}u_{xx} + 37\cos 6t \sin 5x$; $u(x,0) = 9\sin 20x$; $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.
10. $u_t = \frac{1}{36}u_{xx} + 37\sin 6t \sin 6x$; $u(x,0) = 10\sin 12x$; $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.
11. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 26\cos 5t \sin 2x$; $u(x,0) = 11\sin 6x$; $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.
12. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 26\sin 5t \sin 3x$; $u(x,0) = 12\sin 12x$; $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.
13. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 17\cos 4t \sin 4x$; $u(x,0) = 13\sin 8x$; $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

14. $u_t = \frac{1}{25}u_{xx} + 17\sin 4t \sin 5x$; $u(x,0) = 14\sin 15x$;
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

15. $u_t = \frac{1}{36}u_{xx} + 10\cos 3t \sin 6x$; $u(x,0) = 15\sin 18x$;
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

16. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 10\sin 3t \sin 2x$; $u(x,0) = 16\sin 4x$;
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

17. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 5\cos 2t \sin 3x$; $u(x,0) = 17\sin 9x$;
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

18. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 5\sin 2t \sin 4x$; $u(x,0) = 18\sin 16x$;
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

19. $u_t = \frac{1}{25}u_{xx} + 10\cos 3t \sin 5x$; $u(x,0) = 19\sin 10x$;
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

20. $u_t = \frac{1}{36}u_{xx} + 10\sin 3t \sin 6x$; $u(x,0) = 20\sin 18x$;
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

21. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 17\cos 4t \sin 2x$; $u(x,0) = 21\sin 8x$;
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

22. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 17\sin 4t \sin 3x$; $u(x,0) = 22\sin 6x$;
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

23. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 26\cos 5t \sin 4x$; $u(x,0) = 23\sin 12x$;
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

24. $u_t = \frac{1}{25}u_{xx} + 26\sin 5t \sin 5x$; $u(x,0) = 24\sin 20x$;
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

25. $u_t = \frac{1}{36}u_{xx} + 37\cos 6t \sin 6x$; $u(x,0) = 25\sin 12x$;
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

26. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 37\sin 6t \sin 2x$; $u(x,0) = 26\sin 6x$;
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

27. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 26\sin 5t \sin 3x$; $u(x,0) = 27\sin 12x$;
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

28. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 26\cos 5t \sin 4x$; $u(x,0) = 28\sin 8x$;
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

29. $u_t = \frac{1}{25}u_{xx} + 17\sin 4t \sin 6x$; $u(x,0) = 29\sin 18x$;
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

30. $u_t = \frac{1}{36}u_{xx} + 17\cos 4t \sin 5x$;
$u(x,0) = 30\sin 20x$;
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

31. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 10\sin 3t \sin 4x$;
$u(x,0) = 31\sin 8x$;
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

Задача 7. Решить смешанную задачу.

1. $u_t = \frac{1}{36}u_{xx} + 5\sin 2t \sin 6x$;
$u(x,0) = \sin 12x + \pi + 3x$; $u(0,t) = \pi$, $u(\pi,t) = 4\pi$.
2. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 5\cos 2t \sin 2x$;
$u(x,0) = 2\sin 6x - \pi + 2x$; $u(0,t) = -\pi$, $u(\pi,t) = \pi$.
3. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 10\sin 3t \sin 3x$;
$u(x,0) = 3\sin 12x + 2\pi - x$; $u(0,t) = 2\pi$, $u(\pi,t) = \pi$.
4. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 10\cos 3t \sin 4x$;
$u(x,0) = 4\sin 8x - 2\pi + x$; $u(0,t) = -2\pi$, $u(\pi,t) = -\pi$.
5. $u_t = \frac{1}{25}u_{xx} + 17\sin 4t \sin 5x$;
$u(x,0) = 5\sin 15x + 3\pi - 2x$; $u(0,t) = 3\pi$, $u(\pi,t) = \pi$.
6. $u_t = \frac{1}{36}u_{xx} + 17\cos 4t \sin 6x$;
$u(x,0) = 6\sin 24x - 4\pi + 2x$; $u(0,t) = -4\pi$, $u(\pi,t) = -2\pi$.
7. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 26\sin 5t \sin 2x$;
$u(x,0) = 7\sin 8x + 4\pi - 3x$; $u(0,t) = 4\pi$, $u(\pi,t) = \pi$.
8. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 26\cos 5t \sin 3x$;
$u(x,0) = 8\sin 9x - 3\pi + 3x$; $u(0,t) = -3\pi$, $u(\pi,t) = 0$.
9. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 37\sin 6t \sin 4x$;
$u(x,0) = 9\sin 8x + 5\pi - 4x$; $u(0,t) = 5\pi$, $u(\pi,t) = \pi$.
10. $u_t = \frac{1}{25}u_{xx} + 37\cos 6t \sin 5x$;
$u(x,0) = 10\sin 10x - 5\pi + 4x$; $u(0,t) = -5\pi$, $u(\pi,t) = -\pi$.
11. $u_t = \frac{1}{36}u_{xx} + 26\sin 5t \sin 6x$;
$u(x,0) = 11\sin 18x + \pi - 2x$; $u(0,t) = \pi$, $u(\pi,t) = -\pi$.
12. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 26\cos 5t \sin 2x$;
$u(x,0) = 12\sin 4x + 2\pi - 3x$; $u(0,t) = 2\pi$, $u(\pi,t) = -\pi$.
13. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 17\sin 4t \sin 3x$;
$u(x,0) = 13\sin 6x + 3\pi - 4x$; $u(0,t) = 3\pi$, $u(\pi,t) = -\pi$.
14. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 17\cos 4t \sin 4x$;
$u(x,0) = 14\sin 8x + 4\pi - 5x$; $u(0,t) = 4\pi$, $u(\pi,t) = -\pi$.
15. $u_t = \frac{1}{25}u_{xx} + 10\sin 3t \sin 5x$;
$u(x,0) = 15\sin 15x + 5\pi - 6x$; $u(0,t) = 5\pi$, $u(\pi,t) = -\pi$.
16. $u_t = \frac{1}{36}u_{xx} + 10\cos 3t \sin 3x$;
$u(x,0) = 16\sin 6x - 5\pi + 6x$; $u(0,t) = -5\pi$, $u(\pi,t) = \pi$.
17. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 5\sin 2t \sin 2x$;
$u(x,0) = 17\sin 6x - 4\pi + 5x$; $u(0,t) = -4\pi$, $u(\pi,t) = \pi$.
18. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 5\cos 2t \sin 3x$;
$u(x,0) = 18\sin 9x - 3\pi + 4x$;
$u(0,t) = -3\pi$, $u(\pi,t) = \pi$.

19. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 10\sin 3t \sin 4x$;
$u(x,0) = 19\sin 12x - 2\pi + 3x$; $u(0,t) = -2\pi$, $u(\pi,t) = \pi$.

20. $u_t = \frac{1}{25}u_{xx} + 10\cos 3t \sin 5x$;
$u(x,0) = 20\sin 10x - \pi + 2x$; $u(0,t) = -\pi$, $u(\pi,t) = \pi$.

21. $u_t = \frac{1}{36}u_{xx} + 17\sin 4t \sin 6x$;
$u(x,0) = 21\sin 12x + 5\pi - 3x$; $u(0,t) = 5\pi$, $u(\pi,t) = 2\pi$.

22. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 17\cos 4t \sin 2x$;
$u(x,0) = 22\sin 8x - 5\pi + 4x$; $u(0,t) = -5\pi$, $u(\pi,t) = -\pi$.

23. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 26\sin 5t \sin 3x$;
$u(x,0) = 23\sin 12x + 4\pi - 4x$; $u(0,t) = 4\pi$, $u(\pi,t) = 0$.

24. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 26\cos 5t \sin 4x$;
$u(x,0) = 24\sin 16x - 4\pi + 5x$; $u(0,t) = -4\pi$, $u(\pi,t) = \pi$.

25. $u_t = \frac{1}{25}u_{xx} + 37\sin 6t \sin 5x$;
$u(x,0) = 25\sin 15x + 3\pi - 5x$; $u(0,t) = 3\pi$, $u(\pi,t) = -2\pi$.

26. $u_t = \frac{1}{36}u_{xx} + 37\cos 6t \sin 6x$;
$u(x,0) = 26\sin 18x - 3\pi + 6x$; $u(0,t) = -3\pi$, $u(\pi,t) = 3\pi$.

27. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 26\sin 5t \sin 2x$;
$u(x,0) = 27\sin 10x + 2\pi - 6x$; $u(0,t) = 2\pi$, $u(\pi,t) = -4\pi$.

28. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 26\cos 5t \sin 3x$;
$u(x,0) = 28\sin 15x - 2\pi + 2x$; $u(0,t) = -2\pi$, $u(\pi,t) = 0$.

29. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 17\sin 4t \sin 4x$;
$u(x,0) = 29\sin 20x + \pi - x$; $u(0,t) = \pi$, $u(\pi,t) = 0$.

30. $u_t = \frac{1}{25}u_{xx} + 17\cos 4t \sin 5x$;
$u(x,0) = 30\sin 20x - \pi + x$; $u(0,t) = -\pi$, $u(\pi,t) = 0$.

31. $u_t = \frac{1}{36}u_{xx} + 10\sin 3t \sin 6x$;
$u(x,0) = 31\sin 24x + \pi + x$; $u(0,t) = \pi$, $u(\pi,t) = 2\pi$.

Задача 8. Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круговом секторе $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \alpha$ (r, φ — полярные координаты, $\alpha < 2\pi$), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $u(1,\varphi) = \sin 6\varphi$; $u(r,0) = u(r,\pi/3) = 0$.

2. $u(1,\varphi) = 2\cos 2\varphi$; $u_\varphi(r,0) = u_\varphi(r,\pi) = 0$.

3. $u(1,\varphi) = 3\cos 15\varphi$; $u_\varphi(r,0) = 0$, $u(r,\pi/6) = 0$.

4. $u(1,\varphi) = 4\sin 14\varphi$; $u(r,0) = 0$, $u_\varphi(r,\pi/4) = 0$.

5. $u(1,\varphi) = 5\sin 3\varphi$; $u(r,0) = u(r,2\pi/3) = 0$.

6. $u(1,\varphi) = 6\cos 6\varphi$; $u_\varphi(r,0) = u_\varphi(r,7\pi/6) = 0$.

7. $u(1,\varphi) = 7\cos 10\varphi$; $u_\varphi(r,0) = 0$, $u(r,\pi/4) = 0$.

8. $u(1,\varphi) = 8\sin 7\varphi$; $u(r,0) = 0$, $u_\varphi(r,\pi/2) = 0$.
9. $u(1,\varphi) = 9\sin 4\varphi$; $u(r,0) = u(r,3\pi/4) = 0$.
10. $u(1,\varphi) = 10\cos 4\varphi$; $u_\varphi(r,0) = u_\varphi(r,5\pi/4) = 0$.
11. $u(1,\varphi) = 11\cos 5\varphi$; $u_\varphi(r,0) = 0$, $u(r,\pi/2) = 0$.
12. $u(1,\varphi) = 12\sin 3\varphi$; $u(r,0) = 0$, $u_\varphi(r,3\pi/2) = 0$.
13. $u(1,\varphi) = 13\sin 6\varphi$; $u(r,0) = u(r,5\pi/6) = 0$.
14. $u(1,\varphi) = 14\cos 3\varphi$; $u_\varphi(r,0) = u_\varphi(r,4\pi/3) = 0$.
15. $u(1,\varphi) = 15\cos\varphi$; $u_\varphi(r,0) = 0$, $u(r,3\pi/2) = 0$.
16. $u(1,\varphi) = 16\sin 21\varphi$; $u(r,0) = 0$, $u_\varphi(r,\pi/6) = 0$.
17. $u(1,\varphi) = 17\sin 9\varphi$; $u(r,0) = u(r,\pi/3) = 0$.
18. $u(1,\varphi) = 18\cos 4\varphi$; $u_\varphi(r,0) = u_\varphi(r,\pi) = 0$.
19. $u(1,\varphi) = 19\cos 21\varphi$; $u_\varphi(r,0) = 0$, $u(r,\pi/6) = 0$.
20. $u(1,\varphi) = 20\sin 15\varphi$; $u(r,0) = 0$, $u_\varphi(r,\pi/6) = 0$.
21. $u(1,\varphi) = 21\sin 6\varphi$; $u(r,0) = u(r,2\pi/3) = 0$.
22. $u(1,\varphi) = 22\cos 12\varphi$; $u_\varphi(r,0) = u_\varphi(r,\pi/3) = 0$.
23. $u(1,\varphi) = 23\cos 14\varphi$; $u_\varphi(r,0) = 0$, $u(r,\pi/4) = 0$.
24. $u(1,\varphi) = 24\sin 10\varphi$; $u(r,0) = 0$, $u_\varphi(r,\pi/4) = 0$.
25. $u(1,\varphi) = 25\sin 3\varphi$; $u(r,0) = u(r,\pi) = 0$.
26. $u(1,\varphi) = 26\cos 3\varphi$; $u_\varphi(r,0) = u_\varphi(r,5\pi/3) = 0$.
27. $u(1,\varphi) = 27\cos 7\varphi$; $u_\varphi(r,0) = u(r,\pi/2) = 0$.
28. $u(1,\varphi) = 28\sin 5\varphi$; $u(r,0) = 0$, $u_\varphi(r,\pi/2) = 0$.
29. $u(1,\varphi) = 29\sin 3\varphi$; $u(r,0) = u(r,5\pi/3) = 0$.
30. $u(1,\varphi) = 30\cos 4\varphi$; $u_\varphi(r,0) = u_\varphi(r,7\pi/4) = 0$.
31. $u(1,\varphi) = 31\cos 3\varphi$; $u_\varphi(r,0) = 0$, $u(r,3\pi/2) = 0$.

Задача 9. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \leqslant r < 1$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ (r, φ — полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

1. $u(1,\varphi) = \cos 9\varphi$.
2. $u(1,\varphi) = 2\sin 8\varphi$.
3. $u(1,\varphi) = 3\cos 7\varphi$.
4. $u(1,\varphi) = 4\sin 6\varphi$.
5. $u(1,\varphi) = 5\cos 5\varphi$.
6. $u(1,\varphi) = 6\sin 4\varphi$.
7. $u(1,\varphi) = 7\cos 3\varphi$.
8. $u(1,\varphi) = 8\sin 2\varphi$.
9. $u(1,\varphi) = 9\cos 2\varphi$.
10. $u(1,\varphi) = 10\sin 3\varphi$.
11. $u(1,\varphi) = 11\cos 4\varphi$.
12. $u(1,\varphi) = 12\sin 5\varphi$.
13. $u(1,\varphi) = 13\cos 6\varphi$.
14. $u(1,\varphi) = 14\sin 7\varphi$.
15. $u(1,\varphi) = 15\cos 8\varphi$.
16. $u(1,\varphi) = 16\sin 9\varphi$.
17. $u(1,\varphi) = 17\cos 9\varphi$.
18. $u(1,\varphi) = 18\sin 8\varphi$.

19. $u(1,\varphi) = 19\cos 7\varphi$.
20. $u(1,\varphi) = 20\sin 6\varphi$.
21. $u(1,\varphi) = 21\cos 5\varphi$.
22. $u(1,\varphi) = 22\sin 4\varphi$.
23. $u(1,\varphi) = 23\cos 3\varphi$.
24. $u(1,\varphi) = 24\sin 2\varphi$.
25. $u(1,\varphi) = 25\cos 2\varphi$.
26. $u(1,\varphi) = 26\sin 3\varphi$.
27. $u(1,\varphi) = 27\cos 4\varphi$.
28. $u(1,\varphi) = 28\sin 5\varphi$.
29. $u(1,\varphi) = 29\cos 6\varphi$.
30. $u(1,\varphi) = 30\sin 7\varphi$.
31. $u(1,\varphi) = 31\cos 8\varphi + 32\sin 9\varphi$.

Задача 10. Решить смешанную задачу.

1. $u_{tt} = 81u_{xx}$;
$u(x,0) = \sin \pi x$;
$u_t(x,0) = 0$;
$u(0,t) = u(5,t) = 0$.
2. $u_{tt} = 64u_{xx}$;
$u(x,0) = 0$;
$u_t(x,0) = 8\pi \sin \pi x$;
$u(0,t) = u(6,t) = 0$.
3. $u_{tt} = 49u_{xx}$;
$u(x,0) = 3\sin 2\pi x$;
$u_t(x,0) = 0$;
$u(0,t) = u(4,t) = 0$.
4. $u_{tt} = 36u_{xx}$;
$u(x,0) = 0$;
$u_t(x,0) = 12\pi \sin 2\pi x$;
$u(0,t) = u(5,t) = 0$.
5. $u_{tt} = 25u_{xx}$;
$u(x,0) = 5\sin 3\pi x$;
$u_t(x,0) = 0$;
$u(0,t) = u(3,t) = 0$.
6. $u_{tt} = 16u_{xx}$;
$u(x,0) = 0$;
$u_t(x,0) = 12\pi \sin 3\pi x$;
$u(0,t) = u(4,t) = 0$.
7. $u_{tt} = 9u_{xx}$;
$u(x,0) = 7\sin 4\pi x$;
$u_t(x,0) = 0$;
$u(0,t) = u(2,t) = 0$.
8. $u_{tt} = 4u_{xx}$;
$u(x,0) = 0$;
$u_t(x,0) = 8\pi \sin 4\pi x$;
$u(0,t) = u(3,t) = 0$.
9. $u_{tt} = u_{xx}$;
$u(x,0) = 9\sin 5\pi x$;
$u_t(x,0) = 0$;
$u(0,t) = u(1,t) = 0$.
10. $u_{tt} = u_{xx}$;
$u(x,0) = 0$;
$u_t(x,0) = 5\sin 5\pi x$;
$u(0,t) = u(3,t) = 0$.
11. $u_{tt} = 4u_{xx}$;
$u(x,0) = 11\sin 6\pi x$;
$u_t(x,0) = 0$;
$u(0,t) = u(2,t) = 0$.
12. $u_{tt} = 9u_{xx}$;
$u(x,0) = 0$;
$u_t(x,0) = 18\pi \sin 6\pi x$;
$u(0,t) = u(1,t) = 0$.
13. $u_{tt} = 16u_{xx}$;
$u(x,0) = 13\sin 5\pi x$;
$u_t(x,0) = 0$;
$u(0,t) = u(3,t) = 0$.
14. $u_{tt} = 25u_{xx}$;
$u(x,0) = 0$;
$u_t(x,0) = 25\pi \sin 5\pi x$;
$u(0,t) = u(2,t) = 0$.

15. $u_{tt} = 36u_{xx}$;
$u(x,0) = 15\sin 4\pi x$;
$u_t(x,0) = 0$;
$u(0,t) = u(4,t) = 0$.

16. $u_{tt} = 49u_{xx}$;
$u(x,0) = 0$;
$u_t(x,0) = 28\pi\sin 4\pi x$;
$u(0,t) = u(3,t) = 0$.

17. $u_{tt} = 64u_{xx}$;
$u(x,0) = 17\sin 3\pi x$;
$u_t(x,0) = 0$;
$u(0,t) = u(5,t) = 0$.

18. $u_{tt} = 81u_{xx}$;
$u(x,0) = 0$;
$u_t(x,0) = 27\pi\sin 3\pi x$;
$u(0,t) = u(4,t) = 0$.

19. $u_{tt} = u_{xx}$;
$u(x,0) = 19\sin 7\pi x$;
$u_t(x,0) = 0$;
$u(0,t) = u(2,t) = 0$.

20. $u_{tt} = 4u_{xx}$;
$u(x,0) = 0$;
$u_t(x,0) = 14\pi\sin 7\pi x$;
$u(0,t) = u(1,t) = 0$.

21. $u_{tt} = 9u_{xx}$;
$u(x,0) = 21\sin 6\pi x$;
$u_t(x,0) = 0$;
$u(0,t) = u(3,t) = 0$.

22. $u_{tt} = 16u_{xx}$;
$u(x,0) = 0$;
$u_t(x,0) = 24\pi\sin 6\pi x$;
$u(0,t) = u(2,t) = 0$.

23. $u_{tt} = 25u_{xx}$;
$u(x,0) = 23\sin 5\pi x$;
$u_t(x,0) = 0$;
$u(0,t) = u(4,t) = 0$.

24. $u_{tt} = 36u_{xx}$;
$u(x,0) = 0$;
$u_t(x,0) = 30\pi\sin 5\pi x$;
$u(0,t) = u(3,t) = 0$.

25. $u_{tt} = 49u_{xx}$;
$u(x,0) = 25\sin 4\pi x$;
$u_t(x,0) = 0$;
$u(0,t) = u(5,t) = 0$.

26. $u_{tt} = 64u_{xx}$;
$u(x,0) = 0$;
$u_t(x,0) = 32\pi\sin 4\pi x$;
$u(0,t) = u(4,t) = 0$.

27. $u_{tt} = 81u_{xx}$;
$u(x,0) = 27\sin 3\pi x$;
$u_t(x,0) = 0$;
$u(0,t) = u(6,t) = 0$.

28. $u_{tt} = u_{xx}$;
$u(x,0) = 0$;
$u_t(x,0) = 3\pi\sin 3\pi x$;
$u(0,t) = u(5,t) = 0$.

29. $u_{tt} = 4u_{xx}$;
$u(x,0) = 29\sin 2\pi x$;
$u_t(x,0) = 0$;
$u(0,t) = u(7,t) = 0$.

30. $u_{tt} = 9u_{xx}$;
$u(x,0) = 0$;
$u_t(x,0) = 6\pi\sin 2\pi x$;
$u(0,t) = u(6,t) = 0$.

31. $u_{tt} = 16u_{xx}$;
$u(x,0) = 31\sin \pi x$;
$u_t(x,0) = 0$;
$u(0,t) = u(8,t) = 0$.

Задача 11. Решить смешанную задачу.

1. $u_{tt} = 81u_{xx}$;
$u(0,t) = u(5,t) = 0$;
$u(x,0) = \sin \pi x$,
$u_t(x,0) = 18\pi \sin 2\pi x$.

2. $u_{tt} = 64u_{xx}$;
$u(0,t) = u(6,t) = 0$;
$u(x,0) = 2\sin \pi x$,
$u_t(x,0) = 8\pi \sin \pi x$.

3. $u_{tt} = 49u_{xx}$;
$u(0,t) = u(4,t) = 0$;
$u(x,0) = 3\sin 2\pi x$,
$u_t(x,0) = 21\pi \sin 3\pi x$.

4. $u_{tt} = 36u_{xx}$;
$u(0,t) = u(5,t) = 0$;
$u(x,0) = 4\sin 2\pi x$,
$u_t(x,0) = 12\pi \sin 2\pi x$.

5. $u_{tt} = 25u_{xx}$;
$u(0,t) = u(3,t) = 0$;
$u(x,0) = 5\sin 3\pi x$,
$u_t(x,0) = 20\pi \sin 4\pi x$.

6. $u_{tt} = 16u_{xx}$;
$u(0,t) = u(4,t) = 0$;
$u(x,0) = 6\sin 3\pi x$,
$u_t(x,0) = 12\pi \sin 3\pi x$.

7. $u_{tt} = 9u_{xx}$;
$u(0,t) = u(2,t) = 0$;
$u(x,0) = 7\sin 4\pi x$,
$u_t(x,0) = 15\pi \sin 5\pi x$.

8. $u_{tt} = 4u_{xx}$;
$u(0,t) = u(3,t) = 0$;
$u(x,0) = 8\sin 4\pi x$,
$u_t(x,0) = 8\pi \sin 4\pi x$.

9. $u_{tt} = u_{xx}$;
$u(0,t) = u(1,t) = 0$;
$u(x,0) = 9\sin 5\pi x$,
$u_t(x,0) = 6\pi \sin 6\pi x$.

10. $u_{tt} = u_{xx}$;
$u(0,t) = u(3,t) = 0$;
$u(x,0) = 10\sin 5\pi x$,
$u_t(x,0) = 5\pi \sin 5\pi x$.

11. $u_{tt} = 4u_{xx}$;
$u(0,t) = u(2,t) = 0$;
$u(x,0) = 11\sin 6\pi x$,
$u_t(x,0) = 12\pi \sin 6\pi x$.

12. $u_{tt} = 9u_{xx}$;
$u(0,t) = u(1,t) = 0$;
$u(x,0) = 12\sin 6\pi x$,
$u_t(x,0) = 18\pi \sin 6\pi x$.

13. $u_{tt} = 16u_{xx}$;
$u(0,t) = u(3,t) = 0$;
$u(x,0) = 13\sin 5\pi x$,
$u_t(x,0) = 20\pi \sin 5\pi x$.

14. $u_{tt} = 25u_{xx}$;
$u(0,t) = u(2,t) = 0$;
$u(x,0) = 14\sin 5\pi x$,
$u_t(x,0) = 25\pi \sin 5\pi x$.

15. $u_{tt} = 36u_{xx}$;
$u(0,t) = u(4,t) = 0$;
$u(x,0) = 15\sin 4\pi x$,
$u_t(x,0) = 24\pi \sin 4\pi x$.

16. $u_{tt} = 49u_{xx}$;
$u(0,t) = u(3,t) = 0$;
$u(x,0) = 16\sin 4\pi x$,
$u_t(x,0) = 28\pi \sin 4\pi x$.

17. $u_{tt} = 64u_{xx}$;
$u(0,t) = u(5,t) = 0$;
$u(x,0) = 17\sin 3\pi x$,
$u_t(x,0) = 24\pi \sin 3\pi x$.

18. $u_{tt} = 81u_{xx}$;
$u(0,t) = u(4,t) = 0$;
$u(x,0) = 18\sin 3\pi x$,
$u_t(x,0) = 27\pi \sin 3\pi x$.

19. $u_{tt} = u_{xx}$;
$u(0,t) = u(2,t) = 0$;
$u(x,0) = 19\sin 7\pi x$,
$u_t(x,0) = 7\pi \sin 7\pi x$.

20. $u_{tt} = 4u_{xx}$;
$u(0,t) = u(1,t) = 0$;
$u(x,0) = 20\sin 7\pi x$,
$u_t(x,0) = 14\pi \sin 7\pi x$.

21. $u_{tt} = 9u_{xx}$;
$u(0,t) = u(3,t) = 0$;
$u(x,0) = 21\sin 6\pi x$,
$u_t(x,0) = 18\pi \sin 6\pi x$.

22. $u_{tt} = 16u_{xx}$;
$u(0,t) = u(2,t) = 0$;
$u(x,0) = 22\sin 6\pi x$,
$u_t(x,0) = 24\pi \sin 6\pi x$.

23. $u_{tt} = 25u_{xx}$;
$u(0,t) = u(4,t) = 0$;
$u(x,0) = 23\sin 5\pi x$,
$u_t(x,0) = 25\pi \sin 5\pi x$.

24. $u_{tt} = 36u_{xx}$;
$u(0,t) = u(3,t) = 0$;
$u(x,0) = 24\sin 5\pi x$,
$u_t(x,0) = 30\pi \sin 5\pi x$.

25. $u_{tt} = 49u_{xx}$;
$u(0,t) = u(5,t) = 0$;
$u(x,0) = 25\sin 4\pi x$,
$u_t(x,0) = 28\pi \sin 4\pi x$.

26. $u_{tt} = 64u_{xx}$;
$u(0,t) = u(4,t) = 0$;
$u(x,0) = 26\sin 4\pi x$,
$u_t(x,0) = 32\pi \sin 4\pi x$.

27. $u_{tt} = 81u_{xx}$;
$u(0,t) = u(6,t) = 0$;
$u(x,0) = 27\sin 3\pi x$,
$u_t(x,0) = 27\pi \sin 3\pi x$.

28. $u_{tt} = u_{xx}$;
$u(0,t) = u(5,t) = 0$;
$u(x,0) = 28\sin 3\pi x$,
$u_t(x,0) = 3\pi \sin 3\pi x$.

29. $u_{tt} = 4u_{xx}$;
$u(0,t) = u(7,t) = 0$;
$u(x,0) = 29\sin 2\pi x$,
$u_t(x,0) = 4\pi \sin 2\pi x$.

30. $u_{tt} = 9u_{xx}$;
$u(0,t) = u(6,t) = 0$;
$u(x,0) = 30\sin 2\pi x$,
$u_t(x,0) = 6\pi \sin 2\pi x$.

31. $u_{tt} = 16u_{xx}$;
$u(0,t) = u(8,t) = 0$;
$u(x,0) = 31\sin \pi x$,
$u_t(x,0) = 4\pi \sin \pi x$.

Задача 12. Решить смешанную задачу.

1. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(6,t) = 0$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 8\pi \cos \pi x$.

2. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(5,t) = 0$; $u(x,0) = 2\cos \pi x$, $u_t(x,0) = 0$.

3. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(5,t) = 0$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 12\pi \cos 2\pi x$.

4. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0$; $u(x,0) = 4\cos 2\pi x$ $u_t(x,0) = 0$.
5. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 12\pi\cos 3\pi x$.
6. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0$; $u(x,0) = 6\cos 3\pi x$, $u_t(x,0) = 0$.
7. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0$; $u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 8\pi\cos 4\pi x$.
8. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0$; $u(x,0) = 8\cos 4\pi x$, $u_t(x,0) = 0$.
9. $u_{tt} = u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 5\pi\cos 5\pi x$.
10. $u_{tt} = u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$; $u(x,0) = 10\cos 5\pi x$, $u_t(x,0) = 0$.
11. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 18\pi\cos 6\pi x$.
12. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0$; $u(x,0) = 12\cos 6\pi x$, $u_t(x,0) = 0$.
13. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 25\pi\cos 5\pi x$.
14. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0$; $u(x,0) = 14\cos 5\pi x$, $u_t(x,0) = 0$.
15. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 28\pi\cos 4\pi x$.
16. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0$; $u(x,0) = 16\cos 4\pi x$, $u_t(x,0) = 0$.
17. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 27\pi\cos 3\pi x$.
18. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(5,t) = 0$; $u(x,0) = 18\cos 3\pi x$, $u_t(x,0) = 0$.
19. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 14\pi\cos 7\pi x$.
20. $u_{tt} = u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0$; $u(x,0) = 20\cos 7\pi x$, $u_t(x,0) = 0$.
21. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 24\pi\cos 6\pi x$.
22. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0$; $u(x,0) = 22\cos 6\pi x$, $u_t(x,0) = 0$.

23. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 30\pi\cos 5\pi x$.
24. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0$; $u(x,0) = 24\cos 5\pi x$, $u_t(x,0) = 0$.
25. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 32\pi\cos 4\pi x$.
26. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(5,t) = 0$; $u(x,0) = 26\cos 4\pi x$, $u_t(x,0) = 0$.
27. $u_{tt} = u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(5,t) = 0$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 3\pi\cos 3\pi x$.
28. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(6,t) = 0$; $u(x,0) = 28\cos 3\pi x$, $u_t(x,0) = 0$.
29. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(6,t) = 0$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 6\pi\cos 2\pi x$.
30. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(7,t) = 0$; $u(x,0) = 30\cos 2\pi x$, $u_t(x,0) = 0$.
31. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u_x(0,t) = u_x(7,t) = 0$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 4\pi\cos \pi x$.

Задача 13. Решить смешанную задачу.

1. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u(x,0) = \sin 9\pi x$, $u_t(x,0) = 0$; $u(0,t) = 0$, $u_x(0{,}5;t) = 0$.
2. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u(x,0) = 2\cos 7\pi x$, $u_t(x,0) = 0$; $u_x(0,t) = 0$, $u(0{,}5;t) = 0$.
3. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 18\pi\sin 9\pi x$; $u(0,t) = 0$, $u_x(1{,}5;t) = 0$.
4. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 14\pi\cos 7\pi x$; $u_x(0,t) = 0$, $u(1{,}5;t) = 0$.
5. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u(x,0) = 5\sin 5\pi x$, $u_t(x,0) = 0$; $u(0,t) = 0$, $u_x(2{,}5;t) = 0$.
6. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u(x,0) = 6\cos 3\pi x$, $u_t(x,0) = 0$; $u_x(0,t) = 0$, $u(2{,}5;t) = 0$.
7. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 15\pi\sin 5\pi x$; $u(0,t) = 0$, $u_x(3{,}5;t) = 0$.
8. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 9\pi\cos 3\pi x$; $u_x(0,t) = 0$, $u(3{,}5;t) = 0$.
9. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u(x,0) = 9\sin 9\pi x$, $u_t(x,0) = 0$; $u(0,t) = 0$, $u_x(4{,}5;t) = 0$.

10. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u(x,0) = 10\cos 7\pi x$, $u_t(x,0) = 0$; $u_x(0,t) = 0$, $u(4{,}5;t) = 0$.

11. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 36\pi \sin 9\pi x$; $u(0,t) = 0$, $u_x(0{,}5;t) = 0$.

12. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 28\pi \cos 7\pi x$; $u_x(0,t) = 0$, $u(0{,}5;t) = 0$.

13. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u(x,0) = 13\sin 5\pi x$, $u_t(x,0) = 0$; $u(0,t) = 0$, $u_x(1{,}5;t) = 0$.

14. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u(x,0) = 14\cos 3\pi x$, $u_t(x,0) = 0$; $u_x(0,t) = 0$, $u(1{,}5;t) = 0$.

15. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 25\pi \sin 5\pi x$; $u(0,t) = 0$, $u_x(2{,}5;t) = 0$.

16. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 15\pi \sin 3\pi x$; $u_x(0,t) = 0$, $u(2{,}5;t) = 0$.

17. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u(x,0) = 17\sin 9\pi x$, $u_t(x,0) = 0$; $u(0,t) = 0$, $u_x(3{,}5;t) = 0$.

18. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u(x,0) = 18\cos 7\pi x$, $u_t(x,0) = 0$; $u_x(0,t) = 0$, $u(3{,}5;t) = 0$.

19. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 54\pi \sin 9\pi x$; $u(0,t) = 0$, $u_x(4{,}5;t) = 0$.

20. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 42\pi \cos 7\pi x$, $u_x(0,t) = 0$, $u(4{,}5;t) = 0$.

21. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u(x,0) = 21\sin 9\pi x$, $u_t(x,0) = 0$; $u(0,t) = 0$, $u_x(1{,}5;t) = 0$.

22. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u(x,0) = 22\cos 7\pi x$, $u_t(x,0) = 0$; $u_x(0,t) = 0$, $u(1{,}5;t) = 0$.

23. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 63\pi \sin 9\pi x$; $u(0,t) = 0$, $u_x(2{,}5;t) = 0$.

24. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 49\pi \cos 7\pi x$; $u_x(0,t) = 0$, $u(2{,}5;t) = 0$.

25. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u(x,0) = 25\sin 5\pi x$, $u_t(x,0) = 0$; $u(0,t) = 0$, $u_x(3{,}5;t) = 0$.

26. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u(x,0) = 26\cos 3\pi x$, $u_t(x,0) = 0$; $u_x(0,t) = 0$, $u(3{,}5;t) = 0$.

27. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 40\pi \sin 5\pi x$; $u(0,t) = 0$, $u_x(4{,}5;t) = 0$.

28. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 24\pi \cos 3\pi x$; $u_x(0,t) = 0$, $u(4{,}5;t) = 0$.

29. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $u(x,0) = 29\sin 7\pi x$, $u_t(x,0) = 0$; $u(0,t) = 0$, $u_x(0{,}5;t) = 0$.

30. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $u(x,0) = 30\cos 5\pi x$, $u_t(x,0) = 0$; $u_x(0,t) = 0$, $u(1{,}5;t) = 0$.

31. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 9\pi\sin \pi x$; $u(0,t) = 0$, $u_x(2{,}5;t) = 0$.

Задача 14. Решить смешанную задачу.

1. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u(0,t) = -8$, $u(2,t) = 2$; $u(x,0) = \sin 6\pi x - 8 + 5x$, $u_t(x,0) = 0$.

2. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u(0,t) = 7$, $u(1,t) = 2$; $u(x,0) = 7 - 5x$, $u_t(x,0) = 12\pi\sin 4\pi x$.

3. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u(0,t) = -6$, $u(3,t) = 6$; $u(x,0) = 3\sin 3\pi x - 6 + 4x$, $u_t(x,0) = 0$.

4. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u(0,t) = 5t$, $u(2,t) = -3t$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 12\pi\sin 4\pi x + 5 - 4x$.

5. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u(0,t) = -4$, $u(1,t) = -1$; $u(x,0) = 5\sin 2\pi x - 4 + 3x$, $u_t(x,0) = 0$.

6. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u(0,t) = 3$, $u(2,t) = 7$; $u(x,0) = 3 + 2x$, $u_t(x,0) = 12\pi\sin 3\pi x$.

7. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u(0,t) = -2$, $u(3,t) = 1$; $u(x,0) = 7\sin 4\pi x - 2 + x$, $u_t(x,0) = 0$.

8. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u(0,t) = t$, $u(2,t) = -t$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 28\pi\sin 7\pi x + 1 - x$.

9. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u(0,t) = -1$, $u(1,t) = -3$; $u(x,0) = 9\sin 3\pi x - 1 - 2x$, $u_t(x,0) = 0$.

10. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u(0,t) = 3$, $u(2,t) = -5$; $u(x,0) = 3 - 4x$, $u_t(x,0) = 20\pi\sin 4\pi x$.

11. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u(0,t) = -5$, $u(1,t) = 1$; $u(x,0) = 11\sin 3\pi x - 5 + 6x$, $u_t(x,0) = 0$.

12. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u(0,t) = 7t$, $u(2,t) = -3t$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 10\pi\sin 2\pi x + 7 - 5x$.

13. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u(0,t) = -9$, $u(3,t) = 3$; $u(x,0) = 13\sin 3\pi x - 9 + 4x$, $u_t(x,0) = 0$.

14. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u(0,t) = 8$, $u(2,t) = 2$; $u(x,0) = 8 - 3x$, $u_t(x,0) = 18\pi\sin 3\pi x$.

15. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u(0,t) = -6$, $u(3,t) = 0$; $u(x,0) = 15\sin 2\pi x - 6 + 2x$, $u_t(x,0) = 0$.

16. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u(0,t) = 4t$, $u(4,t) = 8t$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 24\pi\sin 4\pi x + 4 + x$.

17. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u(0,t) = -2$, $u(3,t) = -5$; $u(x,0) = 17\sin 3\pi x - 2 - x$, $u_t(x,0) = 0$.

18. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u(0,t) = 3$, $u(2,t) = -1$; $u(x,0) = 3 - 2x$, $u_t(x,0) = 35\pi\sin 5\pi x$.

19. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u(0,t) = -1$, $u(1,t) = -4$; $u(x,0) = 19\sin 7\pi x - 1 - 3x$, $u_t(x,0) = 0$.

20. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u(0,t) = 2t$, $u(2,t) = -6t$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 28\pi\sin 4\pi x + 2 - 4x$.

21. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u(0,t) = -4$, $u(1,t) = -9$; $u(x,0) = 21\sin 3\pi x - 4 - 5x$, $u_t(x,0) = 0$.

22. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u(0,t) = 2$, $u(3,t) = -7$; $u(x,0) = 2 - 3x$, $u_t(x,0) = 24\pi\sin 3\pi x$.

23. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u(0,t) = -3$, $u(1,t) = 1$; $u(x,0) = 23\sin 2\pi x - 3 + 4x$, $u_t(x,0) = 0$.

24. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u(0,t) = 4t$, $u(2,t) = -6t$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 32\pi\sin 4\pi x + 4 - 5x$.

25. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $u(0,t) = -5$, $u(3,t) = 1$; $u(x,0) = 25\sin 3\pi x - 5 + 2x$, $u_t(x,0) = 0$.

26. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $u(0,t) = 6$, $u(4,t) = -2$; $u(x,0) = 6 - 2x$, $u_t(x,0) = 27\pi\sin 3\pi x$.

27. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $u(0,t) = -7$, $u(3,t) = 2$; $u(x,0) = 27\sin 2\pi x - 7 + 3x$, $u_t(x,0) = 0$.

28. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $u(0,t) = 8t$, $u(4,t) = -4t$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 27\pi\sin 3\pi x + 8 - 3x$.

29. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u(0,t) = -9$, $u(2,t) = 1$; $u(x,0) = 29\sin 4\pi x - 9 + 5x$, $u_t(x,0) = 0$.

30. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u(0,t) = 9$, $u(3,t) = -3$; $u(x,0) = 9 - 4x$, $u_t(x,0) = 10\pi\sin 5\pi x$.

31. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u(0,t) = -1$, $u(2,t) = 5$; $u(x,0) = 31\sin 2\pi x - 1 + 3x$, $u_t(x,0) = 0$.

Задача 15. Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями $u(x,0)=u_t(x,0)=0$; $u(0,t)=u(\pi,t)=0$.

1. $u_{tt} = u_{xx} + 65e^{-8t}\sin x$.

2. $u_{tt} = \frac{1}{4}u_{xx} + 3\sin 2t\sin 2x$.

3. $u_{tt} = u_{xx} + 16\cos 8t\sin 8x$.

4. $u_{tt} = \frac{1}{9}u_{xx} + 8\sin 3t\sin 3x$.

5. $u_{tt}=\frac{1}{16}u_{xx}+50e^{-7t}\sin 4x$.
6. $u_{tt}=\frac{1}{25}u_{xx}+3\cos 2t\sin 5x$.
7. $u_{tt}=4u_{xx}+28\cos 14t\sin 7x$.
8. $u_{tt}=\frac{1}{36}u_{xx}+8\cos 3t\sin 6x$.
9. $u_{tt}=\frac{1}{49}u_{xx}+37e^{-6t}\sin 7x$.
10. $u_{tt}=\frac{1}{64}u_{xx}+15\sin 4t\sin 8x$.
11. $u_{tt}=9u_{xx}+36\cos 18t\sin 6x$.
12. $u_{tt}=\frac{1}{81}u_{xx}+15\cos 4t\sin 9x$.
13. $u_{tt}=u_{xx}+26e^{-5t}\sin x$.
14. $u_{tt}=\frac{1}{4}u_{xx}+24\sin 5t\sin 2x$.
15. $u_{tt}=16u_{xx}+40\cos 20t\sin 5x$.
16. $u_{tt}=\frac{1}{9}u_{xx}+24\cos 5t\sin 3x$.
17. $u_{tt}=\frac{1}{16}u_{xx}+17e^{-4t}\sin 4x$.
18. $u_{tt}=\frac{1}{25}u_{xx}+35\sin 6t\sin 5x$.
19. $u_{tt}=25u_{xx}+40\cos 20t\sin 4x$.
20. $u_{tt}=\frac{1}{36}u_{xx}+35\cos 6t\sin 5x$.
21. $u_{tt}=\frac{1}{49}u_{xx}+10e^{-3t}\sin 7x$.
22. $u_{tt}=\frac{1}{64}u_{xx}+48\sin 7t\sin 8x$.
23. $u_{tt}=36u_{xx}+36\cos 18t\sin 3x$.
24. $u_{tt}=\frac{1}{81}u_{xx}+48\cos 7t\sin 9x$.
25. $u_{tt}=u_{xx}+5e^{-2t}\sin x$.
26. $u_{tt}=\frac{1}{4}u_{xx}+63\sin 8t\sin 2x$.
27. $u_{tt}=49u_{xx}+28\cos 14t\sin 2x$.
28. $u_{tt}=\frac{1}{9}u_{xx}+63\cos 8t\sin 3x$.
29. $u_{tt}=\frac{1}{16}u_{xx}+2e^{-t}\sin 4x$.
30. $u_{tt}=\frac{1}{25}u_{xx}+80\sin 9t\sin 5x$.
31. $u_{tt}=64u_{xx}+16\cos 8t\sin x$.

§ 11.4. СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1) Задача Штурма–Лиувилля:
— дифференциальное уравнение $X''+\lambda^2X=0$;
— граничные условия $X(0)=X(l)=0$.

Разыскиваются значения параметра $\lambda=\lambda_n$ (собственные числа), при которых существуют ненулевые решения дифференциального уравнения, удовлетворяющие граничным условиям, а также и сами ненулевые решения (собственные функции).

Рассматриваются и задачи Штурма–Лиувилля с граничными условиями вида

$$X'(0)=X'(l)=0,\qquad X(0)=X'(l)=0,\qquad X'(0)=X(l)=0.$$

2) Смешанная задача для волнового уравнения на отрезке $[0,l]$ с однородными граничными условиями:
— дифференциальное уравнение $u_{tt}=a^2u_{xx}$;
— начальные условия $u(x,0)=\varphi(x)$, $u_t(x,0)=\psi(x)$;
— граничные условия $u(0,t)=u(l,t)=0$.

Рассматриваются также однородные граничные условия следующих видов:

$$u_x(0,t)=u_x(l,t)=0,$$
$$u(0,t)=u_x(l,t)=0,\qquad u_x(0,t)=u(l,t)=0.$$

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x),$$

где $X_n(x)$ — собственные функции задачи Штурма–Лиувилля с условиями, соответствующими рассматриваемым граничным условиям;

$$T_n(t)=A_n\cos a\lambda_n t+B_n\sin a\lambda_n t;$$

λ_n — собственные числа задачи Штурма–Лиувилля; A_n, B_n — коэффициенты, определяемые по начальным условиям.

3) Смешанная задача для неоднородного волнового уравнения

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t).$$

Ее решение можно получить в виде разложения по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)X_n(x),$$

где $u_n(t)$ — решения задач Коши

$$u_n''+a^2\lambda_n^2u_n=f_n(t),\qquad u_n(0)=\varphi_n,\qquad u_n'(0)=\psi_n;$$

$f_n(t)$, φ_n, ψ_n — коэффициенты разложений

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)X_n(x),$$

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_nX_n(x),\qquad \psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_nX_n(x).$$

4) Смешанная задача для уравнения теплопроводности на отрезке $[0,l]$ с однородными граничными условиями:

– дифференциальное уравнение $u_t=a^2u_{xx}$;

– начальное условие $u(x,0)=\varphi(x)$;

– граничные условия $u(0,t)=u(l,t)=0$

или одно из

$$u_x(0,t)=u_x(l,t)=0,$$
$$u(0,t)=u_x(l,t)=0,$$
$$u_x(0,t)=u(l,t)=0.$$

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x),$$

где $X_n(x)$ — собственные функции задачи Штурма–Лиувилля с условиями, соответствующими рассматриваемым граничным условиям;

$$T_n(t)=C_n e^{-a^2\lambda_n^2 t},$$

λ_n — собственные числа задачи Штурма–Лиувилля; C_n — коэффициенты, определяемые по начальным условиям.

5) Смешанная задача для неоднородного уравнения теплопроводности

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t).$$

Ее решение можно получить в виде разложения по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)X_n(x),$$

где $u_n(t)$ — решения задач Коши

$$u_n'+a^2\lambda_n^2u_n=f_n(t),\qquad u_n(0)=\varphi_n;$$

$f_n(t)$, φ_n — коэффициенты разложений

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)X_n(x),\qquad \varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_nX_n(x).$$

6) Смешанные задачи для волнового уравнения и уравнения теплопроводности с неоднородными граничными условиями

$$u(0,t)=A(t),\qquad u(l,t)=B(t).$$

Каждая из этих задач сводится к задаче с однородными граничными условиями для функции

$$v(x,t)=u(x,t)-w(x,t),$$

где

$$w(x,t)=A(t)+\frac{B(t)-A(t)}{l}x.$$

Решение получается в виде

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t).$$

7) Краевая задача для уравнения Лапласа в круговом секторе

$$0 \leqslant r \leqslant R, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$$

(r, φ — полярные координаты, $\alpha < 2\pi$):

– дифференциальное уравнение $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0$;

– граничные условия
$$u(R, \varphi) = f(\varphi), \tag{11.1}$$
$$u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0. \tag{11.2}$$

Вместо (11.2) рассматриваются и условия

$$\begin{gathered} u_\varphi(r, 0) = u_\varphi(r, \alpha) = 0, \\ u(r, 0) = u_\varphi(r, \alpha) = 0, \qquad u_\varphi(r, 0) = u(r, \alpha) = 0. \end{gathered} \tag{11.3}$$

Решение задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r)\Phi_n(\varphi),$$

где $\Phi_n(\varphi)$ — собственные функции задачи Штурма–Лиувилля для дифференциального уравнения

$$\Phi'' + \lambda^2\Phi = 0$$

с условиями, соответствующими рассматриваемым граничным условиям вида (11.2) или (11.3);

$$R_n(r) = C_n r^n;$$

C_n — коэффициенты, определяемые по граничным условиям (11.1).

8) Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге

$$0 \leqslant r \leqslant R, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

(r, φ — полярные координаты):

– дифференциальное уравнение $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0$;

– граничное условие $u(R, \varphi) = f(\varphi)$.

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде

$$u(r, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)r^n,$$

где A_n, B_n — коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций и асимптотических разложений (при $\alpha \to 0$)

$\sin\alpha \sim \alpha,$	$\sin\alpha = \alpha + o(\alpha)$
$\operatorname{tg}\alpha \sim \alpha,$	$\operatorname{tg}\alpha = \alpha + o(\alpha);$
$\arcsin\alpha \sim \alpha,$	$\arcsin\alpha = \alpha + o(\alpha);$
$\operatorname{arctg}\alpha \sim \alpha,$	$\operatorname{arctg}\alpha = \alpha + o(\alpha);$
$1 - \cos\alpha \sim \frac{\alpha^2}{2},$	$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + o(\alpha^2);$
$a^\alpha - 1 \sim \alpha\ln a,$	$a^\alpha = 1 + \alpha\ln a + o(\alpha);$
$e^\alpha - 1 \sim \alpha,$	$e^\alpha = 1 + \alpha + o(\alpha);$
$\log_a(1+\alpha) \sim \frac{\alpha}{\ln a},$	$\log_a(1+\alpha) = \frac{\alpha}{\ln a} + o(\alpha);$
$\ln(1+\alpha) \sim \alpha,$	$\ln(1+\alpha) = \alpha + o(\alpha);$
$(1+\alpha)^n - 1 \sim n\alpha,$	$(1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + o(\alpha);$
$\sqrt[n]{1+\alpha} - 1 \sim \frac{\alpha}{n},$	$\sqrt[n]{1+\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{n} + o(\alpha);$
$\sqrt{1+\alpha} - 1 \sim \frac{\alpha}{2},$	$\sqrt{1+\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{2} + o(\alpha).$

Приложение 2

Таблица производных

$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$
$(a^x)' = a^x\ln a,$	$(e^x)' = e^x;$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a},$	$(\ln x)' = \frac{1}{x};$
$(\sin x)' = \cos x,$	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$
$(\cos x)' = -\sin x,$	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$	$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$	$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x};$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

Приложение 3

Правила дифференцирования

$(C)' = 0,$	$dC = 0 \quad (C$ — постоянная$);$
$(u \pm v)' = u' \pm v',$	$d(u \pm v) = du \pm dv;$
$(uv)' = u'v + uv',$	$d(uv) = v\,du + u\,dv;$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}, \quad (v \neq 0);$
$[y(u(x))]'_x = y'_u u'_x,$	$d[y(u(x))] = y'_u u'_x\,dx = y'_u\,du(x).$

Приложение 4

Таблица интегралов

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1),$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C;$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$	$\int e^x\,dx = e^x + C;$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,$	$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C;$
$\int \cos x\,dx = \sin x + C,$	$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C;$
$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C,$	$\int \operatorname{th} x\,dx = \ln\lvert\operatorname{ch} x\rvert + C;$
$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C,$	$\int \operatorname{cth} x\,dx = \ln\lvert\operatorname{sh} x\rvert + C;$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C;$
$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,$	$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$
$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C,$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\rvert + C.$

Приложение 5

Правила замены переменной интегрирования

$$\int f(x)\,dx = \left(\int f(\varphi(t))\,d\varphi(t)\right)_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,d\varphi(t), \quad \alpha = \varphi^{-1}(a), \quad \beta = \varphi^{-1}(b)$$

Приложение 6

Формулы интегрирования по частям

$\int u\,dv = uv - \int v\,du;$	$\int_a^b u\,dv = (uv)\big\|_a^b - \int_a^b v\,du.$

Приложение 7

Формула Тейлора

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots \\
&\ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}(x); \\
R_{n+1}(x) &= o\big((x-x_0)^n\big) \quad \text{при} \quad x \to x_0; \\
R_{n+1}(x) &= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}, \quad 0 < \theta < 1. \\
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x); \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + R_{2k}(x); \\
\sin x &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k+1}(x); \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x); \\
(1+x)^m &= 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots \\
&\ldots + \frac{m(m-1)\ldots\big(m-(n-1)\big)}{n!}x^n + R_{n+1}(x).
\end{aligned}
$$

Приложение 8

Переход в двойном интеграле $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

к полярным координатам ρ, θ ($0 \leqslant \rho < +\infty$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$):

$$
\begin{gathered}
x = \rho\cos\theta, \\
y = \rho\sin\theta, \\
dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\theta;
\end{gathered}
$$

к обобщенным полярным координатам ρ, θ ($0 \leqslant \rho < +\infty$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$):

$$
\begin{gathered}
x = a\rho\cos\theta, \\
y = b\rho\sin\theta, \\
dx\,dy = ab\rho\,d\rho\,d\theta \\
(a > 0, \quad b > 0).
\end{gathered}
$$

Приложение 9

Переход в тройном интеграле $\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

к цилиндрическим координатам r, φ, z ($0 \leqslant r < +\infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$):

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z,$$
$$dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\varphi\,dz;$$

к сферическим координатам r, φ, ψ ($0 \leqslant r < +\infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \psi \leqslant \pi$):

$$x = r\sin\psi\cos\varphi, \qquad y = r\sin\psi\sin\varphi, \qquad z = r\cos\psi,$$
$$dx\,dy\,dz = r^2\sin\psi\,dr\,d\varphi\,d\psi.$$

Приложение 10

Основные формулы векторного анализа

Если $u = u(x,y,z)$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{P}(x,y,z)\boldsymbol{i} + \boldsymbol{Q}(x,y,z)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{R}(x,y,z)\boldsymbol{k}$, то

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k},$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix};$$
$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$
$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0, \qquad \operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = 0;$$

формула Остроградского

$$\oiint\limits_S \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}^0\,dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,dV,$$

S — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V, $\boldsymbol{n}^0$ — орт внешней нормали к поверхности S;

формула Стокса

$$\oint\limits_\Gamma \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = \iint\limits_S \operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{n}^0\,dS,$$

Γ — замкнутая линия, являющаяся краем поверхности S, $\boldsymbol{n}^0$ — орт нормали к поверхности S (согласуется с направлением интегрирования по Γ).