10. В условиях задачи 8 выбирают $m = 6$ шаров. (В наборе 5 шара белого цвета, 7 шара синего и 3 шаров красного цвета). Пусть случайная величина ξ число вынутых красных шаров, а случайная величина η – число вынутых синих шаров.

Найдите:

а) Совместное распределение случайных величин ξ и η (ряд распределения).

ξ может принимать значение от 0 до 3, η может принимать значение от 0 до 6. Всего 15 шаров, извлекаем 6.

$$P(\xi = k, \eta = m) = \frac{C_3^k C_7^m C_5^{6-k-m}}{C_{15}^6};\ C_{15}^6 = \frac{15!}{6!\,9!} = 1287$$

Число способов $C_3^k C_7^m C_5^{6-k-m}$:

$k \setminus m$	0	1	2	3	4	5	6
0		7	105	350	350	105	7
1	4	140	840	1400	700	84	
2	30	420	1260	1050	210		
3	40	280	420	140			

Совместное распределение случайных величин ξ и η

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5	6	Сумма
0		0,001399	0,020979	0,069930	0,069930	0,020979	0,001399	0,184615
1	0,000599	0,020979	0,125874	0,209790	0,104895	0,012587		0,474725
2	0,002997	0,041958	0,125874	0,104895	0,020979			0,296703
3	0,001998	0,013986	0,020979	0,006993				0,043956
Сумма	0,005594	0,078322	0,293706	0,391608	0,195804	0,033566	0,001399	1

б) Ряды распределения случайных величин ξ и η.

ξ	0	1	2	3
$P(\xi)$	0,184615	0,474725	0,296703	0,043956

η	0	1	2	3	4	5	6
$P(\eta)$	0,005594	0,078322	0,293706	0,391608	0,195804	0,033566	0,001399

в) Условные распределения случайной величины ξ при условии η, случайной величины η при условии ξ, проверить случайные величины на независимость
Условные распределения:

$$P(\xi = k | \eta = m) = \frac{P(\xi = k, \eta = m)}{P(\eta = m)}$$

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 0)$:

ξ	P
1	0,107143
2	0,535714
3	0,357143
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 1)$:

ξ	P
0	0,017857
1	0,267857
2	0,535714
3	0,178571
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 2)$:

ξ	P
0	0,071429
1	0,428571
2	0,428571
3	0,071429
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 3)$:

ξ	P
0	0,178571
1	0,535714
2	0,267857
3	0,017857
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 4)$:

ξ	P
0,357143	0,357143
0,535714	0,535714
0,107143	0,107143
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 5)$:

ξ	P
0	0,625
1	0,375
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 6) = 1$.

$$P(\eta = m|\xi = k) = \frac{P(\xi = k, \eta = m)}{P(\xi = k)}$$

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 0)$:

η	1	2	3	4	5	6	Сумма
P	0,007576	0,113636	0,378788	0,378788	0,113636	0,007576	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 1)$:

η	0	1	2	3	4	5	Сумма
P	0,001263	0,044192	0,265152	0,441919	0,220960	0,026515	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 2)$:

η	0	1	2	3	4	Сумма
P	0,010101	0,141414	0,424242	0,353535	0,070707	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 3)$:

η	0	1	2	3	Сумма
P	0,045455	0,318182	0,477273	0,159091	1

Для независимых случайных величин

$$P(\xi < x, \eta < y) = P(\xi < x)P(\eta < y)$$

Например

$$P(\xi < 1, \eta < 1) = 0$$

$$P(\xi < 1)P(\eta < 1) = 0.184615 \cdot 0.005594 \neq 0$$

Равенство

$$P(\xi < 1, \eta < 1) = P(\xi < 1)P(\eta < 1) - \text{неверно}$$

Следовательно, ξ и η зависимы.

г) Значения двумерной функции распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$в заданных точках $(x, y) = (8; 3), (2; 8), (2; 4)$,

$$F_{\xi\eta}(8, 3) = P(\xi < 8, \eta < 3) = P(\eta < 3) = 0.005594 + 0.078322 + 0.293706 \approx 0.377622$$

$$F_{\xi\eta}(2, 8) = P(\xi < 2, \eta < 8) = P(\xi < 2) = 0.184615 + 0.474725 \approx 0.659341$$

$$F_{\xi\eta}(2, 4) = P(\xi < 2, \eta < 4) = 0.001399 + 0.000599 + 0.020979 + 0.002997 +$$

$$+0.041958 + 0.001998 + 0.013986 \approx 0.083916$$

д) Ряд распределения новой случайной величины $\mu = 3 \sin\frac{\pi\xi\eta}{2} + 2 \cos\pi(\xi - \eta)$

Составим таблицу значений случайной величины μ:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5	6
0		-2	2	-2	2	-2	2
1	-2	5	-2	-1	-2	5	
2	2	-2	2	-2	2		
3	-2	-1	-2	5			

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ:

μ	-2	-1	2	5	-2
$P(\mu)$	0,493506	0,223776	0,242158	0,040559	0,493506

e) Ряд распределения новой двумерной дискретной случайной величины (μ_1; μ_2)

$$\mu_1 = \xi - \frac{2 - (\xi - 3\eta)}{3}, \mu_2 = \frac{3 - 5(\eta - 1 + \xi)}{2} + \frac{2\xi + 2}{3}$$

Составим таблицу значений случайной величины μ_1:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5	6
0		1,666667	2,666667	3,666667	4,666667	5,666667	6,666667
1	1,333333	2,333333	3,333333	4,333333	5,333333	6,333333	
2	2	3	4	5	6		
3	2,666667	3,666667	4,666667	5,666667			

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ:

μ_1	1,333333	1,666667	2	2,333333	2,666667	3	3,333333	3,666667
$P(\mu)$	0,000599	0,001399	0,002997	0,020979	0,022977	0,041958	0,125874	0,083916
μ_1	4	4,333333	4,666667	5	5,333333	5,666667	6	6,333333
$P(\mu)$	0,125874	0,20979	0,090909	0,104895	0,104895	0,027972	0,020979	0,012587
μ_1	6,666667							
$P(\mu)$	0,001399							

Составим таблицу значений случайной величины μ_2:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5	6
0		2,166667	-0,33333	-2,833333	-5,33333	-7,833333	-10,3333
1	2,833333	0,333333	-2,16667	-4,666667	-7,16667	-9,666667	
2	1	-1,5	-4	-6,5	-9		
3	-0,833333	-3,33333	-5,83333	-8,333333			

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ:

μ_2	-10,3333	-9,666667	-9	-8,33333	-7,833333	-7,16667	-6,5	-5,83333
$P(\mu)$	0,001399	0,012587	0,020979	0,006993	0,020979	0,104895	0,104895	0,020979
μ_2	-5,33333	-4,66667	-4	-3,33333	-2,83333	-2,16667	-1,5	-0,83333
$P(\mu)$	0,06993	0,20979	0,125874	0,013986	0,06993	0,125874	0,041958	0,001998
μ_2	-0,33333	0,333333	1	2,166667	2,833333			
$P(\mu)$	0,020979	0,020979	0,002997	0,001399	0,000599			

Совместное распределение случайных величин μ_1 и μ_2

$\mu_1 \setminus \mu_2$	-10,3333	-9,66667	-9	-8,33333	-7,83333	-7,16667	-6,5	-5,83333	-5,33333	-4,66667
1,333333										
1,666667										
2										
2,333333										
2,666667										
3										
3,333333										
3,666667										
4										
4,333333										0,20979
4,666667								0,020979	0,06993	
5							0,104895			
5,333333						0,104895				
5,666667				0,006993	0,020979					
6			0,020979							
6,333333		0,012587								
6,666667	0,001399									

Продолжение таблицы справа:

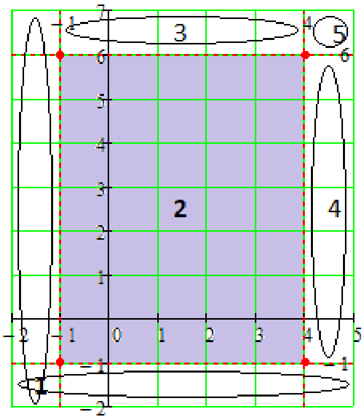
$\mu_1 \setminus \mu_2$	-4	-3,33333	-2,83333	-2,16667	-1,5	-0,83333	-0,33333	0,333333	1	2,166667
1,333333										
1,666667										0,001399
2									0,002997	
2,333333								0,020979		
2,666667						0,001998	0,020979			
3					0,041958					
3,333333				0,125874						
3,666667		0,013986	0,06993							
4	0,125874									

11. В четырехугольник с вершинами в точках $(-1;-1),(-1;6),(4;6),(4;-1)$ в соответствии с принципом геометрической вероятности падает частица. Пусть ξ и η - координаты по оси X и У точки падения частицы.

Найдите:

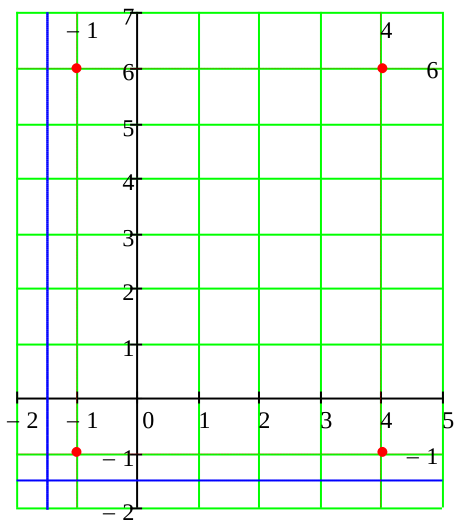
Найдите:

а) Совместную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ случайной величины (ξ,η) и совместную плотность распределения случайной величины (ξ,η).



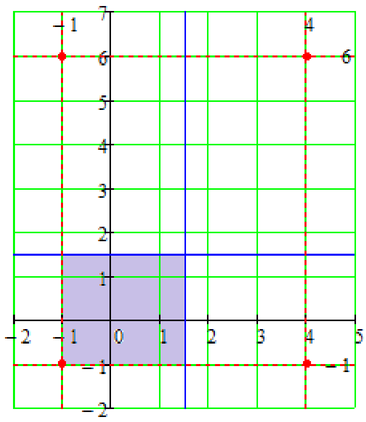
Всего имеем 5 различных областей.

Область 1: $(x<-1)$или $(y<-1)$:



Пересечения с четырёхугольником нет, $F_{\xi\eta}(x,y)=0$.

Область 2: $(x,y)\in D$:

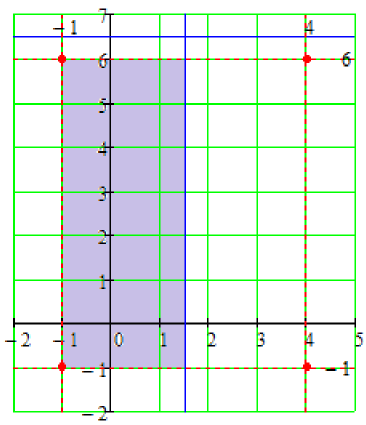


$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{S_D}\int_{-1}^{x}\int_{-1}^{y} dxdy$$

$$S_D = 35 - \text{площадь области.}$$

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{35}\int_{-1}^{x} dx \int_{-1}^{y} dy = \frac{(x+1)(y+1)}{35}.$$

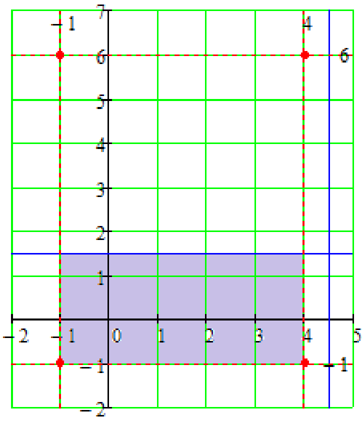
Область 3: $(-1 < x \leq 4)$и$(y > 6)$:



$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{S_D}\int_{-1}^{x}\int_{-1}^{6} dxdy$$

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{35}\int_{-1}^{x} dx \int_{-1}^{6} dy = \frac{(x+1)}{5}.$$

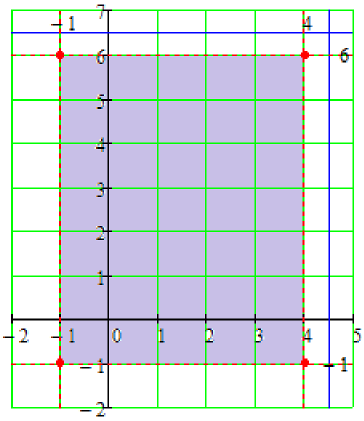
Область 4: $(x > 4)$и$(-1 < y \leq 6)$:



$$F_{\xi\eta}(x,y)=\frac{1}{S_D}\int\limits_{-4}^{1}\int\limits_{-1}^{y}dxdy$$

$$F_{\xi\eta}(x,y)=\frac{1}{35}\int\limits_{-1}^{4}dx\int\limits_{-1}^{y}dy=\frac{y+1}{7}.$$

Область 5: $(x>4)$и$(y>6)$:



$$F_{\xi\eta}(x,y)=\frac{1}{S_D}\int\limits_{-1}^{4}\int\limits_{-1}^{6}dxdy=\frac{1}{35}\int\limits_{-1}^{4}dx\int\limits_{-1}^{6}dy=1.$$

$$F_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}0, & (x<-1)\text{или }(y<-1)\\ \dfrac{(x+1)(y+1)}{35}, & (x,y)\in D\\ \dfrac{x+1}{5}, & (-1<x\le 4)\text{и}(y>6)\\ \dfrac{y+1}{7}, & (x>4)\text{и}(-1<y\le 6)\\ 1, & (x>4)\text{и}(y>6)\end{cases}$$

Поскольку площадь четырёхугольника D равна 35, и точки распределены в соответствии с принципом геометрической вероятности то совместная плотность распределения имеет равномерное распределение внутри D:

$$p_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{35}, (x,y) \in D \\ 0, (x,y) \notin D \end{cases}.$$

б) Одномерные плотности и функции распределения случайных величин ξ и η.

$$p_{\xi}(x) = \int_{-1}^{6} p_{\xi\eta}(x,y)\,dy = \frac{1}{35}\int_{-1}^{6} 1\,dy = \frac{1}{5}$$

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, x \in [-1;4] \\ 0, x \notin [-1;4] \end{cases}.$$

$$F_{\xi}(x) = \int_{-1}^{x} p_{\xi}(x)\,dx = \frac{x+1}{5}, \qquad -1 < x \le 4$$

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \frac{x+1}{5}, & -1 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

$$p_{\eta}(y) = \int_{-1}^{4} p_{\xi\eta}(x,y)\,dx = \frac{1}{35}\int_{-1}^{4} 1\,dy = \frac{1}{7}$$

$$p_{\eta}(y) = \begin{cases} \frac{1}{7}, & y \in [-1;6] \\ 0, & y \notin [-1;6] \end{cases}.$$

$$F_{\eta}(y) = \int_{-1}^{y} p_{\eta}(y)\,dy = \frac{y+1}{7}, \qquad -1 < y \le 6$$

$$F_{\eta}(y) = \begin{cases} 0, & y \le -1 \\ \frac{y+1}{7}, & -1 < y \le 6 \\ 1, & y > 6 \end{cases}$$

в) Условные функции распределения и условные плотности распределения случайной величины ξ при условии η, и случайной величины η при условии ξ. Проверьте, будут ли эти случайные величины независимыми

Условная плотность распределения

$$p_\xi(x|y) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\eta(y)} = \frac{1}{5} \text{ при } (x,y) \in D$$

Условная плотность распределения

$$p_\eta(y|x) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\xi(x)} = \frac{1}{7} \text{ при } (x,y) \in D$$

Для независимых случайных величин должно выполняться равенство:

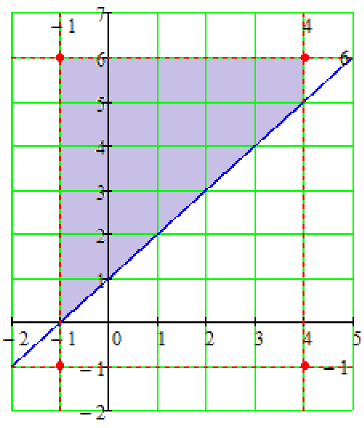
$$p_\xi(x|y) = p_\xi(x) - \text{верно}$$

Следовательно, случайные величины независимы. Условные функции распределения совпадают с одномерными:

$$F_\xi(x|y) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \frac{x+1}{5}, & -1 < x \le 4; \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

$$F_\eta(y|x) = \begin{cases} 0, & y \le -1 \\ \frac{y+1}{7}, & -1 < y \le 6 \\ 1, & y > 6 \end{cases}$$

г) Значение функции распределения случайной величины $\mu = 3\xi - 3\eta$ в точке $z = -3$.



$$F_\mu(-3) = P(3\xi - 3\eta < -3) = P(\eta > \xi + 1) = \frac{S_D}{S} = \frac{5 + \frac{5\cdot 5}{2}}{35} = \frac{1}{2}$$

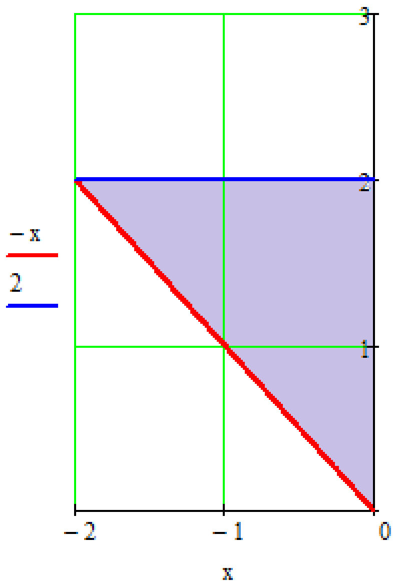
12. Совместная плотность распределения случайных величин ξ и η задана формулой

$$p_{\xi\eta}(x,y) = C(-3x + y^2), (x,y) \in D,$$

где область $D = \{(x;y): x = 0, y = 2, y = -x\}$.

Найдите:

а) Постоянную C.



По закону нормировки

$$\iint\limits_D p_{\xi\eta}(x,y)dxdy = 1,$$

$$\int_{-2}^{0} dx \int_{-x}^{2} C(-3x + y^2)\, dy = C \int\limits_{-2}^{0} \left(-3xy + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-x}^{2} dx = C \int\limits_{-2}^{0} \left(\frac{8}{3} - 6x - 3x^2 + \frac{x^3}{3}\right) dx =$$

$$= C\left(\frac{8x}{3} - 3x^2 - x^3 + \frac{x^4}{12}\right)\Bigg|_{-2}^{0} = 8C, \quad C = \frac{1}{8}$$

б) Значения двумерной функции распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ в заданных точках $(x,y) = (1;1)$

$$F_{\xi\eta}(1{,}1) = P(\xi < 1, \eta < 1) = P(\eta < 1) = \frac{1}{8}\int_{-1}^{0} dx \int_{-x}^{1} (-3x + y^2)\, dy =$$

$$=\frac{1}{8}\int_{-1}^{0}\left(-3xy+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-x}^{1}dx=\frac{1}{8}\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{3}-3x-3x^2+\frac{x^3}{3}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{x}{3}-\frac{3x^2}{2}-x^3+\frac{x^4}{12}\right)\Big|_{-1}^{0}=\frac{3}{32}$$

в) Одномерные плотности и функции распределения случайных величин ξ и η.

$$p_\xi(x)=\int_{-x}^{2}p_{\xi\eta}(x,y)\,dy=\frac{1}{8}\int_{-x}^{2}(-3x+y^2)\,dy=\frac{1}{8}\left(-3xy+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-x}^{2}=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{3x}{4}-\frac{3x^2}{8}+\frac{x^3}{24}$$

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}-\frac{3x}{4}-\frac{3x^2}{8}+\frac{x^3}{24}, x\in[-2;0]\\ 0, x\notin[-2;0]\end{cases}.$$

$$F_\xi(x)=\int_{-2}^{x}\left(\frac{1}{3}-\frac{3x}{4}-\frac{3x^2}{8}+\frac{x^3}{24}\right)dx=\left(\frac{x}{3}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{96}\right)\Big|_{-2}^{x}=1+\frac{x}{3}-\frac{3x^2}{8}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{96}$$

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, \quad x\le -2\\ =1+\frac{x}{3}-\frac{3x^2}{8}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{96}, -2<x\le 0\\ 1, \quad x>0\end{cases}$$

$$p_\eta(y)=\int_{-y}^{0}p_{\xi\eta}(x,y)\,dx=\frac{1}{8}\int_{-y}^{0}(-3x+y^2)\,dx=\frac{1}{8}\left(\frac{-3x^2}{2}+y^2x\right)\Big|_{-y}^{0}=\frac{y^3}{8}+\frac{3y^2}{16}$$

$$p_\eta(y)=\begin{cases}\frac{y^3}{8}+\frac{3y^2}{16}, y\in[0;2]\\ 0, y\notin[0;2]\end{cases}.$$

$$F_\eta(y)=\int_{0}^{y}p_\eta(y)\,dy=\int_{0}^{y}\left(\frac{y^3}{8}+\frac{3y^2}{16}\right)dy=\frac{y^4}{32}+\frac{y^3}{16}$$

$$F_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \dfrac{y^4}{32}+\dfrac{y^3}{16}, & 0<y\le 2\\ 1, & y>2\end{cases}$$

г) Условные функции распределения и условные плотности распределения случайной величины ξ при условии η, и случайной величины η при условии ξ. Проверьте, будут ли эти случайные величины независимыми

Условная плотность распределения

$$p_\xi(x|y)=\frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\eta(y)}$$

$$p_\xi(x|y)=\frac{2(y^2-3x)}{y^2(2y+3)}\ \text{при}\ (x,y)\in D$$

Условная плотность распределения

$$p_\eta(y|x)=\frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\xi(x)}$$

$$p_\eta(y|x)=\frac{3y^2-9x}{(x+2)(x^2-11x+4)}\ \text{при}\ (x,y)\in D$$

Для независимых случайных величин должно выполняться равенство:

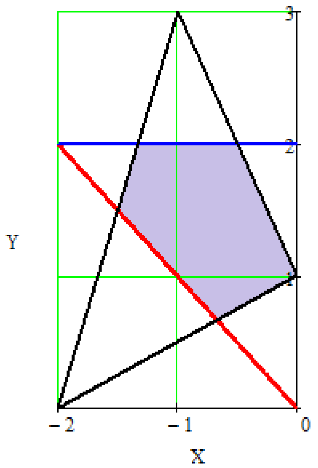
$$p_\xi(x|y)=p_\xi(x)-\text{неверно}$$

Следовательно, случайные величины зависимы.

$$F_\xi(x|y)=\int_{-2}^{x}\frac{2(y^2-3x)}{y^2(2y+3)}dx=\frac{2}{y^2(2y+3)}\left(y^2x-\frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{x}=\frac{x(2y^2-3x)}{y^2(2y+3)}\ \text{при}\ (x,y)\in D$$

$$F_\eta(y|x)=\int_{0}^{y}\frac{3y^2-9x}{(x+2)(x^2-11x+4)}dy=\frac{y(y^2-9x)}{(x+2)(x^2-11x+4)}\ \text{при}\ (x,y)\in D$$

д) Вычислите вероятность попадания вектора (ξ,η) в треугольник с вершинами в точках $(-2;0),(-1;3),(0;1)$. (Записать интеграл, расставить пределы интегрирования, считать интеграл - не надо)



Стороны треугольника: от $(-2; 0)$ до $(-1; 3)$; $y = 3x + 6$;

$$3x + 6 = 2 \Longrightarrow x = -\frac{4}{3}; 3x + 6 = -x \Longrightarrow x = -1.5$$

$$\text{от } (-1; 3) \text{ до } (0; 1); y = -2x + 1;$$

$$-2x + 1 = 2 \Longrightarrow x = -0.5;$$

$$\text{от } (-2; 0) \text{ до } (0; 1) \text{ ; } y = \frac{x}{2} + 1;$$

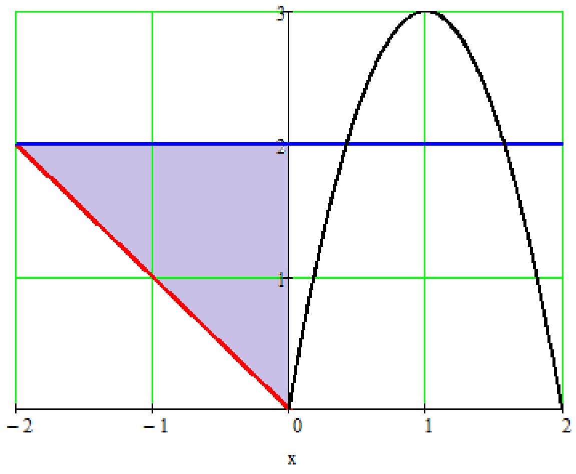
$$\frac{x}{2} + 1 = -x \Longrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

$$P = \frac{1}{8}\int_{-1.5}^{-4/3} dx \int_{-x}^{3x+6} (-3x + y^2)\, dy + \frac{1}{8}\int_{-4/3}^{-2/3} dx \int_{-x}^{2} (-3x + y^2)\, dy +$$

$$+\frac{1}{8}\int_{-2/3}^{-0.5} dx \int_{\frac{x}{2}+1}^{2} (-3x + y^2)\, dy + \frac{1}{8}\int_{-0.5}^{0} dx \int_{\frac{x}{2}+1}^{-2x+1} (-3x + y^2)\, dy$$

е) Значение функции распределения $F_\mu(z)$ новой случайной величины $\mu = 2 - 3(\xi - 1)^2 - \eta$ в точке $z = -1$. (Записать интеграл, расставить пределы интегрирования, считать интеграл - не надо)

$$F_\mu(-1) = P(2 - 3(\xi - 1)^2 - \eta < -1) = P(\eta > 3 - 3(\xi - 1)^2)$$



Получаем, что вся область удовлетворяет условию $\eta > 3 - 3(\xi - 1)^2$, значит

$$P = 1$$