Численные методы решения задачи Коши для ОДУ

Пример

Задание

Найти значения неизвестной функции *y(x)* и её производной на указанном интервале, с учётом заданных начальных условий:

$$-2y''+yy'-\frac{y}{2}=\sin(x)$$

$$x\in[0;1]$$

начальные условия:

$y(0) = 0$; $y'(0)=1$

Использовать метод *Рунге-Кутта второго порядка со средней производной.* Количество разбиений заданного интервала: 10. Округление промежуточных и конечных результатов — до 5 знака после запятой включительно.

Решение

Сначала преобразуем уравнение второго порядка в систему 2х уравнений первого порядка. Для этого обозначим производную, т. е. *y'(x)*, как новую функцию *z(x)*.

Тогда

$$z(x)=y'(x)$$

$$z'(x)=y''(x)$$

Исходное уравнение можно переписать

$$-2z'+yz-\frac{y}{2}=\sin(x)$$

или $z'=\frac{1}{2}y\left(z-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin(x)$

Получаем систему двух уравнений первого порядка

$$y'=z$$

$$z'=\frac{1}{2}y\left(z-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin(x)$$

С этой системой и будем дальше работать

Разобьем наш интервал на 10 частей. Шаг разбиения (или шаг сетки) будет равен 0.1. Получим 11 точек, в 10 из которых нам надо получить числовые значения функций *y* и *z*. В точке x=0 нам эти значения заданы в виде начальных условий.

Теперь сам алгоритм

Метод Рунге-Кутта второго порядка со средней производной

Вот расчётные формулы из лекций:

$$k_1=f(t_n,y_n),k_2=f(t_n+\tau,y_n+\tau k_1),$$

$$y_{n+1}=y_n+0.5\tau(k_1+k_2).$$

Здесь f (t,y) – правая часть диф. уравнения вида y'=f(t,y).

Применительно к нашему случаю $t \Rightarrow x$, а искомых функций будет две, y и z.
Тогда нам нужно последовательно рассчитать 4 функции k_{1y}, k_{1z}, k_{2y}, k_{2z}.
$y' \Rightarrow k_{1y}, k_{2y}$;
$z' \Rightarrow k_{1z}, k_{2z}$.

$k_{1y}=z_n$, (помним, что $y'=z$);
$k_{1z}=0.5\, y_n\,(z_n - 0.5) - 0.5 \sin(x_n)$ (это уже из уравнения $z'=\ldots$);
$k_{2y}=z_n+hk_{1z}$, где $h=0.1$;
$k_{2z}=0.5\,(y_n + hk_{1y})\,(z_n + hk_{1z} - 0.5) - 0.5 \sin(x_n + h)$;

следом, находим значения функций в новых точках
$y_{n+1} = y_n + 0.5\, h\, (k_{1y} + k_{2y})$,
$z_{n+1} = z_n + 0.5\, h\, (k_{1z} + k_{2z})$,

и повторяем эту процедуру для каждой последующей точки, пока не найдём значения функций на всём интервале.

Дальше собственно расчеты.
Промежуточные результаты сводятся в таблицу, округляем всё до пятого знака после запятой. Значения в пустых ячейках рассчитываются построчно, слева направо в пределах каждой строки. Формулы для расчёта получены выше. Функции k в *последней строке* рассчитывать нет необходимости.

Номер n	**x_n**	**y_n**	**$z_n=k_{1y}$**	**k_{1z}**	**k_{2y}**	**k_{2z}**
0	0	0	1	0	1	-0.02492
1	0.1	0.1	0.99875	-0.02498	0.99625	-0.04974
2	0.2	0.19975	0.99501	-0.04990	0.99002	-0.07444
3	0.3	0.29900	0.98879	-0.07469	0.98132	-0.09896
4	0.4	0.39751	0.98011	-0.09928	0.97018	-0.12322
5	0.5	0.49502	0.96899	-0.12363	0.95663	-0.14718
6	0.6	0.5913	0.95545	-0.14767	0.94068	-0.17077
7	0.7	0.68611	0.93953	-0.17133	0.9224	-0.19393
8	0.8	0.77921	0.92127	-0.19455	0.90182	-0.21661
9	0.9	0.87036	0.90071	-0.21728	0.87898	-0.23874
10	1	0.95934	0.87791			

Точное решение, с учётом округления, кому интересно:

x_n	$y(x_n)$	$z(x_n)$
0	0	1
0.1	0.09996	0.99875
0.2	0.19967	0.99500
0.3	0.29888	0.98877
0.4	0.39734	0.98007
0.5	0.49481	0.96891
0.6	0.59104	0.95534
0.7	0.68580	0.93937
0.8	0.77884	0.92106
0.9	0.86993	0.90045
1	0.95885	0.87758