Численные методы решения граничной задачи для ОДУ

Пример

Задание

Найти начальные условия (значения неизвестной функции *y(x)* и её производной в начале указанного интервала), с учётом заданных граничных условий:

$$-2y''+yy'-\frac{y}{2}=\sin(x)$$

$$x\in[0;\pi/3]$$

граничные условия:

$$y(\pi/3)=1;\ y'(\pi/3)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Использовать будем метод стрельбы.
Количество разбиений заданного интервала: 10.
Округление промежуточных и конечных результатов — до 5 знака после запятой включительно. Зададимся также погрешностью расчёта 0.01.

Решение

По аналогии с предыдущим заданием, сначала преобразуем уравнение второго порядка в систему 2х уравнений первого порядка. Для этого обозначим производную, т. е. *y'(x)*, как новую функцию *z(x)*.
Тогда

$$z(x)=y'(x)$$

$$z'(x)=y''(x)$$

Исходное уравнение можно переписать

$$-2z'+yz-\frac{y}{2}=\sin(x)$$

или $z'=\frac{1}{2}y\left(z-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin(x)$

Получаем систему двух уравнений первого порядка

$$y'=z$$

$$z'=\frac{1}{2}y\left(z-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin(x)$$

С этой системой и будем дальше работать. Разобьем наш интервал на 10 частей. Шаг разбиения (или шаг сетки) будет равен *π*/30. Получим 11 точек, в 10 из которых нам надо получить числовые значения функций *y* и *z*. В начальной точке x=0 эти значения зададим произвольно. Прорешав систему уравнений по методу Эйлера (делаем «выстрел»), получим значения в конце интервала, которые можем сравнить с истинными (заданными в условии). Откорректировав начальные условия, повторим стрельбу до тех пор, пока расчётные граничные условия не будут отличаться от заданных на величину меньше указанной погрешности 0.01.

Теперь расчёты для первого «выстрела»

Метод Эйлера

Получим расчётные формулы, перейдя к конечно-разностному представлению:

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h}=z_i$$
$$\frac{z_{i+1}-z_i}{h}=\frac{1}{2}y_i(z_i-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}\sin(x_i)$$
или
$$y_{i+1}=hz_i+y_i$$
$$z_{i+1}=z_i+h[\frac{1}{2}y_i(z_i-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}\sin(x_i)]$$

Здесь *h* — шаг сетки, в нашем случае *h* = π/30.
Зададим предположительные начальные значения двух функций: *y*(0)=0.5; *z*(0)=0.5.
Рассчитаем значения для каждой последующей точки, пока не найдём значения функций на всём интервале.

Дальше собственно расчеты.
Промежуточные результаты сводятся в таблицу, округляем всё до пятого знака после запятой.

Номер i	x_n	y_n	z_n
0	0	0.5	0.5
1	π/30	0.55236	0.5
2	2π/30	0.60472	0.49453
3	3π/30	0.65651	0.48347
4	4π/30	0.70714	0.46672
5	5π/30	0.75601	0.44419
6	6π/30	0.80253	0.4158
7	7π/30	0.84607	0.38149
8	8π/30	0.88602	0.3412
9	9π/30	0.92175	0.29492
10	π/3	0.95263	0.24266

Сравнивая с исходными граничными условиями, видим, что расчётное значение *y*(π/3) почти на 0.05 меньше истинного, а значение *z*(π/3)=*y*'(π/3) меньше истинного на 0.6. Это даёт нам повод сделать ещё попытку. Предположим, что *y*(0) надо уменьшить, а *z*(0) увеличить. Вот данные следующего выстрела:

Номер i	x_n	y_n	z_n
0	0	0.4	0.6
1	π/30	0.46283	0.60209
2	2π/30	0.52588	0.59909
3	3π/30	0.58862	0.59093
4	4π/30	0.6505	0.57755
5	5π/30	0.71098	0.55889
6	6π/30	0.76951	0.5349
7	7π/30	0.82552	0.50553

8	8π/30	0.87846	0.47073
9	9π/30	0.92775	0.43047
10	π/3	0.97283	0.38473

Результат нас пока не устраивает. Учитывая, что *z*(*x*) имеет тенденцию падать на всем интервале, возьмем начальное значение *z* больше заданного конечного 0.866. Соответственно изменим и начальное значение *y*. Стреляем ещё:

Номер i	x_n	y_n	z_n
0	0	0.05	0.95
1	π/30	0.14948	0.95118
2	2π/30	0.24909	0.94924
3	3π/30	0.34849	0.94421
4	4π/30	0.44737	0.93614
5	5π/30	0.5454	0.92506
6	6π/30	0.64227	0.91102
7	7π/30	0.73767	0.89407
8	8π/30	0.8313	0.87426
9	9π/30	0.92285	0.85164
10	π/3	1.01203	0.82627

Здесь уже требуется коррекция поменьше. Увеличим начальное значение *z* на 0.03, а *y* уменьшим на 0.05 , так как у нас и так превышение по значению *y* в конце интервала.

Номер i	x_n	y_n	z_n
0	0	0	0.98
1	π/30	0.10263	0.98
2	2π/30	0.20526	0.97711
3	3π/30	0.30758	0.97135
4	4π/30	0.40930	0.96276
5	5π/30	0.51012	0.95138
6	6π/30	0.60975	0.93726
7	7π/30	0.70790	0.92044
8	8π/30	0.80429	0.90099
9	9π/30	0.89864	0.87897
10	π/3	0.99069	0.85444

Пока что разница между расчётным и истинным значением *z* в конце интервала превышает заданную погрешность. Поэтому требуется «стрелять» снова. На этот раз увеличим только *z* на 0.01. Если при этом вырастет *y* то скорее всего останется в пределах погрешности, так как сейчас наблюдается «недолёт» и можно позволить значению вырасти.

Номер i	$\mathbf{x_n}$	$\mathbf{y_n}$	$\mathbf{z_n}$
0	0	0	0.99
1	π/30	0.10367	0.99
2	2π/30	0.20734	0.98719
3	3π/30	0.31072	0.98159
4	4π/30	0.41351	0.97325
5	5π/30	0.51543	0.96220
6	6π/30	0.61619	0.94849
7	7π/30	0.71552	0.93218
8	8π/30	0.81314	0.91334
9	9π/30	0.90878	0.89203
10	π/3	1.00219	0.86832

Этот «выстрел» можно считать заключительным. Погрешность расчёта значений y и z в конце интервала не превышает 0.01, что нас вполне устраивает.
Таким образом, мы определили **начальные** условия, соответствующие этой задаче:

$y_0=y(0)=0$
$z_0=y'(0)=0.99$