ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5.
МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

5.1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Получить практические навыки решения задач нелинейного программирования.

5.2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Один из подходов к решению задачи нелинейного программирования $f(\boldsymbol{x}) \to \min$, $\boldsymbol{x} \in U$ (здесь U – множество, $U \subset \mathrm{R}^n$) основан на замене этой задачи последовательностью задач безусловной минимизации[1-3, 7]

$$f_k(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \varphi_k(\boldsymbol{x}) \to \min,\ \boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n,\ k = 1,2,..., \qquad (1)$$

где $\varphi_k(\boldsymbol{x})$ – функции, которые с ростом k вовсе большей степени учитывают ограничения, определяющие допустимое множество U задачи.

***Метод штрафных функций*.**

В *методе штрафных функций* функции $\varphi_k(\boldsymbol{x})$ подбираются так, чтобы при больших k функция $\varphi_k(\boldsymbol{x})$ из (1) мало отличалась от $f(\boldsymbol{x})$ при $\boldsymbol{x} \in U$ и быстро возрастала при удалении точки $\boldsymbol{x} \notin U$ от допустимого множества U.

Определение. Пусть (U – заданное множество. Последовательность функций $\{\varphi_k(\boldsymbol{x})\}$, определенных в R^n и обладающих свойством

$$\lim_{k \to \infty} \varphi_k(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \boldsymbol{x} \in U \\ +\infty, & \text{если } \boldsymbol{x} \in U, \end{cases}$$

называется *последовательностью штрафных функций* множества U.

Рассмотрим один из вариантов метода штрафных функций приближенного решения задачи нелинейного программирования

$$\begin{aligned} & f(\boldsymbol{x}) \to \min \\ & g_i(\boldsymbol{x}) = 0, \quad i = \overline{1,l}, \\ & g_i(\boldsymbol{x}) \le 0, \quad i = \overline{l+1,m}, \end{aligned} \qquad (2)$$

считая, что функции $f(\boldsymbol{x})$, $g_i(\boldsymbol{x})$, $i=1, \ldots, m$ заданы во всем пространстве R^n.

Положим

$$\varphi_k(\boldsymbol{x}) = k\varphi(\boldsymbol{x}),\ k = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

где

$$\varphi_k(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{l} g_i^2(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=l+1}^{m} [g_i^+(\boldsymbol{x})]^2,$$

$$g_i^+(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } g_i(\boldsymbol{x}) \le 0, \\ g_i(\boldsymbol{x}), & \text{если } g_i(\boldsymbol{x}) > 0. \end{cases}$$

Равенства (3) определяет последовательность штрафных функций допустимого множества задачи (2).

При определенных условиях последовательность решений задач безусловной минимизации (1), (3) сходится к решению $\boldsymbol{x}^*$ задачи (2), поэтому при достаточно больших k полагают $\boldsymbol{x}^* \approx \boldsymbol{x}^{(k)}$, $f^* \approx f(\boldsymbol{x}^*)$.

Критерием достижения требуемой точности решения задачи (2) может служить выполнение неравенства

$$\left\| \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k/2)} \right\| \le \varepsilon, \tag{4}$$

где $\varepsilon > 0$ – число, характеризующее точность, k – четное число.

Для решения задач (1) можно использовать методы безусловной минимизации, рассмотренные в предыдущих работах.

Если в задаче (2) функция $f(\boldsymbol{x})$ является выпуклой квадратичной, а ограничения $g_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1, 2, \ldots, m$ – линейные функции, то точное решение вспомогательной задачи (1) можно найти из системы линейных уравнений $\partial f_k(X)/\partial x_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$, определяющих стационарною точку функции $f_k(\boldsymbol{x})$.

Пример 1. Методом штрафных функций решить следующую задачу нелинейного программирования:

$$f(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 \to \min,$$

$$g_1(\boldsymbol{x}) = -x_1 - x_2 + 2 \le 0,$$

$$g_2(\boldsymbol{x}) = x_1 - 2x_2 + 1 \le 0,$$

$$g_3(\boldsymbol{x}) = -2x_1 + x_2 \le 0.$$

Р е ш е н и е 1. Заданная целевая функция $f(\boldsymbol{x})$ является выпуклой квадратичной функцией, а ограничения, определяющие допустимое множество задачи, линейны. Поэтому решение $\boldsymbol{x}^{(k)}$ вспомогательной задачи (1) для любого k = 1, 2, … может быть найдено точно из условия $f_k\,(\boldsymbol{x}^{(k)}) = 0$.

Так как функция $\varphi_k(\boldsymbol{x})$ из (3) в различных областях пространства R^n задана по-разному, то при составлении вспомогательной функции $f_k\,(\boldsymbol{x}^{(k)})$ следует сделать определенное предположение о расположении ее точки минимума $\boldsymbol{x}^{(k)}$.

1. Предположим, что в точке $\boldsymbol{x}^{(k)}$ безусловного минимума функции $f_k(\boldsymbol{x}^{(k)})$ все ограничения настоящей задачи нарушаются, т. е. $g_i(\boldsymbol{x}^{(k)}) > 0$, i = l, 2, 3.

Тогда $g_i^+(\boldsymbol{x}^{(k)}) = g_i(\boldsymbol{x}^{(k)})$ i = l, 2, 3, поэтому считаем, что

$$f_k(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + k[g_1^2(\boldsymbol{x}) + g_2^2(\boldsymbol{x}) + g_3^2(\boldsymbol{x})] =$$

$$= (2+6k)x_1^2 + (1+6k)x_2^2 - 6kx_1x_2 - 2kx_1 - 8kx_2 + 5k.$$

Решив систему уравнений

$$\partial f_k(\boldsymbol{x})/\partial x_1 = (4+12k)x_1 - 6kx_2 - 2k = 0,$$

$$\partial f_k(\boldsymbol{x})/\partial x_2 = -6kx_1 + (2+12k)x_2 - 8k = 0,$$

находим

$$x_1^{(k)} = \frac{18k^2+k}{27k^2+18k+2}, \qquad x_2^{(k)} = \frac{27k^2+8k}{27k^2+18k+2}. \qquad (*)$$

Так как

$$g_3(\boldsymbol{x}^{(k)}) = -2x_1^{(k)} + x_2^{(k)} = \frac{-9k^2+6k}{27k^2+18k+2} < 0$$

при всех k = 1, 2, …, то предположение $g_i(\boldsymbol{X}^{(k)}) > 0$ не подтвердилось.

2. Предположим, что $g_i(\boldsymbol{x}^{(k)}) > 0$, i = l, 2, $g_3(\boldsymbol{x}^{(k)}) \le 0$. Тогда $g_i^+(\boldsymbol{x}^{(k)}) = g_i(\boldsymbol{x}^{(k)})$, i =1, 2, $g_3^+(\boldsymbol{x}^{(k)}) = 0$. Поэтому считаем, что

$$f_k(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + k[g_1^2(\boldsymbol{x}) + g_2^2(\boldsymbol{x})] =$$

$$= (2+2k)x_1^2 + (1+5k)x_2^2 - 2kx_1x_2 - 2kx_1 - 8kx_2 + 5k,$$

откуда находим

$$x_1^{(k)} = \frac{9k^2 + k}{9k^2 + 12k + 2},$$
$$x_2^{(k)} = \frac{9k^2 + 8k}{9k^2 + 12k + 2}. \qquad (**)$$

Легко проверить, что сделанное предположение подтверждается, т. е. полученные равенства (**) определяют точку безусловного минимума $\boldsymbol{x}^{(k)}$ вспомогательной функции $f_k(\boldsymbol{x}^{(k)})$.

Окончательно находим $\boldsymbol{x}^* = \lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = (1; 1),.\ f^* \approx f(\boldsymbol{x}^*) = 3.$

Решение 2. Отметим, что для решения вспомогательных задач (1) можно было использовать и приближенные (например, градиентные) методы безусловной минимизации. Тогда, если требуемую точность решения задачи нелинейного программирования в примере 1 задать числом ε, определяемым по (4) и равным, например, 0,01, то получим $\boldsymbol{x}^* \approx \boldsymbol{x}^{(120)} = (0{,}9899;\ 0{,}9963)$ и $f^* \approx f(\boldsymbol{x}^{(120)}) = 2{,}9524$, так как $\| \boldsymbol{x}^{(120)} - \boldsymbol{x}^{(60)} \| = 0{,}01$.

Метод барьерных функций.

В *методе барьерных функций* исходная задача нелинейного программирования также сводится к последовательности задач безусловной минимизация (1), но функции $\{\varphi_k(\boldsymbol{x})\}$ взбираются таким образом, чтобы при больших k функции $f_k(\boldsymbol{x})$ из (1) мало отличались от $f(\boldsymbol{x})$ во внутренних точках x допустимого множества U и в то же время при приближении точки $\boldsymbol{x} \in U$ к границе множества U эти функции неограниченно возрастали.

Последовательность функций $\{\varphi_k(\boldsymbol{x})\}$ определенных во всех внутренних точках множества U, называется *последовательностью барьерных функций* этого множества, если выполняются условия:

1) $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(\boldsymbol{x}) = 0$ для любой фиксированной внутренней точки множества $\boldsymbol{x}$ множества U;

2) $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(\boldsymbol{x}^{(r)}) = +\infty$ для любой последовательности $\{\boldsymbol{x}^{(r)}\}$ внутренних точек множества U, сходящихся к какой-либо граничной точке этого множества.

Рассмотрим некоторые варианты метода барьерных функций решения следующей задачи нелинейного программирования:

$$\begin{aligned} & f(\boldsymbol{x}) \to \min \\ & g_i(\boldsymbol{x}) \le 0, \quad i = 1,2,\dots,m. \end{aligned} \tag{5}$$

Положим

$$\phi_k(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{k}\varphi(\boldsymbol{x}),\ k = 1,\ 2,\ \dots, \tag{6}$$

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} | g_i(\boldsymbol{x}) |^{-p},\ p > 0 \tag{7}$$

или

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = -\sum_{i=1}^{m} \ln[-g_i(\boldsymbol{x})]. \tag{8}$$

Последовательности (6)–(8) определяют последовательности барьерных функций допустимого множества U задачи (5).

При достаточно большом k можно положить $\boldsymbol{x}^* \approx \boldsymbol{x}^{(k)}$ и $f^* \approx f(\boldsymbol{x}^*)$. Для контроля достигнутой точности решения можно использовать критерий (4).

Пример 2. Решить следующую задачу нелинейного программирования методом барьерных функций, полагая $\boldsymbol{x}^* \approx \boldsymbol{x}^{(k)}$ при точности решения $\varepsilon \le 0{,}002$:

$$\begin{aligned} & f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 \to \min, \\ & g_1(\boldsymbol{x}) = -x_1 + x_2 \le 0, \\ & g_2(\boldsymbol{x}) = 1 - x - x_2 \le 0. \end{aligned}$$

Решение. Используя последовательности (6) и (8), получим следующую задачу безусловной минимизации для всех $\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n$

$$f_k(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - \frac{1}{k}[\ln(x_1 - x_2) + \ln(x_1 + x_2 - 1)] \to \min.$$

Решая эту задачу методом наискорейшего спуска, получаем при k = 1000 $\boldsymbol{x}^{(1000)}$ = (0,6682; 0,3326) при $\|\boldsymbol{x}^{(1000)} - \boldsymbol{x}^{(500)}\|$ = 0,00165 < ε. Поэтому принимаем $\boldsymbol{x}^* \approx \boldsymbol{x}^{(1000)}$ = (0,6682; 0,3326) и $f^* \approx f(\boldsymbol{x}^{(1000)})$ = 0,6687.

5.3. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с методами решения задач нелинейного программирования.
2. Получить от преподавателя задание для самостоятельного решения.
3. Выбрать, обосновав, метод решения задачи.
4. Решить задачу поиска точки экстремума, выбрав метод безусловной оптимизации, в среде Excel.
5. Оформить отчет.

ТРЕБОВАНИЯ К ОТЧЕТУ

Отчет должен содержать:

1) цель работы;
2) краткие теоретические сведения о методах нелинейного программирования;
3) задачу, выданную преподавателем для самостоятельного решения;
4) обоснование выбора метода нелинейного программирования для решения задачи;
5) обоснование выбора метода безусловной оптимизации;
6) скриншот решение задачи в Excel;
7) выводы по работе.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить задачу нелинейного программирования методом штрафных или барьерных функций, полагая $\boldsymbol{x}^* \approx \boldsymbol{x}^{(k)}$ при $\left\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k/2)}\right\| \le 0{,}05$.

1. $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 20x_1 - 30x_2 \to \min,$
   $2x_1 + 3x_2 - 13 \le 0,$
   $2x_1 + 3x_2 - 10 \le 0.$
2. $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 15x_2 \to \min,$
   $5x_1 + 13x_2 - 51 \le 0,$
   $15x_1 + 7x_2 - 107 \le 0.$

3. $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_1 - 4x_2 \to \min,$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0.$

4. $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_1 - 10x_2 \to \min,$

$9x_1 + 8x_2 - 72 \le 0,$

$x_1 + 2x_2 - 10 \le 0.$

5. $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - 2x_1 - x_2 \to \min,$

$2x_1 + 3x_2 - 6 \le 0,$

$2x_1 + x_2 - 4 \le 0.$

6. $f(\boldsymbol{x}) = x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min,$

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 6 \le 0,$

$3x_1 + x_2 + x_3 - 2 \le 0.$

7. $f(\boldsymbol{x}) = -x_1 + x_2^2 - 2x_2 \to \min,$

$3x_1^2 + 2x_2^2 - 6 \le 0.$

8. $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 3x_2 \to \min,$

$x_1^2 + x_2^2 - 9 \le 0.$

9. $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_2 \to \min,$

$-2x_1 + x_2^2 \le 0,$

$x_1 - 2x_2 \le 0.$

10. $f(\boldsymbol{x}) = -x_1 - 4x_2 \to \min,$

$x_1 + x_2^2 - 1 \le 0,$

$-x_1 + x_2 \le 0.$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие методы относятся к нелинейному программированию?
2. В чем состоит суть методов нелинейного программирования?
3. Какие функции называют штрафными?
4. Какие функции называют барьерными?
5. Какими свойствами должны обладать штрафные функции?
6. Какими свойствами должны обладать барьерные функции?
7. Откуда берутся штрафные и барьерные функции?

8. В чем состоит отличие методов штрафные и барьерные функции?

9. Какой критерий принимают для контроля погрешности вычислений в методах нелинейного программирования?

10. Почему процесс решения задач нелинейного программирования является итерационным?

11. Нужно ли проверять целевую функцию на выпуклость при нелинейном программировании?

12. Следует ли задавать начальное приближение решения задач нелинейного программирования?