ПРАКТИКА №3

Вариант №1.

1. Найти значение производной функции в заданной точке или их её выражение, если точка не задана: а) $y = 6\cdot\sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2^x}{\ln 2} - 3x + 1$; $y'(1) = ?$

   б) $y = e^x \cdot (3\sin x + 5x)$; $y'(0) = ?$ в) $y = \frac{2x^5 - 7x + 3}{4x - 1}$; $y'(1) = ?$ г) $y = \arcsin\frac{2}{x}$.

2. Найти точки экстремума функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$.

Вариант №2.

1. Найти значение производной функции в заданной точке или их её выражение, если точка не задана: а) $y = (\frac{1}{2}x^4 + 2x - 3)\cdot\ln x$; $y'(1) = ?$ б) $y = \frac{4\sin x + x - 5}{\cos x + 1}$; $y'(0) = ?$

   в) $y = 10\sqrt[5]{x} - 3x^5 + 10x - \frac{2}{x}$; $y'(1) = ?$ г) $y = \sqrt{(3x^2 + \frac{5}{x})}$.

2. Найти точки экстремума функции $y = (x+1)(x-2)^2$.

Вариант №3.

1. Найти значение производной функции в заданной точке или их её выражение, если точка не задана: а) $y = 9\cdot\sqrt[3]{x^7} - \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{3^x}{\ln 3} - 3x + 1$; $y'(1) = ?$

   б) $y = \frac{3\cos x - 7x + 1}{\sin x + 3}$ $y'(0) = ?$ в) $y = \sqrt{3\ln x + 1}$ г) $y = (5x^3 + 2)\cdot\ln x$; $y'(1) = ?$.

2. Найти точки экстремума функции $y = 3x^5 - 5x^3$.

.

Вариант №4.

1. Найти значение производной функции в заданной точке или их её выражение, если точка не задана: а) $y = (3x+5)\cdot(e^x - 2)$; $y'(0) = ?$

   б) $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{\sqrt{x^7}} + 2x - 3$; в) $y = \log_3(x + 10^x)$; г) $y = \frac{\arcsin x}{1 - x}$; $y'(0) = ?$.

2. Найти точки экстремума функции $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

Вариант №5.

1. Найти значение производной функции в заданной точке или их её выражение, если точка не задана: а) $y = 6\cdot\sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2^x}{\ln 2} - 3x + 1$; $y'(1) = ?$

   б) $y = e^x \cdot (3\sin x + 5x)$; $y'(0) = ?$ в) $y = \frac{2x^5 - 7x + 3}{4x - 1}$; $y'(1) = ?$ г) $y = \arcsin\frac{2}{x}$.

2. Найти точки экстремума функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$.

Вариант №6.

1. Найти значение производной функции в заданной точке или их её выражение, если точка не задана: а) $y = (\frac{1}{2}x^4 + 2x - 3) \cdot \ln x$; $y'(1) = ?$ б) $y = \frac{4\sin x + x - 5}{\cos x + 1}$; $y'(0) = ?$

в) $y = 10\sqrt[5]{x} - 3x^5 + 10x - \frac{2}{x}$; $y'(1) = ?$ г) $y = \sqrt{(3x^2 + \frac{5}{x})}$.

2. Найти точки экстремума функции $y = (x+1)(x-2)^2$.

Вариант №7.

1. Найти значение производной функции в заданной точке или их её выражение, если точка не задана: а) $y = 9 \cdot \sqrt[3]{x^7} - \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{3^x}{\ln 3} - 3x + 1$; $y'(1) = ?$

б) $y = \frac{3\cos x - 7x + 1}{\sin x + 3}$ $y'(0) = ?$ в) $y = \sqrt{3\ln x + 1}$ г) $y = (5x^3 + 2) \cdot \ln x$; $y'(1) = ?$.

2. Найти точки экстремума функции $y = 3x^5 - 5x^3$.

.

Вариант №8.

1. Найти значение производной функции в заданной точке или их её выражение, если точка не задана: а) $y = (3x+5) \cdot (e^x - 2)$; $y'(0) = ?$

б) $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{\sqrt{x^7}} + 2x - 3$; в) $y = \log_3(x + 10^x)$; г) $y = \frac{\arcsin x}{1 - x}$; $y'(0) = ?$.

2. Найти точки экстремума функции $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

Вариант №9.

1. Найти значение производной функции в заданной точке или их её выражение, если точка не задана: а) $y = 6 \cdot \sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2^x}{\ln 2} - 3x + 1$; $y'(1) = ?$

б) $y = e^x \cdot (3\sin x + 5x)$; $y'(0) = ?$ в) $y = \frac{2x^5 - 7x + 3}{4x - 1}$; $y'(1) = ?$ г) $y = \arcsin\frac{2}{x}$.

2. Найти точки экстремума функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$.

Вариант №10.

1. Найти значение производной функции в заданной точке или их её выражение, если точка не задана: а) $y = (\frac{1}{2}x^4 + 2x - 3) \cdot \ln x$; $y'(1) = ?$ б) $y = \frac{4\sin x + x - 5}{\cos x + 1}$; $y'(0) = ?$

в) $y = 10\sqrt[5]{x} - 3x^5 + 10x - \frac{2}{x}$; $y'(1) = ?$ г) $y = \sqrt{(3x^2 + \frac{5}{x})}$.

2. Найти точки экстремума функции $y = (x+1)(x-2)^2$.

Вариант №11.

1. Найти значение производной функции в заданной точке или их её выражение, если точка не задана: а) $y = 9 \cdot \sqrt[3]{x^7} - \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{3^x}{\ln 3} - 3x + 1;\ y'(1) = ?$

   б) $y = \frac{3\cos x - 7x + 1}{\sin x + 3}$ $y'(0) = ?$ в) $y = \sqrt{3\ln x + 1}$ г) $y = (5x^3 + 2) \cdot \ln x;\ y'(1) = ?$.

2. Найти точки экстремума функции $y = 3x^5 - 5x^3$.

.

Вариант №12.

1. Найти значение производной функции в заданной точке или их её выражение, если точка не задана: а) $y = (3x+5) \cdot (e^x - 2);\ y'(0) = ?$

   б) $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{\sqrt{x^7}} + 2x - 3$; в) $y = \log_3(x + 10^x)$; г) $y = \frac{\arcsin x}{1-x};\ y'(0) = ?$.

2. Найти точки экстремума функции $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

Вариант №13.

1. Найти значение производной функции в заданной точке или их её выражение, если точка не задана: а) $y = 6 \cdot \sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2^x}{\ln 2} - 3x + 1;\ y'(1) = ?$

   б) $y = e^x \cdot (3\sin x + 5x);\ y'(0) = ?$ в) $y = \frac{2x^5 - 7x + 3}{4x - 1};\ y'(1) = ?$ г) $y = \arcsin \frac{2}{x}$.

2. Найти точки экстремума функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$.

Вариант №14.

1. Найти значение производной функции в заданной точке или их её выражение, если точка не задана: а) $y = (\frac{1}{2}x^4 + 2x - 3) \cdot \ln x;\ y'(1) = ?$ б) $y = \frac{4\sin x + x - 5}{\cos x + 1};\ y'(0) = ?$

   в) $y = 10\sqrt[5]{x} - 3x^5 + 10x - \frac{2}{x};\ y'(1) = ?$ г) $y = \sqrt{(3x^2 + \frac{5}{x})}$.

2. Найти точки экстремума функции $y = (x+1)(x-2)^2$.

Вариант №15.

1. Найти значение производной функции в заданной точке или их её выражение, если точка не задана: а) $y = 9 \cdot \sqrt[3]{x^7} - \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{3^x}{\ln 3} - 3x + 1;\ y'(1) = ?$

б) $y=\dfrac{3\cos x-7x+1}{\sin x+3}$ $y'(0)=?$ в) $y=\sqrt{3\ln x+1}$ г) $y=(5x^3+2)\cdot\ln x$; $y'(1)=?$.

2. Найти точки экстремума функции $y=3x^5-5x^3$.

.

Вариант №16.

1. Найти значение производной функции в заданной точке или их её выражение, если точка не задана: а) $y=(3x+5)\cdot(e^x-2)$; $y'(0)=?$

   б) $y=\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{4}{\sqrt{x^7}}+2x-3$; в) $y=\log_3(x+10^x)$; г) $y=\dfrac{\arcsin x}{1-x}$; $y'(0)=?$.

2. Найти точки экстремума функции $y=\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{3}x^3-x^2$.

Вариант №17.

1. Найти значение производной функции в заданной точке или их её выражение, если точка не задана: а) $y=6\cdot\sqrt[3]{x^5}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{2^x}{\ln 2}-3x+1$; $y'(1)=?$

   б) $y=e^x\cdot(3\sin x+5x)$; $y'(0)=?$ в) $y=\dfrac{2x^5-7x+3}{4x-1}$; $y'(1)=?$ г) $y=\arcsin\dfrac{2}{x}$.

2. Найти точки экстремума функции $y=x^3-3x^2-9x+7$.

Вариант №18.

1. Найти значение производной функции в заданной точке или их её выражение, если точка не задана: а) $y=(\dfrac{1}{2}x^4+2x-3)\cdot\ln x$; $y'(1)=?$ б) $y=\dfrac{4\sin x+x-5}{\cos x+1}$; $y'(0)=?$

в) $y=10\sqrt[5]{x}-3x^5+10x-\dfrac{2}{x}$; $y'(1)=?$ г) $y=\sqrt{(3x^2+\dfrac{5}{x})}$.

2. Найти точки экстремума функции $y=(x+1)(x-2)^2$.

Вариант №19.

1. Найти значение производной функции в заданной точке или их её выражение, если точка не задана: а) $y=9\cdot\sqrt[3]{x^7}-\dfrac{4}{\sqrt{x}}+\dfrac{3^x}{\ln 3}-3x+1$; $y'(1)=?$

   б) $y=\dfrac{3\cos x-7x+1}{\sin x+3}$ $y'(0)=?$ в) $y=\sqrt{3\ln x+1}$ г) $y=(5x^3+2)\cdot\ln x$; $y'(1)=?$.

2. Найти точки экстремума функции $y=3x^5-5x^3$.

.

Вариант №20.

1. Найти значение производной функции в заданной точке или их её выражение, если точка не задана: а) $y=(3x+5)\cdot(e^x-2)$; $y'(0)=?$

б) $y=\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{\sqrt{x^7}}+2x-3$; в) $y=\log_3(x+10^x)$; г) $y=\frac{\arcsin x}{1-x}$; $y'(0)=?$.

2. Найти точки экстремума функции $y=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2$.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ И ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ

Пользуясь правилами дифференцирования, найти производные следующих функций и вычислить их значение, если задана точка.

1. $y=\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{5}\cdot\sqrt{x^5}+2x-10$, если $x_0=1$.

Решение. Вводя дробные и отрицательные показатели, преобразуем данную функцию к табличному виду

$y=x^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{3}}-x^{-2}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x-10.$

Применяя правила и таблицу производных, получим

$$y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}+3\cdot(-\frac{1}{3})x^{-\frac{1}{3}-1}-(-2)\cdot x^{-2-1}+\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1}+2\cdot1-0=$$

$$=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{4}{3}}+2x^{-3}+x^{\frac{3}{2}}+2$$

Подставим точку: $y'(1)=\frac{1}{2}-1+2+1+2=4{,}5$.

2. $y=\frac{3x^2+1}{2x^3+5}$, если $x_0=1$.

Решение. Пользуясь правилом дифференцирования дроби и таблицей производных, получим

$$y'=\frac{(3x^2+1)'\cdot(2x^3+5)-(2x^3+5)'\cdot(3x^2+1)}{(2x^3+5)^2}=\frac{6x(2x^3+5)-6x^2(3x^2+1)}{(2x^3+5)^2}=$$

$$=\frac{-6x^4-6x^2+30x}{(2x^3+5)^2}.$$

Подставим точку $y'(1)=\frac{-6-6+30}{(2+5)^2}=\frac{18}{49}$.

3. $y=(x^2+1)\cdot\mathrm{arctg}x$.

Решение. Применяя правило дифференцирования произведения, находим

$$y' = (1+x^2)' \cdot \operatorname{arctg}x + (\operatorname{arctg}x)' \cdot (1+x^2) = 2x \cdot \operatorname{arctg}x + \frac{1}{1+x^2} \cdot (1+x^2) =$$

$$2x \cdot \operatorname{arctg}x + 1.$$

4. $y = \sqrt[3]{2x - x^4}$.

Решение. Данная функция является сложной функцией: $y = u^{\frac{1}{3}}$, где $u = 2x - x^4$. Следовательно,

$$y' = \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}-1} \cdot u' = \frac{1}{3}(2x-x^4)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x-x^4)' = \frac{1}{3}(2x-x^4)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2-4x^3).$$

Замечание. Обычно при вычислениях вспомогательные переменные не вводят.

5. $y = \arccos\frac{3}{x^2}$.

Решение. Применяя правило дифференцирования сложной функции и таблицу производных, получим

$$y' = (\arccos 3x^{-2})' = -\frac{1}{\sqrt{1-(3x^{-2})^2}} \cdot (3x^{-2})' = -\frac{1}{\sqrt{1-9x^{-4}}} \cdot (-6x^{-3}) =$$

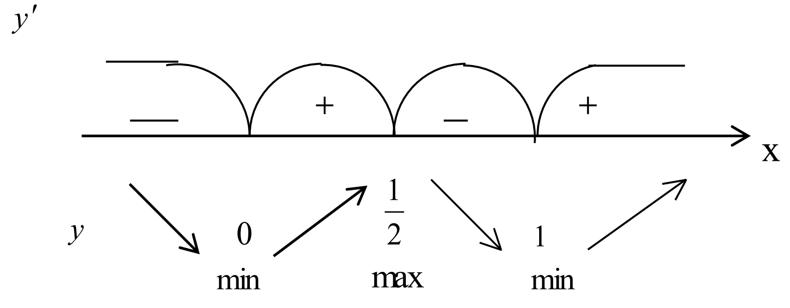
$$\frac{6}{x^3 \cdot \sqrt{1-9x^{-4}}}.$$

6. Исследовать на экстремум функцию $y = x^2(1-x)^2$.

Решение. Найдем точки, подозрительные на экстремум. Для этого возьмем производную y' и приравняем ее нулю.

$$y' = \left(x^2(1-x)^2\right)' = \left(x^2\right)'(1-x)^2 + x^2\left((1-x)^2\right)' = 2x(1-x)^2 + x^2 \cdot 2(1-x)(-1) = 2x(1-x)^2 - 2x^2(1-x)$$
$$= 2x(1-x)[1-x-x] = 2x(1-x)(1-2x) = 2x(x-1)(2x-1)$$

$y' = 0$ при $x_1 = 0,\quad x_2 = 1,\quad x_3 = \frac{1}{2}$.



На тех интервалах, где $y' < 0$, функция убывает; где $y' > 0$, функция возрастает. Поэтому интервалы возрастания функции $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $(1, \infty)$, интервалы убывания функции $(-\infty, 0)$ и $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

По рисунку видно, что в точках $x = 0$ и $x = 1$ функция принимает свои минимальные значения, а при $x = \frac{1}{2}$ - максимальное. Найдем эти значения:

$y_{\min}(0) = 0$, $y_{\min}(1) = 0$,

$$y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

Ответ: $y_{\min}(0) = y_{\min}(1) = 0$, $y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$.

Таблица производных основных элементарных функций

$f(x)$	$f'(x)$
$c = \text{const}$	0
x^α	$\alpha x^{\alpha - 1}$, $\alpha \in R$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$, $a > 0, a \neq 1$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$, $a > 0, a \neq 1$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\text{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\text{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Основные правила дифференцирования

Обозначим $f(x)=u$, $g(x)=v$ – функции, дифференцируемые в точке x, тогда справедливы формулы:

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

2) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$.

4) $(cu)' = cu'$.

5) Пусть определена сложная функция $y = f(g(x))$, тогда если функция $y = f(u)$ имеет производную в точке u, а функция $u = g(x)$ имеет производную в точке x, то сложная функция $y = f(g(x))$ имеет производную в точке x и справедливо равенство

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \text{ или } y'(x) = f'(u) \cdot g'(x),$$