Лабораторная работа 2. Численное решение СЛАУ методом Якоби

Задание: Решить систему методом Якоби

Метод Якоби (простой итерации)

Решить СЛАУ методом Якоби.

$$\begin{cases} 2x+3y+3z+4t=1 \\ 2x-y-9z+3t=2 \\ x+5y+z-2t=3 \\ 8x+y-3z+2t=4 \end{cases}$$

Для автоматизации итерационного процесса будем использовать электронные таблицы MS Excel. Выпишем систему в ячейки листа: матрицу коэффициентов перед неизвестными A – каждый элемент в отдельную ячейку, справа от нее – вектор свободных членов b.

	A	B	C	D	E
1	Итерационные методы решения СЛАУ				
2	2	3	3	4	1
3	2	-1	-9	3	2
4	1	5	1	-2	3
5	8	1	-3	2	4

1. Условие сходимости

Метод Якоби – итерационный метод, в котором неизвестные находят путем последовательных приближений. Чтобы итерации сошлись к решению, нужно проверить достаточное условие сходимости – диагональное преобладание в матрице A:

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| \leq |a_{ii}|.$$

Проверим это условие для строк матрицы.

Модуль в MS Excel вычисляется функцией ABS(число). Чтобы не считать модуль отдельно для каждого элемента, можно воспользоваться формулой массива: вводим в ячейку

=СУММ(ABS(A2:D2))

и нажимаем Ctrl+Shift+Enter. Формула массива позволяет выполнить заданную операцию (у нас – взятие модуля) над каждым элементом массива, а затем – общую операцию (у нас – суммирование) с тем, что получилось. Формула в ячейке заключается в фигурные скобки: {}.

Так как вычисленное число содержит модуль элемента на главной диагонали, будем сравнивать его с 2*ABS(A2). Итоговая формула выглядит так:

{=2*ABS(A2)>СУММ(ABS(A2:D2))}

Скопируем формулу на остальные строки, исправив ссылку на главной диагонали. Не забудьте, что после изменения формулы надо нажимать Ctrl+Shift+Enter.

Условие сходимости для нашей системы не выполняется. Значит, приступаем к элементарным преобразованиям. Сперва попробуем перестановку строк.

Делаем строку №4 первой, №3 – второй, №2 – третьей. Ну а №1 – четвертой. Теперь для первых трех строк выполняется условие сходимости.

Вычтем из четвертой строки вторую. Теперь условие сходимости выполняется для всей системы.

8	**1**	**-3**	**2**	**4**		ИСТИНА
1	**5**	**1**	**-2**	**3**		ИСТИНА
2	**-1**	**-9**	**3**	**2**		ИСТИНА
1	**-2**	**2**	**6**	**-2**		ИСТИНА

2. Начальное приближение

Подготовим таблицу для метода Якоби. Введите заголовки столбцов – k (номер итерации), x, y, z, t и e. В последнем столбце мы будем проверять условие окончания итерационного процесса.

Введем в столбец k значение «0». Нулевая итерация – это начальное приближение. У нас выполняется условие сходимости, поэтому решение сойдется при любом начальном приближении. Но для более быстрого завершения рекомендуют такое начальное приближение:

$$x_i^{(0)} = \frac{b_i}{a_{ii}}.$$

Вычислите значения, используя ссылки на ячейки с элементами системы (естественно, приведенной к диагональному преобладанию). Должно получиться

Метод Якоби					
k	x	y	z	t	e
0	0,5	0,6	-0,22222	-0,33333	

.

3. Организация итерационного процесса

Итерационная формула в общем виде

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii}.$$

Запишем в таблицу формулы для x, y, z, t. В столбце k поставьте «1», это первая итерация. В формулах используйте ссылки на ячейки, содержащие элементы матрицы A и вектора b. Значения с индексом «0» - это x, y, z или t из предыдущей, нулевой строчки.

$x = (b_1 – a_{1,2}·y_0– a_{1,3}·z_0– a_{1,4}·t_0) /a_{1,1}$

$y = (b_2 – a_{2,1}·x_0– a_{2,3}·z_0– a_{2,4}·t_0) /a_{2,2}$

$z = (b_3 – a_{3,1}·x_0– a_{3,2}·y_0– a_{3,4}·t_0) /a_{3,3}$

$t = (b_4 – a_{4,1}·x_0– a_{4,2}·y_0– a_{4,3}·z_0) /a_{4,4}$

Расставим адресацию в формулах так, чтобы их можно было копировать вниз и одна строка таблицы соответствовала одной итерации. При копировании должны меняться значения x, y, z, t, а коэффициенты системы должны оставаться постоянными. Поэтому ставим на них абсолютную адресацию клавишей F4 (пример – A1).

4. Условие окончания итерационного процесса

Условие окончания итерационного процесса

$$\|x^{(k)} - x^{(k+1)}\| < \varepsilon.$$

Здесь x– вектор неизвестных, ε – заданная точность решения.

Норму вектора будем вычислять как максимальную по модулю разность между соответствующими элементами $x^{(k)}$ и $x^{(k+1)}$, т.е.

$$\max(|x_k - x_{k+1}|,|y_k - y_{k+1}|,|z_k - z_{k+1}|,|t_k - t_{k+1}|).$$

Считать начинаем с первой итерации (в нулевой строчке эта ячейка остается пустой).

Максимальное значение можно вычислить с помощью встроенной функции МАКС(число 1; число 2; …).

Воспользуемся формулой массива, чтобы вычислить модуль разности сразу для всего вектора. Итоговая формула выглядит так:

{=МАКС(ABS(B21:E21-B22:E22))}.

В вашей формуле адреса диапазонов могут не совпадать.

Для первой итерации значение нормы получается 0,19074.

5. Копирование формул

Теперь скопируем формулы первой итерации на следующие строки при помощи маркера заполнения.

x	y	z	t	e
0,5	0,6	-0,22222	-0,33333	
0,425	0,41111	-0,28889	-0,14259	0,19074

Каждая строка соответствует одной итерации. Процесс завершаем, когда значение в столбце «e» окажется меньше ε. Допустим, в нашей задаче ε = 0,001, тогда решение получено на седьмой итерации.

Ответ выделим цветом.

Метод Якоби					
k	x	y	z	t	e
0	0,5	0,6	-0,22222	-0,33333	
1	0,425	0,41111	-0,28889	-0,14259	0,19074
2	0,37593	0,51574	-0,22099	-0,17083	0,10463
3	0,39537	0,50068	-0,25293	-0,15041	0,03194
4	0,38017	0,51135	-0,24013	-0,14802	0,0152
5	0,38304	0,51278	-0,2439	-0,1462	0,00377
6	0,38099	0,51369	-0,24281	-0,14495	0,00205
7	0,38097	0,51439	-0,24295	-0,14466	0,00069

Проверка: решите систему с помощью обратной матрицы (функции МОБР(Матрица) и МУМНОЖ(Матрица; вектор), не забудьте про формулу массива). Сравните с решением итерационными методами.

Индивидуальное задание

Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Якоби с точностью ε = 0,001. Не забывайте про достаточное условие сходимости и элементарные преобразования!

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
$\begin{cases} 10x-2y+z=1 \\ -x+7y+4z=2 \\ -9x+6y+4z=3 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-2y+z=1 \\ 3x-6y+2z=2 \\ -9x+3y+4z=3 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x-2y+z=1 \\ 3x+y-5z=2 \\ -x+3y+z=3 \end{cases}$
Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6
$\begin{cases} 3x+5y+4z=1 \\ 3x+10y-5z=2 \\ 2x-3y-6z=3 \end{cases}$	$\begin{cases} x+5y+7z=1 \\ 3x+8y-4z=2 \\ -3x+2y=3 \end{cases}$	$\begin{cases} -3x+2y=1 \\ 3x+y-4z=2 \\ -x+5y+7z=3 \end{cases}$
Вариант 7	Вариант 8	Вариант 9
$\begin{cases} 10x-3y+4z=1 \\ 3x+5y-3z=2 \\ -x+3y+6z=3 \end{cases}$	$\begin{cases} x+4y+10z=1 \\ -2x+5y-z=2 \\ 7x+3y-z=3 \end{cases}$	$\begin{cases} 10x+4y+z=1 \\ 4x+5y+3z=2 \\ x+3y+6z=3 \end{cases}$
Вариант 10		
$\begin{cases} -x-3y+4z=1 \\ 4x+5y-3z=2 \\ 8x-y+6z=3 \end{cases}$		