

**№ 3956**

**681.5  
Т 338**

# **ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

**Методические указания**

**НОВОСИБИРСК  
2011**

Министерство образования и науки Российской Федерации  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

681.5  
Т 338

№ 3956

# ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Контрольные работы и методические указания к ним  
для студентов заочного факультета  
и института дистанционного образования  
(направления 140400, 220700)

НОВОСИБИРСК  
2011

УДК 681.5.01(07)  
Т 338

Составили:

д-р техн. наук, профессор *В.Н. Аносов*;  
канд. техн. наук, доцент *В.В. Наумов*

Рецензент канд. техн. наук, доцент *В.М. Кавешников*

Работа подготовлена кафедрой электропривода  
и автоматизации промышленных установок

## ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### Методические указания

Редактор *Л.Н. Ветцакова*  
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*  
Корректор *Л.Н. Кинит*  
Компьютерная верстка *С.И. Ткачева*

---

Подписано в печать 10.02.2011. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 250 экз.  
Уч.-изд. л. 2,79. Печ. л. 3,0. Изд. № 341. Заказ № . Цена договорная

---

Отпечатано в типографии  
Новосибирского государственного технического университета  
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20

© Новосибирский государственный  
технический университет, 2011

## ВВЕДЕНИЕ

Теория автоматического управления (ТАУ) входит в число дисциплин базовой части профессионального цикла основных образовательных программ модуля «Электротехника» направления подготовки бакалавров 140400 – «Электроэнергетика и электротехника» и направления 220700 – «Автоматизация технологических процессов и производств», реализуемых федеральными государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования, утвержденными Приказом Министерства образования и науки Российской Федерации № 710 от 08.12.09 г.

Целью настоящей дисциплины является формирование широкого представления о современных системах автоматического управления (САУ), изучение теории линейных и нелинейных систем управления, получение практических навыков анализа и синтеза САУ.

В результате изучения ТАУ студент должен

– **иметь представление:**

- о том, что теория автоматического управления является частью общей теории об управлении, которая называется «Кибернетикой»;
- о принципах и алгоритмах управления систем автоматического управления;
- о том, что все расчеты в теории автоматического управления производятся с использованием математического описания исследуемых или проектируемых систем;
- о различных подходах при анализе и синтезе линейных и нелинейных САУ: систем стабилизации, программных, следящих, оптимальных, экстремальных, адаптивных и других;
- о современных тенденциях развития теории автоматического управления;

– **знать:**

- эквивалентные формы математического описания САУ: дифференциальные уравнения, передаточные функции, структурные схемы, комплексный коэффициент передачи;
- дифференциальные уравнения, передаточные функции, переходные функции и частотные характеристики в обычном и логарифмическом масштабе типовых звеньев САУ;
- методы и критерии устойчивости систем автоматического управления и методику определения запасов устойчивости по частотным характеристикам в обычном и логарифмическом масштабе;

- методы оценки качества САУ в установившемся и переходном режиме;
- пути улучшения качества САУ и методы синтеза корректирующих устройств;
- методы компьютерного моделирования САУ, ускоряющие и рационализирующие процессы анализа и синтеза систем управления;
- **уметь:**
  - составлять и линеаризовывать дифференциальные уравнения звеньев с нелинейной статической характеристикой;
  - преобразовывать математическое описание в нужную и удобную форму для анализа заданной САУ и синтеза системы по заданным требованиям;
  - выбирать метод для анализа динамических и статических свойств заданной системы;
  - синтезировать корректирующие устройства, обеспечивающие требуемое качество системы управления в установившемся и переходном режиме;
  - использовать прикладные программы структурного моделирования динамических объектов для анализа и синтеза САУ на персональных вычислительных машинах.

## ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Для получения перечисленных во введении навыков студент заочной формы обучения должен освоить теоретический материал в объеме, заданном рабочей программой дисциплины, и выполнить определенное количество контрольных работ в зависимости от профиля подготовки студента.

Варианты заданий на контрольные работы выдаются преподавателем, ведущим дисциплину, индивидуально каждому студенту.

В контрольных работах № 1 и 2 исследуется линейная система автоматического управления. Вариант задания состоит из римской цифры (от I до X), определяющей номер структурной схемы (см. приложение 1, табл. П1.1), двух арабских цифр (от 01 до 20), задающих значения параметров звеньев структурной схемы и показателей качества регулирования (см. приложение 1, табл. П1.2 и П1.3) и буквы «У», указывающей, что в контрольной работе № 2 синтез корректирующих устройств проводится по управляющему воздействию, например: П-05-У.

В контрольной работе № 3 исследуется нелинейная система автоматического управления. Вариант задания состоит из римской цифры (от I до X), означающей номер структурной схемы (см. приложение 2, табл. П2.1), двух арабских цифр (от 01 до 20), определяющих значения параметров звеньев структурной схемы нелинейной САУ (см. приложение 2, табл. П2.3) и букв *a, b, c, d, e, f*, показывающих вид и параметры нелинейных характеристик (см. приложение 2, табл. П2.3). Например: V-13-*b*.

При оформлении контрольных работ необходимо придерживаться следующих рекомендаций.

- Контрольная работа выполняется в виде пояснительной записки на стандартных листах писчей бумаги формата А4.

- Образец титульного листа контрольной работы приведен в приложении 4.

- Текст пишется либо от руки, либо с применением любого технического средства. Разный стиль оформления не допускается.

- В тексте не разрешается сокращение слов и фраз, кроме общепринятых: стр., САУ, ТАУ и т. п.

- При необходимости сокращения какого-либо наименования в тексте предварительно должно быть приведено пояснение. Например: корректирующее устройство (КУ).

- Рисунки и графики включаются в контрольную работу по ходу текста и изображаются на миллиметровой или линованной бумаге.

- Расчетные действия должны предваряться соответствующими пояснениями.

- Расчеты должны производиться по формулам. Сначала формула записывается в буквенном виде, потом вместо каждого буквенного обозначения подставляется число и затем вписывается результат вычисления. Сложные формулы следует упрощать сначала в буквенном виде и только после этого подставлять числа. Буквенные обозначения в одной контрольной работе не должны повторяться, новые обозначения должны расшифровываться.

- Страницы, рисунки и таблицы должны быть пронумерованы.

- Перечень использованной литературы приводится в конце контрольной работы в виде нумерованного списка. Для каждого литературного источника должны быть указаны: фамилия, инициалы автора, наименование, издательство, год издания и количество страниц. Список литературы, приведенный в данных методических указаниях, оформлен в соответствии с требованиями ГОСТа и может быть использован в качестве образца.

- На проверку и зачет контрольная работа должна представляться в сшитом (переплетенном) виде.

Зачет по контрольным работам производится устно в процессе собеседования с преподавателем, ведущим дисциплину. Работы можно защитить в межсессионный период в дни консультаций или в период лабораторно-экзаменационной сессии в дни, предусмотренные расписанием сессии.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бесекерский В.А.* Теория систем автоматического управления / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. – СПб.: Профессия, 2004. – 752 с.

2. *Воронов А.А.* Основы теории автоматического регулирования и управления: учеб. пособие для вузов / А.А. Воронов, В.К. Титов, Б.Н. Новогранов. – М.: Высш. шк., 1977. – 519 с.

3. *Востриков А.С.* Теория автоматического регулирования: учеб. пособие / А.С. Востриков, Г.А. Французова. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. – 364 с.

4. *Теория автоматического управления. Ч 1. Теория линейных систем автоматического управления: учебник для вузов / Н.А. Бабаков [и др.]; под ред. А.А. Воронова.* – М.: Высш. шк., 1977. – 303 с.

5. *Теория* автоматического управления. Ч 2. Теория нелинейных и специальных систем управления: учебник для вузов / Н.А. Бабаков [и др.]; под ред. А.А. Воронова. – М.: Высш. шк., 1977. – 288 с.

6. *Топчиев Ю.И.* Атлас для проектирования систем автоматического регулирования: учеб. пособие для вузов / Ю.И. Топчиев. – М.: Машиностроение, 1989. – 752 с.

7. *Топчиев Ю.И.* Задачник по теории автоматического регулирования: учеб. пособие для вузов / Ю.И. Топчиев, А.П. Цыпляков. – М.: Машиностроение, 1977. – 592 с.

8. *Аносов В.Н.* Программа Matlab 6.5/ Simulink 5: учеб. пособие / В.Н. Аносов, В.В. Наумов. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. – 104 с.

9. *Теория* автоматического управления: метод. указания к лаб. работам № 1–5 для студентов III–IV курсов электромеханического факультета всех форм обучения / Новосиб. гос. техн. ун-т; [сост.: В.Н. Аносов, В.В. Наумов]. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. – 62 с.

10. *Теория* автоматического управления: метод. указания к лаб. работам № 6–9 для студентов факультета мехатроники и автоматизации, заочного факультета и института дистанционного образования / Новосиб. гос. техн. ун-т; [сост.: В.Н. Аносов, В.В. Наумов]. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010. – 58 с.



# КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

## Задание

Для линейной САУ, заданной структурной схемой и численными значениями параметров (для своего варианта), выполнить следующее.

1. Найти передаточные функции системы в разомкнутом и замкнутом состоянии по управляющему и возмущающему воздействиям, передаточные функции ошибок по управляющему и возмущающему воздействиям, характеристическое уравнение САУ в замкнутом состоянии.

2. Определить устойчивость двумя критериями.

3. Определить значение критического коэффициента передачи САУ.

## Методические указания к выполнению контрольной работы

1. В контрольной работе система автоматического управления задана структурной схемой. В этом случае следует находить передаточные функции, применяя правила преобразования структурных схем. Так как в заданных структурных схемах отсутствуют перекрещивающиеся связи, то для преобразования их достаточно знать три основных правила.

### Правило 1

Передаточная функция последовательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций этих звеньев (рис. 1.1).

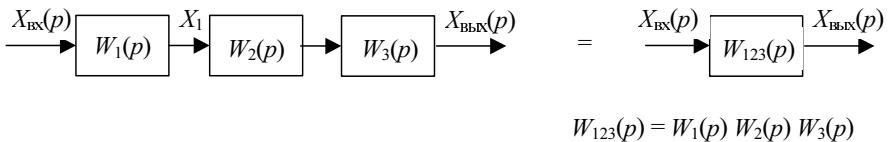


Рис. 1.1

### Правило 2

Передаточная функция параллельно соединенных звеньев равна сумме передаточных функций этих звеньев (рис. 1.2).

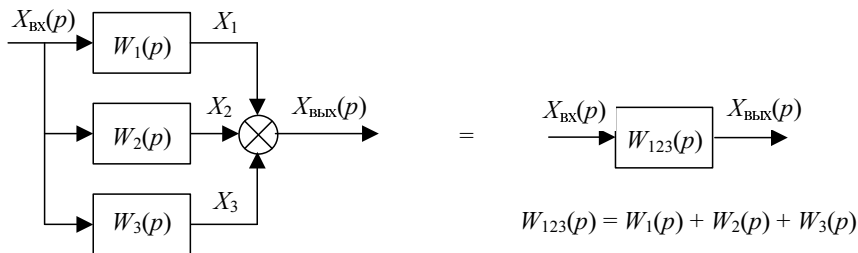
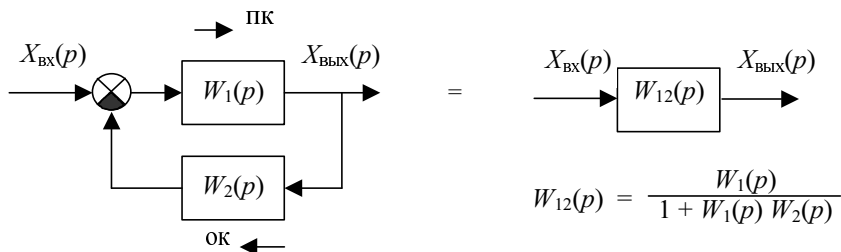


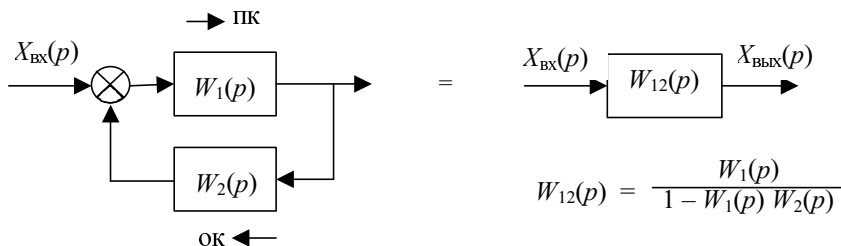
Рис. 1.2

### Правило 3

Передаточная функция контура при заданных передаточных функциях прямого канала ( $W_1(p)$ ) и обратного канала ( $W_2(p)$ ) равна дроби, в числителе которой записывается  $W_1(p)$ , а в знаменателе « $1 \pm$ » произведение передаточных функций, прямого и обратного каналов (плюс при отрицательной обратной связи (рис. 1.3, а), а минус при положительной обратной связи (рис. 1.3, б)).



а



б

Рис. 1.3

При единичной обратной связи  $W_2(p) = 1$ , а формула приобретает следующий вид:

$$W_{12}(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p)}. \quad (1.1)$$

Для нахождения передаточной функции САУ в разомкнутом состоянии следует размыкать главную обратную связь (ГОС), рис. 1.4.

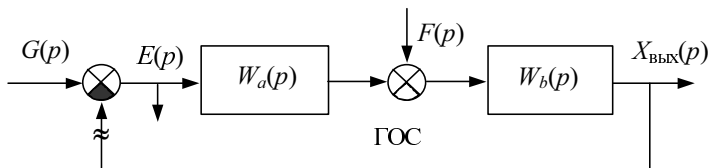


Рис. 1.4

Поскольку к линейным системам применим принцип суперпозиции, то передаточная функция по управляющему воздействию находится в предположении, что возмущающее воздействие  $F(p)$  равно нулю, а по возмущающему воздействию, что равно нулю управляющее воздействие  $G(p)$ .

При нахождении передаточной функции ошибки нужно не забывать, что ошибкой САУ независимо от вида входного воздействия (управляющего или возмущающего) всегда является величина:

$$E(p) = G(p) - X_{\text{вых}}(p). \quad (1.2)$$

Все найденные передаточные функции должны быть записаны в стандартной форме, принятой в ТАУ:

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}, \quad (1.3)$$

где  $b_0, b_1, \dots, b_m$  – численные значения коэффициентов полинома числителя, а  $a_0, a_1, \dots, a_n$  – численные значения коэффициентов полинома знаменателя.

Характеристическое уравнение в замкнутом состоянии формально можно найти, приравнявая к нулю знаменатель передаточной функции замкнутой системы. При этом следует не забывать, что в характери-

стическом уравнении « $p$ » будет корнем этого уравнения, а не оператором Лапласа, как это было при записи передаточных функций.

2. Для определения устойчивости линейных систем управления можно воспользоваться четырьмя критериями:

- 1) критерий Рауса,
- 2) критерий Гурвица,
- 3) критерий Михайлова,
- 4) критерий Найквиста (в обычном и логарифмическом масштабе).

При определении устойчивости предпочтение отдают критериям либо наиболее рациональным, либо применимым к заданной САУ. В качестве первого метода рекомендуется применять алгебраические критерии устойчивости Рауса или Гурвица. Если эти критерии неприменимы, например, к системам, имеющим звенья запаздывания ( $e^{-\tau p}$ ), то следует использовать критерий Михайлова. В качестве второго метода целесообразно взять критерий Найквиста в логарифмическом масштабе. Устойчивость в этом случае определяется по взаимному расположению логарифмической амплитудно-частотной характеристики  $L(\omega)$  и логарифмической фазочастотной характеристики  $\phi(\omega)$ .

Применение логарифмического масштаба упрощает расчеты и графические построения частотных характеристик, необходимых для определения устойчивости. Кроме того, построенную логарифмическую амплитудно-частотную характеристику (ЛАЧХ) исходной САУ можно будет использовать при выполнении второй контрольной работы.

При построении логарифмических частотных характеристик необходимо иметь в виду, что по оси абсцисс откладывается частота в логарифмическом масштабе. Выполнять это можно двумя способами.

#### *Первый способ*

По оси абсцисс откладывается десятичный логарифм частоты ( $\lg \omega$ ) в декадах (дек) в равномерном масштабе. (Декада – это изменение частоты в 10 раз.) Длина отрезка, равного декаде, не зависит от частоты и определяется выражением

$$\lg 10\omega - \lg \omega = \lg 10 + \lg \omega - \lg \omega = \lg 10 = 1 \text{ дек.} \quad (1.4)$$

При считывании частоты нужно не забывать, что  $\omega = 10^{\lg \omega}$ .

Ось абсцисс для этого способа изображена на рис. 1.5.

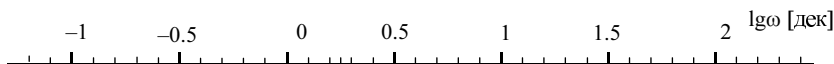


Рис. 1.5

### Второй способ

По оси абсцисс откладывается частота в логарифмическом масштабе в радианах за секунду (рад/с). Ось абсцисс для этого способа приведена на рис. 1.6.

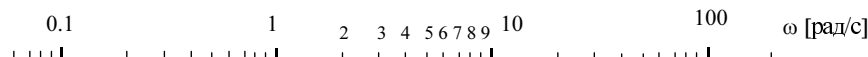


Рис. 1.6

Нанесение логарифмического масштаба в этом способе можно облегчить, если воспользоваться для разметки каждой декады формулой  $l_K = l_{\text{дек}} \cdot \lg K$ , рис. 1.7 и табл. 1.1,

где  $l_{\text{дек}}$  – отрезок оси абсцисс, соответствующий декаде;

$l_K$  – величина отрезка между точками "1" и "K";

$K$  – число от 1 до 10.

Таблица 1.1

$K$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lg K$	0	0.301	0.477	0.602	0.699	0.778	0.845	0.903	0.954	1.00

Предпочтение, как правило, отдается первому способу, так как неравномерная разметка оси по второму способу не позволяет с достаточной точностью выставить и считать нужную частоту.

Однако первый способ тоже имеет свои недостатки. При выставлении частоты ее нужно пересчитывать в логарифм частоты, а при считывании требуется обратный пересчет  $\lg \omega$  в  $\omega$ .

Закончим формирование координатной плоскости для построения логарифмических частотных характеристик установкой оси ординат. При обычном масштабе оси абсцисс ось ординат всегда проходит через значение  $\omega = 0$ . При логарифмическом масштабе оси абсцисс значению  $\omega = 0$  соответствует абсцисса, равная  $\infty$ , что не позволяет установить естественную ось ординат. Поэтому приходится проводить

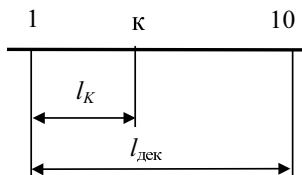


Рис. 1.7

вспомогательную ось ординат через любое значение аргумента. В ТАУ ее проводят обычно через  $\omega = 1$  ( $\lg 1 = 0$ ).

После того как подготовлена координатная система, можно переходить к построению логарифмических частотных характеристик  $L(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$ . Обычно они строятся в одной координатной системе.

Для построения логарифмической амплитудно-частотной характеристики по оси ординат откладываются значения  $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$  в децибелах, а для логарифмической фазочастотной характеристики значения  $\varphi(\omega)$  в обычном масштабе в градусах или радианах.

Построение логарифмической амплитудно-частотной характеристики значительно упрощается, если перейти к так называемой асимптотической  $L(\omega)$ . Для этого нужно путем структурных преобразований привести заданную САУ к последовательному соединению типовых устойчивых звеньев (для всех вариантов заданных структурных схем в контрольной работе № 1 это возможно).

Для построения асимптотической  $L(\omega)$  необходимо:

- рассчитать  $20 \lg K_{\text{общ}}$ ;
- рассчитать коэффициенты демпфирования ( $\xi$ ) для колебательных звеньев, входящих в исследуемую систему управления. (Во всех заданных структурных схемах  $\xi = T_4/2T_3$ .) Если  $\xi \geq 1$ , то колебательное звено следует разложить на два последовательно соединенных, эквивалентных апериодических звена с постоянными времени  $T_{31}$  и  $T_{32}$ . Численные значения  $T_{31}$  и  $T_{32}$  можно найти из равенства

$$T_3^2 p^2 + T_4 p + 1 = (T_{31} p + 1)(T_{32} + 1);$$

- рассчитать частоты сопряжения ( $\omega_{\text{ср}i} = 1/T_i$ ) и их логарифмы ( $\lg(\omega_{\text{ср}i})$ ) для всех типовых звеньев системы.

Построение асимптотической  $L(\omega)$  ведется в следующей последовательности:

- на оси абсцисс выставляются частоты сопряжения всех типовых звеньев, входящих в преобразованную структурную схему исследуемой системы;
- построение начинается с низкочастотной области (от  $\omega = 0$  и до минимальной частоты сопряжения). В этой области асимптотическая  $L(\omega)$  – это прямая линия, наклон которой зависит от наличия в контуре САУ интегрирующих звеньев.

При отсутствии в САУ интегрирующих звеньев – это прямая линия, параллельная оси частот и отстоящая от нее на  $20 \lg K_{\text{общ}}$ .

Если в САУ имеется одно интегрирующее звено, то низкочастотная часть асимптотической  $L(\omega)$  – это наклонная прямая линия с наклоном  $-20$  дБ/дек, проходящая через точку с координатами ( $\lg \omega = 0$ ,  $20 \lg K_{\text{общ}}$ ) до минимальной частоты сопряжения.

При большем числе интегрирующих звеньев наклон увеличивается пропорционально их количеству;

- далее, начиная с минимальной частоты сопряжения, наклон каждой последующей асимптоты  $L(\omega)$  изменяется в зависимости от того, какому типовому звену принадлежит очередная частота сопряжения (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Типовое звено	Изменение наклона асимптотической $L(\omega)$ на частоте сопряжения
Апериодическое	На $-20$ дБ/дек
Колебательное	На $-40$ дБ/дек
Дифференцирующее первого порядка	На $+20$ дБ/дек
Дифференцирующее второго порядка	На $+40$ дБ/дек
Звено запаздывания	На наклон не влияет

Если у колебательного звена коэффициент демпфирования  $\xi$  меньше  $0.4$ , то в области частоты сопряжения ( $\pm$  одна декада) необходимо уточнять ординаты асимптотической  $L(\omega)$  либо по точной формуле, либо по графикам поправок, которые приводятся в литературе.

Логарифмическая фазочастотная характеристика  $\varphi(\omega)$  строится по формулам для типовых звеньев при изменении частоты от  $0$  до  $\infty$ . В этот диапазон должны быть в обязательном порядке включены частоты сопряжения всех типовых звеньев преобразованной структурной схемы. Для удобства проверки и самопроверки расчеты следует делать поэлементно, а результаты сводить в таблицу.

3. Критическое значение коэффициента передачи ( $K_{кр}$ ) определяется из условия нахождения системы на границе устойчивости по одному из критериев устойчивости.

Для критерия Гурвица условие границы устойчивости можно найти, приравняв нулю  $(n - 1)$ -й диагональный минор определителя Гурвица. Для критерия Рауса, приравняв нулю  $(n - 1)$ -ю строку таблицы

Рауса (при отсутствии нулевых корней характеристического уравнения системы). Разрешив полученные равенства относительно коэффициента передачи, можно получить  $K_{кр}$ .

По критерию Михайлова САУ находится на границе устойчивости, если годограф Михайлова проходит через начало координат и в характеристическом уравнении системы отсутствуют корни с положительной вещественной частью.

При построенном годографе Михайлова  $M(j\omega)$  величину  $K_{кр}$  можно найти по длине отрезка  $l_{кр}$  (рис. 1.8).

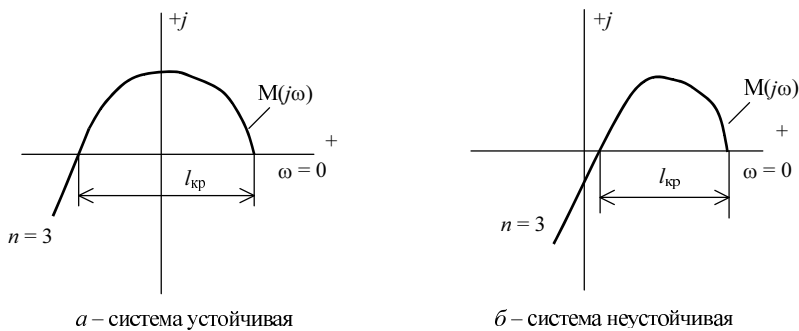


Рис. 1.8

На рис. 1.8  $n = 3$  – степень характеристического уравнения САУ.

При отсутствии в контуре исследуемой системы интегрирующих звеньев:

$$K_{кр} = l_{кр} - 1.$$

При наличии интегрирующих звеньев:

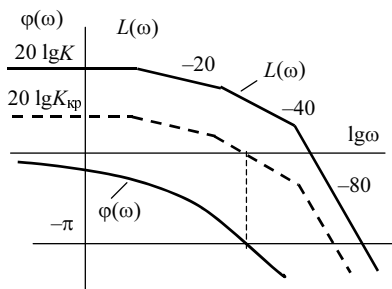
$$K_{кр} = l_{кр}.$$

Здесь  $l_{кр}$  – численное значение отрезка в масштабе вещественной оси координат годографа Михайлова  $M(j\omega)$ .

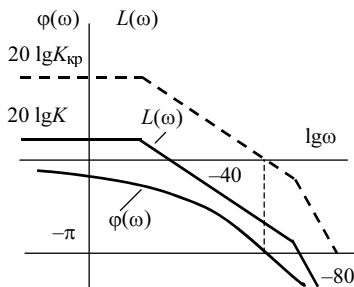
По критерию Найквиста система находится на границе устойчивости, если при  $L(\omega) = 0$  фазочастотная характеристика  $\varphi(\omega) = -\pi$ .

При построенных логарифмических частотных характеристиках заданной САУ критический коэффициент передачи можно найти графически. На рис. 1.9 иллюстрируется процедура определения  $K_{кр}$ .





*a* – система неустойчивая



*б* – система устойчивая

Рис. 1.9

На рис. 1.9 пунктиром показаны смещенные логарифмические амплитудно-частотные характеристики, соответствующие границе устойчивости системы.

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

### Задание

Для линейной САУ, исследуемой в контрольной работе № 1, выполнить следующее.

1. Синтезировать (выбрать) корректирующее устройство, обеспечивающее требуемый показатель качества в установившемся режиме (требуемые показатели качества в установившемся и переходном режимах приведены в приложении 1, табл. П1.3.):

а) найти ошибку системы в установившемся режиме при заданном входном воздействии и сравнить ее с допустимым значением;

б) найти требуемый коэффициент передачи;

в) найти дополнительный коэффициент передачи и определить место включения его в структурную схему заданной САУ.

2. Синтезировать (выбрать) корректирующее устройство (КУ), обеспечивающее требуемые показатели качества в переходном режиме:

а) выбрать тип корректирующего устройства;

б) выбрать место включения корректирующего устройства;

в) методом логарифмических частотных характеристик найти  $L_{КУ}(\omega)$  (логарифмическую амплитудно-частотную характеристику КУ);

г) по виду  $L_{КУ}(\omega)$  найти типовое корректирующее устройство.

3. Проверить результаты синтеза:

а) определить запасы устойчивости скорректированной САУ по модулю и фазе по логарифмическим частотным характеристикам  $L_{СК}(\omega)$  и  $\varphi_{СК}(\omega)$ ;

б) методом структурного моделирования в MatLab 6.5 / Simulink 5 по передаточной функции, составленной по желаемой логарифмической амплитудно-частотной характеристике  $L_{ж}(\omega)$ , найти переходную характеристику скорректированной системы, определить показатели качества ( $T_{рег}$ ,  $\sigma_{max}\%$ ,  $K_{кол}$ ) и сравнить их с заданными допустимыми значениями.

## Методические указания к выполнению контрольной работы

Синтез корректирующих устройств (КУ) для проектируемой системы выполняется в том случае, если она неустойчивая или не обеспечивает требования в установившемся или переходном режимах.

В установившемся режиме единственным показателем, характеризующим систему, является значение ошибки. В ТАУ в зависимости от вида входного воздействия (постоянного, изменяющегося с постоянной скоростью или с постоянным ускорением) различают ошибки: статическую, скоростную и ошибку по ускорению для управляющего и возмущающего воздействий.

Если САУ задана структурной схемой и определенным входным воздействием, как в данной контрольной работе, то ошибку системы в установившемся режиме можно найти, воспользовавшись теоремой Лапласа о конечном значении оригинала:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} [p \cdot E(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} [p \cdot W_{\varepsilon}(p) \cdot X_{вх}(p)], \quad (2.1)$$

где  $E(p)$  – изображение ошибки (см. рис. 1.1);  $W_{\varepsilon}(p)$  – передаточная функция ошибки;  $X_{вх}(p)$  – изображение входного воздействия, по которому определяется ошибка.

При отсутствии интегрирующих звеньев в контуре системы (для САУ с номерами I, III, ..., IX) – это будет статическая ошибка. При наличии интегрирующего звена (для САУ с номерами II, IV, ..., X) – скоростная.

Величина ошибки как статической, так и скоростной зависит только от общего коэффициента передачи синтезируемой САУ. Поэтому коррекция системы в установившемся режиме сводится к расчету требуемого общего коэффициента передачи ( $K_{тр}$ ) и дополнительного коэффициента передачи ( $K_{доп}$ ).

Если  $K_{общ} < K_{тр}$ , то необходимо рассчитать дополнительный коэффициент передачи  $K_{доп} = K_{тр} / K_{общ}$ .

Если  $K_{общ} \geq K_{тр}$ , то коррекции в установившемся режиме не требуется.

При этом отметим следующее:

1) если заданная допустимая ошибка (статическая, скоростная или по ускорению) равна нулю, то коррекция системы в установившемся режиме сводится к включению в контур САУ определенного количества интегрирующих звеньев (одного, двух или трех);

2) нужно не забывать, что ошибка при возмущающем воздействии зависит еще и от места включения интегрирующих звеньев.

В переходном режиме система должна быть устойчивой и иметь показатели качества не ниже допустимых значений. Чаще всего показатели качества задаются параметрами переходного процесса: временем регулирования ( $T_{рег}$ ), максимальным перерегулированием ( $\sigma_{max} \%$ ) и количеством колебаний ( $K_{кол}$ ).

Под временем регулирования понимается такое время, по истечении которого отклонение управляемой переменной от установившегося значения не превышает  $\pm 5 \%$ .

Максимальное перерегулирование определяется по формуле

$$\sigma_{max} \% = [(X_{вых\ max} - X_{вых}(\infty)) / X_{вых}(\infty)] \cdot 100 \%. \quad (2.2)$$

Количество колебаний – это число отклонений переходной характеристики от уровня установившегося режима за время регулирования.

На рис. 2.1 показано, как определяются параметры переходного процесса  $X_{вых}(t)$ .

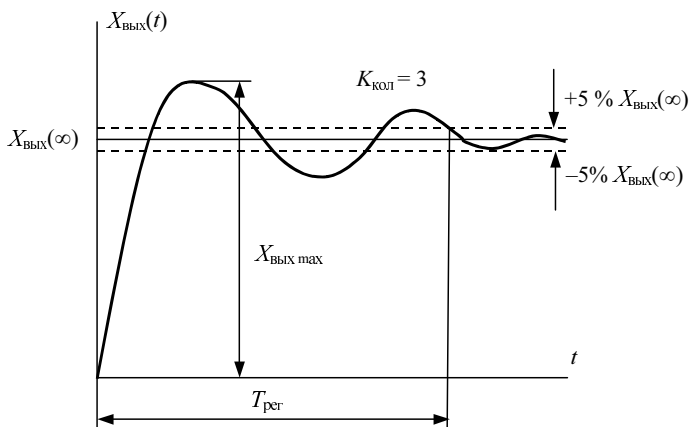


Рис. 2.1.

Коррекция системы управления в переходном режиме заключается в целенаправленном выборе и включении в контур управления так называемых корректирующих устройств.

Если качество САУ задано параметрами переходного режима, то синтез корректирующих устройств следует производить по логарифмическим асимптотическим амплитудно-частотным характеристикам. В этом случае синтез КУ можно представить состоящим из следующих этапов:

- 1) выбор типа корректирующего устройства (последовательного или параллельного);
- 2) выбор места включения корректирующего устройства;
- 3) построение асимптотической логарифмической амплитудно-частотной характеристики нескорректированной САУ –  $L_{\text{ис}}(\omega)$ .
- 4) построение желаемой логарифмической амплитудно-частотной характеристики –  $L_{\text{ж}}(\omega)$ ;
- 5) нахождение логарифмической амплитудно-частотной характеристики корректирующего устройства –  $L_{\text{КУ}}(\omega)$ ;
- 6) выбор типового корректирующего устройства (электрической схемы, передаточной функции и соотношения параметров).

Для линейных САУ, заданных в этой контрольной работе, предпочтительным типом КУ являются, как правило, параллельные КУ, так как они обладают рядом преимуществ перед последовательными [1, 3, 9]. Последовательные корректирующие устройства целесообраз-

но применять в том случае, если их можно реализовать на операционном усилителе, который использовался для увеличения коэффициента передачи системы.

Выбор места включения КУ обусловлен получением наиболее простого, с меньшим числом элементов, корректирующего устройства. Рекомендуется включать КУ как можно ближе к входу системы и охватывать звенья, имеющие наибольшие постоянные времени или коэффициенты передачи.

Построение  $L_{\text{нс}}(\omega)$  значительно упрощается, если в контрольной работе № 1 была построена асимптотическая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика исходной системы. В этом случае для построения  $L_{\text{нс}}(\omega)$  достаточно уточнить вид  $L_{\text{исх}}(\omega)$ , если при синтезе САУ в установившемся режиме увеличивался коэффициент передачи или включалось в контур системы интегрирующее звено.

Наиболее важным этапом синтеза является построение  $L_{\text{ж}}(\omega)$ . Желаемую характеристику можно разбить на три характерные частотные области: низкочастотную, среднечастотную и высокочастотную.

Низкочастотная область  $L_{\text{ж}}(\omega)$  должна совпадать с  $L_{\text{нс}}(\omega)$ . Это необходимо для сохранения коэффициента передачи, выбранного согласно требованиям к качеству САУ в установившемся режиме.

Среднечастотная область оказывает определяющее влияние на устойчивость и качество системы в переходном режиме. Для получения у синтезируемой системы требуемого качества среднечастотная область желаемой характеристики строится под наклоном  $-20$  дБ на декаду так, чтобы она проходила через частоту среза ( $\omega_c$ ). Частота среза определяется по заданным параметрам переходного процесса:  $T_{\text{рег. доп}}$  и  $\sigma_{\text{мах доп}}$  с использованием графика, приведенного на рис. 2.2, а. Ординаты начала и конца среднечастотной области ориентировочно принимаются равными соответственно  $+\Delta L_{\text{тр}}$  и  $-\Delta L_{\text{тр}}$ . Здесь  $\Delta L_{\text{тр}}$  – требуемый запас устойчивости синтезируемой системы по модулю, который определяется по графику, приведенному на рис. 2.2, б.

При определении границ среднечастотной области нужно помнить, что увеличение ширины области улучшает, а уменьшение ухудшает качество синтезируемой САУ. Минимальная ширина среднечастотной области для обеспечения необходимой коррекции исходной системы должна быть не менее одной декады.

Высокочастотная область  $L_{\text{ж}}(\omega)$  мало влияет на основные показатели переходного процесса, поэтому ее следует строить таким образом, чтобы получить наиболее простое (типовое) корректирующее устройство.

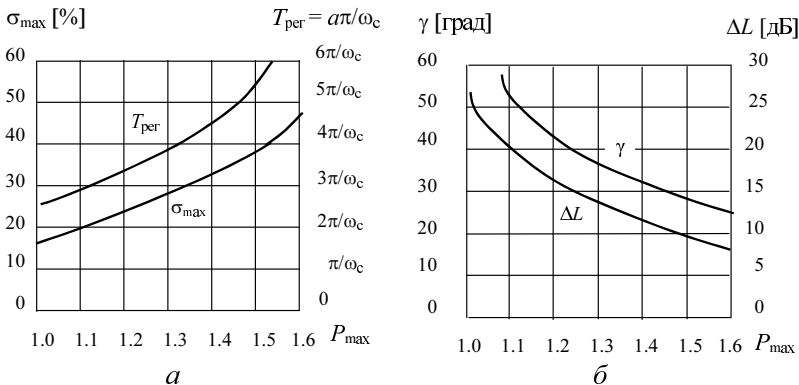


Рис. 2.2

Сопряжение низкочастотной и среднечастотной области  $L_{\text{ж}}(\omega)$  производится отрезком прямой линии под наклоном  $-40$  или  $-60$  дБ/дек. При параллельной коррекции можно в некоторых случаях сопряжение осуществлять прямой под наклоном  $-20$  дБ/дек.

Нахождение логарифмической амплитудно-частотной характеристики корректирующего звена производится графически с использованием следующих соотношений:

- для последовательного КУ:

$$L_{\text{КУ}}(\omega) = L_{\text{ж}}(\omega) - L_{\text{нс}}(\omega); \quad (2.3)$$

- для параллельного КУ:

$$L_{\text{КУ}}(\omega) \approx L_{\text{но}}(\omega) - L_{\text{ж}}(\omega), \quad (2.4)$$

где  $L_{\text{но}}(\omega)$  – логарифмическая амплитудно-частотная характеристика звеньев, не охваченных параллельным корректирующим устройством.

Таким образом, для нахождения  $L_{\text{КУ}}(\omega)$  параллельного КУ необходимо дополнительно построить  $L_{\text{но}}(\omega)$ .

Отметим, что соотношение (2.4) не точное. Им можно пользоваться только в среднечастотной и высокочастотной областях. Поэтому в низкочастотной области характеристику параллельного корректирующего устройства следует проводить под наклоном граничащего с ней отрезка  $L_{\text{КУ}}(\omega)$ . Также отметим, что характеристику  $L_{\text{КУ}}(\omega)$  параллельного корректирующего устройства можно находить, пользуясь другими соотношениями [1, 3, 9].

Выбор типового корректирующего устройства производится по виду характеристики  $L_{\text{кз}}(\omega)$  с использованием таблиц типовых корректирующих устройств, которые приводятся в учебной или справочной литературе [1, 3, 5].

В некоторых случаях одним корректирующим устройством не удастся реализовать найденную  $L_{\text{кз}}(\omega)$ . Тогда допускается применение двух или трех последовательно соединенных типовых звеньев [3].

Проверка результатов синтеза заключается в определении запасов устойчивости и параметров переходного процесса скорректированной САУ и сопоставлении их с требуемыми и допустимыми значениями.

Для определения запасов устойчивости по модулю и фазе необходимо построить фазочастотную характеристику скорректированной системы. Аналитическое выражение для  $\varphi_{\text{ск}}(\omega)$  можно найти по передаточной функции скорректированной системы, которую, в свою очередь, можно записать по виду  $L_{\text{ж}}(\omega)$ . Если САУ в своем составе имеет звено запаздывания, то  $\varphi_{\text{ск}}(\omega)$  следует уточнять:

$$\varphi_{\text{ск.ут}}(\omega) = \varphi_{\text{ск}}(\omega) + \varphi_{\text{зз}}(\omega), \quad (2.5)$$

где  $\varphi_{\text{зз}}(\omega)$  – фазочастотная характеристика звена запаздывания.

Запасы устойчивости по модулю и фазе определяются по взаимному расположению  $L_{\text{ск}}(\omega)$  и  $\varphi_{\text{ск}}(\omega)$ .

Если полученные значения запасов устойчивости по модулю и фазе окажутся меньше требуемых, то синтез следует проделать заново. При этом необходимо изменить соответствующим образом  $L_{\text{ж}}(\omega)$ .

Если запасы устойчивости будут соответствовать требуемым, то можно переходить к построению переходной характеристики и нахождению показателей качества регулирования.

Построить переходную характеристику скорректированной системы можно следующими методами:

- 1) классическим, решив дифференциальное уравнение скорректированной САУ;
- 2) операторным, применив для решения дифференциального уравнения преобразование Лапласа;
- 3) методом трапецеидальных вещественных частотных характеристик;
- 4) методом структурного моделирования.

Первые два метода при ручном счете применяются, как правило, для систем не выше 3–4-го порядка, так как связаны с трудностями нахождения корней характеристического уравнения и переходом от изображений к оригиналам.

Метод трапецеидальных вещественных частотных характеристик чрезвычайно трудоемкий и не обеспечивает достаточной точности при построении переходной характеристики.

Трудности при нахождении переходной характеристики скорректированной САУ легко преодолимы, если воспользоваться современными компьютерными программами, предназначенными специально для облегчения и ускорения практически любых расчетов. Наиболее универсальной, простой в использовании и достаточно легкой в освоении является программа «MatLab 6.5 / Simulink 5» [8]. Программа позволяет методом структурного моделирования рассчитывать переходные процессы в САУ практически при любых входных воздействиях, включая единичное ступенчатое. Кроме того, этот метод дает возможность производить всесторонний анализ динамических свойств системы при вариации ее параметров.

Для нахождения переходной характеристики необходимо: освоить работу в подпрограмме «Simulink 5», набрать структурную схему модели скорректированной САУ и снять ее переходную характеристику.

По переходной характеристике найти ее параметры, как это сделано на рис. 2.1, и сравнить с допустимыми значениями. Если скорректированная САУ будет удовлетворять требованиям качества, то синтез на этом считается окончанным; если нет, то коррекцию динамических свойств заданной системы нужно повторить, начиная с пункта «Выбор места включения корректирующего устройства».

## **КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3**

### **Задание**

Для нелинейной САУ, заданной структурной схемой, видом нелинейности и числовыми значениями параметров (для своего варианта), выполнить следующее.

1. Исследовать динамические свойства заданной нелинейной системы аналитическим методом (методом фазовой плоскости или методом гармонической линеаризации).

2. Методом структурного моделирования в программе «MatLab 6.5 / Simulink 5»:

а) проверить результаты аналитического расчета по п. 1;



- б) найти переходный процесс при постоянном характерном воздействии и определить его параметры;
- в) исследовать влияние уровня входного воздействия на вид и параметры переходного процесса.

## Методические указания к выполнению контрольной работы

1. Исследование нелинейных САУ значительно сложнее, чем линейных систем, так как связано с необходимостью решения нелинейных дифференциальных уравнений. В большинстве случаев подобное решение не может быть получено в общем виде, в связи с чем приходится прибегать к частным решениям и частным методам, позволяющим определять отдельные динамические свойства исследуемых САУ (устойчивость при определенных условиях, поведение системы при различных начальных отклонениях, наличие автоколебаний, их устойчивость и т. п.).

Для заданных в контрольной работе нелинейных систем динамические свойства можно исследовать методом фазовой плоскости или методом гармонической линеаризации.

Метод исследования выбирается в зависимости от порядка дифференциального уравнения заданной САУ. Системы второго порядка исследуются методом фазовой плоскости, третьего и более высокого порядка – методом гармонической линеаризации.

При исследовании нелинейной САУ методом фазовой плоскости или методом гармонической линеаризации прежде всего необходимо привести заданную структурную схему к расчетному виду.

Структурные схемы реальных нелинейных САУ могут содержать несколько групп линейных звеньев и нелинейных элементов, различным образом соединенных между собой. Метод фазовой плоскости и метод гармонической линеаризации применимы только к таким нелинейным системам, структурные схемы которых можно привести к расчетному виду, изображенному на рис. 3.1.

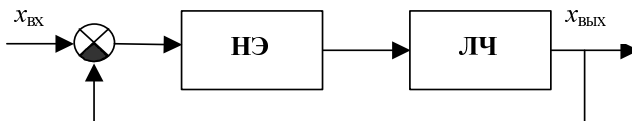


Рис. 3.1

На рис. 3.1:

- **НЭ** – нелинейный элемент с эквивалентной статической характеристикой всех нелинейных элементов, соединенных между собой;
- **ЛЧ** – линейная часть (эквивалентная передаточная функция всех линейных звеньев, соединенных между собой).

Приведем пример преобразования структурной схемы нелинейной САУ, изображенной на рис. 3.2, к расчетному виду.

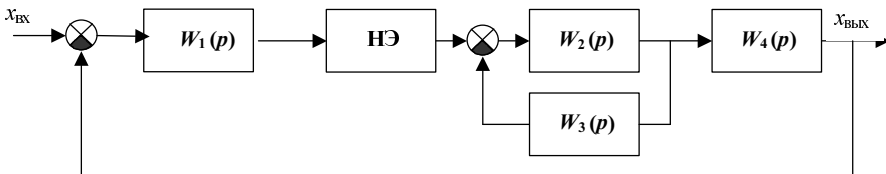


Рис. 3.2

Преобразование структурной схемы нелинейной системы к расчетному виду имеет некоторые особенности. В частности необходимо, чтобы входное воздействие всегда подавалось на вход нелинейного элемента. В нашем примере перенесем входное воздействие  $x_{BX}$  на вход нелинейного элемента и обозначим его через  $x_{BX1}$ , а в качестве выходной величины системы возьмем выходную величину звена с передаточной функцией  $W_1(p)$  и обозначим ее  $x_{ВЫХ1}$ .

После преобразования линейных звеньев к одному звену с эквивалентной передаточной функцией  $W_{ЛЧ}(p)$  расчетная структурная схема примет такой вид, как показано на рис. 3.3.

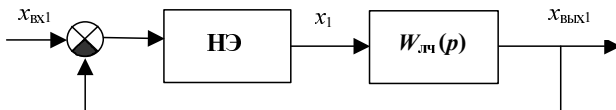


Рис. 3.3

На рис. 3.3:  $x_1$  – промежуточная переменная, а

$$W_{ЛЧ}(p) = W_1(p)W_4(p) \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p)W_3(p)}. \quad (3.1)$$

Методом фазовой плоскости оценка качества нелинейной системы осуществляется по реакции системы второго порядка **на отклонение**

выходной величины и ее производных от состояния равновесия. Для этого в расчетной структурной схеме положим  $x_{\text{вх1}} = 0$  и обозначим отклонение выходной величины  $x_{\text{вых1}}$  через  $x$ .

Окончательно структурная схема для исследования нелинейной системы второго порядка методом фазовой плоскости будет иметь вид, изображенный на рис. 3.4.

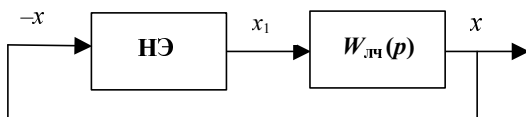


Рис. 3.4

Метод фазовой плоскости основан на графическом представлении движений системы на фазовой плоскости, где по оси абсцисс откладывается отклонение выходной величины  $x$ , а по оси ординат производная отклонения по времени  $y = dx/dt$ . Фазовая плоскость изображена на рис. 3.5.

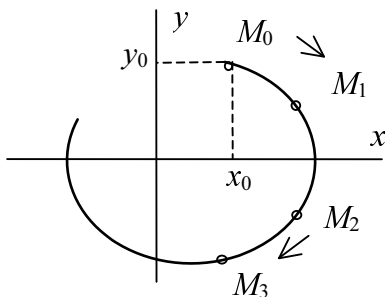


Рис. 3.5

Если при исследовании нелинейной САУ задать начальные значения отклонения  $x_0$  и  $y_0$ , то этим значениям на фазовой плоскости будет соответствовать точка начальных условий  $M_0$ . Эта точка называется изображающей. Во время переходного процесса изображающая точка перемещается в координатах фазовой плоскости и прочерчивает фазовую траекторию исследуемой САУ. Совокупность фазовых траекторий для различных начальных условий называется фазовым портретом системы.

Анализ движения системы производится по виду фазовых траекторий и по направлению движения изображающей точки. Установившемуся режиму на фазовой плоскости соответствует начало координат, так как отклонение  $x$  и его производная  $y$  в начале координат равны нулю. Если изображающая точка стремится к началу координат, то движение в системе устойчивое; если удаляется от начала координат, то неустойчивое; если же совершает повторяющиеся движения по замкнутой фазовой траектории, то в системе наблюдаются автоколебания.

Начало фазовых координат в рассматриваемом методе принято называть особой точкой.

Фазовые траектории, соответствующие автоколебательным движениям системы, называются особыми линиями или предельными циклами. Их два типа: устойчивый предельный цикл и неустойчивый предельный цикл.

Направление движения системы по фазовым траекториям указывается стрелками. На основании свойств фазовых траекторий всегда движение изображающей точки происходит в верхней полуплоскости слева направо, в нижней – справа налево, а ось абсцисс пересекается под углом  $90^\circ$ .

Из сказанного следует, что фазовый портрет полностью характеризует динамические свойства системы. Поэтому метод фазовой плоскости сводится к построению фазового портрета при характерных для системы отклонениях.

Построение фазового портрета производится либо по уравнению фазовых траекторий, либо приближенным графоаналитическим методом изоклин. При этом можно рекомендовать следующую последовательность расчета:

1) исходная структурная схема нелинейной САУ приводится к окончательной расчетной структурной схеме, изображенной на рис. 3.4;

2) по передаточной функции записывается дифференциальное уравнение линейной части. Допустим, что линейная часть представляет собой типовое колебательное звено – звено второго порядка, тогда дифференциальное уравнение линейной части будет иметь вид

$$a_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = kx_1 ; \quad (3.2)$$

3) записываются алгебраические уравнения всех линейных участков эквивалентного нелинейного элемента

$$x_1 = f(-x)$$

для симметричных нелинейностей

$$x_1 = -f(x);$$

4) делается подстановка  $x_1 = -f(x)$  в уравнение (3.2) и записывается дифференциальное уравнение исследуемой системы относительно отклонения выходной величины (при этом исключается промежуточная переменная  $x_1$ ):

$$a_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = -kf(x). \quad (3.3)$$

При кусочно-линейной аппроксимации нелинейной статической характеристики вводится понятие линии переключения. Линии переключения делят фазовую плоскость на области, каждой из которых соответствует свое дифференциальное уравнение. Линии переключения наносятся на фазовую плоскость в процессе построения фазового портрета. На рис. 3.6 показан пример расстановки линий переключения ЛП1 и ЛП2 для нелинейности типа «Ограничение». Кружком с цифрой обозначен номер линейного участка нелинейного элемента и соответствующие ему области на фазовой плоскости;

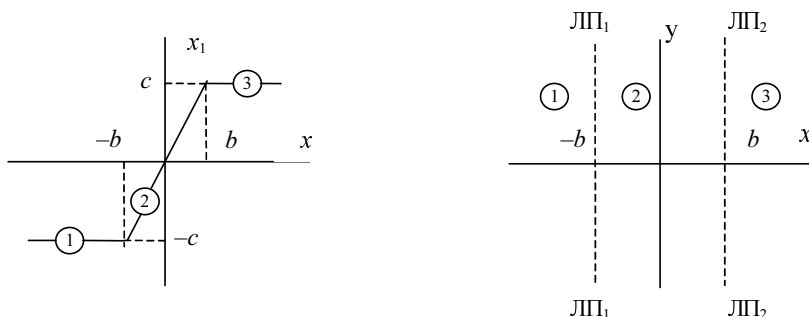


Рис. 3.6

5) вводится вторая фазовая координата

$$y = \frac{dx}{dt}; \quad (3.4)$$

6) дифференциальное уравнение второго порядка (3.3) записывается в виде системы из двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{k}{a_0} f(x) - \frac{a_1}{a_0} y - \frac{a_2}{a_0} x, \quad (3.5)$$

$$\frac{dx}{dt} = y;$$

7) из уравнений (3.5) делением первого уравнения на второе исключается время:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{k}{a_0} f(x) - \frac{a_1}{a_0} y - \frac{a_2}{a_0} x}{y}, \quad (3.6)$$

уравнение (3.6) называется дифференциальным уравнением фазовых траекторий;

8) подстановкой в (3.6) алгебраических уравнений  $f(x)$  для каждого линейного участка статической характеристики нелинейного элемента получаем систему линейных дифференциальных уравнений фазовых траекторий исследуемой системы;

9) если в полученных дифференциальных уравнениях разделяются переменные, то интегрированием находятся уравнения фазовых траекторий:

$$y = F(x) + C_i, \quad (3.7)$$

где  $C_i$  – постоянные интегрирования.

По уравнениям (3.7) строится фазовый портрет системы при разных начальных условиях ( $C_1, C_2, \dots$ ).

Если в каких-либо дифференциальных уравнениях переменные не разделяются или возникают трудности при интегрировании, то фазовые траектории строятся приближенным графоаналитическим методом

изоклин. Изоклины представляют собой геометрическое место точек на фазовой плоскости, в которых фазовые траектории проходят под одним и тем же углом к оси абсцисс.

Уравнения изоклин находятся по уравнению (3.6) приравниванием правой его части постоянным величинам  $N_i$ :

$$\frac{-\frac{k}{a_0} f(x) - \frac{a_1}{a_0} y - \frac{a_2}{a_0} x}{y} = N_i = \text{const}, \quad (3.8)$$

где  $N_i = \text{tg } \alpha_i$ ,  $\alpha_i = \text{arctg } N_i$ ;  $\alpha_i$  – угол, под которым фазовые траектории пересекают изоклину.

Если масштабы по осям  $x$  и  $y$  разные, то угол  $\alpha_i$  следует рассчитывать по формуле

$$\alpha_i = \text{arctg} \left( N_i \frac{M_x}{M_y} \right), \quad (3.9)$$

где  $M_x$  и  $M_y$  – масштабные коэффициенты по осям координат.

Для построения фазового портрета на фазовую плоскость наносится сетка изоклин ( $N_0, N_1, N_2$  и т. д.), на каждой изоклине стрелками отмечаются углы наклона касательных к фазовым траекториям по отношению к оси абсцисс ( $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  и т. д.). Порядок построения фазовой траектории методом изоклин показан на рис. 3.7.

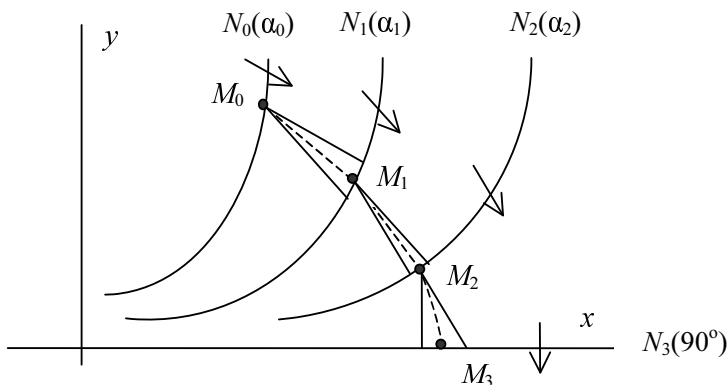


Рис. 3.7

Из точки начальных условий  $M_0$  (ее выбирают лежащей на одной из изоклин) до пересечения со следующей изоклиной проводят два луча построения: один – под углом  $\alpha_0$ , другой – под углом  $\alpha_1$ . Приближенно считают, что следующая изображающая точка  $M_1$  находится на середине отрезка следующей изоклины, отсекаемого лучами построения, проведенными из точки  $M_0$ . Аналогично определяются изображающие точки  $M_2, M_3$  и т. д. Фазовую траекторию получают соединением плавной кривой найденных изображающих точек (пунктир на рис. 3.7).

Методика построения фазовых портретов приводится в [1, 2, 4, 10].

Пример фазового портрета для САУ, состоящей из нелинейного элемента типа «Идеальное трехпозиционное реле» (рис. 3.8, *а*) и линейной части, имеющей дифференциальное уравнение  $T \cdot d^2x/dt^2 + dx/dt = k \cdot x_1$ , приведен на рис. 3.8, *б*.

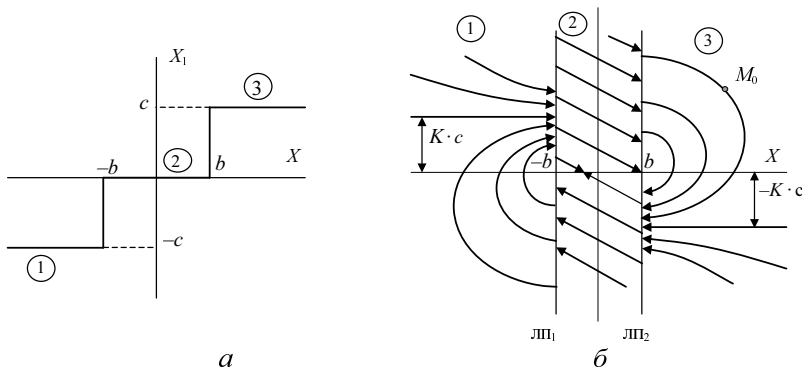


Рис. 3.8

Метод гармонической линеаризации предназначен для исследования автоколебаний в нелинейных системах третьего и более высокого порядка. Он позволяет определить условия существования и параметры возможных автоколебаний. Параметры же автоколебаний дают возможность представить картину всех возможных процессов в системе, в том числе определить условия устойчивости.

Метод гармонической линеаризации основан на предположении, что колебания на выходе линейной части (см. рис. 3.4) являются синусоидальными, т. е. что

$$X = A_0 \sin \omega_0 t, \quad (3.10)$$

где  $A_0$  – амплитуда автоколебаний;  $\omega_0$  – частота автоколебаний.



В действительности автоколебания в нелинейных системах всегда несинусоидальны вследствие искажения их формы нелинейным звеном. Поэтому принятое предположение означает, что метод является приближенным и область его применения ограничена случаями, когда автоколебания на выходе линейной части и соответственно входе нелинейного звена достаточно близки к синусоидальным. Для того чтобы это имело место, линейная часть должна являться фильтром низких частот (не пропускать высокие частоты).

Исходя из сделанного предположения следует, что на вход нелинейного элемента также подается синусоидальный сигнал  $A_0 \sin \omega_0 t$ , а выходная величина  $X_1$ , в силу искажения нелинейностью, будет несинусоидальной. Эта величина может быть разложена в ряд Фурье:

$$X_1 = f(X) = f(A_0 \sin \omega_0 t) = A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega_0 t + \varphi_2) + A_3 \sin(3\omega_0 t + \varphi_3) + \text{и т. д.}, \quad (3.11)$$

где  $\omega_0 = 2\pi / T$  – частота первой (основной) гармоники;  $T$  – период функции  $f(X)$ .

Поскольку предполагается, что линейная часть является фильтром низких частот, то в разложении (3.11) ограничимся только первым членом:

$$X_1 \approx A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1). \quad (3.12)$$

Из этого следует, что при фиксированных значениях  $A_0$  и  $\omega_0$  на входе и выходе нелинейного элемента оказываются гармонические сигналы. А это значит, что нелинейное звено может быть заменено эквивалентным линейным. Эта замена называется гармонической линеаризацией.

При гармонической линеаризации нелинейный элемент можно представить структурной схемой, изображенной на рис. 3.9.

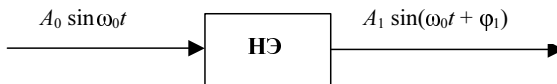


Рис. 3.9

По аналогии с линейными звеньями введем понятие комплексного коэффициента передачи нелинейного элемента:

$$K_{\text{нэ}}(A_0) = \frac{A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1)}{A_0 \sin \omega_0 t}. \quad (3.13)$$

В показательной форме:

$$\begin{aligned}
 K_{нз}(A_0) &= \frac{A_1 e^{j(\omega_0 t + \varphi_1)}}{A_0 e^{j\omega_0 t}} = \frac{A_1}{A_0} e^{j\varphi_1} = \\
 &= \frac{A_1 \cos \varphi_1 + j A_1 \sin \varphi_1}{A_0} = \frac{b_1 + j a_1}{A_0}, \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

где  $b_1$  и  $a_1$  – коэффициенты разложения в ряд Фурье.

Для неоднозначных нелинейностей коэффициент передачи нелинейного элемента – комплексная функция  $A_0$ , а для однозначных – действительная функция  $A_0$ , так как  $\varphi_1 = 0$ .

Таким образом, математическим описанием нелинейного элемента в рассматриваемом методе является комплексный коэффициент передачи. Его очень часто называют коэффициентом гармонической линеаризации.

Для типичных нелинейных элементов аналитические выражения коэффициента гармонической линеаризации приводятся в справочной и учебной литературе. Для нелинейностей, заданных в контрольной работе, функции  $K_{нз}(A_0)$  приведены в приложении 4.

В передаточной функции линейной части сделаем следующую подстановку:  $p = j\omega_0$ . С учетом сказанного структурная схема примет вид, представленный на рис. 3.10.

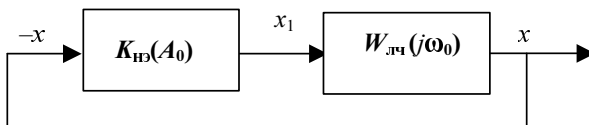


Рис. 3.10

Для замкнутой САУ, предполагая, что в системе существуют автоколебания  $(A_0, \omega_0)$ , можно записать:

$$\begin{aligned}
 x &= W_{лч}(j\omega_0)x_1, \\
 x_1 &= K_{нз}(A_0)(-x).
 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Исключим промежуточную переменную  $x_1$  и запишем условие существования автоколебаний:

$$W_{\text{лч}}(j\omega_0) K_{\text{нз}}(A_0) = -1. \quad (3.16)$$

Это условие называется уравнением гармонического баланса (УГБ).

Запишем УГБ в показательной форме:

$$A_{\text{лч}}(\omega_0) e^{j\varphi_{\text{лч}}(\omega_0)} A_{\text{нз}}(A_0) e^{\varphi_{\text{нз}}(A_0)} = e^{\pm j\pi(2k-1)}, \quad (3.17)$$

где  $k$  – числовой ряд  $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm$  и т. д.

УГБ можно разбить на два уравнения:

- уравнение гармонического баланса амплитуд (УГБА):

$$A_{\text{лч}}(\omega_0) A_{\text{нз}}(A_0) = 1; \quad (3.18)$$

- уравнение гармонического баланса фаз (УГБФ):

$$\varphi_{\text{лч}}(\omega_0) + \varphi_{\text{нз}}(A_0) = \pm \pi (2k - 1). \quad (3.19)$$

Физический смысл условия гармонического баланса (3.16) заключается в том, что для возникновения в системе автоколебаний необходимо, чтобы общий коэффициент усиления в замкнутом контуре был равен 1, а сдвиг по фазе – кратным  $\pm \pi (2k - 1)$ .

К решению задачи по нахождению  $A_0$  и  $\omega_0$  следует подходить по-разному в зависимости от того, будет ли  $K_{\text{нз}}(A_0)$  действительной или комплексной функцией.

**Если  $K_{\text{нз}}(A_0)$  действительная функция  $A_0$** , то  $\varphi_{\text{нз}}(A_0) = 0$ . В этом случае уравнение баланса фаз упрощается:

$$\varphi_{\text{лч}}(\omega_0) = \pm \pi (2k - 1). \quad (3.20)$$

По виду  $W_{\text{лч}}(\omega_0)$  можно определить  $k$ , а следовательно, частоту автоколебаний  $\omega_0$ . После чего из уравнения гармонического баланса амплитуд (теперь уравнение с одной неизвестной) определяется амплитуда автоколебаний  $A_0$ .

**Если  $K_{\text{нз}}(A_0)$  комплексная функция  $A_0$** , то наличие и параметры автоколебаний определяются непосредственно из уравнения гармонического баланса (3.16) графическим методом Гольдфарба.

При пользовании методом Гольдфарба необходимо записать уравнение гармонического баланса в следующем виде:

$$W_{\text{лч}}(j\omega_0) = -\frac{1}{K_{\text{нз}}(A_0)}. \quad (3.21)$$

Для нахождения параметров автоколебательного режима ( $A_0$ ,  $\omega_0$ ) и их устойчивости необходимо на комплексной плоскости в одном масштабе построить графики левой и правой частей уравнения (3.21).

Если графики не пересекаются, то автоколебания отсутствуют. Если графики пересекаются, то это говорит о том, что выполняется условие гармонического баланса, и, следовательно, возможно существование автоколебаний в исследуемой нелинейной системе. Автоколебания могут быть устойчивыми и неустойчивыми.

Для определения устойчивости автоколебаний Гольдфарб предложил следующее правило: если при увеличении амплитуды  $A_0$  точка на характеристике  $-1/K_{\text{нз}}(A_0)$  не охватывается амплитудно-фазовой частотной характеристикой линейной части системы, то колебания устойчивые, и наоборот.

Пример графика для определения автоколебаний, их устойчивости и параметров показан на рис. 3.11.

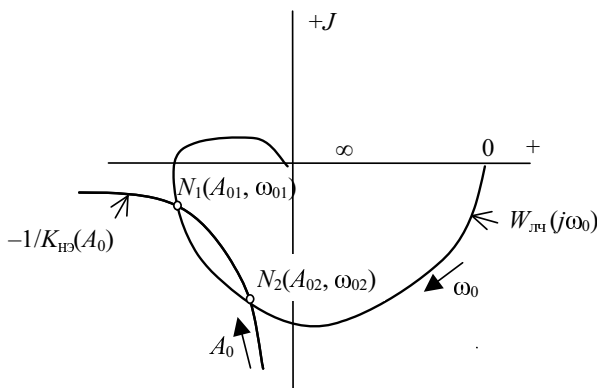


Рис. 3.11

Точке пересечения  $N_1$  соответствуют параметры автоколебаний ( $A_{01}$  и  $\omega_{01}$ ), а точке  $N_2$  ( $A_{02}$  и  $\omega_{02}$ ).

При увеличении амплитуды  $A_0$  относительно точки пересечения  $N_1$  точка на характеристике  $-1/K_{\text{нз}}(A_0)$  смещается влево и не охватывается амплитудно-фазовой характеристикой линейной части системы. Следовательно, автоколебания с амплитудой  $A_{01}$  и частотой  $\omega_{01}$  устойчивые.

Если увеличить амплитуду  $A_0$  относительно точки пересечения  $N_2$ , то точка на характеристике  $-1/K_{\text{нз}}(A_0)$  смещается также влево, но она

охватывается характеристикой  $W_{\text{лч}}(j\omega_0)$ . Это говорит о том, что колебания с параметрами  $A_{02}$  и  $\omega_{01}$  будут неустойчивыми.

Метод Гольдфарба можно также применять и в том случае, когда  $-1/K_{\text{нз}}(A_0)$  функция действительного переменного. Отличие заключается только в том, что график функции  $-1/K_{\text{нз}}(A_0)$  будет располагаться на отрицательной части действительной оси комплексной плоскости.

Пример графика для этого случая показан на рис. 3.12

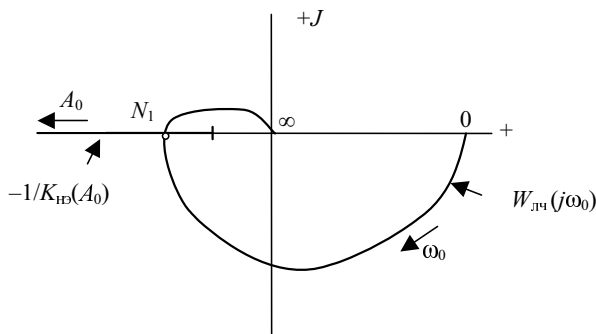


Рис. 3.12

2. Метод структурного моделирования «MatLab 6.5 / Simulink 5» позволяет проверить результаты аналитических расчетов по п. 1 задания на контрольную работу № 3, а также провести дополнительные исследования заданных нелинейных систем.

При составлении схемы модели для исследования нелинейной САУ необходимо учитывать следующие особенности:

- если коэффициент передачи наклонной линейной части нелинейных элементов системы «Ограничение» и «Зона нечувствительности» не равен 1, то необходимо последовательно с моделирующими блоками «Saturation» и «Dead Zone» включить моделирующий блок «Gain» (усилитель) и выставить на нем коэффициент передачи, отличный от 1;
- нелинейности *a*) и *b*) (см. приложение 2, табл. П2.3) могут быть получены последовательным соединением моделирующих блоков «Dead Zone», «Gain» и «Saturation»;
- так как в программе MatLab / Simulink начальное значение выходной величины и ее производной можно задать только на моделирующем блоке «Integrator», то приходится прибегать к так называемым

мой детализированной структурной схеме. В детализированной структурной схеме линейной части второго порядка на выходе должны быть два последовательно соединенных интегрирующих звена. Одно – для задания начального отклонения выходной величины, второе – для задания начального отклонения производной выходной величины.

Детализированной называется такая структурная схема, которая состоит из безынерционных, суммирующих и интегрирующих звеньев.

Покажем порядок составления детализированной структурной схемы на примере колебательного звена (рис. 3.13):

- исходные данные – структурная схема колебательного звена;

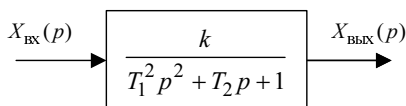


Рис. 3.13

• по передаточной функции колебательного звена запишем операторное уравнение

$$T_1^2 p^2 X_{\text{вых}}(p) + T_2 p X_{\text{вых}}(p) + X_{\text{вых}}(p) = k X_{\text{вх}}(p);$$

- выделим в левой части уравнения  $p^2 X_{\text{вых}}(p)$ ,

$$p^2 X_{\text{вых}}(p) = \frac{1}{T_1^2} (k X_{\text{вх}}(p) - T_2 p X_{\text{вых}}(p) - X_{\text{вых}}(p));$$

• предположим, что в каждый момент времени известны  $X_{\text{вх}}(p)$ ,  $T_2 p X_{\text{вых}}(p)$  и  $X_{\text{вых}}(p)$ , то для нахождения  $p^2 X_{\text{вых}}(p)$  нужно сделать следующие математические операции: умножить  $X_{\text{вх}}(p)$  на  $k$ , найти сумму слагаемых в скобках и умножить выражение в скобках на  $\frac{1}{T_1^2}$ .

Теперь, чтобы найти  $X_{\text{ВЫХ}}(p)$ , необходимо дважды проинтегрировать (умножить дважды на  $\frac{1}{p}$ ) левую и правую части полученного выражения:

$$X_{\text{ВЫХ}}(p) = \frac{1}{p} \frac{1}{p} \left[ \frac{1}{T_1^2} (kX_{\text{ВХ}}(p) - T_2 p X_{\text{ВЫХ}}(p) - X_{\text{ВЫХ}}(p)) \right].$$

Все математические операции полученного выражения можно реализовать с помощью трех безынерционных звеньев с коэффициентами  $k$ ,  $T_2$  и  $\frac{1}{T_1^2}$ , суммирующего звена и двух интегрирующих звеньев.

Детализированная структурная схема колебательного звена показана на рис. 3.14.

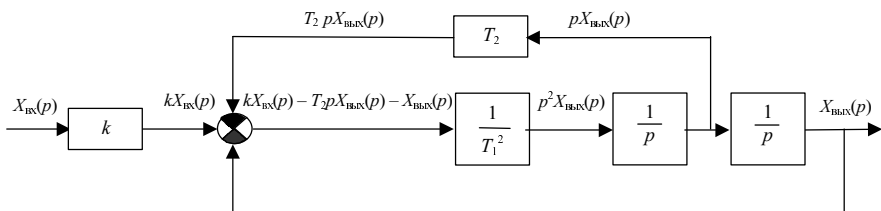


Рис. 3.14

На рис. 3.15 изображена схема модели для исследования заданной нелинейной САУ второго порядка методом фазовой плоскости.

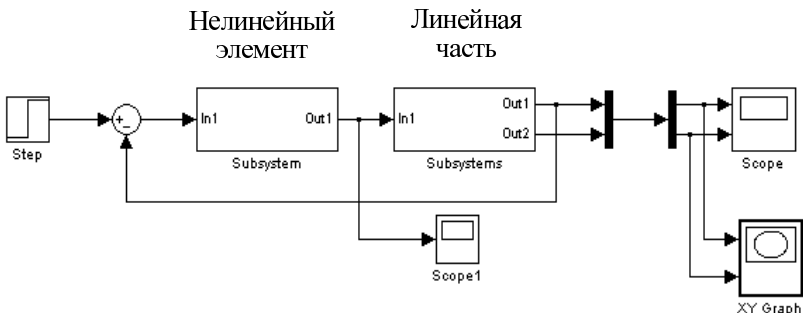


Рис. 3.15

В схеме модели предусмотрены:

- блок «Step» – для задания постоянного входного воздействия для снятия переходных процессов в исследуемой САУ;
- блоки «Subsystem» – для моделирования заданного нелинейного элемента и линейной части второго порядка. Названные блоки выбраны для удобства изменения параметров нелинейного элемента и линейной части;
- блок «Scope» – для регистрации переходных процессов отдельно по координатам  $X$  и  $Y$  при снятии фазовых портретов заданной САУ;
- блок «XY Graph» – для регистрации фазовых портретов в координатах  $XY$ ;
- блок «Scope 1» осуществляет визуальное наблюдение за выходной величиной нелинейного звена.

На рис. 3.16 изображена схема модели для исследования заданной нелинейной САУ третьего порядка методом гармонической линеаризации.

В схеме модели заданной САУ предусмотрен канал настройки нелинейного элемента с синусоидальным входным сигналом (Sine Wave) и графопостроителем (XY Graph). Переключение на настройку нелинейного элемента и обратно осуществляется ручными переключателями (Manual Switch). Для получения дополнительной информации о работе нелинейного элемента предусмотрен осциллограф Scope 1.

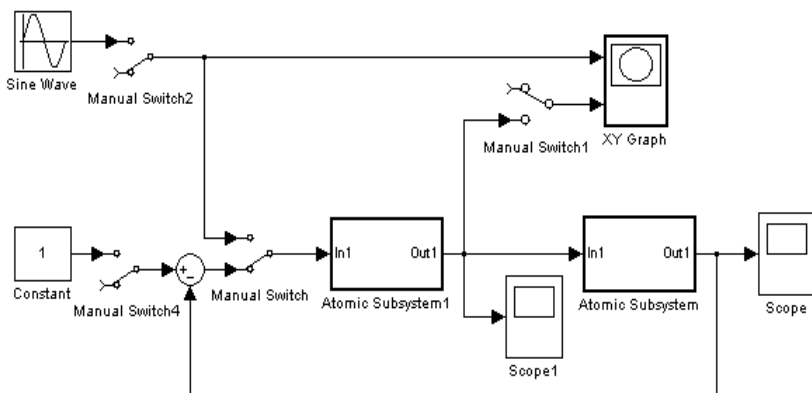


Рис. 3.16



Пункт 2 задания на контрольную работу № 3 выполняется в период экзаменационной сессии в качестве одной из лабораторных работ по теории нелинейных систем автоматического управления. Отдельного отчета по этой лабораторной работе студенты не оформляют. Полученные результаты лабораторных исследований включаются в пп. а) – в) контрольной работы.

Дадим некоторые рекомендации и пояснения к выполнению лабораторных исследований динамических свойств САУ, заданной в контрольной работе.

При выполнении пункта а) необходимо:

- чтобы схема модели в точности соответствовала расчетной структурной схеме;
- чтобы масштабы по осям координат и начальные условия были теми же, какими они были выбраны при аналитическом или графическом расчете;
- в автоколебательных режимах в обязательном порядке определять частоту и амплитуду колебаний.

В п. б) постоянным характерным воздействием следует считать такое по уровню воздействие, когда в начальной стадии переходного процесса задействованы все линейные участки статической характеристики нелинейного элемента.

Параметры неавтоколебательных переходных процессов определяются так же, как в линейных САУ. Параметрами автоколебательных процессов являются амплитуда и частота.

Если при выполнении пункта в) окажется, что уровень входного воздействия не влияет или мало влияет на вид и параметры переходного процесса, то при наличии лабораторного времени можно расширить исследования – проанализировать влияние параметров линейной и нелинейной частей САУ на вид и параметры переходного процесса.

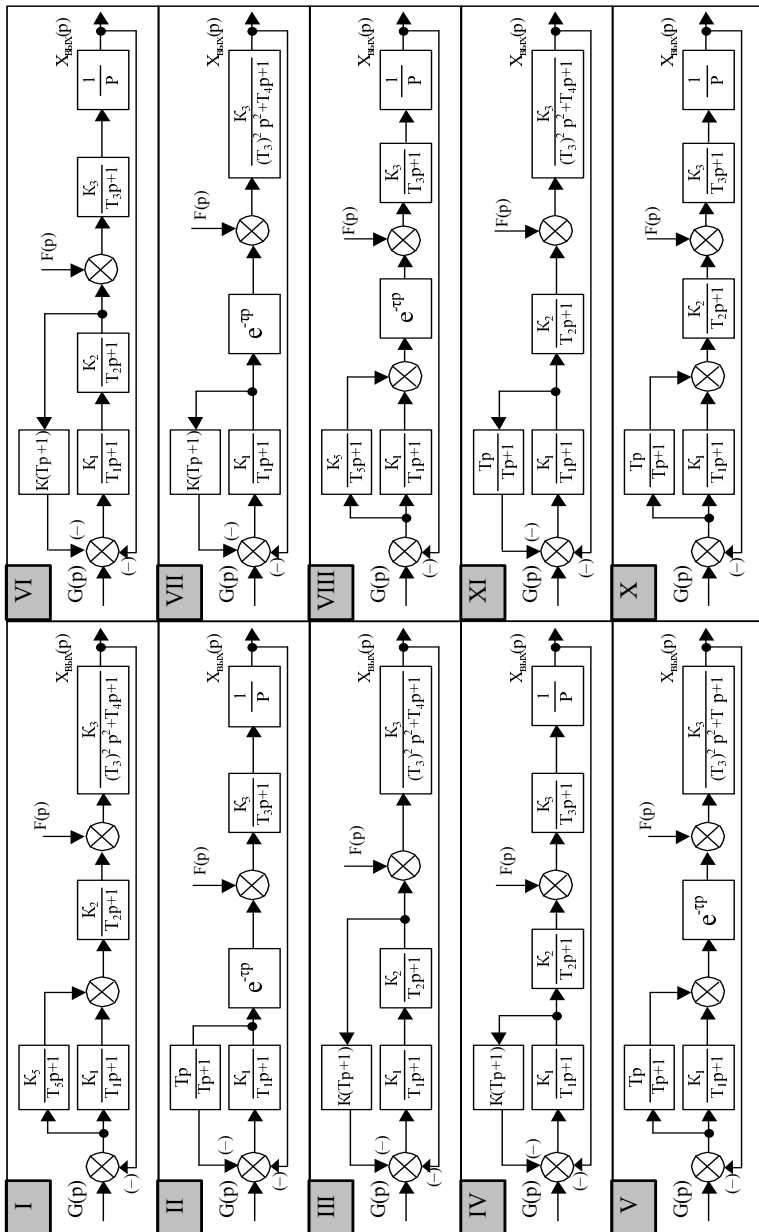
Зачет по лабораторным исследованиям в соответствии с пунктом 2 принимает, наряду с другими лабораторными работами, преподаватель, ведущий лабораторный практикум по теории нелинейных систем управления.

Устный зачет по контрольной работе № 3 с учетом выполненных и зачтенных лабораторных исследований принимает преподаватель, ведущий изучаемую дисциплину.

# Приложение 1

Таблица П.1

Структурные схемы линейной САУ



Параметры структурной схемы линейной САУ

Номер варианта	Параметры											
	$K$	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_5$	$\tau$	$T$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$
01	0.1	10	20	1	1	0.006	0.15	0.012	0.07	0.1	0.25	0.01
02	0.2	9	6	2.8	1	0.007	0.16	0.017	0.06	0.2	0.3	0.02
03	0.3	4	30	1	1.5	0.008	0.17	0.016	0.05	0.3	0.18	0.03
04	0.4	20	6	1.5	1.6	0.009	0.18	0.4	0.4	0.4	0.1	0.04
05	0.5	7	10	2.1	0.8	0.005	0.08	0.01	0.3	0.5	0.3	0.05
06	0.05	6	6	6	0.2	0.008	0.09	0.02	0.2	0.6	0.47	0.06
07	0.06	7.8	2.6	5	1.4	0.009	0.2	0.03	0.1	0.7	0.3	0.07
08	0.07	8.5	8.5	2	2.3	0.03	0.25	0.04	0.016	0.8	0.16	0.08
09	0.08	10	6	3	2	0.006	0.3	0.05	0.015	0.9	1.0	0.09
10	0.09	10	1.5	6	0.15	0.005	0.01	0.06	0.017	0.75	0.2	0.1
11	0.7	5	5	5	4.2	0.004	0.35	0.07	0.018	0.45	0.15	0.12
12	0.6	2	4	20	0.5	0.03	0.02	0.08	0.012	0.25	0.2	0.15
13	0.04	2.9	8	7	0.4	0.02	0.19	0.09	0.5	0.15	0.5	0.16
14	0.03	2	12	8	0.3	0.01	0.4	0.014	0.04	0.15	0.35	0.17
15	0.8	12	1.7	10	0.004	0.004	0.015	0.03	0.18	0.25	0.25	0.18
16	0.9	15	1.1	12	2.5	0.005	0.5	0.025	0.08	0.13	0.18	0.19
17	0.15	14	2.3	5.5	4.5	0.003	0.55	0.035	0.09	0.05	0.1	0.2
18	0.25	13	2.4	6.5	1.8	0.015	0.03	0.045	0.095	0.06	0.15	0.25
19	0.35	12	3.3	4	1.3	0.025	0.04	0.055	0.25	0.04	0.07	0.3
20	0.45	5.5	3.2	9	1.2	0.035	0.08	0.065	0.28	0.13	0.2	0.35

Таблица П1.3

**Требования к качеству САУ в установившемся и переходном режимах**

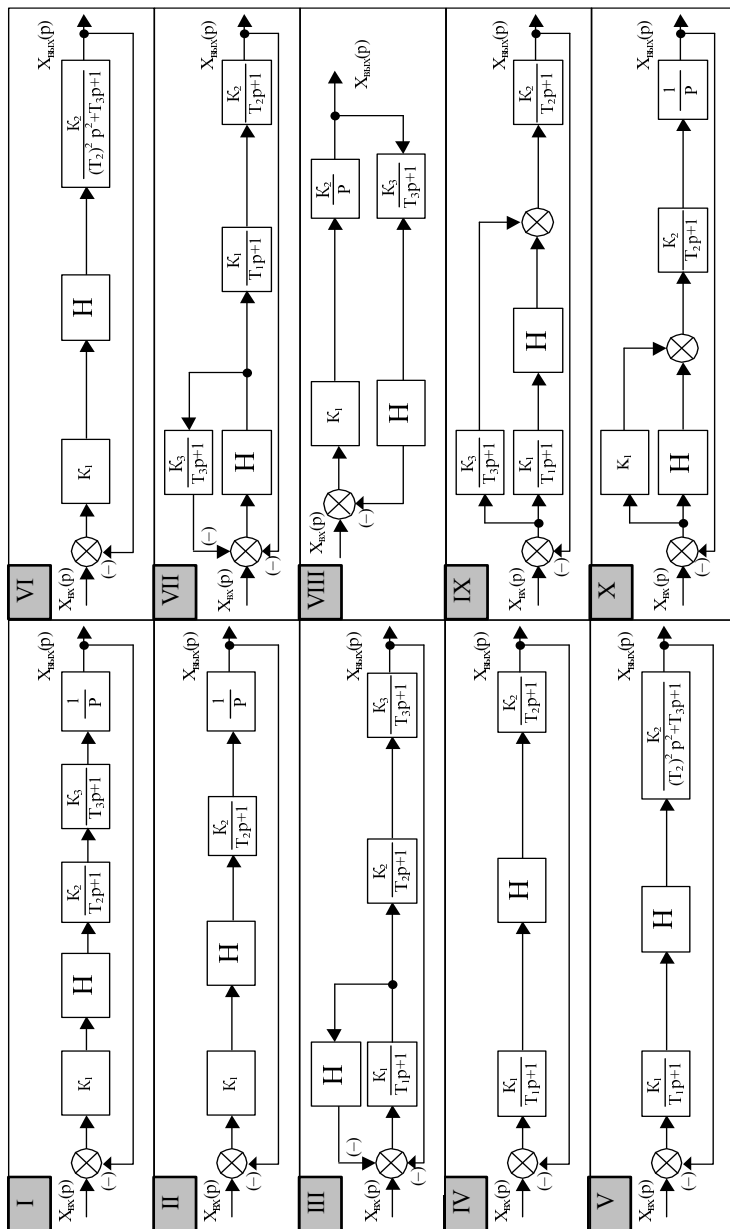
Номер варианта	Величина ошибки, $\varepsilon(\infty)_{\text{доп}}$	Время регулирования, $T_{\text{рег доп}}$	Максимальное перерегулирова- ние, $\sigma_{\text{max доп}}\%$
1	0.005	0.75	20
2	0.0052	0.6	20
3	0.0054	0.6	20
4	0.0055	1.2	20
5	0.0057	1.5	20
6	0.0058	1.8	20
7	0.006	2.1	20
8	0.0062	2.4	25
9	0.0064	2.7	25
10	0.0065	2.25	25
11	0.0068	1.35	25
12	0.007	0.75	25
13	0.0072	1.5	25
14	0.0074	1.2	25
15	0.0075	1.35	30
16	0.0076	1.5	30
17	0.0078	1.65	30
18	0.008	0.75	30
19	0.0082	0.9	30
20	0.0083	1.05	30

**Примечание.** Для исходных структурных схем с нечетными номерами (I, III,..., IX) задана допустимая статическая ошибка, а с четными номерами (II, IV,..., X) – скоростная ошибка.

## Приложение 2

Таблица П2.1

Структурные схемы нелинейной САУ



Параметры структурной схемы нелинейной САУ

Номер варианта	Параметры					
	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$T_1$	$T_2$	$T_3$
01	10	1.5	0.6	0.01	0.08	0.15
02	12	1.6	0.4	0.02	0.07	0.2
03	6	2	0.2	0.03	0.08	0.25
04	8	0.8	0.1	0.04	1.0	0.18
05	9	4	0.9	0.05	0.12	0.16
06	10	1.2	0.8	0.06	0.15	0.12
07	3	3	1.0	0.07	0.08	0.1
08	7	0.9	1.1	0.08	0.07	0.09
09	11	0.8	1.2	0.09	0.06	0.08
10	4	0.7	1.3	0.1	0.05	0.07
11	5	1.8	1.4	0.15	0.09	0.3
12	13	1.9	1.5	0.2	0.14	0.12
13	15	2.1	0.3	0.3	0.18	0.14
14	16	2.3	0.5	0.35	0.2	0.15
15	18	2.5	0.7	0.4	0.19	0.26
16	17	1.3	0.3	0.5	0.3	0.25
17	12.5	1.55	0.4	0.015	0.07	0.25
18	11.5	0.7	1.25	0.08	0.07	0.09
19	14	2.2	0.4	0.25	0.17	0.15
20	15.5	2.2	0.6	0.39	0.3	0.14

Таблица П2.3

Вид и параметры нелинейности

$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$

## Приложение 3

### Образец оформления обложки контрольной работы

Новосибирский государственный технический  
университет

Кафедра ЭАПУ

**Контрольная работа № \_\_\_\_\_**

по "Теории автоматического управления"

вариант задания \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_

студента \_\_\_\_\_ курса, группы \_\_\_\_\_, специальности \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
Ф.И.О. (полностью)

Домашний адрес: \_\_\_\_\_  
почтовый индекс, город (поселок, деревня),

\_\_\_\_\_  
улица, № дома, № квартиры

Работа выполнена \_\_\_\_\_  
дата

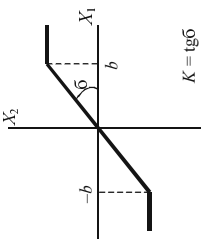
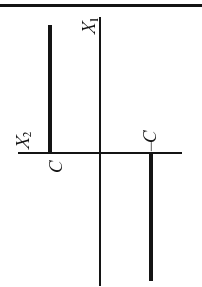
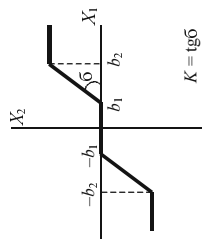
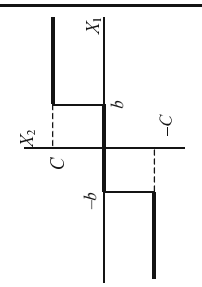
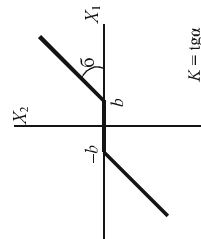
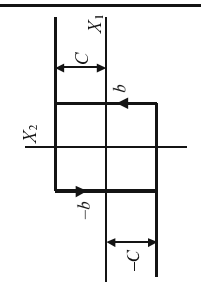
Работа защищена \_\_\_\_\_  
дата

Преподаватель \_\_\_\_\_  
подпись Ф.И.О.



# Приложение 4

## Коэффициенты гармонической линейзации типичных нелинейностей

 <p style="text-align: center;"><math>K = \operatorname{tg} \delta</math></p>	$K_{\text{нл}}(A) = \frac{2k}{\pi} \left[ \arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right]$ <p style="text-align: center;">при <math>A \geq b</math></p>		$K_{\text{нл}}(A) = \frac{4c}{\pi A}$
 <p style="text-align: center;"><math>K = \operatorname{tg} \delta</math></p>	$K_{\text{нл}}(A) = \frac{2k}{\pi} \left[ \arcsin \frac{b_2}{A} - \arcsin \frac{b_1}{A} + \frac{b_1}{A} \sqrt{1 - \frac{(b_2)^2}{A^2}} + \frac{b_2}{A} \sqrt{1 - \frac{(b_1)^2}{A^2}} \right]$ <p style="text-align: center;">при <math>A \geq b_2</math></p>		$K_{\text{нл}}(A) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}}$ <p style="text-align: center;">при <math>A \geq b</math></p>
 <p style="text-align: center;"><math>K = \operatorname{tg} \alpha</math></p>	$K_{\text{нл}}(A) = k - \frac{2k}{\pi} \left[ \arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right]$ <p style="text-align: center;">при <math>A \geq b</math></p>		$K_{\text{нл}}(A) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} - j \frac{4bc}{\pi A^2}$ <p style="text-align: center;">при <math>A \geq b</math></p>

