

**МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО МОРСКОГО И РЕЧНОГО ТРАНСПОРТА
ФГБОУ ВО
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ МОРСКОЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АДМИРАЛА Ф.Ф.УШАКОВА**

КАФЕДРА «ПОДЪЕМНО-ТРАНСПОРТНЫЕ МАШИНЫ И КОМПЛЕКСЫ»

Савченко В.А.

**КУРС ЛЕКЦИЙ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«Гидромеханика»**

*Для специальности
«Эксплуатация судовых энергетических установок»*

Новороссийск 2021 г.

Литература:

1. Савченко В.А. Гидромеханика. Часть 1
Учебное пособие. – Новороссийск: МГА им. адм. Ф.Ф. Ушакова, 2000.
2. Савченко В.А. Гидромеханика. Часть 2
Учебное пособие. – Новороссийск: МГА им. адм. Ф.Ф. Ушакова, 2000.
3. Савченко В.А. Гидравлика. Основы гидравлики и гидропривода:
Учебное пособие. – Новороссийск: МГА им. адм. Ф.Ф. Ушакова, 2008.
4. Савченко В.А. Гидравлика: Лабораторный практикум. - Новороссийск:
МГА им. адм. Ф.Ф. Ушакова, 2010.
5. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика. – М.: Машиностроение, 1978.
6. Овсянников М.К. и др. Основы гидромеханики. – М.: РКонсульт, 2003.

Лекция -1

ВВЕДЕНИЕ. ГИДРАВЛИКА И ЕЕ МЕСТО В ОБЩЕЙ СИСТЕМЕ ЗНАНИЙ

Литература: [1] стр. 6-8; [3] стр.7; [5] стр.6-7.

Раздел теоретической механики, занимающийся изучением движения изменяемых сплошных сред, называется «Механика сплошных сред». Часть ее, относящаяся к жидким и газообразным средам, называется «*Механика жидкости и газа*» или «*Гидромеханика*».

Гидромеханика, так же как и другие области механики разделяется на статику, кинематику и динамику.

Предыстория гидромеханики уходит в древние (доисторические) времена. Когда и слова «гидромеханика» еще не было, человек занимался решением прикладных гидромеханических задач: строил водопроводы, рыл каналы, использовал водные пути для перемещения на плавсредствах, использовал энергию ветра для движения судов под парусами и для вращения ветряных мельниц и многие другие. Отдельные результаты наблюдений и обобщение закономерностей движения жидкости и газа встречаются в трудах Аристотеля (384-322 г. до н.э.). Известны законы гидростатики, сформулированные Архимедом, но как наука гидромеханика сформировалась в XVIII веке благодаря трудам академиков Петербургской академии наук Леонарда Эйлера и Даниила Бернулли. Бернулли и ввел название «Гидродинамика», которое впоследствии трансформировалось в «Гидромеханика». С тех пор гидромеханика весьма интенсивно развивалась. Практическое значение ее в настоящее время велико. Она находит применение в большинстве отраслей техники, как то авиация, кораблестроение, энергетика, гидротехническое строительство, водный транспорт и другие, являясь для многих из них теоретической базой. Некоторые разделы гидромеханики получили столь широкое развитие, что сформировались в самостоятельные отрасли науки. Основные из них: гидравлика, газовая динамика, аэромеханика, магнитная гидродинамика и др.

Гидравликой называется прикладной раздел гидромеханики, изучающий законы равновесия и движения несжимаемых жидкостей и разработкой методов применения этих законов для решения технических задач. Законы равновесия и движения сжимаемых жидкостей (газов) изучаются в *газовой динамике и аэромеханике*. Однако сжимаемость в различных условиях проявляется не одинаково. Например, при очень высоких давлениях в сотни атмосфер или при скоростях движения выше скорости звука капельные жидкости ведут себя как сжимаемые, а при малых давлениях или при скоростях движения до 0,1 от скорости звука сжимаемостью газов можно пренебречь.

РАЗДЕЛ 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

Тема 1.1: Основные свойства и характеристики жидкостей и газов

Литература: [1] стр. 9-15; [3] стр. 8-16;

[5] стр. 8-10, 12-21, 398-406;

[6] стр. 11-21, 76-79, 123-124.

Жидкости и газы обладают общими и отличительными свойствами.

Общие свойства (чем жидкости и газы похожи):

а) **Вязкость** – это свойство реальной жидкости, характеризующее ее способность сопротивляться касательным (сдвигающим) усилиям. Различают динамическую μ и кинематическую ν вязкости.

Единицы измерения $\mu : \frac{Нс}{м^2} = Пас ; 0,1 Пас = Пуаз (Пз)$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} : \frac{м^2}{с} \frac{с·м^2}{с} = \text{Стокс}; 0,01 \text{ Ст} = \text{Сантистокс}$$

Для капельных жидкостей при повышении температуры μ убывает, для газов – возрастает.

Определить динамическую вязкость воды в зависимости от изменения температуры можно по формуле Пуазейля:

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + 0,0337t + 0,00022t^2}, \quad (1.1)$$

где μ_0 – вязкость при $t=0^\circ\text{C}$; t – температура в градусах Цельсия.

Для воздуха применяется формула Милликена:

$$\mu = 1,745 \cdot 10^{-6} + 5,03 \cdot 10^{-9}t \quad (1.2)$$

Можно также использовать формулу

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{273} \right)^{0,75}, \quad (1.3)$$

где μ_0 – динамическая вязкость воздуха при температуре 0°C ;

T – абсолютная температура (К).

Для воздуха при 20°C $\mu = 18,4 \cdot 10^{-6}$ Пас.

С повышением давления вязкость капельных жидкостей увеличивается. При относительно небольших давлениях этим увеличением пренебрегают. Однако для гидросистем, изменение вязкости с изменением давления может оказаться существенным. Так, при изменении давления от 0 до 40 МПа вязкость многих минеральных масел при нормальной температуре увеличивается приблизительно в 3 раза. Обычно вязкость жидкостей и газов в зависимости от температуры и давления определяют по справочным таблицам, где эти величины получены экспериментально.

б) **Легкая подвижность или текучесть** – свойство среды неограниченно деформироваться под действием постоянной силы. Любая малая сдвигающая сила при длительном действии может вызвать значительную деформацию. В то же время при наличии относительного движения между слоями среды возникают касательные напряжения и тем больше, чем больше скорость деформации. А это значит, что данной силой можно обусловить только определенную скорость деформации. Для увеличения скорости деформации нужно увеличить силу.

Отличительные свойства (чем жидкости отличаются от газов)

а) **Сжимаемость** – свойство тел изменять объем под воздействием внешних сил.

В капельной жидкости (вода, минеральное масло, бензин...) расстояния между молекулами весьма малы, что приводит к возникновению значительных межмолекулярных сил сцепления, из-за чего малые изменения внешнего давления почти не сказываются на изменении ее объема. Вот почему капельные жидкости считают мало сжимаемыми, а иногда просто несжимаемыми.

В газах межмолекулярные расстояния велики, а силы взаимодействия между молекулами сравнительно малы. В связи с этим газы обладают свойством значительной сжимаемости по сравнению с жидкостями, и их считают сжимаемыми.

Сжимаемость – это основное отличительное свойство жидкостей и газов. Поэтому в гидромеханике принято и жидкость и газ называть одним словом «жидкость», различая, когда это существенно, на несжимаемую и сжимаемую (или их называют «капельная» и «газообразная»).

Сжимаемость проявляется в изменении плотности среды. Плотность ρ – скалярная величина, определяемая выражением

$$\rho = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}, \quad \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad (1.4)$$

где ΔV – малый объем жидкости; Δm – его масса.

Величина, обратная плотности, называется удельным объемом.

$$v = \frac{1}{\rho}, \quad \frac{\text{м}^3}{\text{кг}}. \quad (1.5)$$

В общем случае плотность представляется функцией координат и времени $\rho = \rho(x, y, z, t)$.

Для капельной жидкости плотность с увеличением давления незначительно увеличивается, а удельный объем соответственно уменьшается.

Вычислить изменение плотности при изменении давления можно по формуле:

$$\rho_p = \rho_0 e^{\alpha_v \Delta p} \quad (1.6)$$

Если Δp невелико, можно использовать упрощенные формулы для плотности и удельного объема:

$$\rho_p = \rho_0 (1 + \alpha_v \Delta p), \quad V_p = V_0 (1 - \alpha_v \Delta p) \quad (1.7)$$

В формулах (1.6) и (1.7): ρ_0 и v_0 - плотность и удельный объем среды при нормальных условиях ($p_0=0,1$ МПа, $t=20^\circ\text{C}$); для воды $\rho_0=998 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; Δp - абсолютное изменение давления; e - основание натурального алгоритма; $-\alpha_v = \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p} \left[\frac{1}{\text{Па}} \right]$ - коэффициент объемного сжатия, равный относительному изменению объема при увеличении давления на 0,1 МПа; при $t=20^\circ\text{C}$ для воды $\alpha_v=5 \cdot 10^{-5}$, для масел $\alpha_v=6 \cdot 10^{-5}$

Величина, обратная α_v , называется модулем объемной упругости жидкости:

$$E_{жс} = \frac{1}{\alpha_v} \quad (1.8)$$

Для воды $E_{жс}=2,1 \cdot 10^9$ Па; для масел, используемых в гидросистемах $E_{жс}=1,4 \cdot 10^9 \div 1,9 \cdot 10^9$ Па; для идеальной жидкости $E_{жс}=\infty$.

Определение плотности жидкости можно производить или непосредственным взвешиванием, или при помощи прибора, называемого “ареометр” (рис.1.1) Прибор представляет собой стеклянную колбу, нижний конец которой заполнен тяжёлым веществом, а верхний - пустотелый. Вес колбы рассчитан так, чтобы в соответствии с законом Архимеда она погружалась в жидкость на глубину, зависящую от плотности. Чем больше плотность, тем меньше колба погружается в жидкость. Шкала на ножке колбы в единицах плотности.

Для газов плотность при постоянной температуре увеличивается прямо пропорционально давлению, а при постоянном давлении уменьшается обратно пропорционально температуре. Вычислить изменение плотностей газов можно по формуле:

$$\rho = \frac{p}{gRT}, \quad (1.9)$$

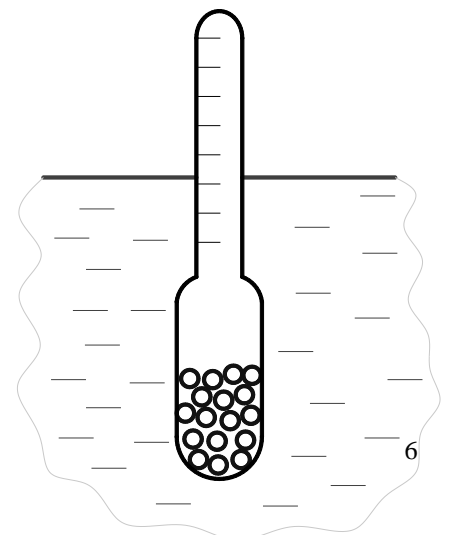


Рис. 1.1

где g - ускорение свободного падения, $R=29,27 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2 \text{град}}$.

Для воздуха при $t=20^\circ\text{C}$ и $p_0=0,1 \text{ МПа}$ $\rho=1,207 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

б) **Температурное расширение** – свойство жидкостей и газов изменять свой объем при изменении температуры, что так же отражается на плотности.

Для *капельной жидкости* плотность с ростом температуры при постоянном давлении незначительно уменьшается, а удельный объем увеличивается. Изменение плотности в функции температуры можно определить по формуле:

$$\rho_t = \rho_o e^{-\beta_t T} \quad (1.10)$$

или при малых Δt :

$$\rho_t = \rho_o (1 - \beta_t \Delta t), \quad v_t = v_o (1 + \beta_t \Delta t) \quad (1.11)$$

здесь $\beta_t = \frac{1}{V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t} \left[\frac{1}{^\circ\text{C}} \right]$ - коэффициент объемного расширения, равный отношению изменению объема жидкости при изменении температуры на 1°C . При 20°C для воды $\beta_t = 2 \cdot 10^{-4}$, для минеральных масел $\beta_t = 7 \cdot 10^{-4}$.

Для газов влияние температуры определяется формулой

$$\rho = \frac{P}{gRT}$$

в) **Смачиваемость** – характерна только для капельной жидкости.

Если жидкость граничит с твёрдым телом, то в районе примыкания свободной поверхности жидкости к поверхности твердого тела может возникнуть одна из следующих картин:

- в случае, когда силы молекулярного взаимодействия между частицами жидкости велики сравнительно с силами молекулярного взаимодействия между жидкостью и твёрдым телом, наблюдается явление *несмачиваемости* (рис.1.2);

- в случае, когда силы молекулярного взаимодействия между частицами жидкости малы сравнительно с аналогичными силами между жидкостью и твёрдым телом, наблюдается явление *смачиваемости* (рис.1.3).

Если явление смачиваемости или несмачиваемости наблюдать в трубке, то при уменьшении диаметра её образуется выпуклая или вогнутая поверхность - мениск (рис. 1.4). Искривление свободной поверхности сопровождается появлением дополнительной силы. Если поверхность выпуклая, то дополнительная сила будет направлена внутрь жидкости, что обусловит понижение

уровня в трубке. Если поверхность вогнутая, то сила будет направлена из жидкости, что обусловит повышение уровня в трубке.

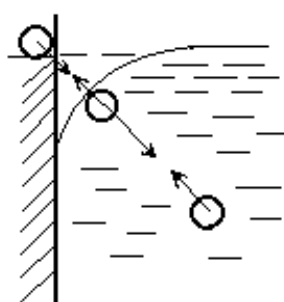


Рис. 1.2

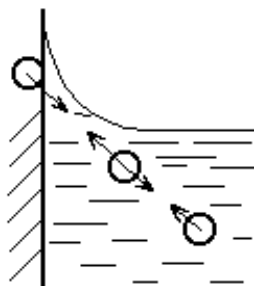


Рис. 1.3

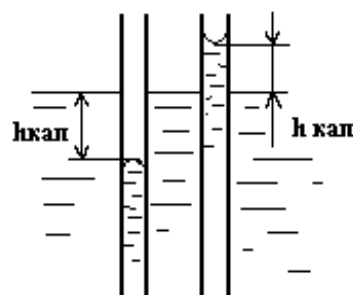


Рис. 1.4

Способность жидкостей в трубках малого диаметра подниматься или опускаться под воздействием сил поверхностного натяжения называется *капиллярностью*. Эффект капиллярности следует учитывать при создании жидкостных измерительных приборов во избежание погрешностей в их показаниях.

При увеличении диаметра трубки капиллярность проявляется слабее и при каком-то его значении исчезает. Например, для пары вода-стекло капиллярность уже не проявляется при $d > 10$ мм.

г) **Испаряемость** – свойство капельных жидкостей изменять свое агрегатное состояние на газообразное.

Парообразование на поверхности жидкости называется испарением.

Парообразование по всему объему жидкости – кипением.

Давление, при котором жидкость закипает при данной температуре, называется давлением насыщенных паров.

Явление вскипания жидкости, обусловленное понижением давления, называется «*кавитация*».

Явление сопровождается появлением на твердых поверхностях, соприкасающихся с жидкостью, парогазовых пузырьков. Каждый кавитационный пузырек, формируясь из ядра, растет до конечных размеров, после чего схлопывается. Весь процесс происходит в течение микросекунд. В месте схлопывания пузырька возникают местные напряжения, разрушающие твердую поверхность, что приводит к снижению эффективности машин и разрушению их элементов.

д) **Растворимость газа** в капельных жидкостях.

Все жидкости способны растворять газ, а при определенных условиях выделять его в виде пузырьков. Обычно в жидкостях в нормальных условиях газ растворяется в объеме до 2% от объема жидкости.

Эта величина зависит от давления, температуры и плотности жидкости.

е) ***Особые свойства воды*** (аномалии).

В отличие от других веществ, объем воды при понижении температуры от $+4$ до 0°C не уменьшается, а увеличивается, поэтому максимальная плотность воды достигается при $+4^{\circ}\text{C}$.

Удельная теплоемкость воды очень велика по сравнению с другими веществами и имеет минимум при $+30^{\circ}\text{C}$.

Раздел 1 (продолжение)

Тема 1.2: Модели жидкости. Силы, действующие в жидкости. Методы исследования движения жидкости. Элементы теории подобия.

Литература: [1] стр. 16-24; [3] стр. 16-18;

[5] стр. 10-11; 21-24; 56-58; 117-126; [6] стр. 21-23.

Модели жидкости

Существующие в природе жидкости весьма сложны для изучения и математического описания их движения. Поэтому используются упрощенные модели жидкости, учитывающие только те факторы, которые оказывают существенное влияние на результат решаемой задачи, условно считая, что остальные факторы играют в данной задаче несущественную роль.

Для всех жидкостей, рассматриваемых в гидравлике, принята гипотеза сплошности, предполагающая непрерывное распределение в жидкости всех расчетных физических характеристик. Введение этой гипотезы позволило все параметры рассматривать как непрерывные дифференцируемые функции координат и времени и использовать в гидравлике дифференциальный анализ. Поскольку таких жидкостей в природе не существует, то это и есть *модель сплошной среды*.

В целях упрощения постановки задач и их решения создана абстрактная модель *идеальной невязкой жидкости*, предполагающая отсутствие в жидкости касательных напряжений и абсолютную неизменяемость в объеме при изменении температуры и давления. Рассматривается, как правило, при теоретических исследованиях. *Модель реальной (вязкой) жидкости* предполагает наличие в жидкости внутреннего трения при ее движении, что значительно усложняет решение задач, но зато эта модель значительно ближе к реальной жидкости.

Поскольку в гидравлике рассматриваются жидкости сжимаемые и несжимаемые, то соответственно созданы модели:

- идеальная (невязкая) несжимаемая жидкость;
- идеальная (невязкая) сжимаемая жидкость (идеальный газ);
- реальная (вязкая) несжимаемая жидкость;
- реальная (вязкая) сжимаемая жидкость.

Существуют и другие модели, разрабатываемые для решения специальных задач.

Силы, действующие в жидкости

Вследствие текучести жидкости (подвижности ее частиц) в ней не могут действовать сосредоточенные силы, а возможно лишь действие сил, непрерывно распределенных по объему (массе) или поверхности. *По своей природе* действующие в жидкости силы можно разделить на две группы:

а) Силы объемные (или массовые), действующие на все частицы данного объема жидкости. К ним относятся: собственный вес жидкости, силы инерции, магнитогидродинамические силы и др.

б) Силы поверхностные, приложенные к той или другой поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем жидкости или проведенной внутри этого объема. К ним относятся: силы гидростатического и гидродинамического давлений, силы трения.

По отношению к какому-либо объему, выделенному в жидкости, все силы можно разделить еще на две группы:

в) Силы внешние, действующие на данный объем со стороны окружающей среды. Если силы приложены к поверхности, ограничивающей данный объем, то это внешние поверхностные силы, а если к каждой частице, входящей в этот объем, то это внешние объемные силы.

г) Силы внутренние – это всегда поверхностные силы взаимодействия частиц между собой. Внутренние силы всегда парные – их сумма по всему данному объему равна нулю.

Методы исследования движения жидкости

Различают аналитические, экспериментальные и полуэмпирические методы. Наиболее широкой является *группа аналитических методов*, которые заключаются в составлении дифференциальных (иногда интегральных) уравнений движения, учитывающих специфику конкретного гидромеханического явления и отыскании точных или приближенных решений этих уравнений. Математический аппарат, применяемый в гидравлике, весьма разнообразен. Чаще других используются дифференциальные уравнения и численные методы.

Экспериментальные методы, которые базируются на исследовании движения жидкости, путем прямых или косвенных измерений параметров реального потока или его модели.

С экспериментальными методами тесно связана, являясь их теоретической основой, *теория подобия*, устанавливающая те условия и правила, по которым следует строить модели и результаты эксперимента на модели переносить на натурный объект.

Полуэмпирические методы, которые заключаются в том, чтобы на основе некоторой модели явления теоретически установить структуру зависимости между искомыми параметрами, а входящие в нее константы отыскать экспериментально.

Элементы теории подобия

Возможны два типа экспериментов: с натурными объектами и с моделями.

Модели бывают воображаемые и материальные.

Воображаемые: модель идеальной жидкости, модель сплошной среды и т.д.

Материальные: воспроизведенный при помощи различных материальных устройств тот или иной процесс в жидкости, имеющий место в действительности.

Одним из основных вопросов при постановке гидромеханического эксперимента является вопрос о том, по каким правилам должна быть изготовлена модель используемого объекта и по каким зависимостям следует пересчитать данные опытов, чтобы получить достоверное описание натурального гидромеханического явления.

На этот вопрос дает ответ раздел гидравлики, называемый теорией подобия.

Общие положения этой теории сводятся к тому, что два физических явления подобны, если величины одного явления могут быть получены из соответствующих величин другого, взятых в сходственных пространственно-временных точках, простым умножением на одинаковые для всех точек множители, называемые масштабами подобия.

Геометрически подобными называются потоки, все соответствующие линейные размеры которых пропорциональны между собой: линейные величины $l_m = m_l l_n$; площади $S_m = m_l^2 S_n$; объемы $V_m = m_l^3 V_n$, где m_l – линейный масштаб.

Кинематически подобными называются потоки, в которых при выполнении геометрического подобия, направления скоростей течения одинаковы, а величины скоростей отличаются в одинаковое число раз: $V_{xm} = m_c V_{xn}$, где V_x – проекция скорости на ось X , m_c – масштаб скорости.

Динамически подобными называются потоки, в которых при геометрическом подобии выполняются еще три условия: в сходственных точках действуют одноименные силы; отношение между этими силами различаются в одинаковое число раз; начальные и граничные условия в потоках тождественны и отличаются только масштабами.

Совокупность геометрического, кинематического и динамического подобий составляет механическое или полное подобие.

Безразмерные комплексы, составленные из масштабов подобия, называются числами подобия. Числа подобия, составленные из масштабов, заклю-

ченных в постановке задачи, т.е. наперед заданных, называются критериями подобия. Например: число Рейнольдса $R_e = lV/\nu$ определяет соотношение между силами вязкости и силами инерции; число Фруда $F_r = V^2/gl$ определяет соотношение между внешними объемными силами и силами инерции.

Лекция -2

Раздел 2. ГИДРОСТАТИКА

Тема 2.1: Гидростатическое давление и его свойства.

Закон Паскаля. Гидравлический пресс. Классификация давлений.

Приборы и методы измерений давлений.

Дифференциальные уравнения равновесия жидкости Эйлера и их интегрирование для случая несжимаемой жидкости. Основное уравнение гидростатики.

Литература: [1] стр. 25-31; [3] стр. 19-22;

[4] стр. 11-17; [5] стр. 63-68;

[6]стр. 24-37.

Самостоятельно изучить: Поверхности равного давления. Условие равновесия.

Характерные случаи равновесия тяжелой несжимаемой жидкости.

Литература: [3] стр. 26-36.

Общие сведения

Гидростатикой называется раздел гидравлики, в котором рассматриваются законы равновесия жидкости и их практические приложения. В состоянии покоя в жидкости действуют силы массовые и поверхностные.

Из поверхностных касательные силы трения не возникают, а могут действовать только нормальные. Причем, на любой ограничивающей поверхности нормальные силы всегда направлены внутрь объема жидкости и, следовательно, являются сжимающими. Растягивающими усилиями в реальной жидкости можно пренебрегать из-за их малости. Таким образом, в покоящейся жидкости возможен лишь один вид напряжения – напряжение сжатия, называемое гидростатическим давлением.

Гидростатическое давление и его свойства

Условимся обозначать p – давление, P – сила давления.

Гидростатическое давление p в данной точке $p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta P}{\Delta S} \right|$, $\left(\frac{H}{m^2} \right)$, где ΔP -

сила, действующая на площадку ΔS при условии, что ΔS стягивается в точку.

В общем случае давление есть функция координат и времени $p = f(x, y, z, t)$

Гидростатическое давление имеет два основных свойства:

- первое – оно всегда направлено по внутренней нормали к рассматриваемой площадке;
- второе – величина его в данной точке не зависит от ориентации той площадки, на которую оно действует, т.е. давление в данной точке покоящейся жидкости одинаково во всех направлениях.

Из второго свойства вытекает **закон Паскаля**: давление на поверх-

ность жидкости, произведенное внешними силами, передается жидкостью во всех направлениях без изменения.

Гидравлический пресс (домкрат), рис. 2.1

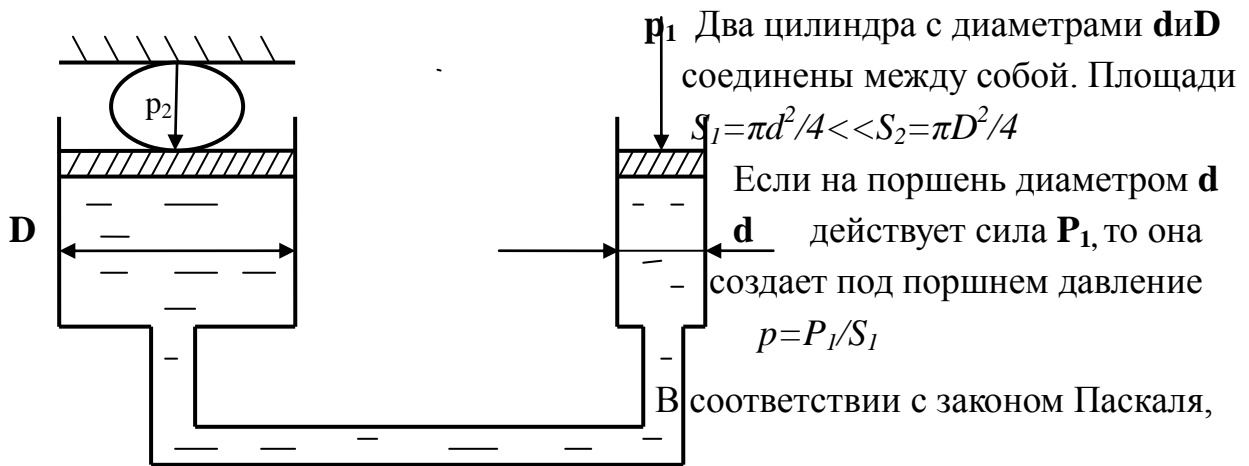


Рис.2.1

это давление без изменения передается под поршень с диаметром D и создает усилие

$$P_2 = P_1 S_1/S_2 = P_1 D^2/d^2$$

Дифференциальные уравнения равновесия жидкости (эйлеровы совокупности)

Рассмотрим равновесие элементарного прямоугольного параллелепипеда со сторонами dx, dy, dz , выделенного внутри покоящейся жидкости (рис.2.2). Пусть на все грани выделенного параллелепипеда действуют силы давления и на единицу массы этого параллелепипеда действует массовая сила F .

Расставим силы на рис. 2.2. Например, если на левую грань параллелепипеда действует поверхностная сила, равная произведению давления p на площадь грани $dy \cdot dz$, то на противоположную ей правую грань в общем случае должна действовать сила, отличная по величине от силы слева и противоположно ей направленная.

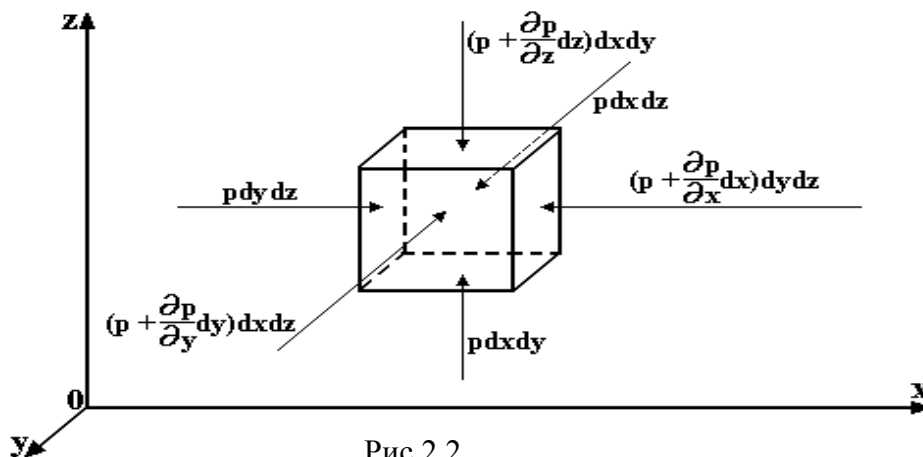


Рис.2.2

Величина и знак отличия неизвестны. Поэтому применяется формальный математический прием – к давлению p прибавляется некоторое приращение давления в направлении оси x , равное $\frac{\partial p}{\partial x} dx$, знак и величина которого определяются в процессе решения задачи. Массовая сила, действующая на выделенный объем вдоль оси x , представляется как произведение силы F_x , приложенной к единице массы жидкости внутри параллелепипеда, на массу жидкости $\rho dx dy dz$.

Тогда уравнение равновесия в проекции на ось x будет:

$$\left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right] \cdot dy \cdot dz + F_x \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0$$

После преобразований $\frac{\partial p}{\partial x} = \rho F_x$.

По аналогии в проекциях на оси y и z : $\frac{\partial p}{\partial y} = \rho F_y$, $\frac{\partial p}{\partial z} = \rho F_z$. Откуда:

$$\left. \begin{aligned} F_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ F_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ F_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Уравнения (2.1) называются *основными уравнениями гидростатики* или *дифференциальными уравнениями равновесия жидкости Эйлера*. Они пригодны и для несжимаемых и для сжимаемых жидкостей.

Равновесие тяжёлой несжимаемой жидкости. Выражение общего гидростатического закона.

Для удобства интегрирования уравнений (2.1) равновесия примем такую систему координат, у которой ось z направлена вниз (рис. 2.3).

Тогда, для единицы массы несжимаемой (капельной) жидкости при отсутствии других массовых сил, кроме сил тяжести $F = mg = 1 \cdot g$, где g – ускорение свободного падения, имеем:

$$F_x = F_y = 0; \quad F_z = +g.$$

Уравнения равновесия Эйлера (2.1) принимают вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = +\rho \cdot g$$

Первые два из этих уравнений выражают независимость давления от координат x и y , т.е. означают, что поверхности равного давления или поверхности уровня горизонтальные плоскости.

Интегрируем третье уравнение при условии $g = \text{const}$ и $\rho = \text{const}$ (плотность одинакова по всему объему, т.к. жидкость несжимаема):

$$dp = \rho \cdot g \cdot dz; \int dp = \rho \cdot g \int dz; \quad p = \rho \cdot g \cdot z + c' \quad (2.2)$$

Найдем постоянную интегрирования c' . Для этого поместим начало координат в точку покоящейся жидкости, в которой давление p_0 задано (например, для открытого сосуда давление на свободной поверхности равно атмосферному) (рис. 2.3). Тогда, как следует из последнего выражения при $z = 0$ $c' = p_0$.

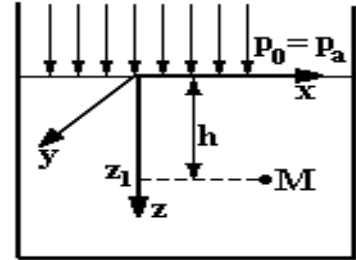


Рис. 2.3

Подставив значение постоянной c' в уравнение (2.2) получим величину гидростатического давления в виде: $p = p_0 + \rho g z$

Для двух точек с координатами $z_0 = 0$ и z_1 уравнение будет иметь вид

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \text{const}, \quad (2.3)$$

Откуда $p_1 = p_0 + \rho g(z_0 - z_1)$.

Величина $h = |z_0 - z_1|$ есть некоторая высота, показывающая насколько точка с координатой z_0 выше точки с координатой z_1 (другими словами h – это глубина погружения точки M под свободную поверхность жидкости). Тогда

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h \quad (2.4)$$

Раздел 2 Гидростатика (продолжение)

Тема 2.2: Сила давления жидкости на плоские и криволинейные поверхности.

Литература: [1] стр. 45-51; [5] стр. 71-78;
[6] стр. 37-41.

Самостоятельно изучить: Круглая труба, подверженная внутреннему гидростатическому давлению.

Литература: [1] стр. 51-55; [3] стр. 36-37.

Сила давления жидкости на плоские поверхности

Рассмотрим две задачи:

а) плоская поверхность **AB** горизонтальна, рис.2.4.а

б) плоская поверхность **AD** расположена под углом α к горизонту (в том числе и под углом 90° , т.е. плоскость вертикальна), рис.2.4б .

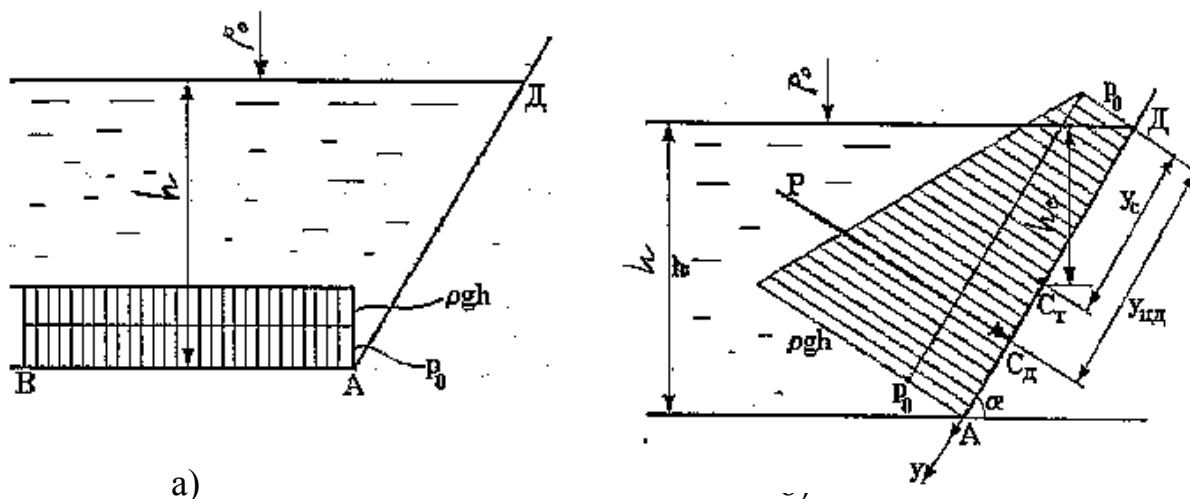


Рис. 2.4.

Решение задач сводится к определению:

- закона распределения давления по поверхности;
- величины суммарной силы давления на поверхность;
- направление и точки приложения главного вектора сил давления.

Величина суммарной силы давления (главный вектор сил давления) жидкости на горизонтальную плоскость, рис.2.4.а, определяется как:

$$P = pS = (p_0 + \rho gh) \cdot S, \quad (2.5)$$

где p - давление жидкости на поверхность, определяемое по формуле (2.4);

S - площадь поверхности.

Рассмотрим теперь плоскую стенку, наклоненную к горизонту под углом α , рис.2.4б.

Обозначим смоченную площадь наклоненной стенки S . Возьмем dS , на которой действует сила давления dP

$$P = p dS = (p_0 + \rho g h) dS.$$

Полная сила давления на боковую стенку будет

$$P = \int_S (p_0 + \rho g h) dS = \int_S p_0 dS + \rho g \int_S h dS.$$

Здесь $\int_S h dS = h_c S$ – статический момент площади S ,

где h_c – глубина погружения центра тяжести площади S под уровень свободной поверхности.

Тогда

$$P = p_0 S + \rho g h_c S = S(p_0 + \rho g h_c) \quad (2.6)$$

Из формулы (2.6) заключаем, что **сила давления на плоскую стенку равна гидростатическому давлению в центре тяжести смоченной поверхности, умноженному на площадь стенки.**

Диаграмма распределения давления по поверхности называется **эпюрой давления**. Поскольку основное уравнение гидростатики является уравнением прямой, то для её построения достаточно знать давления лишь в двух точках. Представив эти давления в масштабе в виде нормалей к плоскости и, соединив концы перпендикуляров прямой, получим **эпюру гидростатического давления**.

Давление на свободную поверхность p_0 согласно закону Паскаля передаётся жидкостью без изменений. Поэтому, эпюра p_0 и в случае горизонтальной плоскости и в случае плоскости расположенной под углом к горизонту, изображается в виде прямоугольника с высотой, численно равной p_0 , см. рис.2.4.

Избыточное давление в случае горизонтальной плоскости будет одним и тем же во всех точках поверхности потому, что глубина погружения h всех точек одинакова. Следовательно эпюра избыточного давления в этом случае – прямоугольник с высотой $\rho g h$, надстроенный над эпюрой давления p_0 в том же масштабе и по тем же правилам, см. рис.2.4.а..

В случае плоскости, установленной под углом к горизонту, рис. 3.1.б, в точке **Д** избыточное давление отсутствует (высота столба жидкости $h = 0$). В случае плоскости, установленной под углом к горизонту, рис. 3.1.б, в точке **Д** избыточное давление отсутствует (высота столба жидкости $h = 0$). В точке **А** избыточное давление ρgh . Суммарная эпюра давлений изображается в виде трапеции с основаниями:

- в точке **Д**, численно равными
- в точке **А**, численно равным $p_0 + \rho gh$.

Главный вектор сил давления согласно первому свойству гидростатического давления всегда направлен по внутренней нормали к рассматриваемой площадке.

Точка приложения главного вектора сил **C_g** называется **центром давления**. В общем случае центр давления расположен ниже центра тяжести **C_g** смоченной поверхности. Для определения координат точки его приложения в гидромеханике разработано несколько методов, применение которых зависит от сложности задачи и необходимой точности её решения.

В практических расчётах часто используют графо-аналитический метод.

Более просто использовать таблицу типичных случаев в которых приведены формулы для определения координат центра давления простых фигур.

В случае прямоугольной стенки можно использовать правило, согласно которому **главный вектор сил давлений направлен перпендикулярно к плоскости и проходит через центр тяжести эпюры**.

Для определения положения центра давления симметричных сложных фигур пользуются формулой:

$$y_{цд} = y_c + I_{xc} / y_c S$$

Здесь:

- ось **X**, см. рис. 2.4б, расположена по линии пересечения плоской фигуры с плоскостью свободной поверхности (в точке **Д** перпендикулярно плоскости рисунка);
- ось **У** - ось симметрии фигуры;
- **$y_{цд}$** и **y_c** – ординаты центра давления и центра тяжести смоченной площади фигуры;
- **I_{xc}** – момент инерции этой площади относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести площади и параллельной оси **X**.

Сила давления жидкости на криволинейную поверхность

Определить силу давления жидкости на криволинейную поверхность сложнее, чем на плоскую, т. к. элементарные силы давления dP_1 и dP_2 и т.д., рис. 2.15, будучи перпендикулярными к соответствующим элементарным площадкам dS_1, dS_2 и т.д., оказываются как не одинаковыми по величине, так и не параллельными между собой, что затрудняет их суммирование.

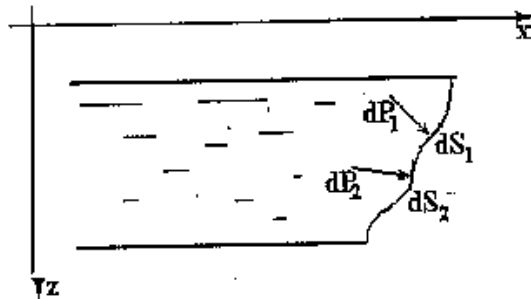


Рис.2.5.

В общем случае они образуют систему сил, как угодно ориентированных в пространстве. Для такой системы вектор полной силы давления находится как:

$$\vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y + \vec{P}_z;$$

а ее модуль -
$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$$

где P_x, P_y, P_z - суммы проекций элементарных сил на оси координат.

Направление результирующей силы давления определяется направляющими косинусами:

$$\cos(P \wedge x) = P_x / P; \cos(P \wedge y) = P_y / P; \cos(P \wedge z) = P_z / P.$$

Рассмотрим относительно простой, но часто встречающийся случай цилиндрической поверхности рис.2.6. Образующие этой поверхности перпендикулярны плоскости рисунка (параллельны оси y); Возьмем на цилиндрической поверхности CD , элементарную площадку dS . Величина суммарного давления на нее $dP = p dS$,

где p - гидростатическое давление в центре площадки dS . Проекции этой силы на оси координат будут:

$$dP_x = dP \cos \alpha = p dS \cos \alpha$$

$$dP_z = dP \sin \alpha = p dS \sin \alpha$$

Обозначим $dS \cos \alpha = dS_z$ и $\sin \alpha = dS_x$ вертикальная и горизонтальная проекции элементарной площадки соответственно. С учетом формулы основного уравнения гидростатики

$$dP_x = (p_0 + \rho gh) dS_z \quad (2.7)$$

$$dP_z = (p_0 + \rho gh) dS_x \quad (2.8)$$

Выражение для (dP_x) проинтегрируем и получим:

$$P_x = p_0 S_z + \rho gh_c S_z = (p_0 + \rho gh_c) S_z \quad (2.9.)$$

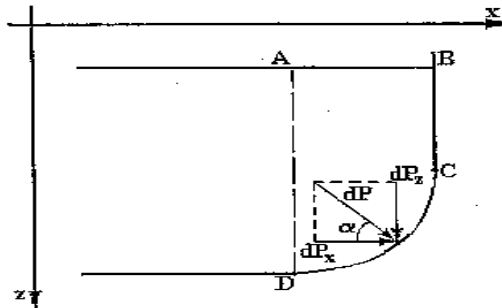


Рис 2.6.

где $p_0 + \rho gh_c$ – гидростатическое давление в центре тяжести проекции цилиндрической поверхности на вертикальную плоскость;

S_z - площадь вертикальной проекции цилиндрической поверхности.

Проинтегрируем выражение (2.8)

$$P_z = p_0 S_x + \rho g \int_S h dS_x = p_0 S_x + \rho g V \quad (2.10)$$

где $\int_S h dS_x = V$ - объем призмы, **ABCD**, образованной цилиндрической поверхностью **CD**, её проекций на свободную поверхность жидкости **AB**, вертикальными проектирующими плоскостями **BC** и **AD** и называемой «тело давления».

$\rho g V$ - вес жидкости в объеме тела давления, который и создает усилие на криволинейную поверхность.

Сила, действующая на тело давления, может иметь различные знаки. Если объем тела давления заполнен жидкостью, то P_z направлена вниз что совпадает с

направлением оси Z и имеет знак «плюс». Если объем тела давления не заполнен, то P_z направлена вверх что противоположно направлению оси Z имеет знак «минус».

Итак горизонтальная составляющая силы гидростатического давления на криволинейную поверхность равна силе давления на её вертикальную проекцию.

Линия – действия горизонтальной составляющей проходит через центр давления вертикальной проекции (т.е. через центр тяжести эпюры давлений на вертикальную проекцию).

Вертикальная составляющая силы гидростатического давления равна весу жидкости в объеме тела давления, линия действия её проходит через центр тяжести тела давления.

Модуль равнодействующей :

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} . \quad (2.11)$$

Направление равнодействующей определяется углом

$$\alpha = \arctg P_z / P_x (2.12)$$

Т.к. численные значения и направления составляющих сил известны то направление равнодействующей и точку приложения можно найти графически.

Лекция -3

Раздел 2. Гидростатика (продолжение)

Тема 2.3: Закон Архимеда.

Условия равновесия тел, плавающих в жидкости. Остойчивость.

Литература: [1] стр. 57-61; [5] стр. 43-47.

Условия равновесия тел, плавающих в жидкости.

В простейшем и наиболее часто встречающемся случае на погруженное в жидкость тело **ABCD** рис.2.7.объемом **V** действуют сила тяжести **G** и поверхностные силы гидростатического давления, величина и направление действия результирующей которых могут быть определены по приведенным в предыдущей лекции правилам .

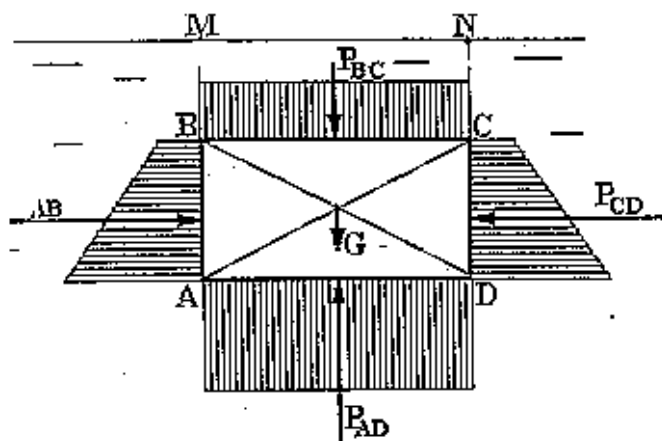


Рис. 2.7.

Сила тяжести **G** приложена в центре тяжести тела и направлена вертикально вниз. Горизонтальные силы давления симметричны и взаимно уравниваются $P_{AB} = P_{CD}$. Вертикальные силы давления равны весу жидкости в соответствующем теле давления.

$P_{BC} = \rho g V_{BCNM}$, действует по внутренней нормали к поверхности **BC** и, как видно из рисунка, направлена вертикально вниз.

$P_{AD} = \rho g V_{ADNMA}$ и направлена вертикально вверх. Результирующая сил

$$P = P_{AD} - P_{BC} = \rho g (V_{ADNMA} - V_{BCNM}) = \rho g V_{ABCD} \quad (2.13)$$

направлена вверх.

Выражение (2.13) отражает закон Архимеда: на погруженное в покоящуюся жидкость тело, действует со стороны жидкости вертикальное подъемное усилие равное весу вытесненной телом жидкости.

Сила называется **архимедовой силой** или **взвешивающей силой**, или **подъемной силой**, или **водоизмещением**. Точкой приложения силы **P** является **центр тяжести объема вытесненной жидкости**, который также называют **центр величины, центр водоизмещения, центр давления**.

В зависимости от соотношения величин силы тяжести и архимедовой силы различают три случая плавучести:

Тело тяжелее вытесняемой им жидкости (**$G > P$**)-оно тонет (ложится на дно).

Вес тела и вес вытесняемой им жидкости равны (**$G = P$**). Тело внутри жидкости, в принципе, может занимать любое положение. Как правило, оно ориентировано так, что центр тяжести ниже центра давления, тело находится в состоянии устойчивого равновесия. Возможен также случай, когда центр тяжести и центр давления совпадают, тогда говорят о безразличном равновесии (тело может быть повернуто вокруг точки центра тяжести-центр давления на любой угол и останется в таком положении до момента воздействия другой внешней силы).

Вес тела меньше, чем возникающая при полном погружении архимедова сила (**$G < P_n$**). Тело будет всплывать над свободной поверхностью до тех пор, пока вес жидкости вытесняемой погруженной частью тела не станет равными весу тела.

Остойчивость

Линия пересечения свободной поверхности водоёма с боковой поверхностью, плавающего тела называется **ватерлинией**. Плоскость в пределах тела, ограниченная ватерлинией называется плоскостью плавания. Вертикальная ось симметрии нормальная к плоскости плавания и проходящая через центр тяжести **плавающего** тела называется осью плавания. Часть водонепроницаемого объема плавающего тела, расположенная выше плоскости плавания называется запасом плавучести.

Способность плавающего тела, выведенного из равновесия внешней силой, возвращаться в первоначальное положение после прекращения действия этой силы называется **остойчивостью** (начальная статическая остойчивость).

Остойчивость, которую имеет продолговатый предмет (например, судно) при продольных наклонениях (дифференте), называют **продольной**. Она, как правило, достаточно велика; поэтому опасность опрокидывания через нос или корму не возникает. Остойчивость, которую судно имеет поперечных наклонениях (крене) называют **поперечной**.

Для того, чтобы плавающее на свободной поверхности тело обладало остойчивостью ему необходимо придать такую форму, чтобы при отклонении от исходного (прямого) положения - происходило изменение очертания вытесняемого объема жидкости и как следствие, остаточное смещение его центра тяжести, т.е., точки приложения поддерживающей силы в сторону крена.

Рассмотрим пример поперечной остойчивости. Обозначим центр тяжести судна через C_T , а центр тяжести вытесненного объема жидкости (центр давления) через D . Обе точки C_T и D лежат на оси плавания. Примем условие, что центр тяжести при любом изменении положения судна не смещается. У абсолютного большинства судов центр тяжести C_T находится выше центра давления D . В этом случае может наблюдаться как устойчивое равновесие, так и неустойчивое. Пусть судно, у которого точка C_T расположена выше точки D плавает на ровном киле, рис.2.8а.

Линии действий сил P и G совпадают, силы направлены строго навстречу друг другу. При крене, рис.2.8б, центр давления переместится в

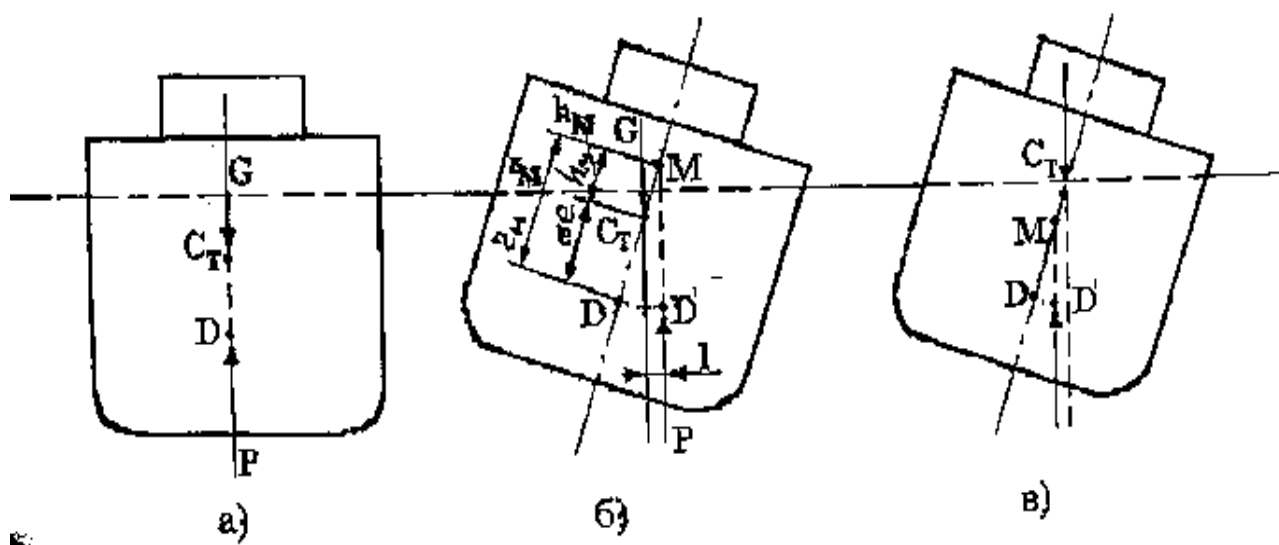


Рис.2.8

сторону крена и займет положение D' .

Линия действия силы пересечет ось плавания в точке M , которая называется метacentром. Если метacentр оказался выше центра тяжести, как, но на рис.2.8.б, то возникает восстанавливающий момент, который после снятия кренящего усилия возвращает судно в исходное (прямое) положение. Такое судно устойчиво.

При другой конфигурации корпуса и ином расстоянии между центром тяжести и центром давления может наблюдаться случай, когда линия действия силы поддержания пересечет ось плавания ниже центра тяжести, рис.2.8 в. Возникает опрокидывающий момент. Такое судно не устойчиво.

Расстояние между центром тяжести C_T и метacentром M обозначается h_m , и называется метacentрической высотой. Расстояние между центром тяжести C_T и центром давления D - эксцентриситет e . Расстояние между метacentром M и центром давления D - метacentрическим радиус r_T :

Расстояние между линиями действия силы тяжести и силы поддержания - плечо устойчивости l .

Метacentрическая высота и плечо устойчивости зависят от объема и очертания погруженной части судна, а также от положения центра тяжести.

Более устойчивы широкие суда и суда с низким расположением центра тяжести. В зависимости от взаимного расположения точек **М** и **С_т** различают три случая устойчивости:

С учетом введенных обозначений:

- а) если точка **М** оказалась выше точки **С_т**, то метацентрическая высота положительна (**h_м>0**) и судно устойчиво;
- б) если точка **М** оказалась ниже точки **С_х**, то метацентрическая высота отрицательна (**h_м<0**) и судно не устойчиво;
- в) если точка **М** совпала с точкой **С_т**, то метацентрическая высота равна нулю (**h_м=0**) и наблюдается случай безразличного равновесия.

При углах крена до 15° можно считать, что метациентр не смещается, а центр давления смещается в сторону крена по дуге окружности, описанной из метациентра метациентрическим радиусом.

Однако, при больших углах крена эта закономерность нарушается, метациентр смещается в сторону центра тяжести и тем больше, чем больше угол крена. Восстанавливающий момент уменьшается и наступит так состояние, когда он станет равным нулю, а затем возникнет опрокидывающий момент.

Метациентрическая высота при малых углах крена вычисляется по формуле

$$h_m = \frac{I}{V} - e, ,$$

где **I** - момент инерции площади ватерлинии относительно выбранное оси (продольной или поперечной), **V**- объем погруженной части судна (видоизменение),**e**- эксцентриситет. Восстанавливающий момент

$$M = Gl = Gh_m \sin \alpha,$$

где **G**- вес судна , **l**- плечо устойчивости, **α** - угол крена.

Раздел 3. **КИНЕМАТИКА**

Тема 3.1: Модели течений. Уравнение сплошности для одномерного (струйного) течения. Понятия расхода. Приборы и методы измерения расхода.

Литература: [1] стр. 18-20,73; [3] стр. 42-43, 46-47;
[4] стр. 20-32; [5] стр. 33-35; [6] стр. 53-55.

Самостоятельно изучить: Методы Лагранжа и Эйлера. Теорема Коши – Гельмгольца. Задание движения сплошной среды.

Литература: [1] стр. 66-69, стр. 73-80
[3] стр. 39-42, 40-42; 43-46; [6] стр. 48-52.

Модели течений (классификация течений)

В общем случае течение жидкости весьма сложно для изучения и математического описания. Поэтому используются упрощенные модели течений, которые позволяют изучать какие-то отдельные стороны этого явления, условно считая, что остальные параметры в данной задаче играют несущественную роль.

Течения делят на:

Вихревые и безвихревые (потенциальные). Вихревое – это такое, в котором частичка жидкости одновременно с другими формами движения вращается вокруг мгновенной оси. Если вращательная составляющая отсутствует, то это течение безвихревое.

Установившиеся и неуставившиеся. Установившимся движением называется такое, при котором все параметры, характеризующие движение в любой точке пространства, не меняются во времени. При неуставившемся движении параметры меняются во времени.

Одномерные (струйные), двумерные (плоские), трехмерные (пространственные). В струйной модели течения параметры меняются в функции одной координаты, в плоской – функции двух координат, в пространственной – в функции трех координат.

Ламинарные и турбулентные. Ламинарное – это течение без перемешивания слоев, турбулентное – с интенсивным перемешиванием.

Равномерные и неравномерные. Равномерное (оно же параллельно-струйное) – это течение, у которого скорость вдоль потока остается постоянной, причем, эпюра скоростей не деформируется. Неравномерное – это течение, у которого вдоль потока либо переменная скорость, либо скорость остается постоянной, но эпюра скоростей деформируется.

Напорные, безнапорные и свободные струи. Напорным течением называется такое течение, при котором поток со всех боковых сторон ограничен твердыми стенками. Безнапорным течением называется течение, характеризующееся наличием свободной поверхности. Свободной струей жидкости называется поток, вовсе не ограниченный твердыми стенками.

Уравнение сплошности для одномерного (струйного) течения

Выделим в потоке отдельную струйку жидкости (рис 3.1). Пусть в контрольном сечении **0-0**, проведенном перпендикулярно оси струйки, площадью S_0 будут параметры p_0 , t_0 , ρ_0 , v_0 , а в аналогичном сечении **1-1** площадью S_1 будут параметры p_1 , t_1 , ρ_1 , v_1 . Согласно закону сохранения массы, расход жидкости во всех сечениях отдельной струйки неизменен. Поэтому, для произвольно взятых контрольных сечений **0-0** и **1-1** можно записать:

$$G = S_0 V_0 \rho_0 = S_1 V_1 \rho_1 = \dots = const, \quad (3.1)$$

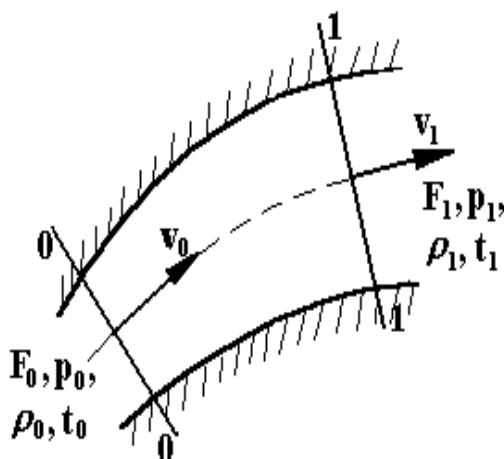


Рис.3.1

или в дифференциальной форме:

$$\frac{dS}{S} + \frac{dv}{v} + \frac{d\rho}{\rho} = 0. \quad (3.2)$$

Расход – это количество жидкости, протекающее через живое сечение потока (в данном случае струйки) за единицу времени

Различают:

- расход объемный $Q = Sv$ (m^3/c , л/с, $m^3/ч$ и т.д.);
- расход массовый $G = Sv\rho$ (кг/с, кг/ч, т/ч и т.д.) (как в уравнении 3.1)

Для определения расхода необходимо знать закон распределения скорости по живому сечению. В случае движения невязкой жидкости скорость распределена равномерно.

В случае же движения вязкой жидкости определить закон распределения скорости во многих случаях не представляется возможным. Поэтому вводится понятие о *средней скорости*.

Средней называется такая фиктивная скорость, при которой через живое сечение протекает такой же расход, как при действительном распределении скоростей. Измерение расхода производят:

- мерными баками;
- механическими счетчиками (объемными и скоростными);
- расходомерами обтекания;
- по перепаду статических напоров на сужающих устройствах*;
- ультразвуковыми расходомерами;
- с помощью гидродинамических трубок*;
- и другими способами.

Раздел 4. Общие уравнения динамики жидкости.

Тема 4.1: Напряжение в вязкой жидкости. Уравнение движения вязкой жидкости в напряжениях. Закон Ньютона о трении в жидкостях.

Уравнения Навье – Стокса и Бернули.

Литература: [1] стр. 141-156; [3] стр. 48-56; [4] стр. 50-52;

[5] стр. 60-62, 79-89, 135-138; [6] стр. 66-68, 74-76.

Жидкость называется **вязкой**, если она при своём движении оказывает сопротивление сдвигающим усилиям. В такой жидкости при движении возникают силы внутреннего трения, вследствие чего вязкая жидкость по своим механическим свойствам существенно отличается от невязкой. Происхождение сил вязкости кроется в молекулярном строении материи. Существующие в природе жидкости всегда вязкие, поэтому их называют ещё **реальными**.

Если действующие в жидкости силы инерции пренебрежимо малы по сравнению с силами вязкости, то такая жидкость **сильно вязкая**.

Если силы внутреннего трения малы по сравнению с другими, то жидкость **мало вязкая**.

Напряжения в вязкой жидкости

Силы, препятствующие деформации жидкости при действии на неё внешних сил, рассчитанные на единицу площади, называются **напряжениями**.

Напряжение, действующее в точке **М** на произвольно выделенной в вязкой жидкости элементарной площадке ΔS (рис.5.1) $p_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta S}$.

Вследствие наличия внутреннего трения, в вязкой жидкости сила ΔP ,

а значит и напряжение p_n могут быть направлены под любым углом к площадке ΔS . Поэтому в вязкой жидкости напряжения можно представить как геометрическую сумму **нормального напряжения** p_{nn} , которое является проекцией напряжения p_n на нормаль **n-n** к площадке ΔS , и **касательного напряжения** τ_n , которое является проекцией того же напряжения p_n на плоскость, касательную к ΔS в точке **М**. Именно это касательное напряжение характеризует

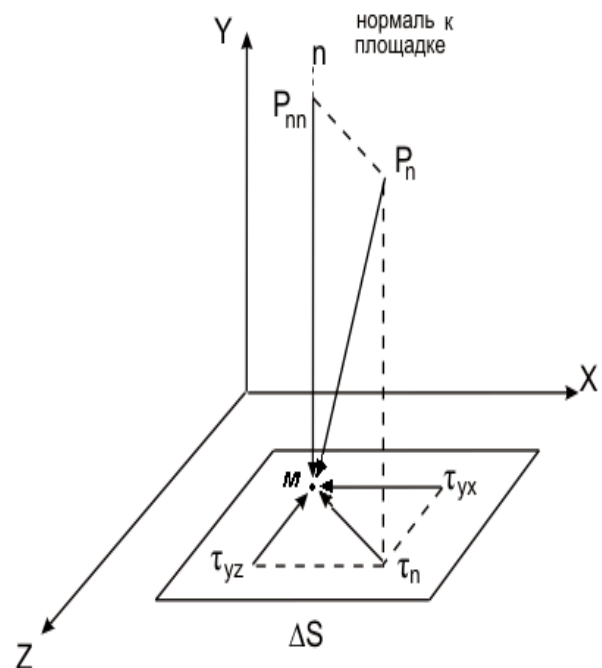


Рис. 4.1

внутреннее трение в жидкости.

Если площадку ΔS совместить с одной из координатных плоскостей, то в общем случае напряжение τ_n можно спроектировать на соответствующие оси координат. В обозначениях проекций первый индекс указывает направление нормали к площадке, по которой действует напряжение, второй – указывает, на какую ось спроектировано напряжение.

Вектор гидродинамического напряжения p_n , действующего на произвольно ориентированную в вязкой жидкости площадку, однозначно определяется в системе координат x, y, z тремя нормальными и шестью касательными напряжениями. Их совокупность называется **тензором вязких напряжений**.

$$\begin{pmatrix} p_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & p_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & p_{zz} \end{pmatrix} = P_{BH} \quad (4.1)$$

Тензор обладает свойством парности касательных напряжений, согласно которому:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{xy} = \tau_{yx}. \quad (4.2)$$

Уравнения движения вязкой жидкости в напряжениях

Для составления таких уравнений следует выделить в потоке вязкой жидкости элементарный фиксированный объём в виде параллелепипеда и разместить его в прямоугольной системе координат, как на рис.4.2.

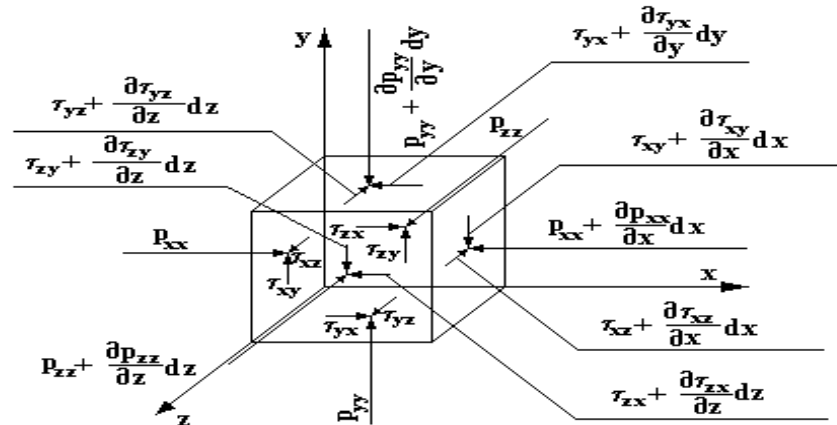


Рис. 4.2

На гранях его действуют поверхностные силы, определяемые, указанными на рис 4.2 напряжениями. Из внешних объёмных сил действуют такие, проекции которых на оси координат равны F_x, F_y, F_z .

К выделенному объёму приложены ещё силы инерции, проекции которых на те же оси координат имеют следующие значения:

$$j_x = -\frac{dv_x}{dt}, \quad j_y = -\frac{dv_y}{dt}, \quad j_z = -\frac{dv_z}{dt}.$$

Проектируя все эти силы на ось **x** и в соответствии с принципом Д'Аламбера приравнивая сумму их нулю получим:

$$\begin{aligned} \rho F_x dx dy dz - \rho \frac{dv_x}{dt} dx dy dz + p_{xx} dy dz - \left(p_{xx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz + \\ + \tau_{yx} dx dz - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz + \tau_{zx} dx dy - \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично, проектируя указанные силы на оси **y** и **z**, после элементарных преобразований будут получены **дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости в напряжениях**:

$$\left. \begin{aligned} F_x - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) &= \frac{dv_x}{dt} \\ F_y - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) &= \frac{dv_y}{dt} \\ F_z - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) &= \frac{dv_z}{dt} \end{aligned} \right\}. \quad (4.3)$$

Добавив к ним уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (4.4)$$

придём к системе из четырёх уравнений.

Если считать, что для случая несжимаемой жидкости внешние объёмные силы F_x , F_y , F_z и плотность ρ заданы, то с учётом (4.2) парности касательных напряжений неизвестными искомыми функциями будут:

$$v_x, v_y, v_z, p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, \tau_{yx} = \tau_{xy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}, \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Система оказалась пять раз разомкнута (для определения девяти неизвестных имеется только четыре уравнения). В случае сжимаемой жидкости для того, чтобы замкнуть полученную систему уравнений, необходимо ещё определить взаимосвязь между давлением и плотностью.

Получить недостающие уравнения из общих законов механики невозможно. Их можно определить только из анализа опытных данных. Впервые такой анализ выполнил Ньютон, который сформулировал гипотезу о внутреннем трении в вязкой жидкости.

Гипотеза (закон) Ньютона о трении в жидкости. Значение касательных и нормальных напряжений

Сила трения между слоями прямолинейно движущейся жидкости, во-первых, зависит от механических свойств жидкости; во-вторых, пропорциональна величине площади соприкосновения слоев; в-третьих, пропорциональна относительной скорости движения слоёв; в-четвёртых, непосредственно не зависит от нормального к площади соприкосновения слоёв напряжения.

Четвёртое положение отражает одно из отличий трения между слоями жидкости от трения между твёрдыми телами, где сила трения пропорциональна сжимающей их силе, направленной перпендикулярно плоскости трения. В жидкостях трение не зависит от нормального напряжения (т.е. от давления), если под его воздействием механические характеристики жидкости не меняются. Если же плотность и вязкость изменяются, то трение зависит от давления, но уже опосредовано через механические характеристики.

В простейшем случае прямолинейного ламинарного движения:

$$\tau = -\mu \frac{\partial v}{\partial n}. \quad (4.5)$$

Здесь μ – динамическая вязкость, знак «минус» свидетельствует о том, что напряжения трения направлены напротив направления скорости.

Входящий в формулу (4.5) градиент скорости по нормали $\frac{\partial v}{\partial n}$ в рассматриваемом случае прямолинейного ламинарного движения выражает **угловую скорость сдвига**.

Предложенная Ньютоном вначале в качестве гипотезы, формула (4.5) подверглась в дальнейшем тщательной опытной проверке. В настоящее время она общепринята в гидромеханике при расчётах касательных напряжений в ламинарных потоках и в большинстве случаев воспринимается и трактуется как **закон взаимосвязи между напряжениями и скоростями деформаций**.

Доказано, что это уравнение представляет частный случай более общего, соответствующего любому пространственному движению вязкой жидкости, закона линейной связи между тензором напряжений (4.1) и тензором скоростей деформаций (3.7) – обобщённого закона вязкости Ньютона.

Жидкости, удовлетворяющие этому закону называются ньютоновскими. К ним относятся вода, воздух, нефть, нефтепродукты, ртуть и др.

Связь между вязкими касательными напряжениями, действующими на различным образом ориентированных площадках, и скоростями деформаций, полученная с помощью закона Ньютона, будет:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} &= -2\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \mu \gamma_z \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= -2\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = \mu \gamma_y \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= -2\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \mu \gamma_x \end{aligned} \right\}. \quad (4.6)$$

Здесь $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ – проекции угловой скорости сдвига.

Связь между нормальными напряжениями и скоростями деформаций выражается следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= p - 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}(\mathbf{v}) \\ p_{yy} &= p - 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}(\mathbf{v}) \\ p_{zz} &= p - 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}(\mathbf{v}) \end{aligned} \right\}. \quad (4.7)$$

В случае движения несжимаемой жидкости, когда $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= p - 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ p_{yy} &= p - 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ p_{zz} &= p - 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned} \right\}. \quad (4.8)$$

Из полученных зависимостей следует ещё одно отличие законов трения в жидкости от законов трения твёрдых тел. В жидкости напряжения в соответствии с обобщённым законом вязкости Ньютона пропорциональны относительным скоростям деформаций, а в твёрдых упругих телах согласно закону Гука напряжения пропорциональны соответствующим относительным деформациям.

Однако, как показывает опыт, не во всех вязких жидкостях связь между касательными напряжениями и скоростями деформаций подчиняется обобщённому закону вязкости Ньютона.

Жидкости, в которых эта связь не подчиняется закону Ньютона, называются аномальными или неньютоновскими. К ним относятся некоторые смазочные масла при низких температурах, коллоидные растворы, масляные краски, глинистые растворы, растворы в воде некоторых высокополимерных соединений, пасты, кремы и др. Движение подобных аномальных жидкостей исследуется в реологии и в специальных разделах гидромеханики.

Дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости Навье-Стокса и уравнение Бернулли для вязкой несжимаемой жидкости

Уравнения Навье-Стокса получаются из уравнений движения в напряжениях путём подстановки в них значений нормальных и касательных напряжений, полученных с помощью закона Ньютона о трении в жидкостях. После преобразований, полагая $\mu = \text{const}$, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 v_x + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \text{div}(\mathbf{v}\mathbf{v}) \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v_y + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \text{div}(\mathbf{v}\mathbf{v}) \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 v_z + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \text{div}(\mathbf{v}\mathbf{v}) \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Здесь $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ – кинематический коэффициент вязкости, ∇^2 – оператор Лапласа.

В случае движения несжимаемой жидкости $\text{div}(\mathbf{v}) = 0$.

Эти уравнения отличаются от выведенных ранее уравнений движения невязкой жидкости членами, учитывающими силы вязкости. При заданных внешних объёмных силах F_x, F_y, F_z , плотности ρ и вязкости μ система дифференциальных уравнений замкнута. Чтобы получить конкретные решения, надо задать ещё начальные и граничные условия для искомых функций.

Если из объёмных сил действует только сила тяжести, то из последней системы путем преобразований, легко получить уравнение Бернулли для элементарной струйки:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{w1-2}. \quad (4.10)$$

Поток жидкости представляется как совокупность элементарных струек, для каждой из которых справедливо уравнение Бернулли в форме (5.10). Если в сечениях потока I и II движение плавно изменяющееся, то скорость в любой точке потока представляется как $v = v_{cp} + \Delta v$ и уравнение примет вид:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_{1cp}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_{2cp}^2}{2g} + h_{wI-II}. \quad (4.11)$$

Здесь α – всегда больше единицы, характеризует отношение действительной энергии к ее значению, определяемому по средней скорости, и называется

коррективом кинетической энергии на неравномерность скоростей или коэффициентом Кориолиса. При ламинарном режиме течения в круглой цилиндрической трубе принимают $\alpha=2$, при турбулентном – $\alpha=1,1$; h_{wI-II} – потеря гидродинамического напора в потоке между сечениями I и II. В общем случае h_{wI-II} не равно h_{wI-2} .

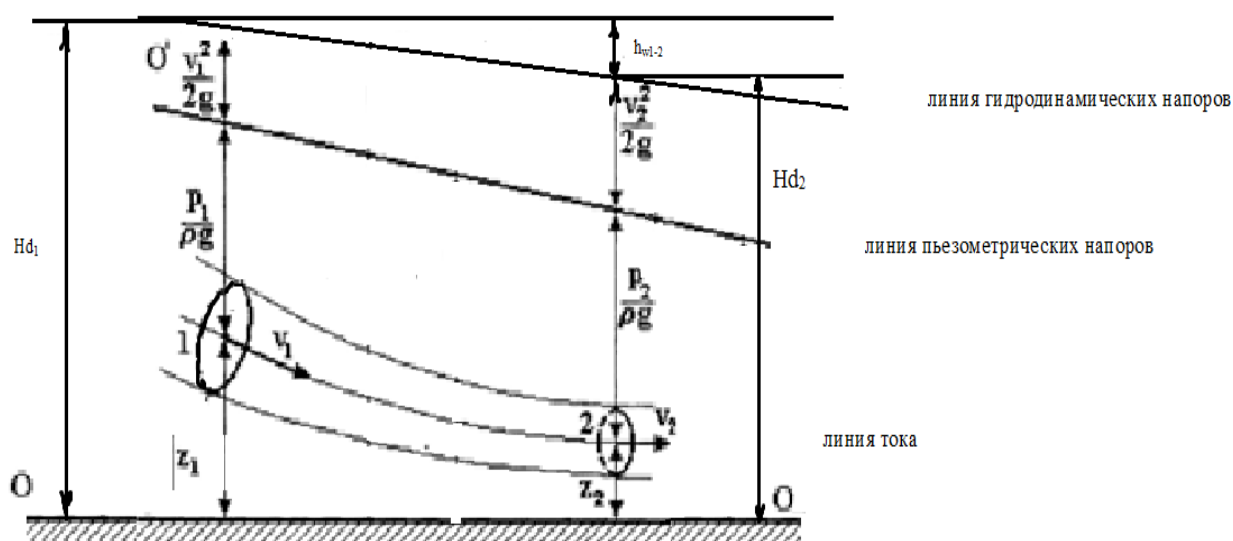


Рис.4.3

Истолкование смысла членов уравнения Бернулли для вязкой несжимаемой жидкости

Различают: геометрическое представление, гидродинамический смысл и энергетический смысл членов уравнения Бернулли.

Геометрическое представление. Выделим в потоке элементарную струйку, осью которой является линия тока (рис. 4.3).

Все члены уравнения Бернулли (4.10) или (4.11) имеют размерность длины и поэтому могут быть представлены вертикальными отрезками:

z – высотная отметка или нивелирная высота, представляет собой расстояние по вертикали от рассматриваемой точки до некоторой горизонтальной плоскости **О-О**, которую называют плоскостью сравнения; $\frac{p}{\rho g}$ – высота гидродина-

мического давления; $\frac{v^2}{2g}$ – скоростная высота.

Гидродинамический смысл. Члены уравнения Бернулли ещё называют напорами, так как каждый из них может быть заменён высотой соответствующего столба жидкости: $\frac{p}{\rho g}$ – представляет собой высоту такого столба жидкости, который в данной точке линии тока создаёт давление, равное гидродинамическому давлению p ; $\left(z + \frac{p}{\rho g}\right) = H_s$ – статический напор; $\frac{v^2}{2g} = H_v$ – скоростной напор; $\left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}\right) = H_s + H_v = H_d$ – гидродинамический напор.

Линия, проведённая через верхние концы гидродинамических напоров, называется напорной линией. На рис.4.3. это линия $O'-O'$.

Часто в практических задачах рассматривается не абсолютное давление в точке, а избыточное. Тогда вводят понятие избыточного гидродинамического напора $H'_d = z + \frac{p - p_a}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}$. Сумма $z + \frac{p - p_a}{\rho g} = H_p$ – пьезометрический напор.

Энергетический смысл. z – потенциальная энергия положения; $\frac{p}{\rho g}$ – потенциальная энергия давления; $z + \frac{p}{\rho g}$ – потенциальная энергия в точке потока; $\frac{v^2}{2g}$ – кинетическая энергия потока; $z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = e$ – механическая энергия.

Величина h_{w1-2} имеет размерность длины, то есть такую же как и все его другие члены и может быть изображён вертикальным отрезком (рис. 4.3).

Всегда $h_{w1-2} > 0$, следовательно гидродинамический напор H_{d2} всегда меньше H_{d1} . В связи с этим величину h_{w1-2} называют **потерей гидродинамического напора** на участке линии тока 1-2. В таком случае напорная линия $O'-O'$ всегда будет понижающейся. Её **уклон** определяется по формуле:

$$I = \frac{d}{dl} \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \right). \quad (4.12)$$

Гидравлический уклон характеризует интенсивность изменения общего запаса удельной механической энергии потока по его длине. Для трубопровода постоянного диаметра, постоянной шероховатости и без местных сопротивлений линия гидродинамических напоров будет прямой, а гидравлический уклон постоянным и равным среднему

$$I = I_{\text{cp}} = \frac{h_{w1-2}}{l} = \frac{\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}\right)}{l}. \quad (4.13)$$

Интенсивность изменения удельной потенциальной энергии характеризуется **пъезометрическим уклоном**

$$i = \frac{d\left(z + \frac{p}{\rho g}\right)}{l}. \quad (4.14)$$

В отличие от гидравлического пьезометрический уклон в зависимости от конфигурации трубы может быть положительным, отрицательным и равным нулю. Соответственно этому линия пьезометрических напоров может быть понижающейся, повышающейся и горизонтальной.

Для трубы с постоянным диаметром и шероховатостью, без местных сопротивлений пьезометрический уклон будет равен среднему:

$$i = i_{\text{cp}} = \frac{\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right)}{l}, \quad (4.15)$$

а линия пьезометрических напоров прямой, понижающейся.

С энергетической точки зрения h_{w1-2} определяет разность между значениями удельных механических энергий в точках 1 и 2, взятых на одной и той же линии тока. Эта разность энергии затрачивается на работу сил вязкости при перемещении единицы веса жидкости по линии тока от точки 1 до точки 2.

Поэтому h_{w1-2} ещё называют **потерей удельной механической энергии**.

При установившемся движении вязкой несжимаемой жидкости удельная механическая энергия по линии тока в направлении течения жидкости непрерывно уменьшается. Закон сохранения энергии при этом не нарушается, ибо потерянная механическая энергия, затраченная на работу сил вязкости превращается в тепловую энергию.

Лекция-4

Раздел 5.

Прикладная гидравлика

Тема 5.1: Общие характеристики режимов течения. Опыты Рейнольдса.

Ламинарный и турбулентный режимы движения.

Литература: [2] стр.5-12; [3] стр. 65-73;

[4] стр. 45-46; [6] стр. 79-83, 89-93.

Общие характеристики режимов течения. Опыты Рейнольдса.

Вопрос о существовании двух качественно различных режимов течения жидкости наиболее полно был исследован О. Рейнольдсом. Установка, на которой Рейнольдс проводил эксперименты (рис.5.1), состояла из стеклянной трубки **1**, в которую поступала жидкость из резервуара **2**. Скорость движения жидкости регулировалась с помощью крана **3** и вычислялась по измеренному количеству жидкости в мерном баке **4** и времени его заполнения. Для наблюдения за характером движения жидкости в

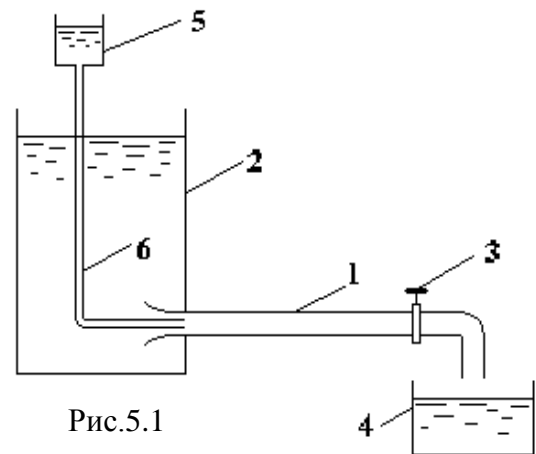


Рис.5.1

трубке **1** в неё из вспомогательного сосуда **5** по тонкой трубке **6** подводилась подкрашенная жидкость той же плотности, что и жидкость в резервуаре **2**.

В результате проведенных опытов Рейнольдс установил, что режим течения зависит от безразмерного комплекса, связывающего скорость жидкости v , диаметр трубки d и вязкость жидкости ν , который теперь называют числом Рейнольдса

$$Re = \frac{vd}{\nu} \quad (5.1)$$

Оказалось, что при малых значениях чисел Рейнольдса линии тока в трубке **1** прямые, параллельные оси трубки. Такое движение называют **струйным** или **ламинарным**. Оно может быть как установившимся, так и неустановившимся.

Если постепенно увеличивать среднюю скорость течения v , то при некотором значении числа **Re** характер течения почти внезапно изменится. Подкрашенная жидкость перемешается с остальной, и вся жидкость в трубке **1** будет равномерно окрашена. Специальные наблюдения показали, что при таком режиме частицы жидкости движутся по весьма сложным траекториям.⁴⁰

Линии тока непрерывно меняют свою форму. Непрерывно меняются по величине и направлению скорость поступательного движения и угловые скорости вращения частиц относительно мгновенных осей. Такое движение называют **турбулентным**. Оно всегда неустановившееся.

Если в турбулентном потоке постепенно уменьшать среднюю скорость течения, то при некотором её значении турбулентное движение так же почти внезапно переходит в ламинарное. Это происходит при меньшем значении числа **Re**, нежели переход ламинарного движения в турбулентное. Аналогичные режимы течения можно наблюдать, изменяя величину диаметра d или вязкости ν .

Число Рейнольдса, при котором происходит смена режимов течения жидкости, называется **критическим ($Re_{кр}$)**, и соответствующая ему скорость – **критической скоростью ($v_{кр}$)**.

Различают два значения критических чисел Рейнольдса: нижнее **$Re_{кр}$** , когда турбулентный режим переходит в ламинарный при уменьшении скорости, и верхнее **$Re'_{кр}$** , когда ламинарный режим переходит в турбулентный при увеличении скорости. Величины критических чисел обычно определяются экспериментально. Значения нижних весьма устойчивы и обычно для круглых труб принимаются **$Re_{кр}=2300$** .

Величина верхней границы точно не установлена, **$Re'_{кр}$** изменяется в довольно широких пределах от **4000** до **13000** из-за влияния таких факторов, как геометрия входа в трубу, гладкость стенок трубы, наличие и величины начальных турбулентных пульсаций в потоке, геометрия самого потока и связанные с ней перепады давлений. Так, при движении в конфузоре, то есть при сужении струй потока (отрицательный градиент), величина **$Re'_{кр}$** резко возрастает. Наоборот, при расходящемся диффузорном потоке (положительный градиент давления) **$Re'_{кр}$** снижается.

Между **$Re_{кр}$** и **$Re'_{кр}$** лежит довольно большая зона, где движение в зависимости от условий может быть как ламинарным, так и турбулентным. Однако, ламинарный режим в этой зоне очень неустойчив, поэтому на практике в этой зоне режим считают турбулентным. Таким образом, для определения характера режима движения сравнивают число Рейнольдса для потока только с нижним **$Re_{кр}$** .

Ламинарный режим движения вязкой жидкости

Ламинарные течения встречаются в различных технических задачах. Так, устойчивые ламинарные течения образуются в трубах малого диаметра, в зазорах и малых полостях машин, особенно при движении таких вязких жидкостей, как масло, нефть, различные специальные жидкости для гидропередачи объемных гидроприводов.

Для описания ламинарного движения жидкостей используют уравнения Навье-Стокса. Если граничные условия в задаче достаточно просты, то в некоторых случаях удастся получить точные аналитические решения этих уравнений, например, в случае ламинарного течения в круглой цилиндрической трубе. Но в большинстве случаев точных решений найти не удастся. Тогда применяют приближённые методы, основанные на предположениях о малой значимости тех или иных членов уравнений движения.

При движении жидкости параллельными слоями (ламинарно), когда наблюдается деформация чистого сдвига, касательные напряжения между слоями могут быть описаны законом трения Ньютона: $\tau = -\mu \frac{\partial v}{\partial n}$. Согласно этому закону в его простейшей записи напряжения, вызванные вязкостью жидкости, пропорциональны скоростям деформаций, другими словами, тензор вязких напряжений пропорционален тензору скоростей деформаций.

Переходный процесс от ламинарного режима к турбулентному.

Механизм перехода от ламинарного режима к турбулентному достаточно сложен и выяснен не полностью. Упрощённая картина этого процесса будет следующей. При числах **Re** немного меньше **Re_{кр}** в ламинарном потоке периодически появляются кратковременные очаги турбулентности. Этот процесс характеризуют долей Δt некоторого интервала **T**, в течение которого в данной точке потока существует турбулентный режим. Величину $\gamma = \Delta t / T$ называют *коэффициентом перемежаемости*. По мере возрастания числа **Re**, а также при удалении от входа в трубу, величина γ возрастает, то есть турбулентный режим в каждом сечении существует все более длительное время, и, наконец, поток становится стационарно турбулентным.

Переход от ламинарного течения к турбулентному сопровождается изменением закона сопротивления и изменением формы эпюры местных скоростей. В переходной области форма эпюры скоростей уже не сохраняется параболической, а зависит от коэффициента перемежаемости. Поскольку здесь возможно существование как ламинарного, так и турбулентного режима, то одному и тому же числу **Re** могут соответствовать разные профили эпюры скоростей.

Турбулентный режим движения вязкой жидкости

Исследования показывают, что в турбулентном потоке в разные моменты времени в одну и ту же точку приходят частицы с разными по величине и направлению скоростями. При этом величина скорости в рассматриваемой точке то возрастает, то уменьшается относительно некоторого её среднего значения, например (рис.5.2. и рис.5.3.). Такие изменения скорости называются *пульсацией*.

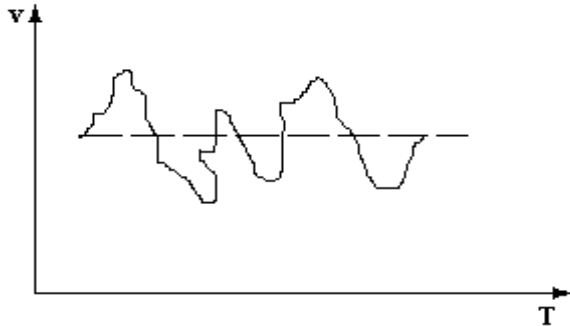


Рис 5.2.

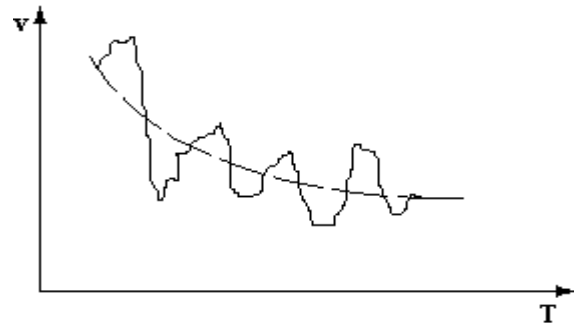


Рис.5.3.

Подобным же образом при турбулентном движении изменяются в любой точке потока нормальные и касательные напряжения, а также термодинамические параметры.

Все это обуславливает важнейшую физическую закономерность турбулентного режима — особый механизм поперечного переноса массы, импульса и энергии. Такой перенос осуществляется вихревыми образованиями (своеобразными «сгустками» жидкости, молями) приобретающими значительные поперечные пульсационные составляющие скорости. Наличие поперечной пульсации приводит к возникновению продольной (вдоль линий тока) пульсации.

Наличие пульсации не позволяет рассчитывать турбулентные потоки по истинным значениям параметров. Поэтому используют некоторые средние во времени (осредненные) расчетные их значения. К настоящему времени предложено несколько физических моделей турбулентного движения и соответствующие полуэмпирические методы расчета основных характеристик турбулентности. Широкое применение получила предложенная Рейнольдсом идея о разложении действительных динамических параметров на осредненные и пульсационные части:

- скорость потока и ее проекции на оси координат

$$v = \bar{v} + v', \quad v_x = \bar{v}_x + v'_x, \quad v_y = \bar{v}_y + v'_y, \quad v_z = \bar{v}_z + v'_z; \quad (5.2)$$

- нормальные напряжения $p = \bar{p} + p'$; (5.3)

- касательные напряжения $\tau = \bar{\tau} + \tau'$. (5.4)

- В этих выражениях:

- осредненные за время T_0 параметры

$$\bar{v} = \frac{\int_0^{T_0} v dt}{T_0}, \quad \bar{v}_x = \frac{\int_0^{T_0} v_x dt}{T_0}, \quad \bar{v}_y = \frac{\int_0^{T_0} v_y dt}{T_0}, \quad \bar{v}_z = \frac{\int_0^{T_0} v_z dt}{T_0}, \quad \bar{p} = \frac{\int_0^{T_0} p dt}{T_0}, \quad \bar{\tau} = \frac{\int_0^{T_0} \tau dt}{T_0}; \quad (5.5)$$

- пульсационные составляющие параметров (пульсационные добавки)

$$v', v_x', v_y', v_z', p', \tau'.$$

Пульсационные добавки имеют положительные и отрицательные значения и являются случайными функциями времени и координат. По этому же принципу производится осреднение всех параметров турбулентного пульсационного движения.

Итак, благодаря поперечным пульсационным составляющим скорости линии тока пульсационного движения пересекают линии тока осредненного движения, проникают из одного слоя осредненного движения в другой и перемешивают при этом жидкость. Такого рода перемешивания сопровождаются переносом через границу между слоями количества движения, энергии, тепла и других механических и термодинамических параметров осредненного движения жидкости, а так же заключенных в жидкостях примесей, например, дыма или пыли в воздухе, ила или песка в воде и др.

Перенос количества движения создает турбулентное трение между слоями, перенос тепла обуславливает турбулентную теплопроводность, перенос примесей – турбулентную диффузию. Механизм турбулентного перемешивания одинаков, как для трения, так и для теплопроводности и диффузии. Разница заключается лишь в особых свойствах переносимой пульсационным движением субстанции. Напряжения, обусловленные турбулентным трением из-за переноса частиц количества движения, называются **турбулентными касательными напряжениями**:

$$\tau_T = \mu_T \frac{\partial v}{\partial n} = \rho l^2 \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)^2, \quad (5.6)$$

где, согласно Л. Прандтлю $\mu_T = \rho l^2 \frac{\partial v}{\partial n}$ – **турбулентная вязкость** или **турбулентный обмен**, l – длина пути смешения.

В общем случае осредненный поток одновременно обладает и молекулярной, и турбулентной вязкостями. Поэтому, для получения полного напряжения сил трения к вязкому трению по Ньютону, следует добавить дополнительное турбулентное напряжение (5.6).

$$\tau = \pm \mu \frac{\partial v}{\partial n} + \rho l^2 \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)^2. \quad (5.7)$$

Два знака (\pm) поставлены, чтобы напряжение вязкого трения независимо от выбранной системы координат оставалось положительным.

Влияние составляющих формулы (5.7) в различных потоках и в разных точках сечения потока различно.

Турбулентное движение вязкой жидкости описывается системой дифференциальных уравнений, которые получают из уравнений Навье-Стокса путем замены мгновенных значений скоростей и напряжений гидродинамических сил, входящих в уравнение, осредненными и пульсационными их значениями в турбулентном потоке (5.2), (5.3), (5.4), (5.5). После соответствующих преобразований, для **случая установившегося** осредненного турбулентного движения **несжимаемой** жидкости уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned}
 & \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} (\overline{v_x v_x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v_x v_y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v_x v_z}) \right] = \rho \overline{F_x} - \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x} - \rho \overline{v_x'^2} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} - \rho \overline{v_x' v_y'} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial z} - \rho \overline{v_x' v_z'} \right]; \\
 & \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} (\overline{v_y v_x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v_y v_y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v_y v_z}) \right] = \rho \overline{F_y} - \frac{\partial \overline{p}}{\partial y} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \frac{\partial \overline{v_y}}{\partial x} - \rho \overline{v_y' v_x'} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial \overline{v_y}}{\partial y} - \rho \overline{v_y'^2} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \frac{\partial \overline{v_y}}{\partial z} - \rho \overline{v_y' v_z'} \right]; \\
 & \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} (\overline{v_z v_x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v_z v_y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v_z v_z}) \right] = \rho \overline{F_z} - \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \frac{\partial \overline{v_z}}{\partial x} - \rho \overline{v_z' v_x'} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial \overline{v_z}}{\partial y} - \rho \overline{v_z' v_y'} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \frac{\partial \overline{v_z}}{\partial z} - \rho \overline{v_z'^2} \right].
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Уравнения (5.8) называются **уравнениями Рейнольдса**. Они отличаются от исходных наличием добавочных компонент.

В случае **неустановившегося** осредненного турбулентного движения **несжимаемой** жидкости, получают те же уравнения (5.8), но дополненные проекциями локальных ускорений осредненной скорости $\rho \frac{\partial \overline{v_{lx}}}{\partial t}$, $\rho \frac{\partial \overline{v_y}}{\partial t}$, $\rho \frac{\partial \overline{v_z}}{\partial t}$.

Для **сжимаемой жидкости** нормальные и касательные турбулентные напряжения представляются более сложными выражениями, что обусловлено необходимостью осреднения плотности.

Тема 5.2: Пристенный пограничный слой.

Литература: [2] стр. 42-56; [5] стр. 325-328, 348- 358; [6] стр.83-88.

Понятия о пограничном слое. Основные характеристики движения жидкости в слое.

Из-за наличия существенного влияния молекулярной вязкости на процессы турбулентного переноса в пристенной области, закономерности движения жидкости около твердых стенок принципиально отличаются от закономерностей свободных турбулентных течений вдали от твердых поверхностей.

Реальная жидкость при обтекании тел как бы прилипает к их поверхностям. Поэтому скорость потока на поверхности тела равна нулю. При удалении от тела по нормали к его поверхности скорость будет увеличиваться. На некотором расстоянии от тела она будет близка к той, которая была бы при обтекании тела идеальной жидкостью. Ввиду этого для обтекающего потока, особенно при больших числах Рейнольдса, выделяют в нем две области.

Первая, непосредственно прилегающая к обтекаемому телу, называется «пристенный пограничный слой» (далее «пограничный слой»). Именно в пределах этой области сосредоточены преимущественно вязкостные сопротивления, поэтому ее рассматривают как зону влияния вязкости.

Вторая - «внешний поток», в котором влияние вязкости пренебрежимо мало и, следовательно, ее можно рассматривать как область потенциального потока идеальной жидкости.

Режим течения в слое по всей толщине его может быть ламинарным - тогда его называют ламинарным слоем, но может быть так, что ламинарный режим сохраняется только в части слоя - его называют **ламинарным подслоем**, а в остальной его части устанавливается турбулентный режим течения - такой слой называют **турбулентным пограничным подслоем**.

Толщиной пограничного слоя называется расстояние δ по нормали к поверхности, в пределах которого под воздействием вязкости происходит изменение скорости от нуля на стенке до величины, имеющей место во внешнем потоке.

В случае внешней задачи (обтекание тела конечных размеров практически безграничным потоком) пограничный слой, условная граница которого показана на рис.5.4 штриховой линией, образуется, начиная от передней кромки обтекаемого тела. В пределах пограничного слоя скорости изменяются очень резко. Вниз по течению толщина пограничного слоя несколько возрастает. Область за обтекаемым телом представляет из себя турбулентный закрученный след.

В случае внутренней задачи (течение жидкости в канале, трубе и др.) пограничный слой образуется на начальном участке вдоль стенок, ограничивающих поток, где и формируется эпюра скоростей, рис. 5.5.

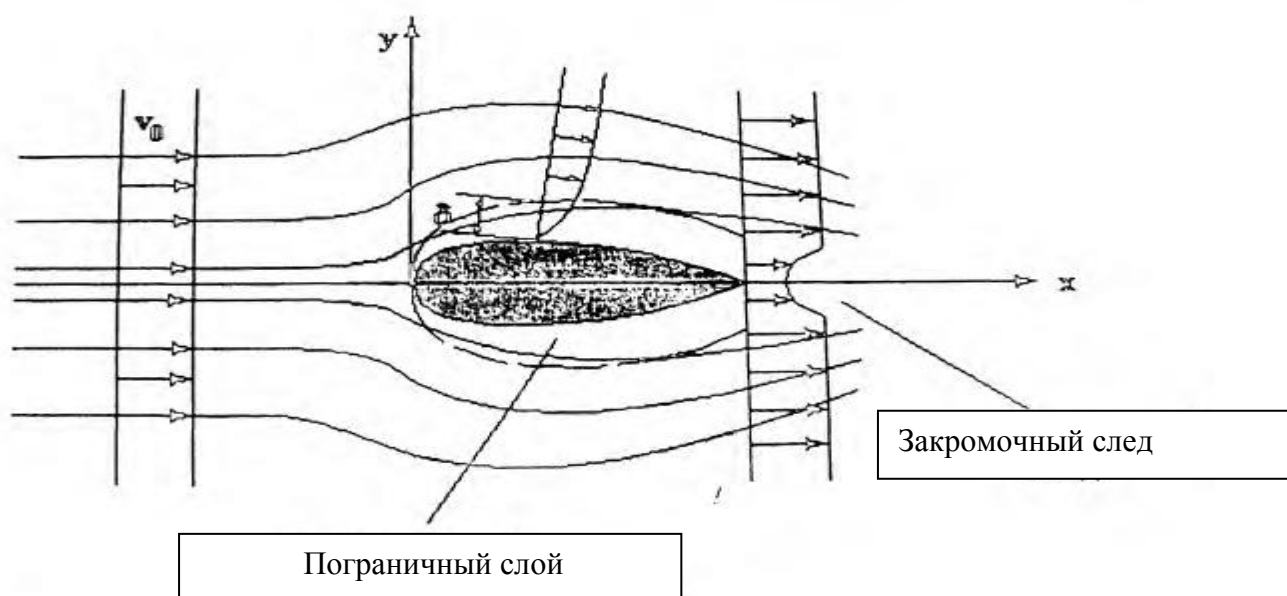


Рис.5.4

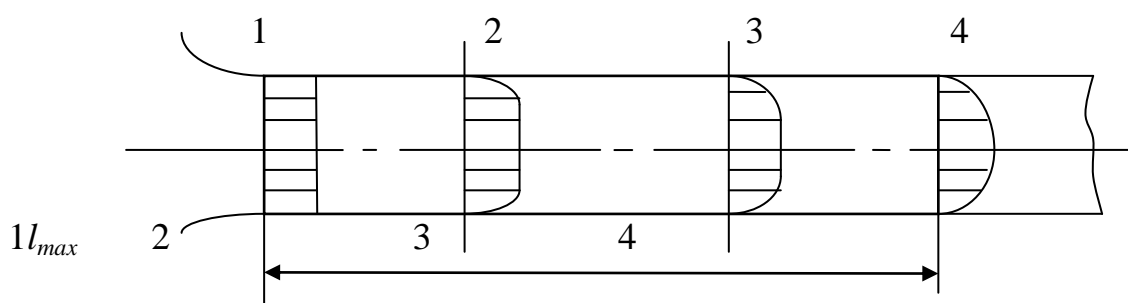


Рис.5.5

Если вход в трубу специально спрофилирован, то в сечении 1-1, рис.5.5, устанавливается практически равномерное распределение скоростей. По мере продвижения жидкости вдоль трубы тормозящее влияние стенок распространяется на все большую толщину потока. Эпюра скорости постепенно деформируется. В случае несжимаемой жидкости плотность и расход через любое сечение остаются постоянными. Поэтому сохраняется средняя скорость, а уменьшение скорости близи стенки из-за трения компенсируется увеличением скорости вне пограничного слоя. Толщина пограничного слоя постепенно увеличивается. Ядро потока, имеющее равномерное распределение скорости еще сохраняется на некотором участке, но в конце оно исчезает. Пограничный слой смыкается на оси трубы, его толщина становится равной радиусу трубы. Участок формирования пограничного слоя называется начальным. По С.М. Таргу $l_{нач} = 0,04dRe$. В случае сжимаемой жидкости плотность вдоль потока в общем случае величина переменная. Поэтому, при схожести качественной картины течения, количественно его параметры будут другими.

Течение жидкости в пограничном слое и во внешнем потоке неразрывно связаны между собой. Характер течения в пограничном слое зависит от внешнего потока, а сам пограничный слой оказывает обратное влияние на внешний поток. Ввиду этого скачкообразного перехода от пограничного слоя к области внешнего потока не существует. Различие в поле скоростей и давлений в пограничном слое и в области внешнего потока по толщине слоя монотонно

уменьшается и на внешней границе слоя практически исчезает. Вследствие этого и сама внешняя граница пограничного слоя не является поверхностью разрыва и не имеет строгого гидродинамического критерия ее определения. Эта граница, в сущности, является расчетной. Часто за толщину пограничного слоя принимают такое расстояние от стенки, на котором скорость отличается от скоростей течения во внешнем потоке на 1-2 %.

При больших числах Рейнольдса можно приближенно принимать

$$\frac{\delta}{L} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}},$$

где $\text{Re}_L = v_0 L / \nu$

v_0 - скорость в набегающем потоке;

L - длина обтекаемого тела

Нестрогость в определении толщины пограничного слоя δ вызвала необходимость в других более точных характеристиках. Таковыми приняты толщина вытеснения δ^* и толщина потери импульса δ^{**} .

Толщина вытеснения

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho v}{\rho_0 v_0} \right) dy$$

есть расстояние, на которое сдвигаются тела от линии тока внешнего течения вследствие уменьшения скорости и изменения плотности в пограничном слое.

Толщина потери импульса

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{v}{v_0} \right) \frac{\rho v}{\rho_0 v_0} dy$$

характеризует потерю количества движения, необходимого для преодоления сил трения внутри пограничного слоя.

В пограничном слое корпуса судна и самолета, руля, лопатки турбины, лопасти винта с точки зрения режима обычно существует три характер участка

рис 5.6



рис 5.6

- 1) **Участок ламинарного режима**, на протяжении которого по всей толщине слоя режим течения ламинарный.
- 2) **Переходная область**, в которой возникшая неустойчивость ламинарного течения не затухает, а развивается и распространяется по толщине слоя. Начало переходной области соответствует тем параметрам в слое, при которых происходит потеря устойчивости: ламинарного режима течения вблизи внешней границы слоя, где наибольшая скорость в этом сечении. Координату такого сечения **I** на поверхности тела называют **точкой потери устойчивости** (точка O_1). В конце переходной области уже по всей толщине слоя, за исключением тонкого ламинарного подслоя, в котором сохраняется устойчивый ламинарный режим, создается развитый турбулентный режим течения. Координату сечения **II** на поверхности тела, в котором заканчивается формирование турбулентного слоя, называют точкой перехода (точка O_2). Протяженность переходной области зависит от характера изменения скорости на внешней границе слоя, степени турбулентности в набегающем потоке и местных возмущений на поверхности тела.
- 3) **Участок турбулентного режима**, на протяжении которого режим течения по всей его толщине, за исключением ламинарного подслоя, турбулентный. Толщина ламинарного подслоя сравнительно мала, резкой границы между ламинарным подслоем и турбулентной частью слоя не существует, а имеется некоторая переходная область.

Таким образом, когда в пограничном слое существуют три характерных участка режимов течения, для их определения надо иметь два критических числа Рейнольдса: число, определяющее точку потери устойчивости O_1 , и число, определяющее точку перехода O_2 .

Пограничный слой на криволинейной поверхности.

Отрыв пограничного слоя.

Характер обтекания твердого тела потоком жидкости во многом определяется формой его поверхности. Так, статическое давление по толщине пограничного слоя практически не изменяется, а изменение давления вдоль слоя будет таким же, как и во внешнем потоке. Последнее может быть как убывающим по течению, так и возрастающим. Например, при обтекании плавной криволинейной поверхности наблюдается следующая картина, рис.5.4.

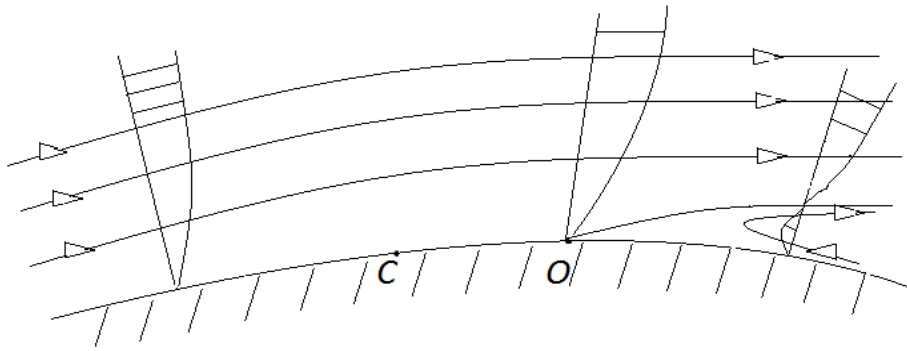


Рис.5.7

Часть жидкости, расположенная ниже по потоку точки **О** под действием обратного градиента давления получают возвратное движение. Встречаясь с основным потоком, возвратно движущиеся частицы оттесняются от стенки, что приводит к явлению, называемому **отрывом пограничного слоя**.

Сечение пограничного слоя, с которого начинается обратное движение называется **точкой отрыва**. В этой точке выполняется соотношение

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \text{ то есть } \tau = 0$$

За точкой **О** эпюра скорости имеет характерную петлеобразную форму. Это является свидетельством тому, что пограничный слой трансформируется в отрывное течение, характеризующееся сильной неустойчивостью образующихся крупномасштабных вихрей. Отдельные вихри, отрываясь от твердой поверхности, сносятся потоком на их месте образуются новые вихри и т.д. Проникновение оторвавшихся вихрей во внешний поток существенно искажает картину течения и, в итоге, является причиной образования гидродинамического закомочного следа.

Турбулентный пограничный слой из-за интенсивного поперечного перемещения имеет более полную эпюру скорости, чем ламинарный. Поэтому частицы жидкости в нем непосредственно вблизи стенки обладают большим запасом кинетической энергии. Отсюда следует, что турбулентный пограничный слой более устойчив в отношении отрыва, чем ламинарный.

Методы управления пограничным слоем.

Переход ламинарного течения в пограничном слое в турбулентное, а также отрыв пограничного слоя приводят к значительному увеличению сопротивления. С целью снижения гидродинамических сопротивлений к настоящему

времени разработаны такие искусственные мероприятия, которые способствуют сохранению ламинарного режима течения в пограничном слое на возможно большей длине его и предотвращает отрыв слоя. В основу разработок положены результаты исследований, показывающие, что в ламинарном пограничном слое трение меньше, чем в турбулентном, но в то же время ламинарный пограничный слой менее устойчив и обладает значительно большей тенденцией к отрыву, чем турбулентный.

С учетом указанных закономерностей был получен ряд профилей крыла самолета и руля, которые называются **ламинизированными профилями**. У таких профилей наибольшую толщину отодвигают возможно дальше к выходной кромке. Вместе с нею отодвигается вниз по потоку и точка минимума давления. Благодаря этому пограничный слой сохраняется ламинарным на значительно большем протяжении, чем у обычных профилей, что приводит к уменьшению сопротивления.

Другим способом ламинаризации пограничного слоя с целью снижения сопротивления трения является частичное его отсасывание через пористую поверхность (**непрерывный отсос**), или соответствующим образом **расположенные щели (щелевой отсос)**, или специальные отверстия (**сосредоточенный отсос**).

Сущность способа в том, что, вследствие отсасывания, пограничный слой становится тоньше, и это уменьшает его склонность к переходу в турбулентный.

Удаление из слоя подторможенной жидкости путем отсоса одновременно с ламинаризацией слоя уменьшает возможность его отрыва. Аналогичного эффекта можно достичь путем ввода в слой жидкости с тем, чтобы сообщить жидкости в слое дополнительную кинетическую энергию, благодаря чему подторможенная жидкость как бы сдувается с профиля.

Предотвращение отрыва пограничного слоя можно достичь также путем придания телу соответствующей формы. Но здесь мероприятия, направленные на предотвращение отрыва, противоречат мероприятиям по ламинаризации пограничного слоя. В этом случае выбирают и осуществляют такие мероприятия, которые приводят к наибольшему снижению потерь.

Кроме рассмотренных способов управления пограничным слоем известны такие, как применение демпфирующих покрытий, газонасыщение жидкого пограничного слоя, введение в пограничный слой полимерных добавок, сообщение обтекаемой поверхности вынужденных колебаний и др.

Лекция 5.

Раздел 5. Прикладная гидравлика (продолжение).

Тема 5.3: Движение вязкой жидкости в трубах.

Общие и местные гидравлические сопротивления.

Литература: [2] стр. 57-89; [3] стр. 74-88; [4] стр. 55-57, 61-62; [5] стр. 138-175; [6] стр. 69-74, 94-99.

Структура потока вязкой несжимаемой жидкости в трубах.

Исходными для исследования и расчета установившегося потока реальной несжимаемой жидкости при решении задач инженерной гидравлики являются уравнения Навье-Стокса, Рейнольдса, получаемые из них уравнения Бернулли и уравнения расхода.

Использование указанных исходных уравнений для решения задач движения вязкой жидкости возможно только при наличии формул для расчета входящих в уравнения потерь напора, связывающих величину этих потерь с основными характеристиками потока.

Для удобства расчета все гидравлические сопротивления принято разделять на два вида:

- сопротивления и связанные с ними потери энергии, представляющие собой не что иное, как сопротивление трения, и называемые в связи с этим **потерями напора по длине**, или **общими потерями напора**, или **потерями на трение**;

- сопротивления, возникающие только на отдельных коротких участках потока из-за той или другой резкой местной деформации его, благодаря чему в этих местах скорость существенно изменяется по величине и направлению, называемые **местными потерями напора**.

При расчете потерь напора широко используется принцип наложения. Предполагается, что отдельные виды сопротивлений возникают независимо друг от друга и определяются только местными характеристиками потока.

Применяя этот принцип и обозначая потери напора по длине h_l и местные потери напора h_m , можно величину входящих в уравнение Бернулли потерь h_{w1-2} определять, как

$$h_{w1-2} = \sum_{i=1}^m h_{li} + \sum_{j=1}^n h_{mj} . \quad (5.9)$$

Как правило, используя полуэмпирические методы исследования, устанавливают структуру общих формул для определения h_l и h_m , после чего,

пользуясь опытными данными, дополняют формулы эмпирическими коэффициентами. И только в некоторых случаях удается получить теоретические формулы для конкретных видов сопротивлений.

Очевидно, что между силами трения в жидкости и потерями напора существуют определенные зависимости.

Для случая установившегося равномерного движения (когда местные потери отсутствуют) зависимость принимает вид:

$$\tau = \rho g I R, \quad (5.10)$$

где R – гидравлический радиус сечения потока, равный отношению площади сечения к его периметру и который для трубы круглого сечения равен половине радиуса $\frac{r_0}{2}$; I – гидравлический уклон.

Ламинарное равномерное движение вязкой несжимаемой жидкости в круглой трубе.

Если направление потока в трубе круглого сечения радиусом r_0 и длиной ℓ совместить с осью x и считать, что движение в ней стабилизированное, т.е. скорость не зависит от координаты x ($\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$), то $v_x = v_x(y, z)$; $v_y = v_z = 0$.

Уравнения Навье-Стокса после подстановки в них значений скоростей и отбрасывания массовых сил примут вид $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$; $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$ или

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (5.11)$$

Это же уравнение в цилиндрических координатах при условии осевой симметрии потока имеет вид:

$$\frac{d^2 v_x}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_x}{dr} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (5.12)$$

После двойного интегрирования последнего уравнения (5.12) и определения произвольных постоянных получим зависимость скорости от расстояния до оси трубы

$$v = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (r_0^2 - r^2) \text{ или} \quad (5.13)$$

$$v = \frac{\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right)}{l} \frac{\rho g}{4\mu} (r_0^2 - r^2). \quad (5.14)$$

Здесь $\frac{\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right)}{l} = i_{cp}$ – средний пьезометрический уклон,

r_0 - радиус трубы, r - отстояние текущего элемента от оси трубы, ℓ - длина рассматриваемого участка.

Уравнения (5.13) и (5.14) есть уравнения параболы второй степени с вершиной на оси трубы при $r=0$, где и достигается максимальная скорость

$$v_{\max} = \frac{\rho g i_{cp}}{4\mu} r_0^2 \quad (5.15)$$

$$\text{или } v_{\max} = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} r_0^2 = \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{l} r_0^2. \quad (5.16)$$

Безразмерная форма закона распределения скоростей

$$\frac{v}{v_{\max}} = 1 - \frac{r^2}{r_0^2}. \quad (5.17)$$

Объемный расход жидкости

$$Q = \int_0^{r_0} 2\pi r v dr = 2\pi r_{\max} \int_0^{r_0} r \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) dr = \pi r_0^2 \frac{v_{\max}}{2}. \quad (5.18)$$

Средняя по сечению скорость

$$v_{cp} = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{\pi r_0^2 \frac{v_{\max}}{2}}{\pi r_0^2} = \frac{v_{\max}}{2} = -\frac{1}{8\mu} \frac{dp}{dx} r_0^2. \quad (5.19)$$

Отсюда видно, что при ламинарном режиме в круглой трубе максимальная скорость вдвое больше средней.

Если длина участка между сечениями с давлениями p_1 и p_2 равна l , то, интегрируя последнее уравнение (5.19) по x , получим формулу Пуазейля

$$p_1 - p_2 = \frac{8\mu l v_{cp}}{r_0^2} = \frac{32\mu l v_{cp}}{d^2}, \quad (5.20)$$

определяющую падение давления на участке l . Если учесть, что сопротивление по длине трубы (сопротивление трения) $h_t = \frac{p_1 - p_2}{\rho g}$ и $\mu = \nu \rho$, то получим формулу

$$\text{сопротивления } h_t = \frac{32\nu l v_{cp}}{g d^2}, \quad (5.21)$$

$$\text{записав которую в виде } h_t = \frac{64}{\frac{v_{cp} d}{\nu}} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v_{cp}^2}{2g} = \frac{64}{\text{Re}} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v_{cp}^2}{2g} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v_{cp}^2}{2g}, \quad (5.22)$$

получим **формулу Дарси-Вейсбаха** для определения потерь напора из-за трения при ламинарном потоке жидкости в круглой трубе.

$$\text{В формуле (5.22) Дарси-Вейсбаха величина } \lambda = \frac{64}{\text{Re}} \quad (5.23)$$

называется **коэффициентом общих сопротивлений**, или **коэффициентом сопротивлений по длине трубы**, или **коэффициентом Дарси**.

Касательные напряжения между слоями жидкости можно определить по формуле Ньютона или по основному уравнению равномерного движения

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dr} = \rho g i_{cp} \frac{r}{2}. \quad (5.24)$$

Эпюра скоростей по сечению в соответствии с уравнениями (5.13) и (5.14) представляет собой параболу с вершиной на оси трубы (рис.5.8).

Эпюра напряжений в круглой трубе в соответствии с уравнением (5.24) имеет вид, представленный на рис.5.9.

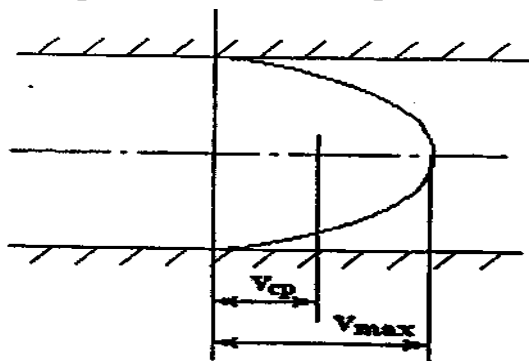


Рис.5.8

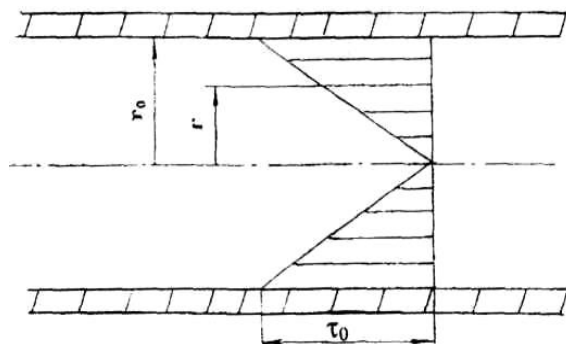


Рис.5.9

Турбулентное равномерное движение вязкой несжимаемой жидкости в круглой трубе.

Экспериментальные исследования осредненной местной скорости и касательных напряжений по поперечному сечению трубы показали, что при турбулентном движении осредненные скорости мало изменяются по сечению, за исключением тонкого ламинарного подслоя на стенке (рис.5.10). Область, где скорости по сечению почти не меняются, называется ядром потока. Практически равномерное распределение скоростей в ядре объясняется интенсивным перемешиванием. В связи с этим приближенный расчет турбулентного течения в трубе строят на двухслойной модели течения, полагая, что в пределах вязкого подслоя течение ламинарное, а в ядре потока – турбулентное. Наличием переходного слоя между ними при этом пренебрегают и считают, что турбулентное ядро потока непосредственно граничит с ламинарным подслоем.

Исходя из основного уравнения равномерного движения, справедливого, как для ламинарного, так и для турбулентного движений, можно утверждать, что напряжения в осредненном турбулентном потоке, как и в случае лами-

нарного движения, распределяются по линейному закону и на оси трубы равны нулю (рис.5.8).

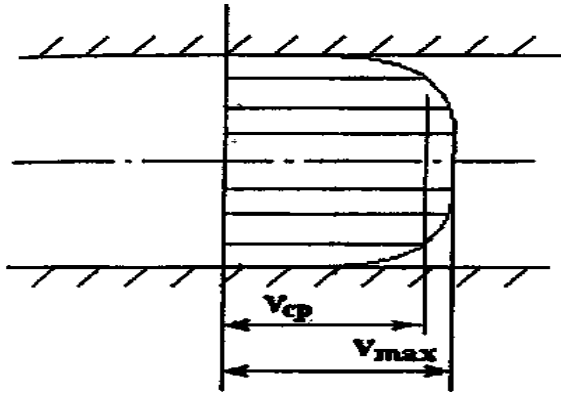


Рис. 5.10

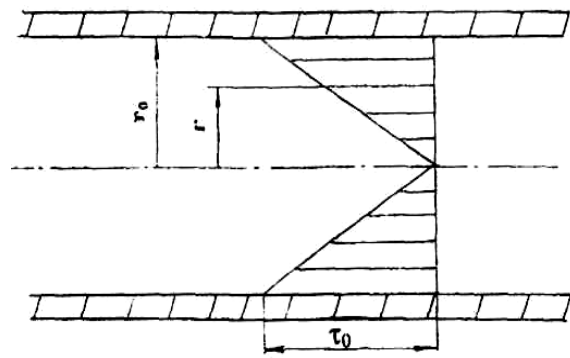


Рис. 5.11

Для расчета течения в трубе необходимо дополнительные касательные напряжения выразить через величины, связанные с геометрией потока и осредненной скоростью. Такая связь может быть установлена с помощью различных гипотез турбулентности.

Наиболее распространенной является гипотеза Л. Прандтля.

Зависимость Прандтля для **шероховатых труб** имеет вид

$$\frac{v}{v_*} = 5,75 \lg \frac{r_0 - r}{\Delta} + A_{ш}, \quad (5.25)$$

где Δ – средняя высота выступов шероховатости; $A_{ш}$ – коэффициент, величина которого зависит от типа шероховатости, например, для равнозернистой $A_{ш} = 8,5$.

Формула для определения максимальной скорости движения жидкости при значении $r = 0$:

$$\frac{v_{\max}}{v_*} = 5,75 \lg \frac{r_0 v_*}{v} + 5,5, \quad (5.26)$$

Расход

$$Q = \int_0^{r_0} v 2\pi r dr = \pi r_0^2 (v_{\max} - 4,08 v_*). \quad (5.27)$$

Средняя скорость потока по сечению трубы

$$v_{cp} = \frac{Q}{S_{тр}} = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{\pi r_0^2 (v_{\max} - 4,08 v_*)}{\pi r_0^2} = v_{\max} - 4,08 v_*. \quad (5.28)$$

Потери напора на трение в круглых трубах. График Никурадзе

При турбулентном движении структура формулы сопротивления остается такой же, как и при ламинарном ($h_t = \lambda \frac{l}{d} \frac{v_{cp}^2}{2g}$), однако универсальной, достаточно точной и простой зависимости для определения коэффициента сопротивления теоретическим путем найти не удастся. В связи с этим возникла задача определения зависимости коэффициента λ от числа **Re**, определяющего динамическое подобие потоков, и какого-либо безразмерного параметра, определяющего геометрическое подобие потоков, путем обобщения результатов экспериментальных исследований. Для гладких труб геометрического параметра не требуется, поскольку все круглые трубы геометрически подобны. В шероховатых трубах требование геометрического подобия должно распространяться и на форму неровностей стенок, вследствие чего среди шероховатых труб найти геометрически подобные практически невозможно.

Характеризовать шероховатость количественно довольно трудно. В связи с этим в качестве приближенного допущения принимают, что шероховатые трубы будут геометрически подобными, если отношение средней высоты выступов шероховатости Δ к радиусу r_0 или к диаметру d будет одинаковым.

Отношение $\frac{\Delta}{d}$ или $\frac{\Delta}{r_0}$ называют *относительной шероховатостью*, а обратную величину $\frac{d}{\Delta}$ или $\frac{r_0}{\Delta}$ - *относительной гладкостью*.

Впервые построил зависимость $\lambda = \lambda\left(\text{Re}, \frac{\Delta}{d}\right)$, обработав результаты своих многочисленных экспериментов, Никурадзе. Шероховатость в опытах Никурадзе создавал искусственно путем наклеивания калиброванных песчинок на внутреннюю поверхность трубы. Такая шероховатость получилась равномерно-зернистой в отличие от естественной, которая, как правило, неравномерно-зернистая и волнистая.

На поле графика Никурадзе (рис.5.12) можно выделить пять характерных областей:

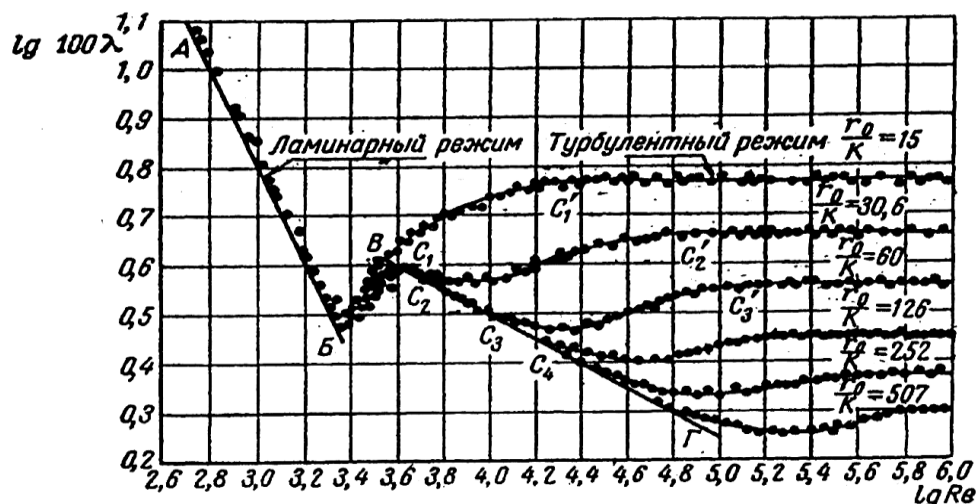


Рис.5.12

1) **Область ламинарного режима.** Имеет место при $Re \leq Re_{кр} = 2300$. На графике изображается прямой А-Б. В пределах этой области коэффициент сопротивления λ зависит только от числа **Re** и не зависит от шероховатости. Согласно формуле (5.23) коэффициент трения

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \quad (5.29)$$

Формула сопротивления (5.21) может быть представлена в виде

$$h_l = \frac{32\nu l v_{cp}}{gd^2} = k v_{cp}, \quad (5.30)$$

где $k = \frac{32\nu l}{gd^2} = const$ — коэффициент пропорциональности.

Из этой формулы следует, что сопротивление трения при ламинарном режиме пропорционально первой степени средней скорости.

2) В диапазоне $2300 < Re < 4000$ (на графике между точками **Б** и **В**) осуществляется **переход от ламинарного режима к турбулентному**.

В зависимости от условий течения в этой области может устанавливаться либо ламинарный режим, либо турбулентный. Но чаще всего наблюдается так называемый перемежающийся режим, когда одновременно существуют и ламинарный и турбулентный. С точки зрения определения коэффициента λ область самая трудная, в связи с чем нет эмпирических формул для его вычисления.

3) **Область турбулентного гладкостенного течения**, изображаемая на графике прямой **В-Г**. Здесь λ тоже не зависит от шероховатости, а зависит только от числа **Re**. Границами области ориентировочно могут служить значения $4000 \leq Re \leq 20(d/\Delta)$. При этом режиме течения бугорки шероховатости намного меньше толщины ламинарного подслоя и обтекаются безотрывно. Следовательно, шероховатость не приводит к увеличению сопротивления и

никакой разницы между течениями в гладкой и шероховатой трубах не будет. Это дает право считать трубу *гидродинамически гладкой*.

Для вычисления коэффициента λ в этой области рекомендуются формулы:

$$\text{Блазиуса } \lambda = \frac{0,316}{\text{Re}^{0,25}} \quad (\text{для } \text{Re} < 10^5), \quad (5.31)$$

$$\text{Конакова } \lambda = (1,81 \lg \text{Re} - 1,5)^{-2} \quad (5.32)$$

Формула сопротивления

$$h_l = k v_{cp}^{1,75}. \quad (5.33)$$

4) *Турбулентная область доквадратичного сопротивления*. На графике это площадь, ограниченная линией гладкостенного течения **В-Г** и штриховой линией **К-К**, соответствует диапазону $20 \frac{d}{\Delta} < \text{Re} \leq 500 \frac{d}{\Delta}$.

Этот режим характерен для случая, когда высота бугорков шероховатости соизмерима с толщиной ламинарного подслоя. В этой зоне λ зависит и от числа **Re** и от шероховатости. Для его вычисления рекомендуется формула Альтшуля

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta}{d} + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{0,25}. \quad (5.34)$$

$$\text{Сопротивление можно представить формулой: } h_l = k v_{cp}^m, \quad (5.35)$$

где m – показатель степени, различный в разных частях области, но всегда $m < 2$ (поэтому область и называется «доквадратичная»).

5) *Турбулентная область квадратичного сопротивления*. Образуется параллельными оси абсцисс участками кривых, при $\text{Re} > 500 \frac{d}{\Delta}$. Коэффициент λ не зависит от числа **Re**, а зависит только от относительной шероховатости. Вычислять коэффициент сопротивления можно по формулам Шифринсона (5.36) и Никурадзе (5.37).

$$\text{Шифринсона } \lambda = 0,11 \left(\frac{d}{\Delta} \right)^{0,25}, \quad (5.36)$$

$$\text{Никурадзе } \lambda = \left(1,74 + 21 \lg \frac{r_0}{\Delta} \right)^{-2}. \quad (5.37)$$

Потери напора в этой области

$$h_l = k v_{cp}^2 \quad (5.38)$$

точно пропорциональны квадрату скорости (ее название «квадратичная»).

Формула Альтшуля (5.34) наиболее универсальна.

В области гладкостенного течения она практически совпадает с формулой Блазиуса, а в области квадратичного сопротивления - с формулой Шифринсона. Поэтому дает удовлетворительную точность во всех трех областях турбулентного течения и может быть рекомендована для вычисления коэффициента сопротивления трения λ в областях гладкостенного, доквадратичного и квадратичного турбулентного течения.

Многочисленные более поздние исследования на промышленных образцах труб, изготовленных из различных материалов (сталь, чугун, стекло, бетон, пластик, прорезиненные шланги и др.) и имеющих неравномерную шероховатость, обнаружили некоторые отличия в ходе экспериментальных кривых. Например, на рис.5.13 приведен график Всесоюзного теплотехнического института (ВТИ) для новых стальных труб. Из этого графика видно, что особенно значительны отличия в форме кривых наблюдаются в доквадратичной области.

Вероятно дело в том, что в случае равномерно-зернистой шероховатости высота выступов примерно одинакова и при определенном числе **Re** одновременно на всех выступах появляются отрывы пограничного слоя. В результате этого λ быстро увеличивается.

В то время как технические трубы характеризуются значительным разбросом высот выступов шероховатости. Поэтому отрывы пограничного слоя возникают вначале на самых больших из них. По мере увеличения числа **Re** отрывы распространяются на все более мелкие выступы. Вследствие этого кривые $\lambda = f(\text{Re})$ плавно отходят от прямой гладкостенного течения.

Другой, не менее важной причиной отличий в графиках является то, что даже при одной и той же абсолютной шероховатости трубы из разных материалов могут иметь различные коэффициенты гидравлического трения в зависимости от формы выступов, густоты, характера их расположения и т.д.

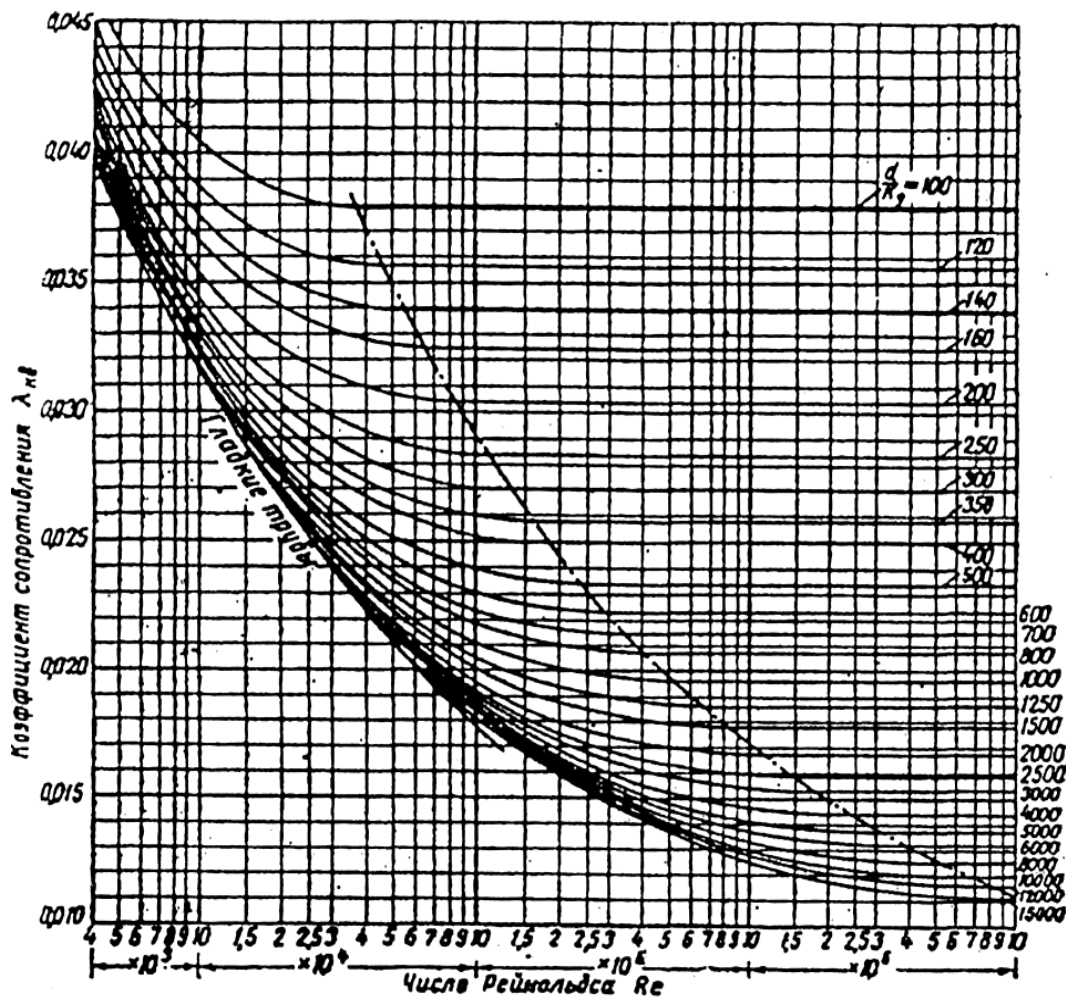


Рис.5.13

Поскольку учесть влияние этих факторов путем непосредственных измерений практически невозможно, возникла задача поиска нового параметра, определяющего геометрическое подобие потоков. Наиболее широко в гидравлике используется понятие *эквивалентной равнозернистой шероховатости k_s* .

Под эквивалентной шероховатостью понимают такую высоту выступов равномерной шероховатости, которая дает одинаковый с изучаемой естественной шероховатостью коэффициент гидравлического трения.

Зависит эквивалентная шероховатость:

- от материала, способа изготовления и соединения труб;
- от продолжительности эксплуатации труб, в процессе которой могут возникнуть коррозия, эрозия или отложения.

Поэтому в отличие от графика Никурадзе на рис.5.13 изображена зависимость коэффициента сопротивления λ в функции числа **Re** и эквивалентной шероховатости **k_s** . Приведенные выше зависимости справедливы лишь для изотермического движения, когда вязкость и плотность жидкости во всех точках потока остаются постоянными во времени.

Местные сопротивления в трубах

Экспериментальные исследования показывают, что на некоторых коротких участках трубопроводов в дополнение к потерям трения возникают потери другой природы. Такие потери называют местными.

Участки реальных трубопроводов, на которых возникают местные потери, можно условно разделить на следующие группы:

- изменение живого сечения (расширение или сужение);
- изменение направления трубы (резкий или плавный поворот);
- отделение или слияние потоков (тройники и отводы);
- запорная арматура (задвижки, тарельчатые клапаны, дисковые, шарнирные или пробковые краны и др.);
- местные препятствия (диафрагмы с острыми краями, стыки труб, решетки, технологические стойки, вмятины и т.д.).

Из приведенной классификации видно, что местные сопротивления могут быть весьма разнообразны. Однако, потоки жидкости в их окрестностях обладают некоторыми общими свойствами и все местные потери напора имеют единую энергетическую природу.

Так, в общем случае на участках местных сопротивлений происходит достаточно резкое увеличение или уменьшение живого сечения потока по направлению течения, что приводит (в соответствии с уравнением Бернулли) к изменению величины средней скорости движения жидкости, и направление скорости сохраняется либо резко изменяется.

За каждым из местных сопротивлений (а в некоторых случаях и перед ним) образуются зоны отрыва основного (транзитного) потока от направляющих поверхностей. В этих зонах наблюдаются интенсивные неустановившиеся циркуляционные движения жидкости, которые интенсифицируют процесс диссипации энергии и являются причиной того, что потери на местных сопротивлениях могут намного превосходить потери по длине на участке той же протяженности.

Установлено, что структура потока и интенсивность вихрей существенно зависят от режима течения, то есть от числа Re .

Исходя из выявленных общих свойств, *под местными сопротивлениями понимают такие короткие участки трубопроводов, на которых из-за той или другой резкой местной деформации потока происходит существенное изменение скорости по величине и направлению, а потери напора, обусловленные этим, называют местными потерями или потерями на местные сопротивления.*

Величина потерь на любом местном сопротивлении может быть вычислена по формуле Вейсбаха

$$h_m = \zeta_m \frac{v^2}{2g}. \quad (5.39)$$

Разнообразие форм местных сопротивлений и сложность гидродинамических процессов, происходящих при обтекании их жидкостью, не позволили до настоящего времени разработать общую теорию расчета коэффициентов местных сопротивлений. Поэтому в практических расчетах коэффициент местного сопротивления, входящий в формулу (5.39), в общем случае определяется экспериментальным путем для каждого из встречающихся в практике типов местных сопротивлений. И только для некоторых случаев, например, при внезапном расширении трубы, удалось вывести теоретические формулы для вычисления этих коэффициентов.

Величина коэффициента ζ_m в общем случае зависит от типа и конструкции местного сопротивления, степени сужения и расширения потока за ним и числа **Re**. С ростом числа **Re** коэффициент ζ_m уменьшается и асимптотически приближается к некоторому постоянному значению. В квадратичной области сопротивления величина ζ_m не должна зависеть от числа **Re**, а должна зависеть только от типа и геометрической формы сопротивления.

В доквадратичной области сопротивления и при ламинарном режиме движения величина ζ_m зависит от числа **Re**, а также от типа и геометрической формы сопротивления.

Величина ζ_m зависит также от того, какая скорость будет использована в формуле Вейсбаха (5.39): скорость до местного сопротивления или за ним.

В случае местных сопротивлений возможны два режима движения жидкости: ламинарное и турбулентное. Для местных сопротивлений критические значения чисел Рейнольдса имеют значительно меньшие величины, чем при равномерном движении жидкости в прямых трубах. Так, при движении жидкости в клапанах, золотниках и т.п., критическое число Рейнольдса $Re=100$. При числах $Re>500$ практически наступает зона квадратичных сопротивлений.

Лекция -6

Раздел 5. Прикладная гидравлика (продолжение)

Тема 5.4. Истечение жидкости через отверстия и насадки.

Литература: [2] стр.103-108, 111-117;

[3] стр.97-105; [6] стр.115-119

Самостоятельно изучить:

Истечение несжимаемой жидкости через большие отверстия при постоянном напоре.

Истечение несжимаемой жидкости через отверстия и насадки при переменном напоре.

Литература: [2] стр.109-111, 117-122;

[3] стр. 106-107.

Общие положения

На практике наблюдают и широко используют такое явление, как истечение жидкости через отверстия в стенках емкостей или через насадки (короткие патрубки), приставленные к отверстиям. По формам и характеру истечения это явление весьма разнообразно. Оно может происходить как при постоянном, так и при переменном напоре.

Истечение при постоянном напоре является случаем установившегося движения, при переменном - неустановившегося. Если истечение несжимаемой жидкости происходит в атмосферу, то отверстия или насадки, через которые происходит истечение, называются *незатопленными (свободными)*. Если истечение происходит в пространство, заполненное такой же жидкостью, как и истекающая, то отверстия или насадки называются *затопленными*, а истечение называется *истечением под уровень*.

Истечение несжимаемой жидкости через малое отверстие в тонкой стенке при постоянном напоре в атмосферу

Различают отверстия *малые* и *большие*, а стенки – *тонкие* и *толстые*.

Независимо от абсолютных размеров отверстие считается малым, если одновременно удовлетворяются два условия:

– скорость подхода жидкости к отверстию пренебрежимо мала, что осуществимо при отношении общей площади стенки S_{cm} к площади отверстия S_0 больше четырех ($\frac{S_{cm}}{S_0} > 4$);

– скорости (или напоры) в верхней и нижней точках отверстия примерно равны друг другу, что, в частности, можно считать справедливым, если отношение глубины погружения отверстия под свободную поверхность жидкости k_{64}

вертикальному размеру отверстия больше 10.

В противном случае отверстие считается большим.

Стенка считается тонкой, если вытекающая струя соприкасается лишь с внутренней кромкой отверстия и не касается боковой поверхности его. В этом случае стенка не влияет на характер истечения.

Если же вытекающая струя касается боковой поверхности отверстия, то стенка считается толстой, независимо от абсолютной ее толщины. В этом случае из-за влияния стенки истечение из отверстия идентично истечению из насадка.

Условно малое отверстие в тонкой стенке изображают с острой внутренней кромкой и скошенными боковыми поверхностями, как на рис.5.14.

При истечении каждая струйка, кроме струйки «а», должна менять свое направление. Этот поворот осуществляется плавно и траектория каждой струйки образует кривую линию. Поэтому вытекающий через отверстие поток (струя) жидкости под воздействием инерционных сил на пути от входа в отверстие и до сечения 2-2 резко сжимается. Если не учитывать возможной аэрации струи (насыщение пузырьками воздуха) и сопротивления воздуха, то за сечением 2-2 в связи с увеличением скорости падающей жидкости при постоянном расходе струя должна продолжать сжиматься, но относительно слабо.

Реально же происходит аэрация струи и подтормаживание ее трением о воздух. В результате сечение струи либо остается постоянным, либо незначительно увеличивается. При больших же скоростях истечения струя может распадаться на капли.

Если отверстие расположено далеко (по крайней мере дальше $3d_0$) от ограничивающих стенок, то они не влияют на истечение, все линии тока будут иметь достаточно большую кривизну, и струя будет сжиматься со всех сторон симметрично. Это *полное* или *совершенное сжатие*. Чем ближе к ограничивающей стенке располагается отверстие, тем меньше будет кривизна линий тока со стороны стенки и тем слабее будет сжатие в этом месте; если же отверстие располагается непосредственно у стенки, то линии тока, входящие в отверстие вдоль стенки, будут прямыми и струя со стороны стенки не получит сжатия. Случай такого несимметричного сжатия называется *неполным сжатием* или *несовершенным*.

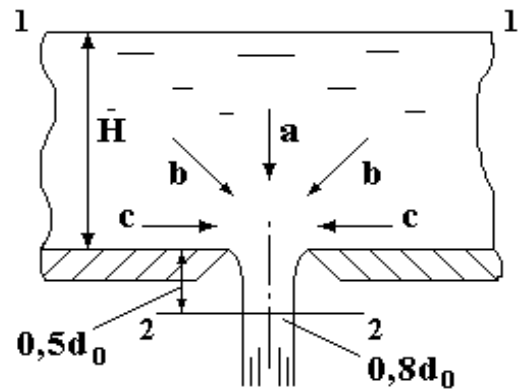


Рис.5.14

Наименьшая площадь сечения вытекающей из круглого отверстия диаметром d_0 струи, достигаемая в процессе совершенного сжатия, располагается на расстоянии примерно $0,5 d_0$ от внутренней стенки. Осредненный (эквивалентный) диаметр сжатого сечения равняется примерно $0,8 d_0$. Отношение площади сжатого сечения $S_{сж}$ к площади отверстия S_0 называется коэффициентом сжатия струи $\varepsilon = \frac{S_{сж}}{S_0}$.

При истечении через малое отверстие в тонкой стенке жидкость испытывает местные сопротивления движению со стороны острых кромок на входе отверстия. Поэтому уравнение Бернулли для сечений 1-1 (свободная поверхность жидкости) и 2-2 (сжатое сечение) (см. рис.5.14), записывается так:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \zeta_0 \frac{v_2^2}{2g}, \quad (5.40)$$

где α_1 и α_2 - коэффициенты Кориолиса, ζ_0 - коэффициент местных сопротивлений отверстия, равный 0,06.

Если плоскость сравнения совместить с сечением 2-2, то $z_1 = H$, $z_2 = 0$.

Пусть резервуар открыт, и истечение происходит в атмосферу. Тогда и на свободную поверхность и на поверхность вытекающей из отверстия струи действует одно и то же давление $p_\alpha \frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_\alpha}{\rho g}$.

Если площадь свободной поверхности несоизмеримо больше, чем площадь отверстия, или резервуар имеет подпитку, равную расходу жидкости через отверстие, то можно считать, что уровень в резервуаре постоянен, то есть $v_1 = 0$. После соответствующих преобразований уравнения получается формула скорости истечения жидкости через отверстие

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2 + \zeta_0}} \sqrt{2gH}. \quad (5.41)$$

Здесь $\frac{1}{\sqrt{\alpha_2 + \zeta_0}} = \varphi_0$ - коэффициент скорости, численно равный отношению действительной скорости к теоретической, то есть к такой скорости, которая была бы достигнута в отверстии при отсутствии любых сопротивлений.

В соответствии с уравнением сплошности объемный расход

$$Q_0 = S_{сж} v_2 = \varepsilon \varphi_0 S_0 \sqrt{2gH} = \mu_0 S_0 \sqrt{2gH}, \quad (5.42)$$

где $\mu_0 = \varepsilon \varphi_0$ - коэффициент расхода, численно равный отношению действительного расхода к теоретическому. Если принять диаметр сжатого сечения $d_{сж}$

$$= 0,8d_0, \text{ то } \varepsilon = \frac{S_{сж}}{S_0} = \frac{4\pi(0,8d_0)^2}{4\pi d_0^2} = 0,64.$$

Числовые значения коэффициента скорости φ определяются экспериментально. Для круглых отверстий при истечении из них воды в среднем $\varphi_0 = 0,97$. Коэффициент расхода для истечения воды через круглые отверстия

$$\mu_0 = \varepsilon \varphi_0 = 0,64 \cdot 0,97 = 0,62. \quad (5.43)$$

Это значит, что в данном случае расход жидкости через отверстие составляет всего 62% от теоретического расхода.

Коэффициенты φ_0 и μ_0 не постоянны и зависят от многих факторов: вязкости, начального напора, размеров отверстий, их формы, положения отверстий относительно стенок, плотности жидкости, условий среды, куда вытекает жидкость и т.д. Учитывается влияние этих факторов эмпирическими формулами.

Истечение несжимаемой жидкости через малое отверстие в тонкой стенке при постоянном напоре под уровень.

Предположим, что имеется стенка с малым отверстием (рис.5.15).

С одной стороны стенки жидкость на уровне H_1 , а с другой - на уровне H_3 от дна емкости. На свободные поверхности действует одно и то же давление p_0 . Согласно закону сообщающихся сосудов через отверстие будет происходить перетекание жидкости в сторону меньшего уровня.

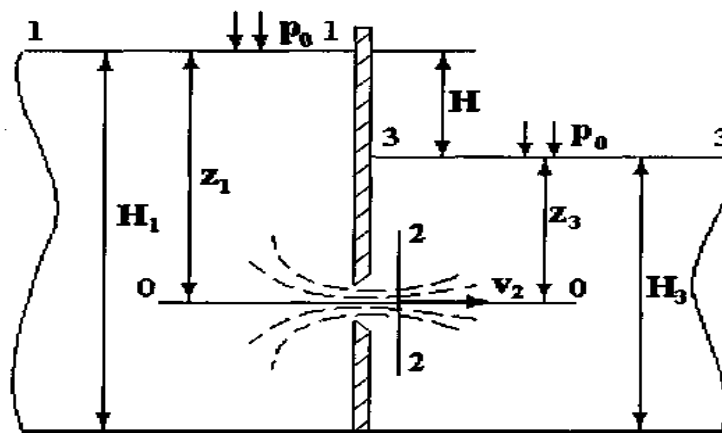


Рис.5.15

При соблюдении определенных условий уровни по обе стороны стенки могут оставаться неизменными. Поскольку истечение происходит под уровень, то в выходящей из отверстия струе давление будет отличным от атмосферного. За сечением 2-2 струя претерпевает резкое и весьма значительное расширение.

Формулы для расчета параметров истечения могут быть получены на основе уравнения Бернулли, записанного для сечений 1-1 и 3-3 относительно

плоскости сравнения 0-0,
$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} + \Sigma h.$$

Учитывая, что $p_1 = p_3 = p_0$ и благодаря соблюдению условия неизменности уровней $v_1 = v_3$, это уравнение примет вид $z_1 - z_3 = \Sigma h$.

Потери Σh в этом случае определяются местными потерями напора в отверстии $\zeta_0 \frac{v_2^2}{2g}$ и потерями напора на внезапное расширение $\zeta_{\text{вр}} \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$, где $\zeta_{\text{вр}} \approx 1$.

Величина $z_1 - z_3$ согласно рис.5.15 равна $H_1 - H_2 = H$. Следовательно, $H = (\alpha_2 + \zeta_0) \frac{v_2^2}{2g}$, откуда скорость истечения

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2 + \zeta_0}} \sqrt{2gH} = \varphi_0 \sqrt{2gH}. \quad (5.44)$$

Напор H в формуле равен разности уровней и является действующим напором, под которым происходит истечение.

Расход при истечении под уровень

$$Q_0 = S_{\text{сж}} v_2 = \varepsilon \varphi_0 S_0 \sqrt{2gH} = \mu_0 S_0 \sqrt{2gH} \quad (5.45)$$

зависит от площади отверстия и разности уровней и практически не зависит от глубины погружения отверстия.

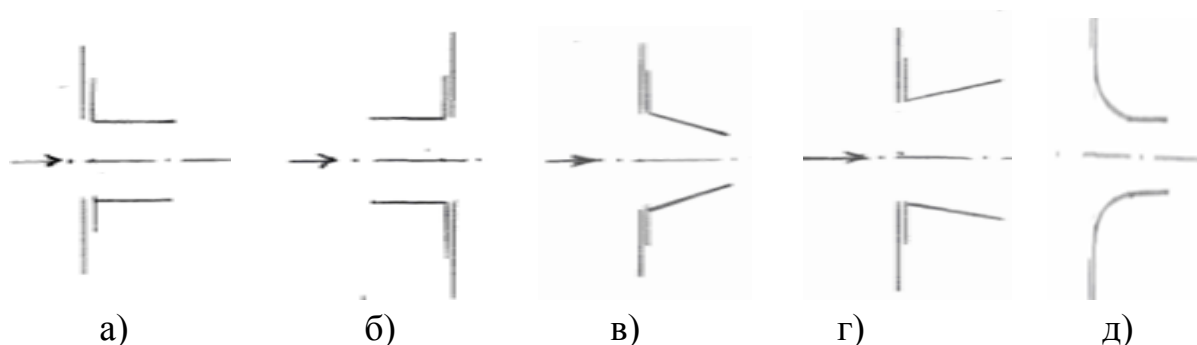
Коэффициенты расхода μ_0 для затопленных и незатопленных отверстий при равных напорах и одинаковых отверстиях почти одни и те же.

Истечение несжимаемой жидкости через насадки при постоянном напоре.

Параметры струи, вытекающей из отверстия, можно в определенных пределах изменить, если присоединить к нему короткий патрубок (насадок).

Насадки делятся на три основные группы:

- 1) Цилиндрические: внешние (а), внутренние (б)
- 2) Конические: сходящиеся (в), расходящиеся (г).
- 3) Коноидальные (д).



Истечение жидкости во всех типах насадков имеет общие черты, выявить которые можно, рассматривая истечение через любой из них, например, цилиндрический внешний (рис.5.16).

При входе в насадок струя жидкости сжимается так же, как при истечении через малое отверстие в тонкой стенке. Минимальная площадь живого сечения потока жидкости называется сжатым сечением (на рис.5.16 сечение 2-2). За сжатым сечением струя расширяется, но не сразу, а лишь на некотором расстоянии от входного отверстия.

На выходе из насадка струя занимает уже все сечение, сжатие на выходе отсутствует, т.е. коэффициент сжатия $\epsilon = 1$.

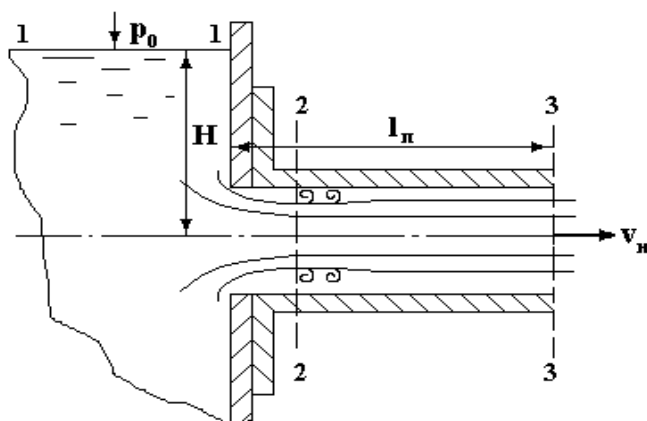


Рис.5.16

В зоне сжатия внутри насадка образуется кольцевая вихревая область, давление в которой меньше атмосферного. Величина вакуума зависит от скорости движения жидкости, то есть от напора. Для заданного режима истечения наибольший вакуум получается в сечении, где струя имеет наибольшее сжатие и где скорости потока наибольшие.

Наличие в сжатом сечении вакуума существенно изменяет картину истечения. Фактически получается, что жидкость истекает из емкости не в атмосферу, а в область вакуума. Следовательно, действующий напор увеличивается, что приводит к увеличению расхода по сравнению с истечением через отверстие. При чрезмерном увеличении напора на входе в насадок давление в струе снизится настолько, что достигнет давления насыщения паров воды и при данной температуре жидкость в сжатом сечении начнет вскипать, возникнет кавитация, разрыв струи, прорыв воздуха в насадок, срыв его работы. Поэтому в действительности при внешнем давлении $p_0 = 1$ бар предельный напор, при котором еще не наступает срыв работы насадки составляет $H^{np} \approx 9,5$ мвод.ст.

Для того, чтобы присоединенный к отверстию патрубок работал как насадок и картина истечения была такой, как на рис.5.16, необходимо выдерживать длину патрубка $\ell_{\text{п}}$ в пределах

$$(3,5 \div 4,0)d_{\text{п}} \leq \ell_{\text{п}} \leq (6 \div 7)d_{\text{п}}, \quad (5.46)$$

где $d_{\text{п}}$ - диаметр патрубка.

Если $\ell_{\text{п}} < (3,5 \div 4,0)d_{\text{п}}$, то длина патрубка оказывается недостаточной, чтобы в ее пределах вытекающая струя успела расшириться и заполнить все сечение. Воздух прорывается в зону сжатия струи, вакуум срывается и насадок работает как малое отверстие в тонкой стенке.

Если $\ell_{\text{п}} > (6 \div 7)d_{\text{п}}$, то вместо насадка получается короткий трубопровод, в котором потери напора из-за трения значительно снижают эффект насадка. При насадках длиной больше $(40 \div 50)d_{\text{п}}$ подсосывание не компенсирует возрастающие гидравлические потери по длине патрубка и расход жидкости через такой насадок оказывается равным или меньшим расхода через отверстие в тонкой стенке.

Как насадок может рассматриваться и отверстие в толстой стенке, если толщина стенки удовлетворяет требованиям к минимальной длине насадка.

Скорость $v_{\text{н}}$ и расход $Q_{\text{н}}$ при протекании жидкости через насадки определяются по тем же формулам, что и для отверстий в тонкой стенке, (5.41) и (5.42), но со своими значениями коэффициентов скорости φ и расхода μ для каждого типа насадка.

Скорость в выходном сечении насадка

$$v_{\text{н}} = \varphi_{\text{н}} \sqrt{2gH}. \quad (5.47)$$

$$\text{Расход } Q_{\text{н}} = \mu_{\text{н}} S_{\text{вых}} \sqrt{2gH}. \quad (5.48)$$

Для внешнего цилиндрического насадка (см. рис.5.16) коэффициент скорости $\varphi_{\text{н}} = 0,82$ и для истечения в атмосферу, и для истечения под уровень. Значит, по сравнению с отверстием скорость истечения жидкости уменьшается на 15%, что обусловлено увеличением потерь напора в связи с расширением струи в насадке между сечениями 2-2 и 3-3 и появлением потерь трения о боковые стенки.

Истечение через внутренний насадок отличается от истечения через внешний только условиями входа. Струя на входе во внутренний насадок испытывает большее сжатие, чем в наружном, и поэтому коэффициенты

скорости и расхода здесь меньше: $\mu_n = \varphi_n = 0,71$. Расход через внутренний насадок $Q_n = 0,71 S_{\text{вых}} \sqrt{2gH}$. Этот насадок также увеличивает расход жидкости по сравнению с отверстием, но несколько меньше, чем внешний.

В **коническом сходящемся** насадке $\varepsilon < 1$, коэффициенты φ_n и μ_n зависят от угла конусности и принимают значения $\varphi_n = 0,83 \div 0,98$, $\mu_n = 0,82 \div 0,946$. Вакуум в применяемых на практике конических сходящихся насадках не образуется, поэтому расход по сравнению с малым отверстием в тонкой стенке не увеличивается. Струя, вытекающая из сходящегося насадка, обладает большей, чем у других типов насадок кинетической энергией. Поэтому сходящиеся насадки применяют там, где при данном напоре необходимо получить по возможности большую скорость истечения, дальность полета струи и силу ее удара о препятствие.

В **коническом расходящемся** насадке $\varepsilon = 1$. Коэффициенты φ_n и μ_n зависят от угла конусности θ . Так, при $\theta \leq 5-7^\circ$ $\varphi_n = \mu_n = 0,45$, а при $\theta > 12^\circ$ струя отрывается от стенок и наступает срыв работы насадка. Расход значительно больше расхода через цилиндрический внешний, а выходная скорость значительно меньше.

Через **коноидальный насадок** получается наиболее совершенное истечение. Внутри насадка отсутствует вихревая отрывная зона, и вакуум не создается. Коэффициенты $\varphi_n = \mu_n = 0,97 \div 0,99$.

Расход, в результате отсутствия сжатия и высокого значения коэффициента расхода, выше, чем у других типов.

Раздел 5. Прикладная гидравлика (продолжение).

Тема 5.5 Гидравлический удар в трубах.

Литература: [2] стр.89-93; [3] стр. 89-92;

[5] стр. 192-208; [6] стр. 121-123.

Неустановившееся движение жидкости в трубах. Гидравлический удар

Чисто гидравлическим ударом в трубах называется комплекс явлений, происходящих в жидкости при изменении во времени скорости ее движения, из-за чего возникает колебательный процесс, сопровождающийся резким повышением и понижением давления.

Достаточно точное решение задачи расчета гидравлического удара в трубе получил Н.Е. Жуковский, установив, что скорость перемещения импульса при гидравлическом ударе равна скорости звука в жидкости, и что при такой скорости движения капельную жидкость следует считать сжимаемой. Исходя из этого, явление гидравлического удара можно описать следующим образом.

Пусть жидкость из резервуара больших размеров вытекает по горизонтальной трубе с задвижкой на конце (рис.5.17). Предположим, что задвижка закрылась мгновенно. Из-за того, что сжимаемая жидкость не может остановиться одновременно по всей длине трубы, в первое мгновение останавливается слой, непосредственно прилегающий к задвижке, и в этом слое за счет преобразования кинетической энергии повышается давление.

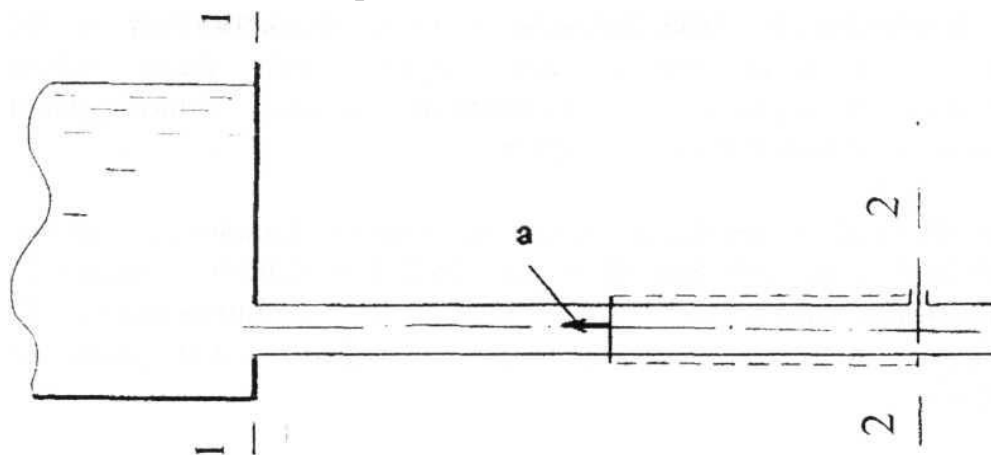


Рис5.17.

Затем последовательно прекращают движение слои жидкости на увеличивающемся со временем расстоянии от задвижки. При этом сжимается ранее остановившаяся масса жидкости и в результате повышения давления в пределах упругих деформаций расширяется труба.

Вследствие этих обстоятельств, в трубу входит дополнительный объем жидкости. Возникшая у задвижки волна повышенного давления распространяется навстречу первоначальному направлению течения и достигает начального сечения трубы. В следующий момент под воздействием повышенного давления сжатой жидкости и напряжений в растянутой трубе начинается истечение жидкости из трубы в резервуар.

От резервуара к задвижке перемещается волна понижения давления (отрицательная отраженная волна), пока не достигнет задвижки. В трубе устанавливается давление, равное первоначальному. Труба принимает первоначальные размеры. Но по инерции жидкость продолжает вытекать из трубы в резервуар и от сечения 2-2 движется волна разрежения.

При достижении волной резервуара (сечение 1-1) в трубе устанавливается давление ниже первоначального и количество жидкости в трубе будет меньше ее первоначального объема, а труба оказывается сжатой. В результате жидкость начинает поступать в трубу. От сечения 1-1 идет волна повышения давления. При достижении ею сечения 2-2 в трубе устанавливается давление, равное первоначальному, и труба приобретает первоначальные размеры. Процесс повторяется. По Жуковскому

$$a = \frac{\sqrt{\frac{E_{жс}}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{d}{\delta} \frac{E_{жс}}{E_m}}}, \quad (5.49)$$

где d – внутренний диаметр трубопровода; δ – толщина стенок трубопровода; ρ – плотность жидкости; $E_{жс}$ – модуль упругости жидкости; E_m – модуль упругости материала трубы.

Сила удара

$$h_{y0} = -\frac{a}{g} \Delta v, \quad (5.50)$$

где Δv – положительное или отрицательное приращение скорости движения жидкости; g – ускорение свободного падения.

Если скорость уменьшается (Δv отрицательное), что бывает при закрытии задвижки, то первой проходит волна сжатия и, согласно формуле (5.50) удар будет положительным.

Если скорость увеличивается (Δv положительное), что наблюдается при открытии задвижки, то первой идет волна разрежения и, согласно формуле (5.50) удар будет отрицательным.

Пусть теперь задвижка закрывается не мгновенно, а так что скорость перед ней уменьшается, например, по линейному закону. Полностью задвижка

закроется за некоторое время t_s . Начальная скорость v_0 в результате полного закрытия задвижки уменьшится на величину $\Delta v = v_0$ и станет равной нулю. Наступит полный гидравлический удар, сила которого

$$(h_{y\partial})_n = -\frac{a}{g} v_0. \quad (5.51)$$

Но эта сила возникла не мгновенно, а нарастала по мере закрытия задвижки. Согласно формуле (5.49) фронт волны движется со скоростью a . За время t_s , на протяжении которого закрывалась задвижка, волна прошла расстояние $\ell = at_s$ и за это же время сила удара возле задвижки достигла своего максимально возможного при данных условиях значения силы полного удара $(h_{y\partial})_n$. При дальнейшем движении фронта волны сила удара возле задвижки не увеличивается. Связь между пройденным расстоянием и силой удара можно изобразить графиком (рис.5.18).

Длина графика волны, на протяжении которого давление вырастает от нуля до $(h_{y\partial})_n$, обозначается $\ell_{\text{нар}}$ и называется длиной нарастания полного удара.

При постепенном закрытии задвижки различают два разных случая:

- полного гидроудара, когда $\ell_{\text{нар}} < 2L$,
- неполного гидроудара, когда $\ell_{\text{нар}} > 2L$.

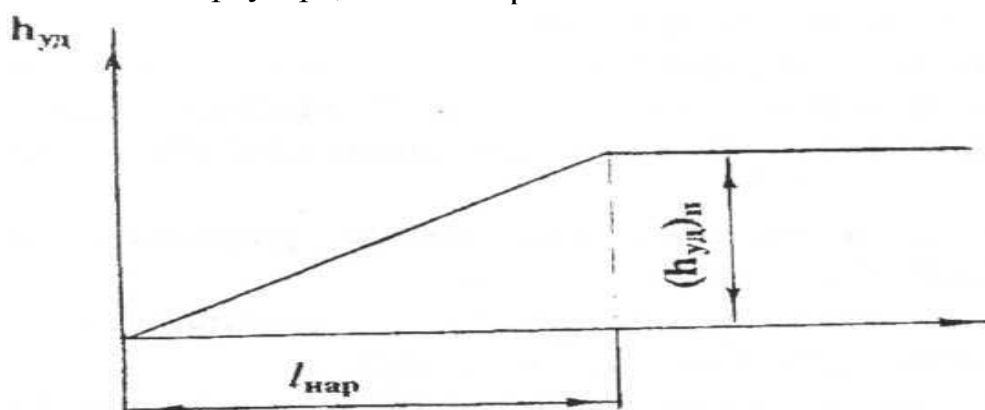


Рис.5.18

Условие, при котором получается неполный удар, — $t_s > t_r$, где $t_r = \frac{2L}{a}$ — время пробега фронта волны от задвижки до входа в трубу и обратно. Иногда время t_r называют фазой удара. По истечении времени t_r величина гидроудара перестает расти (хотя задвижка продолжает закрываться), благодаря тому, что отрицательная отраженная волна, успев подойти к задвижке до момента ее полного закрытия, начинает накладываться в этом месте на положительную волну.

Величину неполного удара $(h_{y\partial})_n$ находят из соотношения $\frac{(h_{y\partial})_n}{(h_{y\partial})_n} = \frac{t_r}{t_s}$, откуда

$$(h_{y\partial})_n = -2 \frac{v_0 L}{g t_s}. \quad (5.52)$$

Из формулы (5.52) вытекает, что гидравлический удар наблюдается всегда, даже в случае самого малого изменения скорости потока при манипуляциях арматурой. Но сила удара будет тем меньше, чем больше время закрытия (открытия) арматуры t_s , меньше длина трубопровода L и начальная скорость движения жидкости v_0 . Это и есть те основные факторы, которые используются в целях уменьшения силы удара.

Лекция-7

Тема 5.6. Основные принципы расчета простых и сложных трубопроводов.

Литература: [2] стр.133-157; [3] стр. 111-130;

[5] стр.179-182; [6] стр.99-111.

1. Системы трубопроводов и основные типы задач

Встречающиеся в технике трубопроводы можно условно разделить на две группы:

- простые трубопроводы, которые представляют собою одну или несколько последовательно соединенных труб, не имеющих боковых ответвлений;
- сложные трубопроводы, образующиеся в результате разветвлений, параллельных соединений, боковых отводов или замыканий в кольца труб различных длин и диаметров.

И простые и сложные трубопроводы при расчете систем целесообразно разделять на длинные и короткие.

Длинными называют такие трубопроводы, в которых потери на местных сопротивлениях не превышают 10% общих потерь напора. Поэтому при расчетах местные потери или учитывают в виде надбавки к потерям на трение, величину которой назначают по прототипу или исходя из накопленного опыта проектирования подобных систем, или отбрасывают вовсе за малостью.

Короткими называют такие трубопроводы, в которых потери напора на местных сопротивлениях значительны (по крайней мере, превышают 10% общих сопротивлений). При расчетах таких систем по возможности более точно оценивают и учитывают оба вида потерь.

В технике применяется огромное количество трубопроводов различного назначения. В зависимости от конкретных условий размещения и назначения практически каждый трубопровод (или система трубопроводов) имеет индивидуальную конфигурацию, что определяет особенности его расчета.

Исходными для расчета трубопроводов являются:

- уравнение баланса энергий (уравнение Бернулли);
- уравнение баланса расходов в системе трубопроводов или равенства расходов в отдельных частях системы;
- формулы, определяющие потери напора по длине отдельных участков труб и на местных сопротивлениях;
- формулы и таблицы для вычисления коэффициентов трения и местных сопротивлений.

На базе этих зависимостей с учетом приведенной здесь классификации для трубопроводов (или систем) различной конфигурации и назначения,⁷⁶

объединяемых в группы по какому-либо признаку, составляются различные методики расчета.

Возможны три основные постановки задачи расчета трубопровода:

Задача 1. Определить необходимый напор H при заданном расходе в сети Q (и распределении его по участкам в случае сложного трубопровода), а также при заданных диаметре d и длине ℓ (или d_i и ℓ_i участков сложного трубопровода);

Задача 2. Определить полный расход Q , поступающий в сеть и его распределение по отдельным участкам (в случае сложного трубопровода) при заданном напоре H , диаметре d и длине ℓ (или d_i и ℓ_i участков сложного трубопровода);

Задача 3. Определить диаметр d трубопровода (или диаметры отдельных его участков d_i), позволяющий пропустить заданный расход Q (с заданным распределением по участкам в случае сложного трубопровода) по трубе длиной ℓ (или системе труб с длинами участков ℓ_i) при заданном напоре H .

2. Расчет простого короткого трубопровода постоянного диаметра

Различают два случая:

истечение в атмосферу, рис.5.19; истечение под уровень, рис.5.20.

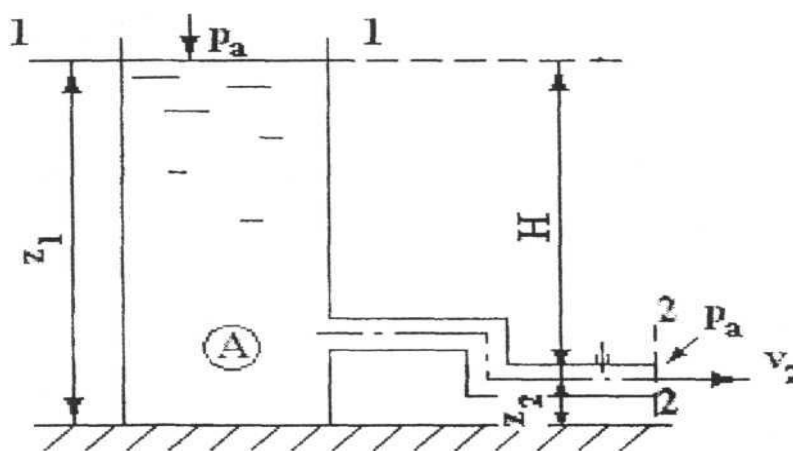


Рис.5.19

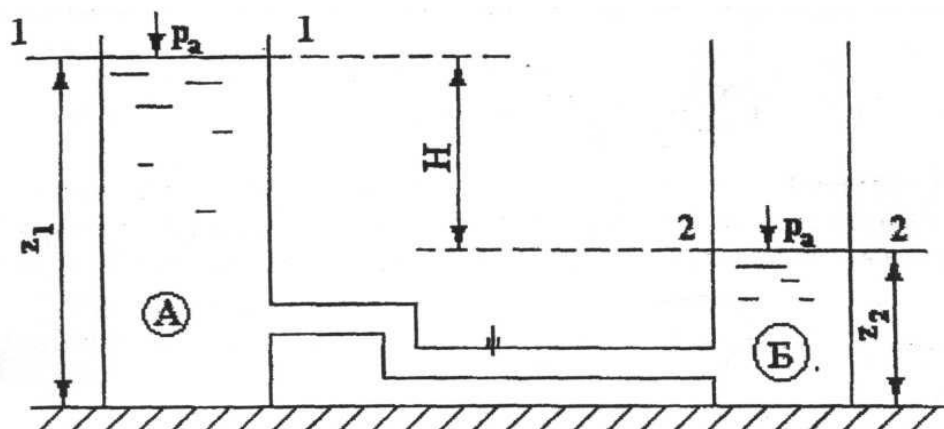


Рис.5.20

Для обоих случаев уравнение Бернулли запишется в виде

$$z_1 + \frac{p_a}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_a}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_l + \sum h_m, \quad (5.53)$$

откуда $z_1 - z_2 = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} + h_l + \sum h_m$, где $h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$ - потери напора по длине (потери трения); $\sum h_m = \sum \zeta_m \frac{v^2}{2g}$ - сумма потерь напора на местных сопротивлениях.

Если считать, что истечение установившееся, скорость движения жидкости в трубе равна v и уровни во всех емкостях остаются неизменными, то величина $z_1 - z_2 = H$ является действующим напором.

В случае истечения в атмосферу, рис.1, $v_1 = 0$ и $v_2 = v$. Значит,

$$H = \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \sum \zeta_m \frac{v^2}{2g} = \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta_m + 1 \right) \frac{v^2}{2g}. \quad (5.54)$$

Из (5.54) видно, что при истечении в атмосферу действующий напор расходуется на преодоление потерь и создание кинетической энергии на выходе из трубы.

В случае истечения под уровень, рис.5.20, $v_1 = v_2 = 0$ и, следовательно,

$$H = h_l + \sum h_m = \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta_m \right) \frac{v^2}{2g}. \quad (5.55)$$

Из (5.55) видно, что при истечении под уровень весь напор расходуется на преодоление потерь. Если для этого случая выделить отдельно потерю на выход из трубы в резервуар Б, представив ее в виде $h_{\text{вых}} = \zeta_{\text{вых}} \frac{v^2}{2g}$, где $\zeta_{\text{вых}} = 1$, то формула (5.55) по форме станет идентичной формуле (5.54)

$$H = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \sum \zeta_m \frac{v^2}{2g} + \zeta_{\text{вых}} \frac{v^2}{2g} = \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta_m + 1 \right) \frac{v^2}{2g}. \quad (5.56)$$

Отличие формул (5.54) и (5.56) в том, что при истечении в атмосферу единица в скобках учитывает потерю с уходящей скоростью, а при истечении под уровень – это коэффициент местных сопротивлений выхода из трубы в резервуар.

Задача 1. Напор H , требуемый для пропуска заданного расхода Q через трубопровод известных размеров и конфигурации, вычисляется по формуле (5.56), в которой скорость выражается через расход (из уравнения сплошности),

$$H = \frac{8Q^2}{g\pi^2 d^4} \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta_m + 1 \right). \quad (5.57)$$

Коэффициенты потерь λ и ζ_m определяются по рекомендациям.

Задача 2. Пропускную способность трубопровода можно определить, решив уравнение (5.57) относительно Q ,

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \frac{1}{\sqrt{\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta_m + 1}} \sqrt{2gH} = \mu S \sqrt{2gH}, \quad (5.58)$$

где $\mu = \frac{1}{\sqrt{\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta_m + 1}}$ - коэффициент расхода трубопровода, S - площадь поперечного сечения трубы.

В общем случае коэффициенты λ и ζ_m являются функциями числа **Re**. Поскольку расход Q , а значит и скорость течения v неизвестны, и число **Re** вычислить невозможно, задача решается в последовательных приближениях. В первом приближении предполагается, что режим течения соответствует квадратичной зоне сопротивления, где эти коэффициенты от числа **Re** не зависят. Как правило, назначают $\lambda = 0,03$, а коэффициенты местных сопротивлений ζ_m принимают по справочным данным.

Вычисленное в первом приближении значение расхода даст возможность вычислить скорость течения в трубе и по числу **Re** уточнить значение λ с последующим уточнением значения расхода.

Задача 3. Для определения диаметра необходимо уравнение (5.57) или (5.58) решить относительно d .

3. Расчет простого короткого трубопровода переменного диаметра

В случае простого короткого трубопровода, состоящего из последовательно соединенных участков труб различного диаметра (рис.5.21) расход на всех участках будет одинаков ($Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = Q$), а потеря напора в трубе равна сумме потерь напора по длине каждого участка и на всех местных сопротивлениях $\left(H = h_{\ell 1} + h_{\ell 2} + \dots + h_{\ell n} + \sum_1^m \zeta_{mj} \right)$.

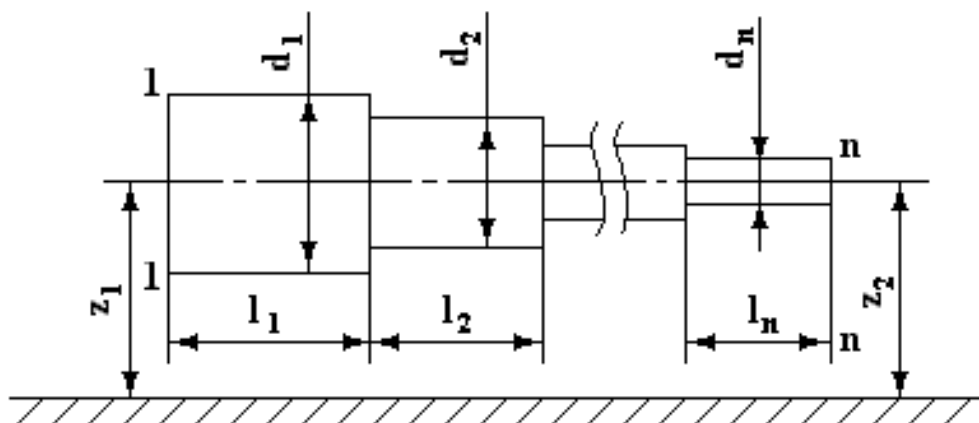


Рис.5.21

Задача 1. Чтобы определить необходимый напор H при заданном расходе Q , необходимо записать уравнение Бернулли для сечений 1-1 и $n-n$ в виде

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_n + \frac{p_n}{\rho g} + \frac{v_n^2}{2g} + \sum_1^n h_{li} + \sum_1^m h_{mj}, \quad (5.59)$$

где $\sum_1^n h_{li} = h_{l1} + h_{l2} + \dots + h_{ln}$; $\sum_1^m h_{mj} = h_{m1} + h_{m2} + \dots + h_{mm}$.

Потери напора по длине вычисляются по формуле $h_{li} = \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \frac{v_i^2}{2g}$.

Коэффициенты сопротивлений λ_i в общем случае зависят от режима движения жидкости и могут быть вычислены при известных значениях чисел Re_i и относительных шероховатостей. Относительные шероховатости $\bar{\Delta}_i$ принимаются по справочникам для заданного сортамента труб.

Дальнейшие вычисления производятся по участкам:

– первый участок

$$v_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2}; \quad Re_1 = \frac{v_1 d_1}{\nu}; \quad \lambda_1 = f(Re_1, \bar{\Delta}_1); \quad h_{l1} = \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g};$$

– второй участок

$$v_2 = \frac{4Q}{\pi d_2^2}; \quad Re_2 = \frac{v_2 d_2}{\nu}; \quad \lambda_2 = f(Re_2, \bar{\Delta}_2); \quad h_{l2} = \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g};$$

.....

– n -ный участок

$$v_n = \frac{4Q}{\pi d_n^2}; \quad Re_n = \frac{v_n d_n}{\nu}; \quad \lambda_n = f(Re_n, \bar{\Delta}_n); \quad h_{ln} = \lambda_n \frac{l_n}{d_n} \frac{v_n^2}{2g}.$$

Здесь $\lambda_i = f(Re_i, \bar{\Delta}_i)$ вычисляется по одной из формул, рекомендованных в

Потери на местных сопротивлениях вычисляются по формуле $h_{mj} = \zeta_{mj} \frac{v_j^2}{2g}$.

Коэффициенты местных сопротивлений ζ_{mj} принимаются по справочнику в зависимости от вида сопротивления. Скорость v_j , с которой жидкость обтекает « j » сопротивление, равна скорости v_i того « i » участка, на котором это сопротивление расположено.

Подставляя вычисленные значения потерь напора и скоростей v_1 и v_n в уравнение Бернулли (5.59) можно решить его относительно одного из параметров z_1 , z_2 , p_1 , p_2 или комплексов этих параметров $(z_1 - z_2)$, $(p_1 - p_2)$, $\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right) = H$. Остальные параметры должны быть заданы или приняты.

Задача 2. Для определения расхода по заданному напору и геометрии трубопровода целесообразно воспользоваться *методом эквивалентного трубопровода*.

Суть метода заключается в расчете условной (эквивалентной) трубы одного диаметра, равнозначной по потере напора фактической трубе.

Возможны два подхода к решению задачи.

Первый: у эквивалентной трубы сохраняется длина фактической трубы

$$l_э = l_1 + l_2 + \dots + l_n, \quad (5.60)$$

а соответствующий ей диаметр определяется, как

$$d_э = \sqrt[5]{\frac{l_э}{\frac{l_1}{d_1^5} + \frac{l_2}{d_2^5} + \dots + \frac{l_n}{d_n^5}}}. \quad (5.61)$$

Второй: диаметр трубы $d_э$ задан, а длина эквивалентного трубопровода находится как

$$l_э = l_1 \left(\frac{d_э}{d_1} \right)^5 + l_2 \left(\frac{d_э}{d_2} \right)^5 + \dots + l_n \left(\frac{d_э}{d_n} \right)^5. \quad (5.62)$$

В дальнейшем ход решения одинаков, независимо от выбранного подхода. Скорость движения жидкости в эквивалентном трубопроводе согласно уравнению неразрывности

$$v_э = \frac{4Q}{\pi d_э^2}. \quad (5.63)$$

Напор в эквивалентной трубе равен потерянному напору в фактической трубе

$$H_э = H = \frac{v_э^2}{2g} \left(\lambda \frac{l_э}{d_э} + \sum \zeta_m + 1 \right), \quad (5.64)$$

откуда

$$v_э = \frac{1}{\sqrt{\lambda \frac{l_э}{d_э} + \sum \zeta_m + 1}} \sqrt{2gH}. \quad (5.65)$$

Приравнивая правые части равенств (5.63) и (5.65) можно вычислить значение расхода

$$Q = \frac{\pi d_э^2}{4} \frac{1}{\sqrt{\lambda \frac{l_э}{d_э} + \sum \zeta_m + 1}} \sqrt{2gH}. \quad (5.66)$$

Поскольку в большинстве технических трубопроводов режим движения соответствует квадратичной зоне сопротивления, то в первом приближении λ и ζ_m считаются не зависящими от **Re** и принимаются, как в п.2 с последующей проверкой и уточнением расхода.

Из уравнения (5.66) при известном расходе Q можно определить напор H . Значит, метод эквивалентного трубопровода пригоден и для решения задачи 1.

Задача 3. Если неизвестны диаметры всех участков, то для их определения необходимо задать все диаметры кроме одного. Последний диаметр определяется из условия обеспечения заданного расхода Q при заданном напоре H .

4. Расчет разветвленных (тупиковых) трубопроводов методом эквивалентных отверстий

Суть метода заключается в замене участков трубопровода постоянного диаметра эквивалентными отверстиями с последующим суммированием их площадей.

Эквивалентное отверстие – это такое отверстие, расход жидкости Q_0 через которое равен расходу Q_i в данной трубе, а напор h_0 , под которым жидкость вытекает из отверстия, равен потерянному напору в трубе. Площадь эквивалентного отверстия для данной трубы вычисляется по формуле

$$S_0 = \frac{\pi d^2}{4\mu \sqrt{\frac{\lambda l}{d} + \sum \zeta_m + 1}}, \quad (5.67)$$

где ℓ , d , λ , ζ_m – длина, диаметр, коэффициент сопротивления трения и коэффициенты местных сопротивлений трубы; μ – коэффициент расхода через отверстие.

Потеря на выход имеет место только у концевой трубы, поэтому при вычислении площадей эквивалентных отверстий для промежуточных труб единица под корнем отбрасывается.

При параллельном соединении труб площади заменяющих их эквивалентных отверстий суммируются по формуле

$$S_{1+2} = S_1 + S_2, \quad (5.68)$$

при последовательном соединении –

$$\frac{1}{S_{1+2}^2} = \frac{1}{S_1^2} + \frac{1}{S_2^2}. \quad (5.69)$$

Например, последовательность расчета разветвленного трубопровода, представленного на рис.5.22, следующая:

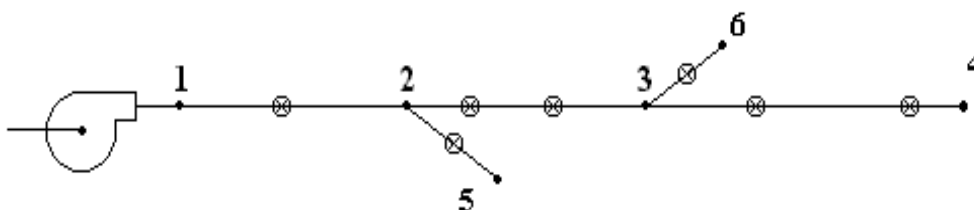


Рис. 5.22

1) Используя формулу (5.67), все участки системы заменяют эквивалентными отверстиями с площадями: $S_{12}, S_{23}, S_{25}, S_{34}, S_{36}$.

При этом предполагают, что режим движения жидкости соответствует квадратичному закону сопротивления и принимают:

- коэффициент расхода отверстия $\mu = 0,62$;
- коэффициент сопротивления трения $\lambda = 0,03$;
- коэффициенты местных сопротивлений берут по справочной литературе.

2) Весь разветвленный трубопровод заменяют единым эквивалентным отверстием путем суммирования площадей отверстий, заменяющих участки трубопровода, по формулам (5.68) и (5.69), начиная с самого удаленного:

$$S_a = S_{34} + S_{36}; \quad \frac{1}{S_b^2} = \frac{1}{S_a^2} + \frac{1}{S_{23}^2}; \quad S_c = S_b + S_{25}; \quad \frac{1}{S_d^2} = \frac{1}{S_c^2} + \frac{1}{S_{12}^2};$$

где S_d – площадь эквивалентного отверстия, заменяющего весь трубопровод.

3) Из формулы $Q_1 = \mu S_d \sqrt{2gH_1}$ определяют расход Q_1 или напор H_1 в точке 1, в зависимости от того, что задано и какая задача решается – задача 1 или задача 2.

4) Вычисляют расходы и потери напора по участкам трубопровода.

Скорость течения на участке 1-2 $v_{12} = \frac{4Q_{12}}{\pi d_{12}^2}$, где $Q_{12} = Q_1$.

Потерянный напор на участке 1-2 $h_{12} = \left(\lambda_{12} \frac{l_{12}}{d_{12}} + \zeta_{ex} + \sum \zeta_m \right) \frac{v_{12}^2}{2g}$.

Напор в сечении 2 $H_2 = H_1 - h_{12}$.

Расход на участке 2-3 $Q_{23} = \mu S_b \sqrt{2gH_2}$.

Скорость на участке 2-3 $v_{23} = \frac{4Q_{23}}{\pi d_{23}^2}$.

Расход на участке 2-5 $Q_{25} = \mu S_{25} \sqrt{2gH_2}$.

Проверка $Q_{12} = Q_{23} + Q_{25}$.

Потеря напора на участке 2-3 $h_{23} = \left(\lambda_{23} \frac{l_{23}}{d_{23}} + \sum \zeta_m \right) \frac{v_{23}^2}{2g}$.

Напор в точке 3 $H_3 = H_2 - h_{23}$.

Расход на участке 3-4 $Q_{34} = \mu S_{34} \sqrt{2gH_3}$.

Скорость на участке 3-4 $v_{34} = \frac{4Q_{34}}{\pi d_{34}^2}$.

Расход на участке 3-6

$$Q_{36} = \mu S_{36} \sqrt{2gH_3}.$$

Проверка

$$Q_{23} = Q_{34} + Q_{36}.$$

Потеря напора на участке 3-4

$$h_{34} = \left(\lambda_{34} \frac{l_{34}}{d_{34}} + \Sigma \zeta_{.M} + 1 \right) \frac{v_{34}^2}{2g}.$$

Проверка

$$H = h_{12} + h_{23} + h_{34}.$$