

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИНАНСОВО – ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Е.Г. БЫЧКОВА

ЭКОНОМЕТРИКА

Учебно-методическое пособие
по изучению дисциплины и задания
для контрольной работы

Благовещенск
Издательство ДальГАУ
2014

УДК 330.4 (075.8)

Бычкова Е.Г. Эконометрика: учебно-методическое пособие по изучению дисциплины и задания для контрольной работы / Е.Г.Бычкова. - Благовещенск: ДальГАУ, 2014 – 68 с.

В пособии приводятся теоретические аспекты по основным темам дисциплины, которые содержат методические указания, включающие основные понятия, определения и формулы, примеры решения типовых задач, указания по их реализации с помощью ППП Excel.

Особое внимание уделено составлению и подбору задач на основе статистических данных по данным Амурской области для выполнения контрольных работ.

Учебно-методическое пособие соответствует основной образовательной программе высшего профессионального образования направления подготовки 38.04.01 «Экономика», определяемую требованиями Федерального Государственного образовательного стандарта высшего образования третьего поколения, утвержденную 21 декабря 2009 года и 24 февраля 2009 года по направлениям «Менеджмент». Пособие предназначено для обучающихся очной, очно-заочной, заочной форм обучения бакалавриата и магистратуры.

Рецензент – В.Г. Боровиков, канд. экон. наук, профессор

Рекомендовано к печати методическим советом финансово-экономического факультета ФГОУ ВПО ДальГАУ (Протокол №10 от 28 апреля 2014 года)

Издательство ДальГАУ
2014

Раздел 1. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Современные экономические теории и исследования, опирающиеся в значительной степени на использование математических моделей и методов анализа, требуют от экономистов достаточно свободного владения математическим аппаратом изучения статистических данных.

Эконометрика как дисциплина федерального (регионального) компонента по циклу общих математических и естественно-научных дисциплин впервые включена в основную образовательную программу подготовки экономистов, определяемую Государственными образовательными стандартами высшего образования второго поколения.

Эконометрика входит в число базовых дисциплин экономического образования современного специалиста сельского хозяйства, изучение которой предполагает получение студентами опыта построения эконометрических моделей, выбора метода оценки параметров модели, получения прогнозных оценок, автокорреляции и др.

Порядок изучения дисциплины следующий. При самостоятельном изучении дисциплины вначале нужно ознакомиться с ее программой. Руководствуясь программой и настоящими методическими указаниями, необходимо приступить к последовательному и глубокому усвоению материала, изложенного в рекомендуемой литературе. При этом следует составить краткий конспект по основным положениям. После усвоения учебного материала дисциплины выполняется контрольная работа.

Последним этапом изучения курса являются очные занятия на лабораторно-экзаменационной сессии. Здесь студенты на лекциях, семинарских занятиях углубляют теоретические знания, овладевают приемами и методами построения эконометрических моделей и статистической оценки параметров полученных моделей.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айвазян, С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики: [Текст]: учебник. – М.: ЮНИТИ, 2009.
2. Амурский статистический ежегодник: [Текст]: Сборник/Амурский облкомстат.- Б., 2013.
3. Афанасьев, В.Н. Эконометрика: [Текст]: учебник для вузов / В.Н.Афанасьев, М.М.Юзбашев, Т.И.Гуляева под ред. В.Н.Афанасьева.- М: Финансы и статистика, 2005.- 254 с.
4. Бородич, С.А. Эконометрика. [Текст]: - Мн.: Новое знание, 2004.- 182 с.
5. Бычкова, Е.Г. Практикум по эконометрике [Текст]: учеб.пособие, рек.ДВ РУМЦ для студ. эконом.спец./ Е.Г.Бычкова; ДальГАУ. – Благовещенск: ДальГАУ, 2011. – 188, [1] с.
6. Валентинов, В.А. Эконометрика [Текст]: учебник 2 изд. – М.: Дашков и К, 2010. -448с. Электронно-библиотечная система «Лань»
7. Гладилин, А.В. Эконометрика. [Текст]: учеб. пособие; доп. УМО по образ./ А.В. Гладилин, А.Н. Герасимов, Е.И.Громов –Ростов н/Д: Феникс, 2011. – 304 с.
8. Кремер, Н.Ш. Эконометрика. [Текст]: учеб.; рек. Мин.образ. РФ; рек. Учеб.-метод.центром «Профессиональный учебник» / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путько; под ред. Н.Ш. Кремер –2-е изд., стер. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2008 – 310 с.
9. Новиков, А.И. Эконометрика [Текст]: учебник 3 изд. – М.: ИНФРА-М, 2014. – 272с. Электронно-библиотечная система «Лань».
10. Практикум по эконометрике [Текст]: учеб. пособие / И.И.Елисеева [и др.]; под ред. И.И.Елисеевой – М.: Финансы и статистика, 2004.- 189[3] с.
11. Салманов, О.Н. Эконометрика. [Текст]: учеб. пособие; доп. УМО по образ./ О.Н. Салманов. – М.: ЭКОНОМИСТЪ, 2006.-317 с.

12. Эконометрика: Учебник [Текст]: / Под ред. И.И. Елисеевой – М.: Финансы и статистика, 2009.- 405с.
13. Эконометрика. [Текст]: учеб. пособие; рек. УМО по образ./под ред. В.С. Мхитаряна – М.: Проспект, 1009. – 380 с.
14. Тесты по эконометрике. [Текст]: для студ. Экономич. спец./ сост.: Е.Г. Бычкова; ДальГАУ. ФЭИ. – Благовещенск: ДальГАУ, 2009. – 30 с.
15. Журнал: «Вопросы статистики» 2010-2015 г.г.
16. Елисеева, И.И., Общая теория статистики. [Текст]: учебник – 4-е изд., перераб. и доп./И.И. Елисеева, М.М.Юзбашев – М.: Финансы и статистика, 2009.
17. Карасев А.И., Кремер Н.Ш., Савельева Т.И. Математические методы и модели в планировании. [Текст]: – М.: Экономика, 2007.
18. Практикум по эконометрике [Текст]: учеб. пособие / И.И.Елисеева [и др.]; под ред. И.И.Елисеевой – М.: Финансы и статистика, 2004.- 189[3] с.
19. Тихомиров, Н.П. Эконометрика: Учебник [Текст]: /Н.П. Тихомиров – М.: Издательство «Экзамен», 2007.
20. Четыркин, Е.М., Калихман, И.Л. [Текст]: учеб. пособие Вероятность и статистика. – М.: Финансы и статистика, 1982.
21. Эконометрика: Учебник [Текст]: / Под ред. И.И. Елисеевой – М.: Финансы и статистика, 2009.- 405с.
22. Эконометрика: Учебник для вузов[Текст]: учеб. пособие / Под ред. проф. Кремера Н.Ш. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002.
23. Янковский Л.П. [Текст]: учебник. Введение в эконометрику.- М.: КНОРУС, 2007.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИХ ВЫПОЛНЕНИЮ

Задание для контрольной работы содержит три задачи. Варианты контрольной работы установлены для студента с учетом первой буквы фамилии и последней цифры учебного шифра. Работы, не отвечающие обязательным для студента вариантам, не будут зачтены. В работе необходимо привести формулы, развернутый расчет с краткими пояснениями и анализом показателей, полученных в результате решения. Страницы работы должны быть пронумерованы и на каждой из них оставлены поля размером 3-4 см для замечаний и предложений рецензента. В конце работы приводится список использованной литературы, ставится подпись и дата выполнения.

Методические указания составлены для студентов заочной формы обучения, института повышения квалификации и дистанционной форм обучения экономических специальностей, содержит программу курса эконометрики, указания к выполнению заданий контрольной работы и реализация типовых задач на компьютере с помощью пакета прикладных программ Excel, варианты заданий и необходимые для решения задач статистические таблицы.

Экономисты используют количественные данные для наблюдения за ходом развития экономики, ее анализа и прогнозов. Набор статистических методов, используемых для этих целей, называется в совокупности эконометрикой.

Цель преподавания эконометрики будущим экономистам – ознакомить студентов с основами математического и эконометрического моделирования необходимых для решения теоретических и практических экономических задач, развивать логическое мышление, привить навыки самостоятельного изучения учебной и научной литературы, повысить общий уровень использования количественных методов в экономических исследованиях, выработать навыки исследования с помощью математических моделей и персональных компьютеров.

Задание для контрольных работ по вариантам

Первая буква фамилии	Последняя цифра учебного шифра									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
А, Б	1,16	14,19	13,23	12,19	11,30	10,26	9,22	8,23	7,29	6,21
В, Г	5,29	4,18	3,22	2,20	1,16	2,27	3,23	4,19	5,30	6,20
Д, Е	7,28	8,17	9,21	10,21	11,17	12,26	13,24	14,20	15,30	1,19
Ж, З, И	15,27	14,16	13,20	12,22	11,18	10,29	9,25	8,21	7,29	6,18
К, Л	5,26	4,30	3,19	2,23	1,19	8,30	16,26	14,22	13,28	12,17
М, Н	6,25	5,29	4,18	3,24	2,20	9,16	11,27	10,23	9,27	8,16
О, П	7,24	6,28	5,17	4,25	3,21	10,17	14,28	15,24	1,26	2,18
Р, С	8,23	7,27	6,16	5,26	4,22	11,18	3,29	4,25	5,25	6,19
Т, У, Ф	9,22	8,26	7,16	6,27	5,23	14,29	7,30	8,26	9,24	10,20
Х, Ц, Ч	10,21	9,25	8,17	7,28	6,24	13,20	11,16	12,27	13,23	14,21
Ш, Щ, Э, Ю, Я	11,20	10,24	9,18	8,29	7,25	14,21	15,17	14,28	13,27	12,22

2.1 КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание №1

Парная регрессия и корреляция

2.1.1 Методические указания

В зависимости от количества факторов, включенных в уравнение регрессии, принято различать простую (парную) и множественную регрессии.

Простая регрессия представляет собой регрессию между двумя переменными – y и x , то есть модель вида: $y = f(x)$,

где y – зависимая переменная (результативный признак);

x – независимая, или объясняющая, переменная (признак-фактор).

Любое эконометрическое исследование начинается со спецификации модели, то есть с формулировки вида модели, исходя из соответствующей теории связи между переменными.

Прежде всего, необходимо выделить наиболее существенные факторы, влияющие на результативный признак. Парная регрессия достаточна, если имеется доминирующий фактор, который и используется в качестве объясняющей переменной.

Уравнение простой регрессии характеризует связь между двумя переменными, которая проявляется как некоторая закономерность лишь в среднем в целом по совокупности наблюдений. В уравнении регрессии корреляционная по сути связь признаков представляется в виде функциональной связи, выраженной соответствующей математической функцией.

Результаты многих исследований подтверждают, что число наблюдений должно в 6-7 раз превышать число рассчитываемых параметров при переменной x .

Различают линейные и нелинейные регрессии.

Линейная регрессия: $y = a + b \cdot x + \varepsilon$.

Нелинейные регрессии делятся на два класса: регрессии, нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам, и регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам.

Регрессии, нелинейные по объясняющим переменным:

полиномы разных степеней $y = a + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + b_3 \cdot x^3 + \varepsilon$,

равносторонняя гиперболола $y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$.

Регрессии нелинейные по оцениваемым параметрам:

степенная $y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$;

показательная $y = a \cdot b^x \cdot \varepsilon$;

экспоненциальная $y = e^{a+b \cdot x} \cdot \varepsilon$.

Построение уравнения регрессии сводится к оценке ее параметров. Для оценки параметров регрессий, линейных по параметрам, используется метод наименьших квадратов (МНК). МНК позволяет получить такие оценки параметров, при которых сумма квадратов отклонений фактических значений результативного признака y от теоретических y_x минимальна, то есть

$$\sum [y - \hat{y}_x]^2 \rightarrow \min.$$

Для линейных и нелинейных уравнений, приводимых к линейным, решается следующая система относительно a и b :

$$\begin{cases} na + b \sum x = \sum y \\ a \sum x + b \sum x^2 = \sum yx. \end{cases}$$

Можно воспользоваться готовыми формулами, которые вытекают из этой системы:

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}, \quad b = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x^2} = \frac{\overline{yx} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}.$$

Параметр b называется коэффициентом регрессии. Его величина показывает среднее изменение результата с изменением фактора на одну единицу. Возможность четкой экономической интерпретации коэффициента регрессии

сделала линейное уравнение регрессии достаточно распространенным в эконометрических исследованиях.

Уравнение регрессии всегда дополняется показателем тесноты связи. При использовании линейной регрессии в качестве такого показателя выступает линейный коэффициент корреляции:

$$r = b \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\overline{yx} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Линейный коэффициент корреляции находится в границах: $-1 \leq r_{xy} \leq 1$.

Если коэффициент регрессии $b > 0$, то $0 < r_{xy} < 1$ - связь прямая.

Если коэффициент регрессии $b < 0$, то $-1 < r_{xy} < 0$ - связь обратная.

Уравнение нелинейной регрессии дополняется индексом корреляции: $0 \leq \rho_{xy} \leq 1$

$$\rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{ост}^2}{\sigma_y^2}} = \sqrt{1 - \frac{\sum (y - y_x)^2}{\sum (y - \bar{y})^2}}.$$

Для качественной оценки тесноты связи на основе индекса или коэффициента корреляции можно воспользоваться следующей таблицей, предложенной американским ученым Чэддоком:

Таблица 2.1

Таблица Чэддока

Показатель тесноты связи	$\pm 0,1 - \pm 0,3$	$\pm 0,3 - \pm 0,5$	$\pm 0,5 - \pm 0,7$	$\pm 0,7 - \pm 0,9$	$\pm 0,9 - \pm 0,99$
Сила связи	слабая	умеренная	заметная	высокая	очень высокая

Оценку качества построенной модели дает коэффициент или индекс детерминации, а также средняя ошибка аппроксимации.

Коэффициент детерминации – квадрат коэффициента или индекса корреляции. Он характеризует долю дисперсии результативного признака y , объясняемую регрессией, в общей дисперсии результативного признака.

Средняя ошибка аппроксимации – среднее отклонение расчетных значений результативного признака от фактических:

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum \left| \frac{y - \hat{y}_x}{y} \right| \cdot 100\% .$$

Допустимый предел значений средней ошибки аппроксимации – не более 8-10%.

Средний коэффициент эластичности показывает на сколько процентов в среднем по совокупности изменится результативный признак y от своей средней величины при изменении фактора x на 1% от своего среднего значения:

Для линейной функции средний коэффициент эластичности имеет вид

$$\bar{\varepsilon} = b \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{y}} .$$

Оценка значимости уравнения регрессии в целом дается с помощью F -критерия Фишера. При этом выдвигается нулевая гипотеза, что коэффициент регрессии равен нулю и следовательно фактор x не оказывает влияния на результат y . Для проверки нулевой гипотезы выполняется сравнение фактического $F_{\text{факт}}$ и критического (табличного) $F_{\text{табл}}$ значений F -критерия Фишера. $F_{\text{факт}}$ определяется из соотношения значений факторной и остаточной дисперсий, рассчитанных на одну степень свободы

$$F_{\text{факт}} = \frac{D_{\text{факт}}}{D_{\text{ост}}} = \frac{\sum (\hat{y} - \bar{y})^2 / m}{\sum (y - \hat{y})^2 / (n - m - 1)} ,$$

где n – число единиц совокупности;

m - число параметров при переменных x .

Величина F - критерия связана с коэффициентом детерминации r^2 и также может быть определена по формуле

$$F_{\text{факт}} = \frac{r^2}{1 - r^2} \cdot (n - 2) .$$

Для определения границ случайных колебаний отношения дисперсий F . Фишером разработаны специальные таблицы F -распределения. Табличное значение F -критерия – это максимально возможное значение критерия под

влиянием случайных факторов при данных степенях свободы $k_1 = m$ и $k_2 = n - m - 1$ и уровне значимости α . Уровень значимости – вероятность отвергнуть правильную гипотезу при условии, что она верна. Обычно α принимается равной 0,01 или 0,05.

Если $F_{табл} < F_{факт}$, то нулевая гипотеза о случайной природе оцениваемых характеристик отклоняется и принимается альтернативная гипотеза о статистической значимости и надежности оцениваемых характеристик. Если $F_{табл} > F_{факт}$, то нулевая гипотеза не отклоняется и признается статистическая ненадежность, незначимость уравнения регрессии.

Для оценки статистической значимости коэффициентов регрессии и корреляции рассчитываются t-критерий Стьюдента и доверительные интервалы каждого из показателей. Выдвигается нулевая гипотеза о случайной природе показателей, то есть о незначимом их отличии от нуля. Оценка значимости коэффициента регрессии и корреляции с помощью t-критерия Стьюдента проводится путем сопоставления их значений с величиной случайной ошибки

$$t_b = \frac{b}{m_b}; t_a = \frac{a}{m_a}; t_r = \frac{r}{m_r}.$$

Сравнивая фактическое и табличное значения t-статистики, принимаем или отвергаем проверяемую нулевую гипотезу.

Связь между F-критерием Фишера и t-статистикой Стьюдента выражается равенством $t_r^2 = t_b^2 = \sqrt{F}$.

Если $t_{табл} < t_{факт}$, то нулевая гипотеза отклоняется, то есть a , b и r_{xy} не случайно отличаются от нуля и сформировались под влиянием систематически действующего фактора x . Если $t_{табл} > t_{факт}$, то принимается нулевая гипотеза о случайной природе формирования a , b или r_{xy} .

В прогнозных расчетах по уравнению регрессии определяется предсказуемое значение результативного признака как точечный прогноз \hat{y}_x при рас-

четном (прогнозируемом) значении факторного признака $x_p = x_k$, то есть путем подстановки в уравнение регрессии $\hat{y}_x = a + bx$ соответствующего значения x .

Пример 1.1

Имеются следующие данные по районам Амурской области

Таблица 1.2

Валовой сбор овощей в хозяйствах всех категорий.

Число крестьянских (фермерских) хозяйств

Район	Число хозяйств на начало года, x	Валовой сбор овощей, тыс. тонн, y
Архаринский	42	3,0
Белогорский	139	6,6
Благовещеский	202	10,2
Михайловский	88	4,6
Октябрьский	70	3,9
Ромненский	89	3,9
Свободненский	134	6,9
Серышевский	126	7,7
Тамбовский	206	11,4

Требуется:

1. Построить линейное уравнение парной регрессии y от x .
2. Оценить качество уравнения с помощью средней ошибки аппроксимации.
3. Найти средний (обобщающий) коэффициент эластичности.
4. Оценить тесноту связи с помощью показателей корреляции и детерминации.
5. Оценить значимость коэффициента корреляции через t - критерий Стьюдента при $\alpha = 0,05$.
6. Оценить статистическую надежность результатов регрессионного анализа с помощью F - критерия Фишера при $\alpha = 0,05$.
7. Рассчитать прогнозное значение результата, если прогнозное значение фактора увеличится на 10% от его среднего уровня.

Решение:

1. Для определения параметров уравнения линейной регрессии необходимо построить расчетную таблицу.

Таблица 1.3

Расчетная таблица

	x	y	yx	x^2	y^2	\hat{y}_x	$y - \hat{y}_x$	A_i
1	42	3,0	126,0	1764	9,00	2,4	0,6	20,0
2	139	6,6	917,4	19321	43,56	7,3	-0,7	10,6
3	202	10,2	2060,4	40804	104,04	10,6	-0,4	3,9
4	88	4,6	404,8	7744	21,16	4,7	-0,1	2,2
5	70	3,9	273,0	4900	15,21	3,8	0,1	2,6
6	89	3,9	347,1	7921	15,21	4,8	-0,9	23,1
7	134	6,9	924,6	17956	47,61	7,1	-0,2	2,9
8	126	7,7	970,2	15876	59,29	6,7	1,0	13,0
9	206	11,4	2348,4	42436	129,96	10,8	0,6	5,2
Итого	1096	58,2	8371,9	158722	445,04	58,2	0	83,5
В среднем	121,8	6,47	930,2	17635,8	49,45	X	x	X
σ	52,92	2,75	X	x	x	X	x	X
σ^2	2800,56	7,5891	X	x	x	X	x	X

Для определения параметров уравнения используют систему нормальных уравнений

$$\begin{cases} na + b \sum x = \sum y \\ a \sum x + b \sum x^2 = \sum yx. \end{cases}$$

По данным таблицы 1.3 система уравнений примет вид

$$\begin{cases} 9a + 1096b = 58,2 \\ 1096a + 158722b = 8371,9. \end{cases}$$

Разделим каждый член уравнений на коэффициенты при a (в первом уравнении на 9, во втором – 1096):

$$\begin{cases} a + 121,778b = 6,467 \\ a + 144,819b = 7,638. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое и получим параметр b :

$$23,041b = 1,171; \quad b = 0,051.$$

Подставив значение b в первое уравнение, найдем значение a :

$$a = 6,467 - 121,778 \cdot 0,051 = 0,281$$

Параметры уравнения можно получить и по другим формулам, которые вытекают из системы нормальных уравнений:

$$a = \frac{\sum y \sum x^2 - \sum xy \sum x}{n \sum x^2 - \sum x \sum x} = \frac{58,2 \cdot 158722 - 8371,9 \cdot 1096}{9 \cdot 158722 - 1096 \cdot 1096} = \frac{63018}{227282} = 0,277;$$

$$b = \frac{n \sum xy - \sum y \sum x}{n \sum x^2 - \sum x \sum x} = \frac{9 \cdot 8371,9 - 58,2 \cdot 1096}{9 \cdot 158722 - 1096 \cdot 1096} = \frac{11559,9}{227282} = 0,051.$$

Получено уравнение регрессии: $\hat{y}_x = 0,277 + 0,051 \cdot x$.

С увеличением числа крестьянских (фермерских) хозяйств на 1, производство овощей в хозяйствах всех категорий увеличится в среднем на 51 тонну.

2. Оценим качество уравнения с помощью средней ошибки аппроксимации по формуле

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum \left| \frac{y - \hat{y}_x}{y} \right| \cdot 100\% = \frac{83,5}{9} = 9,28\% .$$

В среднем расчетные значения производства овощей отклоняются от фактических в среднем на 9,28%. Качество уравнения регрессии можно оценить как хорошее, так как средняя ошибка аппроксимации не превышает допустимого предела (8-10%).

3. Рассчитаем средний коэффициент эластичности по формуле

$$\bar{\varepsilon} = b \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = 0,051 \frac{121,8}{6,47} = 0,96.$$

Коэффициент эластичности показывает, что в среднем при росте числа крестьянских (фермерских) хозяйств на 1% производство овощей во всех категориях хозяйств возрастет на 0,96%.

4. Для определения тесноты связи между исследуемыми признаками рассчитаем коэффициент корреляции. Для парной линейной зависимости формула имеет вид:

$$r_{xy} = \frac{\overline{yx} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{930,2 - 6,47 \cdot 121,8}{52,92 \cdot 2,75} = 0,977.$$

Коэффициент корреляции $r_{yx} = 0,977$ свидетельствует, что связь между признака очень тесная и прямая. Коэффициент детерминации $r_{xy}^2 = 0,977^2 = 0,954$ показывает, что 95,4% изменений в уровне производства овощей в хозяйствах всех категорий объясняется различием в уровне числа крестьянских (фермерских) хозяйств.

5. Для проверки статистической значимости (существенности) линейного коэффициента парной корреляции рассчитаем t -критерий Стьюдента по формуле

$$t_{\text{факт}} = \frac{r_{xy} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}} = \frac{0,977 \sqrt{9-2}}{\sqrt{1-0,977^2}} = 12,29.$$

Вычисленное $t_{\text{факт}}$ сравним с табличным (критическим) значением $t_{\text{табл}}$ при принятом уровне значимости $\alpha = 0,05$ и числе степеней свободы $k = n - 2 = 9 - 2 = 7$. Табличное значение по таблице распределения Стьюдента равно 2,3646.

Фактическое значение критерия больше табличного, что свидетельствует о значимости линейного коэффициента корреляции и существенности связи между валовым сбором овощей во всех категориях хозяйств Амурской области и числом крестьянских (фермерских) хозяйств в этом регионе.

6. Оценим значимость уравнения регрессии и показателя тесноты связи с помощью F -критерия Фишера. Для этого сравним его фактическое значение $F_{\text{факт}}$ с табличным (критическим) значением $F_{\text{табл}}$.

Фактическое значение $F_{\text{факт}}$ определяется по формуле

$$F_{\text{факт}} = \frac{r_{xy}^2}{1-r_{xy}^2} \cdot (n-2) = \frac{0,977^2}{1-0,977^2} \cdot (9-2) = 146,94.$$

Табличное значение $F_{табл}$ по таблице значений F -критерия Фишера при $\alpha = 0,05; k_1 = m = 1; k_2 = n - m - 1 = 9 - 1 - 1 = 7$ равно 5,59 (m - число параметров при переменной x).

Фактическое значение критерия больше табличного, что свидетельствует о статистической значимости уравнения регрессии в целом и показателя тесноты связи r_{xy} , то есть они статистически надежны и сформировались под случайным воздействием фактора x .

7. Полученные оценки уравнения регрессии позволяют использовать его для прогноза. Рассчитаем прогнозное значение валового сбора овощей по всем категориям хозяйств при среднем росте числа крестьянских (фермерских) хозяйств на 10%.

Прогнозное значение числа крестьянских (фермерских) хозяйств:
 $x_{ПРОГН} = \bar{x} \cdot 1,1 = 121,8 = 133,98 = 134$.

Прогнозное значение валового сбора овощей по всем категориям хозяйств: $\hat{y}_{ПРОГН} = 0,273 + 0,051 \cdot 134 = 7,107$ тыс. тонн.

2.1.2 Решение с помощью ППП Excel

1. Встроенная статистическая функция **ЛИНЕЙН** определяет параметры линейной регрессии $y = a + b \cdot x$. Порядок вычисления следующий:

1) введите исходные данные;

2) выделите область пустых ячеек 5×2 (5 строк, 2 столбца) для вывода результатов регрессионной статистики или область 1×2 – для получения только оценок коэффициентов регрессии;

3) активизируйте Мастер функций: в главном меню выберите **Вставить функцию** f_x ;

4) в окне Категория (рисунок 2.1) выберите **Статистические**, в окне Функция – **ЛИНЕЙН**. Щелкните по кнопке **ОК**;

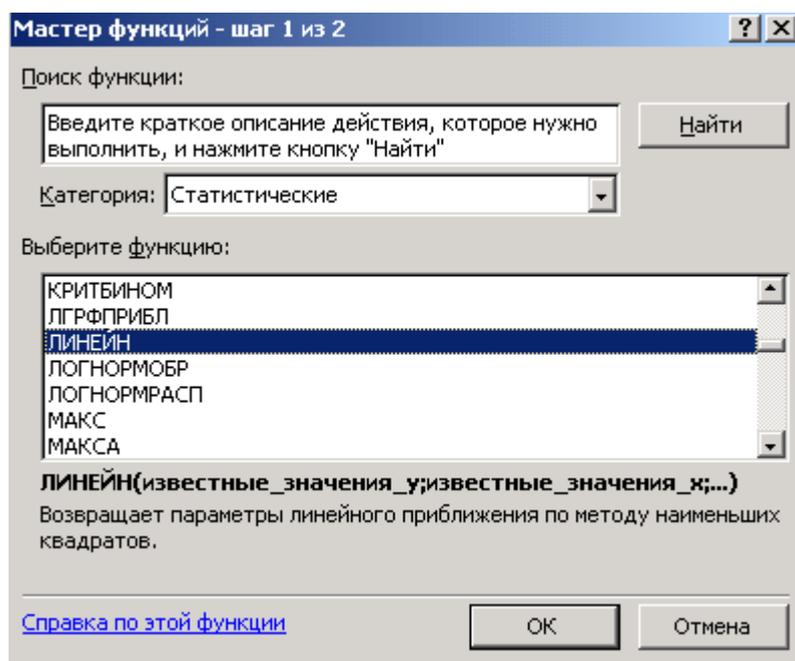


Рис. 1.1. Диалоговое окно «Мастер функций»

5) заполните аргументы функции (рис. 2.2):

Известные_значения_у – диапазон, содержащий данные результативного признака;

Известные_значения_х – диапазон, содержащий данные факторов независимого признака;

Константа – логическое значение, которое указывает на наличие или на отсутствие свободного члена в уравнении; если *Константа* = 1, то свободный член рассчитывается обычным образом, если *Константа* = 0, то свободный член равен 0;

Статистика – логическое значение, которое указывает, выводить дополнительную информацию по регрессионному анализу или нет. Если *Статистика* = 1, то дополнительная информация выводится, если *Статистика* = 0, то выводятся только оценки параметров уравнения.

Щелкните по кнопке **ОК**;

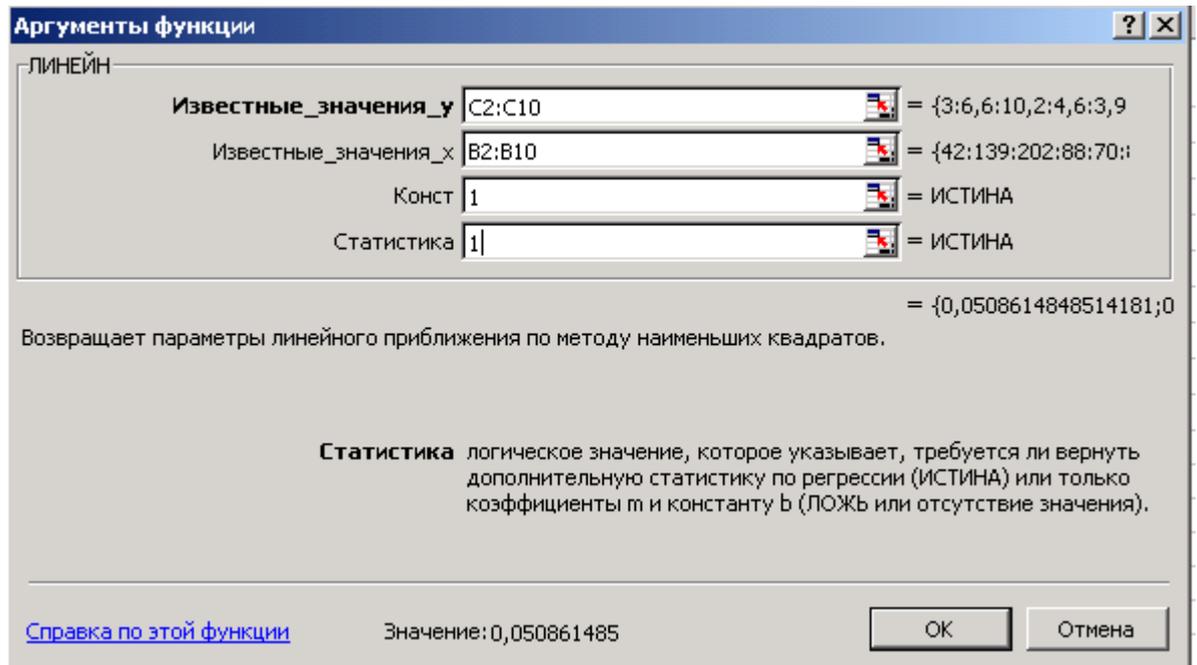


Рис. 1.2. Диалоговое окно ввода аргументов функции **ЛИНЕЙН**

б) в левой верхней ячейке выделенной области появится первый элемент итоговой таблицы. Чтобы раскрыть всю таблицу, нажмите на клавишу <F2>, а затем – на комбинацию клавиш <CTRL>+<SHIFT>+<ENTER>.

Дополнительная регрессионная статистика будет выводиться в порядке, указанном в следующей схеме:

Значение коэффициента b	Значение коэффициента a
Среднеквадратическое отклонение b	Среднеквадратическое отклонение a
Коэффициент детерминации R^2	Среднеквадратическое отклонение y
F-статистика	Число степеней свободы
Регрессионная сумма квадратов	Остаточная сумма квадратов

Для вычисления параметров экспоненциальной кривой $y = \alpha \cdot \beta^x$ в MS Excel применяется встроенная статистическая функция **ЛГРФПРИБЛ**. Порядок вычисления аналогичен применению функции **ЛИНЕЙН**.

Для данных из примера 2 результат вычисления функции **ЛИНЕЙН** представлен на рисунке 2.3

	A	B	C	D	E	F	G
1	Район	Число хозяйств на начало года, x	Валовой сбор овощей, тыс. тонн, y				
2	Архаринский	42	3		Линейн		
3	Белогорский	139	6,6		0,050861	0,272868	
4	Благовещеский	202	10,2		0,004354	0,578265	
5	Михайловский	88	4,6		0,951197	0,691976	
6	Октябрьский	70	3,9		136,4328	7	
7	Ромненский	89	3,9		65,32819	3,351813	
8	Свободненский	134	6,9				
9	Серьшевский	126	7,7				
10	Тамбовский	206	11,4				
11							

Рис. 1.3. Результат вычисления функции **ЛИНЕЙН**

2.1.3 Контрольные задания

Задание к задачам 1-15

1. Рассчитать параметры парной линейной регрессии зависимости резуль­тативного признака от факторного.
2. Оценить качество уравнения с помощью средней ошибки аппроксима­ции.
3. Найти средний (обобщающий) коэффициент эластичности.
4. Оценить тесноту связи с помощью показателей корреляции и детерми­нации.
5. Оценить значимость коэффициента корреляции через t - критерий Стьюдента при $\alpha = 0,05$.
6. Оценить статистическую надежность результатов регрессионного ана­лиза с помощью F -критерия Фишера при $\alpha = 0,05$.
7. Рассчитать прогнозное значение результата, если прогнозное значение фактора увеличится на 10% от его среднего уровня; определите доверитель­ный интервал прогноза при $\alpha = 0.05$.
8. Изобразить графически линию регрессии.

Задача 1

Урожайность зерновых и затраты на семена
по хозяйствам Амурской области

Урожайность зерновых, (т/га), y	1,68	2,40	1,49	1,17	1,16	1,98	2,10	1,78	2,05
Затраты на семена на 1 га посева, (руб.), x	597	704	680	546	548	509	681	526	695

Задача 2

Рынок вторичного жилья за 12 месяцев года
по району города

Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Стоимость квартиры, (тыс.у.е.) y	13,0	16,4	17,0	15,2	14,2	10,5	20,0	12,0	15,6	12,5	13,2	14,6
Размер общей площади, (кв.м), x	37,2	58,2	60,8	52,0	44,6	31,2	26,4	20,7	22,4	35,4	28,4	20,7

Задача 3

Продуктивность коров и расход кормов на одну корову
по хозяйствам Амурской области

Продуктивность коров, (т) y	2,73	3,10	2,96	3,02	2,61	2,37	3,25	3,57	3,23	2,96
Расход кормов на 1 корову, (т.к.е.) x	4,03	4,20	4,10	4,00	3,90	3,50	5,00	5,10	4,80	4,50

Задача 4

Объем производства и реализации сои по районам
Амурской области, тыс. тонн

Реализовано, y	5,3	8,7	9,6	12,0	20,9	19,6	16,7	9,5	5,6	4,5
Валовой сбор, x	6,6	10,9	14,0	14,7	21,0	22,5	22,8	10,9	9,8	6,7

Задача 5

Объем производства и реализации зерновых по районам
Амурской области, тыс. тонн

Реализовано, y	9,6	15,7	24,5	39,0	32,1	29,6	15,3	10,2	9,6	12,4
Валовой сбор, x	10,3	18,7	27,2	39,3	36,0	33,4	18,2	15,1	12,7	16,4

Задача 6

Урожайность овощей и качество почвы по
сельскохозяйственным предприятиям

Урожайность овощей, т/га, y	18	16	15	12	23	20	9	13	31	14	18	21
Качество почвы, балл, x	80	50	16	87	85	45	48	95	50	70	80	89

Задача 7

Фондовооруженность рабочей силы и производительность труда
по промышленным предприятиям

Производительность труда, млн. руб., y	0,21	0,34	0,22	0,25	0,41	0,28	0,34	0,27	0,28	0,41
Фондовооруженность рабочей силы, тыс. руб., x	10,0	13,8	10,9	10,7	14,7	11,6	13,6	12,2	11,5	16,5

Задача 8

Продуктивность коров и трудоемкость 1 тонны молока
по сельскохозяйственным предприятиям

Трудоемкость 1 т молока, чел/час, y	4,33	2,56	3,23	3,48	3,23	2,38	2,61	2,99	2,96	3,10	2,72
Продуктивность коров, т, x	0,39	0,51	0,43	0,39	0,52	0,64	0,51	0,39	0,42	0,54	0,52

Задача 9

Урожайность картофеля и количество внесенных органических удобрений
по сельскохозяйственным предприятиям

Урожайность картофеля, т/га, y	11	18	19	18	16	17	10	14	8	17	18	13
Доза внесения удобрений, т/га, x	11	20	19	16	17	16	15	17	15	16	13	11

Задача 10

Нагрузка пашни на трактор и урожайность картофеля по
сельскохозяйственным предприятиям

Нагрузка пашни на условный эталонный трактор, га, x	11	10	8	4	10	13	10	9	11	11	12	10
Средняя урожайность карто- феля, т/га, y	12	13	25	22	13	7	11	18	19	18	16	17

Задача 11

Выручка от реализации сельскохозяйственной продукции и
фондовооруженность по хозяйствам Амурской области

Выручка от реализации на 1 работника, тыс. руб., y	188	189	187	181	192	147	167	198	176	162	150
Фондовооруженность, тыс. руб., x	183	152	188	142	171,8	145	110	134	129	134	121

Задача 12

Выручка от реализации и затраты труда на производство зерновых
по хозяйствам Амурской области

Выручка от реализации зерновых на 1 работника, тыс. руб., y	96	103	112	114	120	123	119	92	123	90
Затраты труда на 1 т зерновых, чел/час, x	1,9	2,2	6,9	5,4	12,6	8,3	5,6	9,9	5,4	4,5

Задача 13

Прибыль от продаж и объем реализованной продукции по
хозяйствам Амурской области

Прибыль от продаж на 1 работника, тыс. руб., y	40	35	44	43	45	32	32	42	38	35
Реализовано продукции на 1 работника, тыс. руб., x	208	189	187	181	192	167	147	178	176	150

Задача 14

Стаж работы и производительность труда работников предприятия

Валовая продукция на 1 работника в месяц, тыс. руб., y	28	54	24	44	43	59	68	39	18	52	42	78	62
Стаж работы, лет, x	5	11	7	8	6	12	10	7	4	11	3	12	9

Задача 15

Прибыль и производительность труда
по сельскохозяйственным предприятиям

Прибыль от продаж на 1 работника, тыс. руб., y	20	19	14	26	27	19	9	14	23	25
Валовая продукция на 1 работника, тыс. руб., x	195	179	148	243	215	203	101	120	215	244

Задание №2

Множественная регрессия и корреляция**2.2.1 Методические указания**

Множественная регрессия – уравнение связи с несколькими независимыми переменными: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

где y - зависимая переменная (результативный признак);

x_1, x_2, \dots, x_n - независимые переменные (факторы).

Факторы, включаемые во множественную регрессию, должны отвечать следующим требованиям:

1. Они должны быть количественно измеримы. Если необходимо включить в модель качественный фактор, не имеющий количественного измерения, то ему нужно придать количественную определенность.

2. Факторы не должны быть интерколленированы и тем более находиться в точной функциональной связи.

Для построения уравнения множественной регрессии чаще используются следующие функции:

линейная - $y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n + \varepsilon$;

степенная - $y = a \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot \dots \cdot x_n^{b_n} \cdot \varepsilon$;

экспонента- $y = e^{a+b_1x_1+b_2x_2+\dots+b_nx_n+\varepsilon}$;

гипербола - $y = \frac{1}{a + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n + \varepsilon}$.

Можно использовать и другие функции, приводимые к линейному виду.

Для оценки параметров уравнения множественной регрессии применяют метод наименьших квадратов. Для линейных уравнений и нелинейных уравнений, приводимых к линейным строится следующая система нормальных уравнений, решение которой позволяет получить оценки параметров регрессии

фактора на его единицу измерения при фиксированном положении на среднем уровне остальных факторов.

Средние коэффициенты эластичности для линейной регрессии рассчитываются по формуле $\bar{\varepsilon}_{yx_i} = b_i \frac{\bar{x}_i}{\bar{y}}$ и характеризуют на сколько процентов изменится значение результативного признака с ростом соответствующего фактора на 1% при неизменных значениях остальных факторов.

Тесноту совместного влияния факторов на результат оценивает индекс множественной корреляции:

$$R_{yx_1x_2\dots x_n} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{y_{ост}}^2}{\sigma_y^2}},$$

где $\sigma_y^2 = \frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n}$ - общая дисперсия результативного признака;

$\sigma_{y_{ост}}^2 = \frac{\sum (y - \hat{y}_{x_1x_2\dots x_n})^2}{n}$ - остаточная дисперсия для уравнения $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Значение индекса множественной корреляции лежит в пределах от 0 до 1 и должно быть больше или равно максимальному парному индексу корреляции: $R_{yx_1x_2\dots x_n} \geq r_{yx_i} \quad i = (\overline{1, n})$.

Индекс множественной корреляции для уравнения в стандартизованном масштабе можно записать в виде

$$R_{yx_1x_2\dots x_n} = \sqrt{\sum \beta_i \cdot r_{yx_i}}.$$

При трех переменных для двухфакторного уравнения регрессии линейный коэффициент множественной корреляции или совокупный коэффициент корреляции определяется по формуле

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{\frac{r_{yx_1}^2 + r_{yx_2}^2 - 2r_{yx_1} r_{yx_2} r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}}.$$

Качество построенной модели в целом оценивает коэффициент (индекс) детерминации. Коэффициент множественной детерминации рассчитывается как квадрат индекса множественной корреляции: $R_{yx_1x_2\dots x_n}^2$.

Значимость уравнения множественной регрессии в целом оценивается с помощью критерия Фишера:

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m}.$$

Возможны случаи, когда в модель регрессии необходимо включить факторы, имеющие качественные признаки. Чтобы использовать эти переменные им придают численные значения. Такие искусственно сконструированные переменные в эконометрике называются фиктивными или структурными переменными. Фиктивные переменные могут вводиться как в линейные, так и в нелинейные модели.

Пример 2

По 30 хозяйствам Амурской области имеются следующие данные:

Таблица 4.1

Исходные данные

Признак	Среднее значение	Среднее квадратическое отклонение	Линейный коэффициент парной корреляции
Урожайность картофеля, т/га, y	17,3	2,87	
Внесено органических удобрений, т/га, x_1	14,3	1,8	$r_{yx_1} = 0.48$
Доля посадок по лучшим предшественникам, x_2	29	6,2	$r_{yx_2} = 0.38$ $r_{x_1x_2} = 0.06$

Требуется:

1. Построить уравнение множественной линейной регрессии зависимости урожайности овощей от количества внесенных минеральных и органических удобрений в стандартизованном масштабе и в естественной форме. Пояснить экономический смысл параметров.

2. Определить частные коэффициенты эластичности, сравнить их с β_1 и β_2 , пояснить различия между ними.

3. Определить линейный коэффициент множественной корреляции (по двум формулам), множественный и частные коэффициенты детерминации, Оценить полученные результаты.

4. С помощью критерия Фишера оценить статистическую надежность уравнения регрессии и показателя тесноты связи при $\alpha=0,05$.

5.С помощью частных F – критериев Фишера оценить целесообразность включения в уравнение регрессии фактора x_1 после x_2 и фактора x_2 после x_1 .

Решение:

1. Линейное уравнение множественной регрессии имеет вид:

$$\hat{y}_{x_1x_2} = a + b_1x_1 + b_2x_2,$$

где $\hat{y}_{x_1x_2}$ - урожайность картофеля с 1 га, т;

x_1 - внесено органических удобрений на 1 га, т;

x_2 - доля посадок по лучшим предшественникам, %;

a, b_1, b_2 - параметры уравнения.

Для расчета его параметров применим метод стандартизации переменных и построим искомое уравнение в стандартизованном масштабе:

$$t_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2},$$

где t_y, t_{x_1}, t_{x_2} - стандартизованные переменные;

β_1, β_2 - стандартизованные коэффициенты регрессии.

Стандартизованные коэффициенты регрессии определим по формулам:

$$\beta_1 = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2} = \frac{0,48 - 0,38 \cdot 0,06}{1 - 0,06^2} = \frac{0,4572}{0,9964} = 0,4588$$

$$\beta_2 = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2} = \frac{0,38 - 0,48 \cdot 0,06}{1 - 0,06^2} = \frac{0,3512}{0,9964} = 0,3525$$

Получим уравнение

$$t_y = 0,46t_{x_1} + 0,35t_{x_2}$$

Стандартизованные коэффициенты регрессии позволяют сделать заключение о сравнительной силе влияния каждого фактора на урожайность картофеля. Наиболее значительно влияние количества внесенных органических удобрений.

Для построения уравнения в естественной форме рассчитаем b_1 и b_2 , используя формулы перехода от β_i к b_i :

$$\beta_i = b_i \frac{\sigma_{x_i}}{\sigma_y}; \quad b_i = \beta_i \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_i}};$$

$$b_1 = \beta_1 \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_1}} = 0,46 \frac{2,87}{1,8} = 0,733;$$

$$b_2 = \beta_2 \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_2}} = 0,35 \frac{2,87}{6,2} = 0,162.$$

Значение a определим из соотношения

$$a = \bar{y} - b_1 \cdot \bar{x}_1 - b_2 \cdot \bar{x}_2 = 17,3 - 0,733 \cdot 14,3 - 0,162 \cdot 29 = 2,1201.$$

Получим уравнение

$$\hat{y}_{x_1 x_2} = 2,12 + 0,733x_1 + 0,162x_2$$

Каждый из коэффициентов уравнения регрессии определяет среднее изменение урожайности картофеля за счет изменения соответствующего фактора при фиксированном уровне другого.

Коэффициент регрессии $b_1 = 0,733$ характеризует, что с ростом количества внесенных органических удобрений на 1 т на каждый гектар посева урожайность картофеля возрастает в среднем на 0,733 т/га относительно среднего уровня, при условии, что доля посадок по лучшим предшественникам примет фиксированное среднее значение 29%.

Коэффициент регрессии $b_2 = 0,162$ характеризует, что с ростом доли посадок по лучшим предшественникам на 1 % урожайность картофеля возрастает в среднем на 0,162 т/га относительно среднего уровня, при условии, что количество внесенных органических удобрений примет фиксированное среднее значение 14,3 т на каждый гектар посева.

2. Для характеристики относительной силы влияния x_1 и x_2 на y рассчитаем средние коэффициенты эластичности:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{yx_i} &= b_i \frac{\bar{x}_i}{\bar{y}}; \\ \bar{\varepsilon}_{yx_1} &= 0,733 \frac{14,3}{17,3} = 0,606\%; \\ \bar{\varepsilon}_{yx_2} &= 0,162 \frac{29}{17,3} = 0,271\%.\end{aligned}$$

С увеличением количества внесенных органических удобрений на 1% от его среднего уровня урожайность картофеля возрастет на 0,606% от своего среднего уровня; при повышении доли посадок по лучшим предшественникам на 1% от среднего уровня урожайность возрастет на 0,271% от среднего значения. Очевидно, что сила влияния органических удобрений на урожайность овощей оказалась большей, чем сила влияния доли посадок по лучшим предшественникам. К аналогичным выводам о силе влияния приходим при сравнении модулей значений коэффициентов β_1 и β_2 :

$$\beta_1 = 0,46 > \beta_2 = 0,35.$$

Различие в силе влияния фактора на результат, полученные при сравнении $\bar{\varepsilon}_{yx_i}$ и β_i , объясняется тем, что коэффициент эластичности исходит из соотношения средних:

$$\bar{\varepsilon}_{yx_i} = b_i \frac{\bar{x}_i}{\bar{y}},$$

а β - коэффициент – из соотношения средних квадратических отклонений:

$$\beta_i = b_i \frac{\sigma_{x_i}}{\sigma_y}.$$

3. Расчет линейного коэффициента множественной корреляции выполним с использованием коэффициентов r_{yx_i} и β_i :

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{r_{yx_1} \cdot \beta_1 + r_{yx_2} \cdot \beta_2} = \sqrt{0,48 \cdot 0,46 + 0,38 \cdot 0,35} = \sqrt{0,3538} = 0,5948.$$

Этот же показатель можно определить только с использованием парных коэффициентов корреляции:

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{\frac{r_{yx_1}^2 + r_{yx_2}^2 - 2r_{yx_1}r_{yx_2}r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}} = \sqrt{\frac{0,48^2 + 0,38^2 - 0,48 \cdot 0,38 \cdot 0,06}{1 - 0,06^2}} = \sqrt{0,3542} = 0,5951$$

Зависимость y от x_1 и x_2 характеризуется как заметная.

Множественный коэффициент детерминации, рассчитанный как квадрат коэффициента корреляции $D = R^2 \cdot 100\% = 0,595^2 \cdot 100\% = 35,4\%$ характеризует, что урожайность картофеля определяется вариацией учтенных в модели факторов: количества внесенных органических удобрений и доли посадок по лучшим предшественникам на 35,4%. Прочие факторы, не включенные в модель, составляют соответственно 64,6% от общей вариации результативного признака y .

Для оценки влияния каждого фактора необходимо исчислить частные коэффициенты детерминации: $d_1 = \beta_1 \cdot r_{yx_1} \cdot 100\% = 0,46 \cdot 0,48 \cdot 100\% = 22,1\%$, таким образом, влияние количества органических удобрений на изменение урожайности картофеля составляет 22,1%; влияние доли посадок по лучшим предшественникам характеризует частный коэффициент детерминации $d_2 = \beta_2 \cdot r_{yx_2} \cdot 100\% = 0,35 \cdot 0,38 \cdot 100\% = 13,3\%$.

4. Общий F -критерий проверяет гипотезу H_0 о статистической значимости уравнения регрессии и показателя тесноты связи ($R^2 = 0$):

Фактическое значение $F_{\text{факт}}$ определяется по формуле

$$F_{\text{факт}} = \frac{R_{yx_1x_2}^2}{1 - R_{yx_1x_2}^2} : \frac{m}{n - m - 1} = \frac{R_{yx_1x_2}^2}{1 - R_{yx_1x_2}^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m} = \frac{0,3538}{1 - 0,3538} \cdot \frac{30 - 2 - 1}{2} = 7,39.$$

Табличное значение $F_{\text{табл}}$ по таблице значений F -критерия Фишера (приложение 1) при $\alpha = 0,05; k_1 = m = 2; k_2 = n - m - 1 = 30 - 2 - 1 = 27$; равно 3,35.

Сравнивая $F_{\text{факт}}$ и $F_{\text{табл}}$, можно сделать вывод о необходимости отклонить гипотезу H_0 , так как $F_{\text{факт}} = 7,39 > F_{\text{табл}} = 3,35$.

С вероятностью $1 - \alpha = 0,95$ можно сделать заключение о статистической значимости уравнения в целом и показателя тесноты связи $R_{yx_1x_2}$, которые сформировались под неслучайным воздействием факторов x_1 и x_2 .

5. Частные F -критерии - F_{x_1} и F_{x_2} оценивают статистическую значимость присутствия факторов x_1 и x_2 в уравнении множественной регрессии, оценивают целесообразность включения в уравнение одного фактора после другого фактора, то есть F_{x_1} оценивает целесообразность включения в уравнение фактора x_1 после того как в него был включен фактор x_2 . Соответственно F_{x_2} указывает на целесообразность включения в модель фактора x_2 после фактора x_1 :

$$F_{x_1\text{факт}} = \frac{R_{yx_1x_2}^2 - r_{yx_2}^2}{1 - R_{yx_1x_2}^2} \cdot \frac{n - m - 1}{1} = \frac{0,5948^2 - 0,38^2}{1 - 0,5948^2} \cdot \frac{30 - 2 - 1}{1} = \frac{5,6538}{0,6462} = 8,749$$

Табличное значение $F_{\text{табл}}$ по таблице значений F -критерия Фишера (приложение 1) при $\alpha = 0,05; k_1 = 1; k_2 = 30 - 2 - 1 = 27$ равно 4,21.

Сравнивая $F_{\text{факт}}$ и $F_{\text{табл}}$ можно сделать вывод о целесообразности включения в модель фактора x_1 после фактора x_2 , так как $F_{x_1\text{факт}} = 8,749 > F_{\text{табл}} = 4,21$. Гипотезу H_0 о несущественности прироста R_y^2 за счет включения дополнительного фактора x_1 отклоняем и приходим к выводу о статистически подтвержденной целесообразности включения фактора x_1 после фактора x_2 .

Целесообразность включения в модель фактора x_2 после фактора x_1 проверяет критерий $F_{x_2\text{факт}}$

$$F_{x_2\text{факт}} = \frac{R_{yx_1x_2}^2 - r_{yx_1}^2}{1 - R_{yx_1x_2}^2} \cdot \frac{n - m - 1}{1} = \frac{0,5948^2 - 0,48^2}{1 - 0,5948^2} \cdot \frac{30 - 2 - 1}{1} = \frac{0,1234}{0,6462} \cdot \frac{27}{1} = 5,156;$$

$$F_{\text{табл}} = 4,21 \text{ при } \alpha = 0,05; k_1 = 1; k_2 = 27.$$

Так как $F_{x_2\text{факт}} = 5,156 > F_{\text{табл}} = 4,21$, следовательно включение в модель фактора x_2 после введения в нее фактора x_1 весьма значимо. Коэффициент регрессии в модели статистически значим.

2.2.2 Контрольные задания

Задание к задачам 16-30

По 40 сельскохозяйственным предприятиям имеются данные об урожайности сельскохозяйственных культур и влияющих на нее факторах.

Требуется:

1. Построить уравнение множественной линейной регрессии в стандартизованном масштабе и естественной форме. Пояснить экономический смысл параметров.

2. Рассчитать частные коэффициенты эластичности, сравнить их β_1 и β_2 , пояснить различия между ними.

3. Определить линейный коэффициент множественной корреляции (по двум формулам), множественный и частные коэффициенты детерминации.

4. С помощью общего F -критерия Фишера оценить статистическую надежность уравнение регрессии и $R^2_{yx_1x_2}$.

5. С помощью частных F -критериев Фишера оценить целесообразность включения в уравнение регрессии фактора x_1 после x_2 и фактора x_2 после x_1 .

Задача 16

Урожайность картофеля и влияющие на нее факторы

Показатель	Признак	Среднее значение	Среднее квадратическое отклонение	Линейные коэффициенты парной корреляции
Урожайность картофеля, т/га	y	10,5	1,64	
Внесено органических удобрений на 1 га посадки картофеля, т	x_1	25,8	3,9	$r_{yx_1} = 0,38$
Доля посадок по лучшим предшественникам, %	x_2	46	8,4	$r_{yx_2} = 0,53$ $r_{x_1x_2} = 0,11$

Задача 17

Урожайность картофеля и влияющие на нее факторы

Показатель	При- знак	Сред- нее зна- чение	Среднее квадратическое отклонение	Линейные коэффициенты парной корре- ляции
Урожайность картофеля, т/га	y	16,6	2,63	
Внесено органических удобрений на 1 га посадки картофеля, т	x_1	27,6	6,6	$r_{yx_1} = 0,42$
Доля посадок по лучшим предшественникам, %	x_2	74	11,2	$r_{yx_2} = 0,62$ $r_{x_1x_2} = 0,14$

Задача 18

Урожайность картофеля и влияющие на нее факторы

Показатель	При- знак	Сред- нее значе- ние	Среднее квадратическое отклонение	Линейные коэффициенты парной корреля- ции
Урожайность картофеля, т/га	y	13,0	1,92	
Внесено органических удобрений на 1 га посадки картофеля, т	x_1	20,1	4,9	$r_{yx_1} = 0,53$
Доля посадок по лучшим предшественникам, %	x_2	57	9,8	$r_{yx_2} = 0,38$ $r_{x_1x_2} = 0,17$

Задача 19

Урожайность картофеля и влияющие на нее факторы

Показатель	При- знак	Сред- нее зна- чение	Среднее квадратическое отклонение	Линейные коэффициенты парной корре- ляции
Урожайность картофеля, т/га	y	10,1	1,86	
Внесено органических удобрений на 1 га посадки картофеля, т	x_1	17,3	4,3	$r_{yx_1} = 0,39$
Доля посадок по лучшим предшественникам, %	x_2	48	9,4	$r_{yx_2} = 0,52$ $r_{x_1x_2} = 0,07$

Задача 20

Урожайность картофеля и влияющие на нее факторы

Показатель	При- знак	Сред- нее зна- чение	Среднее квадратическое отклонение	Линейные коэффициенты парной корре- ляции
Урожайность картофеля, т/га	y	7,4	1,52	
Внесено органических удобрений на 1 га посадки картофеля, т	x_1	23,5	3,8	$r_{yx_1} = 0,35$
Доля посадок по лучшим предшественникам, %	x_2	45	8,6	$r_{yx_2} = 0,63$ $r_{x_1x_2} = 0,12$

Задача 21

Урожайность картофеля и влияющие на нее факторы

Показатель	При- знак	Сред- нее зна- чение	Среднее квадратическое отклонение	Линейные коэффициенты парной корре- ляции
Урожайность картофеля, т/га	y	13,5	1,92	
Внесено органических удобрений на 1 га посадки картофеля, т	x_1	26,7	5,0	$r_{yx_1} = 0,63$
Доля посадок по лучшим предшественникам, %	x_2	58	9,5	$r_{yx_2} = 0,40$ $r_{x_1x_2} = 0,18$

Задача 22

Урожайность картофеля и влияющие на нее факторы

Показатель	При- знак	Сред- нее зна- чение	Среднее квадратическое отклонение	Линейные коэффициенты парной корре- ляции
Урожайность картофеля, т/га	y	16,2	2,55	
Внесено органических удобрений на 1 га посадки картофеля, т	x_1	28,5	6,5	$r_{yx_1} = 0,43$
Доля посадок по лучшим предшественникам, %	x_2	73	11,2	$r_{yx_2} = 0,64$ $r_{x_1x_2} = 0,13$

Задача 23

Урожайность картофеля и влияющие на нее факторы

Показатель	При- знак	Сред- нее зна- чение	Среднее квадратическое отклонение	Линейные коэффициенты парной корре- ляции
Урожайность картофеля, ц/га	y	14,0	2,24	
Внесено органических удобрений на 1 га посадки картофеля, т	x_1	21,7	5,6	$r_{yx_1} = 0,64$
Доля посадок по лучшим предшественникам, %	x_2	64	10,0	$r_{yx_2} = 0,36$ $r_{x_1x_2} = 0,09$

Задача 24

Урожайность картофеля и влияющие на нее факторы

Показатель	При- знак	Сред- нее зна- чение	Среднее квадратическое отклонение	Линейные коэффициенты парной корре- ляции
Урожайность картофеля, т/га	y	12,3	1,84	
Внесено органических удобрений на 1 га посадки картофеля, т	x_1	19,3	4,6	$r_{yx_1} = 0,59$
Доля посадок по лучшим предшественникам, %	x_2	54	9,1	$r_{yx_2} = 0,41$ $r_{x_1x_2} = 0,05$

Задача 25

Урожайность картофеля и влияющие на нее факторы

Показатель	При- знак	Сред- нее зна- чение	Среднее квадратическое отклонение	Линейные коэффициенты парной корре- ляции
Урожайность картофеля, т/га	y	14,5	2,35	
Внесено органических удобрений на 1 га посадки картофеля, т	x_1	22,6	6,0	$r_{yx_1} = 0,49$
Доля посадок по лучшим предшественникам, %	x_2	68	10,1	$r_{yx_2} = 0,55$ $r_{x_1x_2} = 0,10$

Задача 26

Урожайность картофеля и влияющие на нее факторы

Показатель	При- знак	Сред- нее зна- чение	Среднее квадратическое отклонение	Линейные коэффициенты парной корреляции
Урожайность картофеля, т/га	y	13,6	1,97	
Внесено органических удобрений на 1 га посадки картофеля, т	x_1	28,7	5,1	$r_{yx_1} = 0,56$
Доля посадок по лучшим предшественникам, %	x_2	59	8,8	$r_{yx_2} = 0,42$ $r_{x_1x_2} = 0,15$

Задача 27

Урожайность картофеля и влияющие на нее факторы

Показатель	При- знак	Сред- нее зна- чение	Среднее квадратическое отклонение	Линейные коэффициенты парной корреляции
Урожайность картофеля, т/га	y	13,3	2,01	
Внесено органических удобрений на 1 га посадки картофеля, т	x_1	24,2	5,2	$r_{yx_1} = 0,61$
Доля посадок по лучшим предшественникам, %	x_2	60	8,9	$r_{yx_2} = 0,43$ $r_{x_1x_2} = 0,19$

Задача 28

Урожайность картофеля и влияющие на нее факторы

Показатель	При- знак	Сред- нее зна- чение	Среднее квадратическое отклонение	Линейные коэффициенты парной корреляции
Урожайность картофеля, ц/га	y	15,0	2,58	
Внесено органических удобрений на 1 га посадки картофеля, т	x_1	22,7	6,1	$r_{yx_1} = 0,44$
Доля посадок по лучшим предшественникам, %	x_2	69	9,6	$r_{yx_2} = 0,60$ $r_{x_1x_2} = 0,06$

Задача 29

Урожайность картофеля и влияющие на нее факторы

Показатель	При- знак	Сред- нее зна- чение	Среднее квадратическое отклонение	Линейные коэффициенты парной корреляции
Урожайность картофеля, т/га	y	13,9	2,26	
Внесено органических удобрений на 1 га посадки картофеля, т	x_1	20,5	5,3	$r_{yx_1} = 0,50$
Доля посадок по лучшим предшественникам, %	x_2	61	8,7	$r_{yx_2} = 0,44$ $r_{x_1x_2} = 0,11$

Задача 30

Урожайность картофеля и влияющие на нее факторы

Показатель	При- знак	Сред- нее зна- чение	Среднее квадратическое отклонение	Линейные коэффициенты парной корреляции
Урожайность картофеля, т/га	y	11,5	1,84	
Внесено органических удобрений на 1 га посадки картофеля, т	x_1	17,6	5,4	$r_{yx_1} = 0,63$
Доля посадок по лучшим предшественникам, %	x_2	51	8,3	$r_{yx_2} = 0,46$ $r_{x_1x_2} = 0,16$

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица значений F-критерия Фишера при уровне значимости $\alpha = 0,05$

k_1 k_2	1	2	3	4	5	6	8	10	12	15	20	30	∞
1	161	200	216	225	230	234	239	242	244	246	248	250	254
2	18,5	19,0	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,79	8,74	8,70	8,66	8,62	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,96	5,91	5,86	5,80	5,75	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,74	4,68	4,62	4,56	4,50	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,06	4,00	3,94	3,87	3,81	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,64	3,57	3,51	3,44	3,38	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,35	3,28	3,22	3,15	3,08	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,14	3,07	3,01	2,94	2,86	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,98	2,91	2,85	2,77	2,70	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,85	2,79	2,72	2,65	2,57	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,75	2,69	2,62	2,54	2,47	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,67	2,60	2,53	2,46	2,38	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,60	2,53	2,46	2,39	2,31	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,54	2,48	2,40	2,33	2,25	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,49	2,42	2,35	2,28	2,19	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,45	2,38	2,31	2,23	2,15	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,41	2,34	2,27	2,19	2,11	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,38	2,31	2,23	2,16	2,07	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,35	2,28	2,20	2,12	2,04	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,32	2,25	2,18	2,10	2,01	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,30	2,23	2,15	2,07	1,98	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,27	2,20	2,13	2,05	1,96	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,25	2,18	2,11	2,03	1,94	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,24	2,16	2,09	2,01	1,92	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,22	2,15	2,07	1,99	1,90	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,20	2,13	2,06	1,97	1,88	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,19	2,12	2,04	1,96	1,87	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,18	2,10	2,03	1,94	1,85	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,16	2,09	2,01	1,93	1,84	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,10	2,04	1,97	1,88	1,80	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,08	2,00	1,92	1,84	1,74	1,51
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	2,01	1,95	1,87	1,81	1,71	1,44
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,98	1,85	1,79	1,67	1,58	1,26
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,95	1,82	1,71	1,60	1,51	1,18
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,83	1,75	1,67	1,57	1,46	1,00

Приложение 2
Критические значения t-критерия Стьюдента при уровне значимости
0,10; 0,05 и 0,01 (двухсторонний)

Число степеней свободы, k	Уровень значимости α			Число степеней свободы, k	Уровень значимости α		
	0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01
1	6,3138	12,706	63,657	18	1,7341	2,1009	2,8784
2	2,9200	4,3027	9,9248	19	1,7291	2,0930	2,8609
3	2,3634	3,1825	5,8409	20	1,7247	2,0860	2,8453
4	2,1318	2,7764	4,6041	21	1,7207	2,0796	2,8314
5	2,0150	2,5706	4,0321	22	1,7171	2,0793	2,8188
6	1,9432	2,4469	3,7074	23	1,7139	2,0687	2,8073
7	1,8946	2,3646	3,4995	24	1,7109	2,0639	2,7969
8	1,8595	2,3060	3,3554	25	1,7081	2,0595	2,7874
9	1,8331	2,2622	3,2498	26	1,7056	2,0555	2,7787
10	1,8125	2,2281	3,1693	27	1,7033	2,0518	2,7707
11	1,7959	2,2010	3,1058	28	1,7011	2,0484	2,7633
12	1,7823	2,1788	3,0545	29	1,6991	2,0452	2,7564
13	1,7709	2,1604	3,0123	30	1,6973	2,0423	2,7500
14	1,7613	2,1448	2,9768	40	1,6839	2,0211	2,7045
15	1,7530	2,1315	2,9467	60	1,6707	2,0003	2,6603
16	1,7459	2,1199	2,9208	120	1,6577	1,9799	2,6174
17	1,7396	2,1098	2,8982	∞	1,6449	1,9600	2,5758

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 1. Общие методические рекомендации по изучению дисциплины...3

Список рекомендуемой литературы.....	4
Раздел 2. Контрольные задания и методические указания по их выполнению	7
Задание 1. Парная регрессия и корреляция.....	9
2.1.1. Методические указания.....	9
2.1.2. Решение с помощью ППП Excel.....	18
2.1.3. Контрольные задания.....	21
Задание 2. Множественная регрессия и корреляция.....	25
2.2.1. Методические указания.....	25
2.2.2. Контрольные задания.....	34
Приложение 1. Таблица значений F-критерия Фишера.....	40
Приложение 2. Критические значения t-критерия Стьюдента.....	41