ЗАДАЧИ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ

Оглавление

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ О ПОРЯДКЕ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Целью выполнения контрольной работы является ознакомление с методами решения задач теоретической механики.

В состав контрольной работы входят три задачи:

Задача 1. Равновесие плоской системы сил.

Задача 2. Кинематический анализ многозвенного механизма.

Задача 3. Применение принципа возможных перемещений к определению реакций опор составной конструкции.

В заголовке работы должны быть написаны: наименование вуза, кафедры, название дисциплины, название факультета и специальности, курс, группа, фамилия, инициалы студента, учебный шифр, фамилия и инициалы преподавателя.

Исходные данные для выполнения контрольных работ выбираются студентом из таблиц вариантов в соответствии с личным учебным шифром - номера зачетной книжки. Варианты заданий берутся по двум последним цифрам номера зачетной книжки.

Например, номер зачетной книжки 200840, тогда:

по первой цифре шифра - 4 - выбирается условие (строка) из таблицы;

по второй цифре шифра - 0 - выбирается рисунок.

.

Задача 1. Равновесие плоской системы сил.

Жёсткая рама, расположенная в вертикальной плоскости (рис. С1.0—С1.9, табл. С1), закреплена в точке А шарнирно, а в точке В прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках.

В точке С к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом Р = 25 кН. На раму действуют пара сил с моментом М = 100 кН·м и две силы, значения, направления и точки приложения которых указаны в таблице (например, в условиях № 1 на раму действует сила $\overline{F_2}$ под углом 15° к горизонтальной оси, приложенная в точке D, и сила $\overline{F_3}$ под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке *E,* и т.д.).

Определить реакции связей в точках А, В, вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять а = 0,5 м.

Указания. Задача С1 — на равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. При ее решении учесть, что натяжения обеих ветвей нити, перекинутой через блок, когда трением пренебрегают, будут одинаковыми. Уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей. При вычислении момента силы $\overline{F}$ часто удобно разложить её на составляющие $\overline{F}'$ и $\overline{F}''$, для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Вариньона; тогда $m_0(\overline{F}) = m_0(\overline{F}') + m_0(\overline{F}'')$.

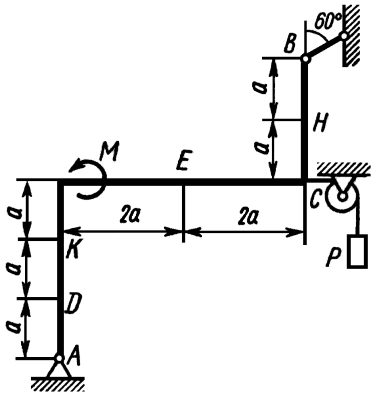


Рис. C1.0

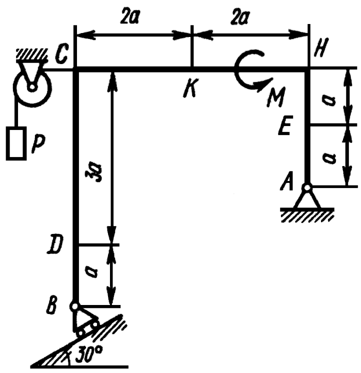


Рис. C1.1

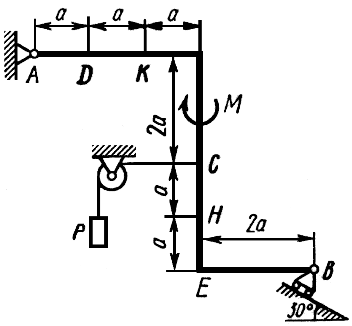


Рис. C1.2

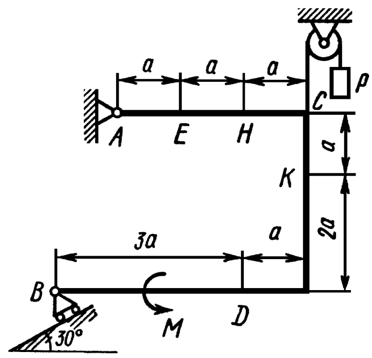


Рис. C1.3

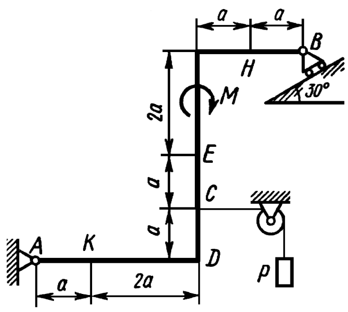


Рис. C1.4

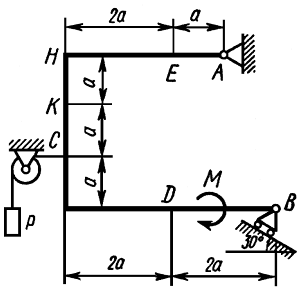


Рис. C1.5

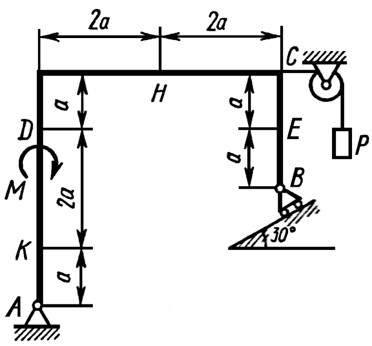


Рис. C1.6

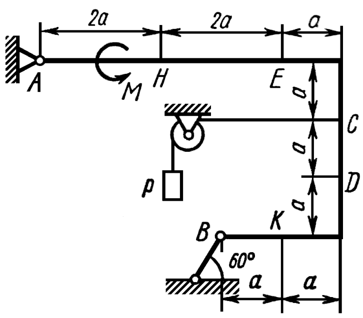


Рис. C1.7

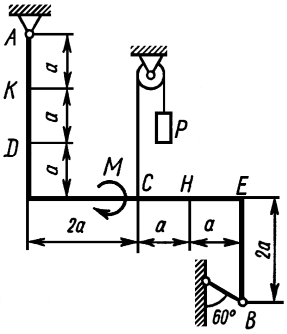


Рис. С1.8

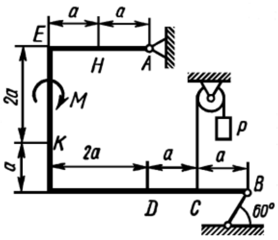
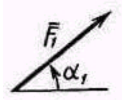
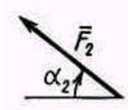
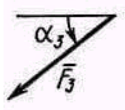
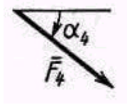


Рис. С1.9

Таблица С1

Силы								
	F_1 = 10 кН		F_2 = 20 кН		F_3 = 30 кН		F_4 =40 кН	
Номер условия	Точка приложения	α_1, град.	Точка приложения	α_2, град.	Точка приложения	α_3, град.	Точка приложения	α_4, град.
0	-	-	E	75	K	30	-	-
1	-	-	H	30	-	-	D	75
2	D	30	-	-	-	-	E	60
3	E	60	-	-	K	15	-	-
4	-	-	K	60	H	30	-	-
5	-	-	D	60	-	-	H	15
6	K	75	-	-	-	-	E	30
7	H	60	-	-	D	30	-	-
8	H	30	-	-	-	-	K	60
9	-	-	D	15	E	60	-	-

Пример С1. Жёсткая пластина ABCD (рис. С1) имеет в точке A неподвижную шарнирную опору, а в точке B — подвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.

Дано: F = 25 кН, $\alpha = 60°$, P = 18 кН, $\gamma = 75°$, M = 50 кН·м, $\beta = 30°$, a = 0,5 м. Определить: реакции в точках A и B, вызываемые действующими нагрузками.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие пластины. Проведем координатные оси xy и изобразим действующие на пластину силы: силу $\overline{F}$, пару сил с моментом M, натяжение троса $\overline{T}$ (по модулю T = P) и реакции связей $\overline{X_A}$, $\overline{Y_A}$, $\overline{R_B}$ (реакцию неподвижной шарнирной опоры A изображаем двумя ее составляющими, реакция шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости).

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы $\overline{F}$ относительно точки A воспользуемся теоремой Вариньона, т. е. разложим силу $\overline{F}$ на составляющие $\overline{F}'$, $\overline{F}''$ (F' = Fcosα, F'' = Fsinα) и учтём, что

$$m_A(\overline{F}) = m_A(\overline{F}') + m_A(\overline{F}'').$$

Получим:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A + R_B \sin\beta - F\cos\alpha + T\sin\gamma = 0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A + R_B \cos\beta + F\sin\alpha - T\cos\gamma = 0; \qquad (2)$$

$$\sum m_A(\overline{F_k}) = 0, \quad M - R_B\cos\beta\cdot 4a + F\cos\alpha\cdot 2a - F\sin\alpha\cdot 3a - T\sin\gamma\cdot 2a = 0. \qquad (3)$$

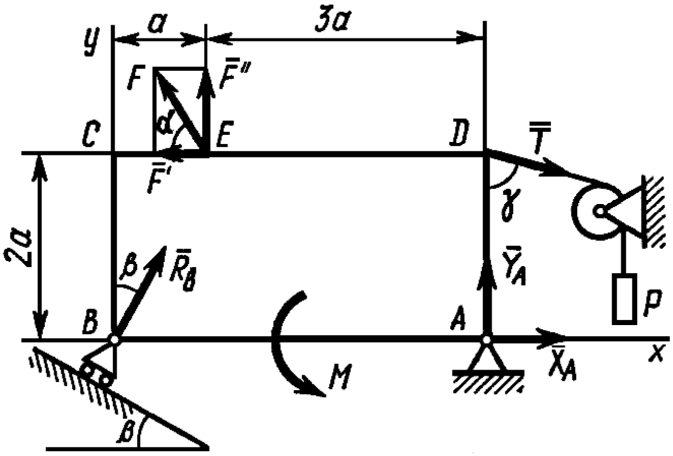


Рис. C1

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции.

Ответ: X_A = -8,5 кН; Y_A = -23,3 кН; R_B = 7,3 кН. Знаки указывают, что силы $\overline{X_A}$ и $\overline{Y_A}$ направлены противоположно показанным на рис. Cl.

Задача 2. Кинематический анализ многозвенного механизма.

Плоский механизм состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна B или E (рис. K2.0 — K2.7) или из стержней 1, 2, 3 и ползунов B и E (рис. K2.8, K2.9), соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1, O_2 шарнирами; точка D находится в середине стержня AB. Длины стержней равны соответственно L_1 = 0,4 м, L_2 = 1,2 м, L_3 = 1,4 м, L_4 = 0,6 м. Положение механизма определяется углами α, β, γ, φ, θ. Значения этих углов и других заданных величин указаны в табл. K2a (для рис. 0 – 4) или в табл. K2б (для рис. 5 - 9); при этом в табл. K2a ω_1 и ω_4 — **величины постоянные**.

Определить величины, указанные в таблицах в столбцах «Найти».

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие углы: **по ходу или против хода часовой стрелки** (например, угол γ на рис. 8 следует отложить от DB по ходу часовой стрелки, а на рис. 9 — против хода часовой стрелки и т.д.).

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α; ползун с направляющими для большей наглядности изобразить так, как в примере K2 (см. рис. K2б).

Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против часовой стрелки, а заданные скорость $\bar{v}_B$ и ускорение a_B — от точки B к b (на рис. 5 — 9).

Таблица K2a (к рис. K2.0 — K2.4)

Номер условия	Углы, град					Дано		Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/с	ω_4, 1/с	v точек	ω звена	a точки	ε звена
0	60	150	120	90	30	2	-	D, E	AB	B	AB
1	60	150	150	90	30	-	5	A, E	DE	A	AB
2	90	120	120	90	60	-	6	A, E	AB	A	AB
3	0	60	60	0	120	-	2	A, E	DE	A	AB
4	30	120	150	0	60	-	8	A, E	DE	A	AB
5	0	60	30	0	120	6	-	B, E	DE	B	AB
6	90	120	150	0	30	-	4	A, E	AB	A	AB
7	30	60	30	0	120	5	-	B, E	AB	B	AB
8	30	30	60	0	150	4	-	D, E	AB	B	AB
9	90	150	120	90	30	3	-	B, E	DE	B	AB

Таблица K2б (к рис. K2.5 — K2.9)

Номер условия	Углы, град					Дано				Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/с	ε_1, 1/с^2	v_B, м/с	a_B, м/с^2	v точек	ω звена	a точки	ε звена
0	90	120	120	90	150	6	10	-	-	B, E	DE	B	AB
1	0	150	30	0	60	-	-	6	8	A, E	AB	A	AB
2	90	120	90	90	60	-	-	8	10	D, E	DE	A	AB
3	30	120	30	0	60	-	-	2	5	A, E	AB	A	AB
4	60	60	60	90	30	-	-	5	4	D, E	AB	A	AB
5	0	60	90	0	120	-	-	4	6	A, E	DE	A	AB
6	120	30	30	90	150	2	4	-	-	B, E	AB	B	AB
7	60	150	30	90	30	3	5	-	-	B, E	AB	B	AB
8	30	120	120	0	60	4	6	-	-	B, E	DE	B	AB
9	0	150	90	0	120	5	8	-	-	B, E	DE	B	AB

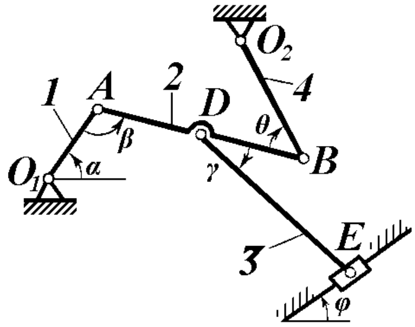


Рис. К2.0

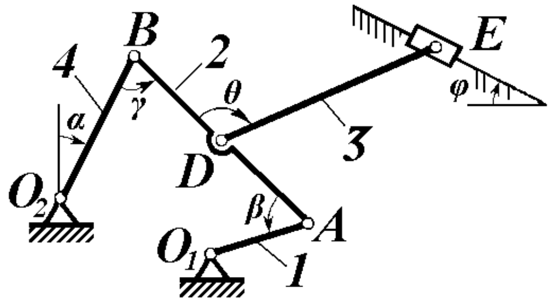


Рис. К2.1

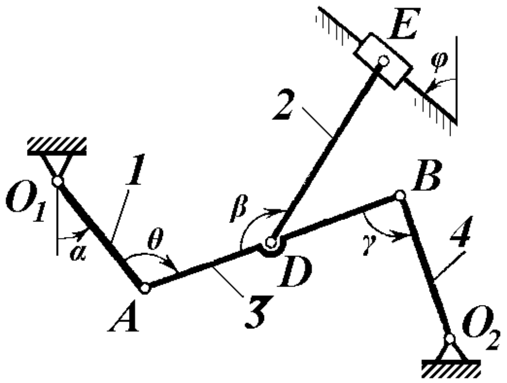


Рис. К2.2

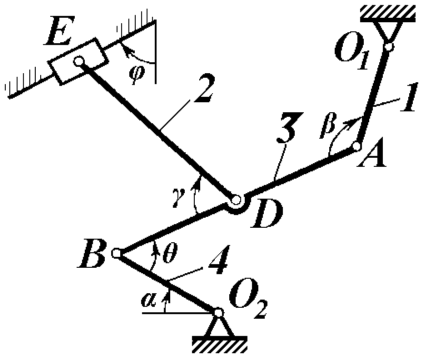


Рис. К2.3

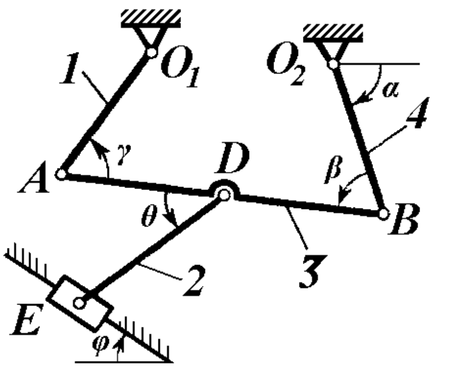


Рис. К2.4

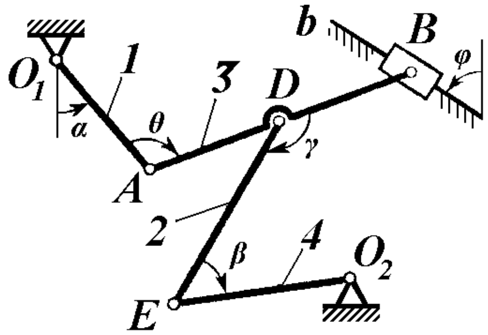


Рис. К2.5

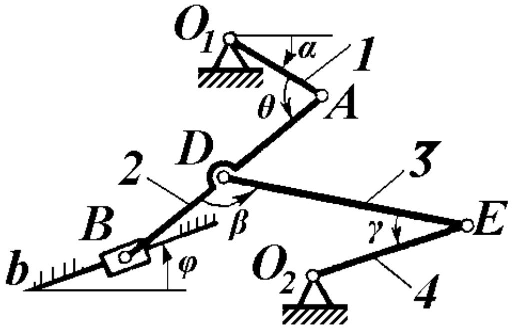


Рис. К2.6

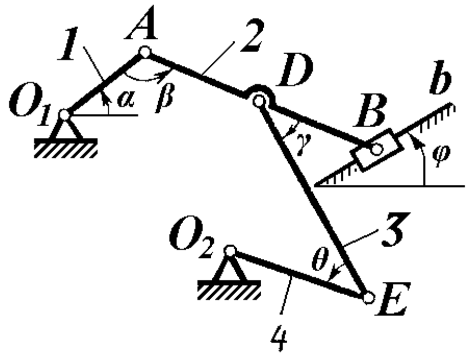


Рис. К2.7

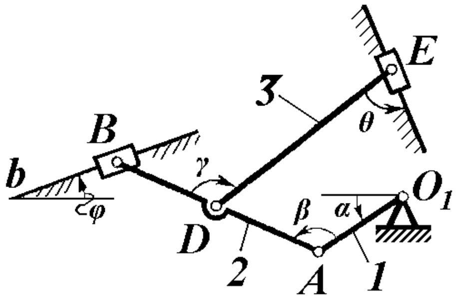


Рис. К2.8

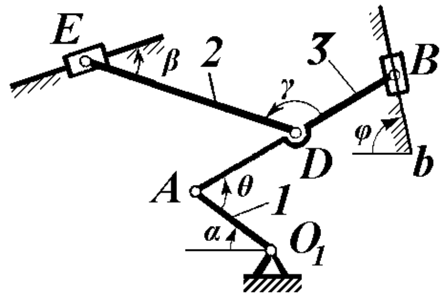


Рис. К2.9

Указания. Задача К2 — на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. При ее решении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя эту теорему (или это понятие) **к каждому звену механизма в отдельности.**

При определении ускорений точек механизма исходить из векторного равенства $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n}$, где А — точка, ускорение $\bar{a}_A$ которой или задано, или непосредственно определяется по условиям задачи (если точка А движется по дуге окружности, то $\bar{a}_A = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{n}$); B — точка, ускорение $\bar{a}_B$ которой нужно определить (о случае, когда точка В тоже движется по дуге окружности, см. примечание в конце рассмотренного ниже примера К2).

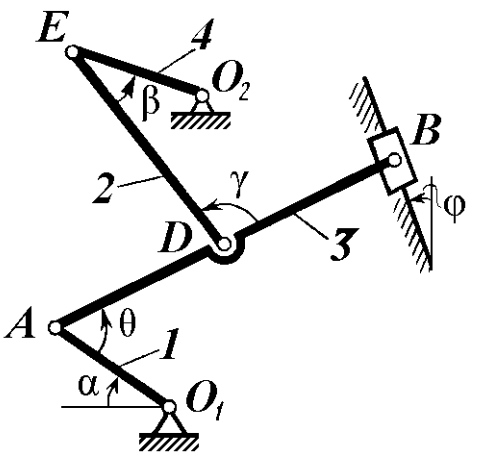


Рис. К2а

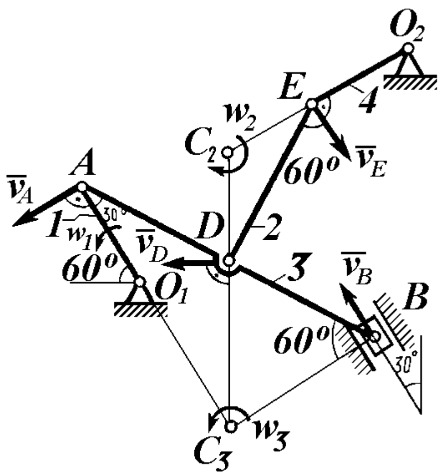


Рис. К2б

Пример К2. Механизм (рис. К2а) состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна В, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

Дано: α=60°, β=150°, γ= 90°, φ= 30°, θ=30°, AD=DB, L_1= 0,4 м, L_2=1,2 м, L_3= 1,4 м, ω_1=2 с$^{-1}$, ε_1 = 7 с$^{-2}$ (направления ω_1 и ε_1 — против хода часовой стрелки). Определить: v_B, v_E, ω_2, a_B, ε_3.

Решение. 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. К2б; на этом рисунке изображаем все векторы скоростей).

2. Определяем v_B. Точка В принадлежит стержню АВ. Чтобы найти v_B, надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление $\bar{v}_B$. По данным задачи, учитывая направление ω_1, можем определить $\bar{v}_A$; численно

$$v_A = \omega_1 L_1 = 0{,}8 \quad м/с; \qquad \bar{v}_A \perp O_1A. \qquad (1)$$

Направление $\bar{v}_B$ найдем, учтя, что точка В принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь, зная $\bar{v}_A$ и направление $\bar{v}_B$, воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня АВ) на прямую, соединяющую эти точки (прямая АВ). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор $\bar{v}_B$ **(проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки).** Затем, вычисляя эти проекции, находим

$$v_B \cos 30° = v_A \cos 60° \quad и \quad v_B = 0{,}46 \quad м/с. \qquad (2)$$

3. Определяем $\bar{v}_E$. Точка E принадлежит стержню DE. Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить $\bar{v}_E$, надо сначала найти скорость точки D, принадлежащей одновременно стержню AB. Для этого, зная $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$, строим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня AB; это точка C_3, лежащая на пересечении перпендикуляров к $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$, восставленных из точек A и B (к $\bar{v}_A$ перпендикулярен стержень 1). По направлению вектора $\bar{v}_A$ определяем направление поворота стержня AB вокруг МЦС C_3. Вектор $\bar{v}_D$ перпендикулярен отрезку C_3D, соединяющему точки D и C_3, и направлен в сторону поворота. Величину v_D найдем из пропорции

$$\frac{v_D}{C_3D} = \frac{v_B}{C_3B} \qquad (3)$$

Чтобы вычислить C_3D и C_3B, заметим, что ΔAC_3B — прямоугольный, так как острые углы в нем равны 30° и 60°, и что $C_3B = AB\sin 30° = 0{,}5AB = BD$. Тогда ΔBC_3D является равносторонним и $C_3B = C_3D$. В результате равенство (3) дает

$$v_D = v_B = 0{,}46 \quad м/с; \quad \bar{v}_D \perp C_3D. \qquad (4)$$

Так как точка E принадлежит одновременно стержню O_2E, вращающемуся вокруг O_2, то $\bar{v}_E \perp O_2E$. Тогда, восставляя из точек E и D перпендикуляры к скоростям $\bar{v}_E$ и $\bar{v}_D$, построим МЦС C2 стержня DE. По направлению вектора $\bar{v}_D$ определяем направление поворота стержня DE вокруг центра C2. Вектор $\bar{v}_E$ направлен в сторону поворота этого стержня. Из рис. К2б видно, что $\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30°$, откуда $C_2E = C_2D$. Составив теперь пропорцию, найдем, что

$$\frac{v_E}{C_2E} = \frac{v_D}{C_2D}, \quad v_E = v_D = 0{,}46 \quad м/с. \qquad (5)$$

4. Определяем ω_2. Так как МЦС стержня 2 известен (точка C_2) и $C_2D = L_2/(2\cos 30°) = 0{,}69$ м, то

$$\omega_2 = \frac{v_D}{C_2D} = 0{,}67 \quad с^{-1}. \qquad (6)$$

5. Определяем $\bar{a}_B$ (рис. К2в, на котором изображаем все векторы ускорений). Точка B принадлежит стержню AB. Чтобы найти $\bar{a}_B$, надо знать ускорение какой-нибудь другой точки стержня AB и траекторию точки B. По данным задачи можем определить $\bar{a}_A = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n$, где численно

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 L_1 = 2{,}8 \quad м/с^2;$$

$$a_A^n = \omega_1^2 L_1 = 1{,}6 \quad м/с^2. \qquad (7)$$

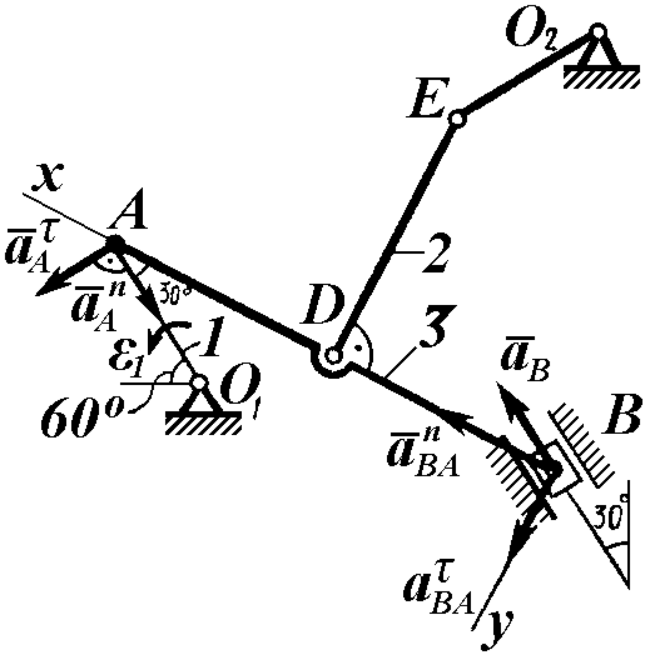


Рис. К2в

Вектор $\overline{a}_A^n$ направлен вдоль AO_1, а $\overline{a}_A^\tau$ - перпендикулярно AO_1 изображаем эти векторы на чертеже (см. рис. К2в). Так как точка В одновременно принадлежит ползуну, то вектор $\overline{a}_B$ параллелен направляющим ползуна. Изображаем вектор $\overline{a}_B$ на чертеже, полагая, что он направлен в ту же сторону, что и $\overline{v}_B$.

Для определения $\overline{a}_B$ воспользуемся равенством

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A^\tau + \overline{a}_A^n + \overline{a}_{BA}^\tau + \overline{a}_{BA}^n. \qquad (8)$$

Изображаем на чертеже векторы $\overline{a}_{BA}^n$ (вдоль ВА от В к А) и $\overline{a}_{BA}^\tau$ (в любую сторону перпендикулярно ВА); численно $a^n_{BA}=\omega^2_3 L_3$. Найдя ω_3 с помощью построенного МЦС C_3 стержня 3, получим

$$\omega_3 = \frac{v_A}{C_3 A} = \frac{v_A}{L_3 \cos 30^\circ} = 0{,}66 \;\; c^{-1} \quad и \quad a_{BA}^n = 0{,}61 \;\; м/c^2. \qquad (9)$$

Таким образом, у величин, входящих в равенство (8), неизвестны только числовые значения a_B и a^τ_{BA}; их можно найти, спроектировав обе части равенства (8) на какие-нибудь две оси.

Чтобы определить a_B, спроектируем обе части равенства (8) на направление ВА (ось x), перпендикулярное неизвестному вектору $\overline{a}_{BA}^\tau$. Тогда получим

$$a_B \cos 30^\circ = a_A^\tau \cos 60^\circ - a_A^n \cos 30^\circ + a_{BA}^n. \qquad (10)$$

Подставив в равенство (10) числовые значения всех величин из (7) и (9), найдем, что

$$a_B = 0{,}72 \;\; м/c \qquad (11)$$

Так как получилось $a_B>0$, то, следовательно, вектор $\overline{a}_B$ направлен как показано на рис. К2в.

6. Определяем ε_3. Чтобы найти ε_3, сначала определим a^τ_{BA}. Для этого обе части равенства (8) спроектируем на направление, перпендикулярное АВ (ось y). Тогда получим

$$-a_B \sin 30^\circ = a_A^\tau \sin 60^\circ + a_A^n \sin 30^\circ + a_{BA}^\tau \qquad (12)$$

Подставив в равенство (12) числовые значения всех величин из (11) и (7), найдем, что a^τ_{BA} = —3,58 м/с^2. Знак указывает, что направление $\bar{a}^{\tau}_{BA}$ противоположно показанному на рис. К2в.

Теперь из равенства $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_3 L_3$ получим

$$\varepsilon_3 = \frac{\left|a^{\tau}_{BA}\right|}{L_3} = 2{,}56 \quad c^{-2}.$$

Ответ: v_B=0,46 м/с; V_E = 0,46 м/с; ω_2 = 0,67 c^{-1}; a_B = 0,72 м/c^2; ε_3 = 2,56 c^{-2}.

Примечание. Если точка В, ускорение которой определяется, движется не прямолинейно (например, как на рис. К2.0 — К2.4, где В движется по окружности радиуса O_2B*),* то направление $\bar{a}_B$ заранее неизвестно.

В этом случае $\bar{a}_B$ также следует представить двумя составляющими ($\bar{a}_B = \bar{a}^{\tau}_A + \bar{a}^{n}_B$) и исходное уравнение (8) примет вид

$$\bar{a}^{\tau}_B + \bar{a}^{n}_B = \bar{a}^{\tau}_A + \bar{a}^{n}_A + \bar{a}^{\tau}_{BA} + \bar{a}^{n}_{BA}. \qquad (13)$$

При этом вектор $\bar{a}^{n}_B$ (см., например, рис. К2.0) будет направлен вдоль BO_2, а вектор $\bar{a}^{\tau}_B$ — перпендикулярно BO_2 в любую сторону. Числовые значения a^{τ}_B, a^{n}_A и a^{n}_{BA} определяются так же, как в рассмотренном примере (в частности, по условиям задачи может быть $a^{\tau}_B = 0$ или $a^{n}_A = 0$, если точка А движется прямолинейно).

Значение a^{n}_B также вычисляется по формуле $a^{n}_B = v^2_B/\rho = v^2_B/L$, где L — радиус окружности O_2B, а v_B определяется так же, как скорость любой другой точки механизма.

После этого в равенстве (13) остаются неизвестными только значения a^{τ}_B и a^{τ}_{BA} и они, как и в рассмотренном примере, находятся проектированием обеих частей равенства (13) на две оси.

Найдя a^{τ}_B, можем вычислить искомое ускорение $a_B = \sqrt{(a^{\tau}_B)^2 + (a^{n}_B)^2}$. Величина a^{τ}_{BA} служит для нахождения ε_{AB} (как в рассмотренном примере).

Задача 3. Применение принципа возможных перемещений к определению реакций опор составной конструкции

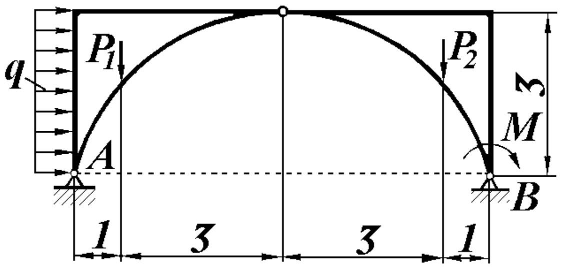
Применяя принцип возможных перемещений, определить реакции составной конструкции.

Схемы конструкций показаны на рис. Д3.0 – Д3.9, а необходимые для решения данные приведены в табл. Д3. На рисунках все размеры указаны в метрах.

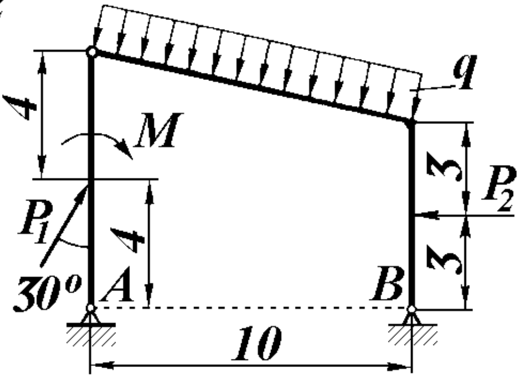
Таблица Д3

Номер варианта	Нагрузка			
	P_1, кН	P_2, кН	q, кН/м	M, кН·м
0	5	8	3	8
1	9	8	3	14
2	8	5	1	4
3	13	12	2	6
4	6	6	1	7
5	15	14	3	10
6	4	10	2	6
7	7	6	2	12
8	11	10	1	5
9	7	4	2	10

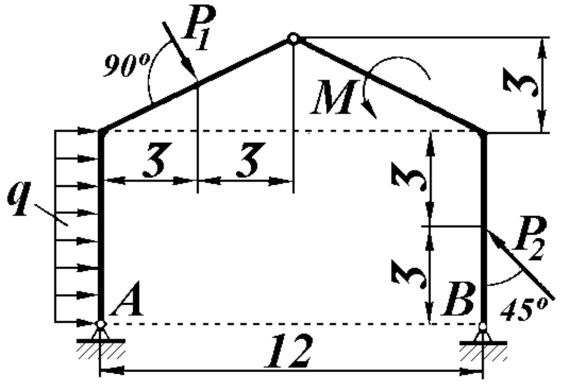
1



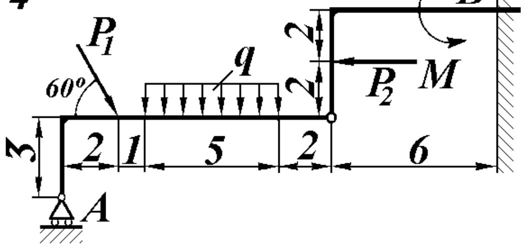
2



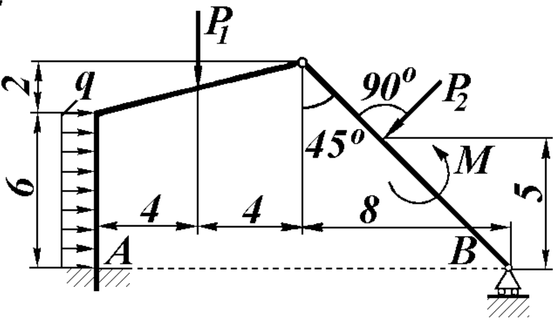
3



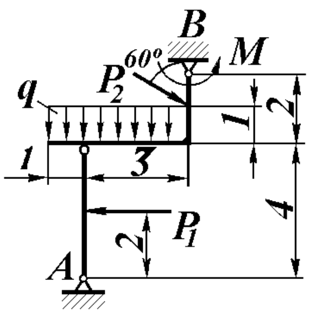
4



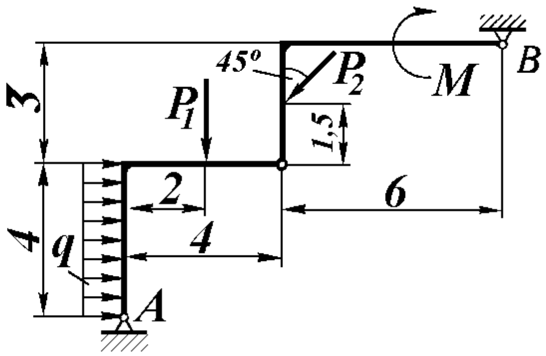
5



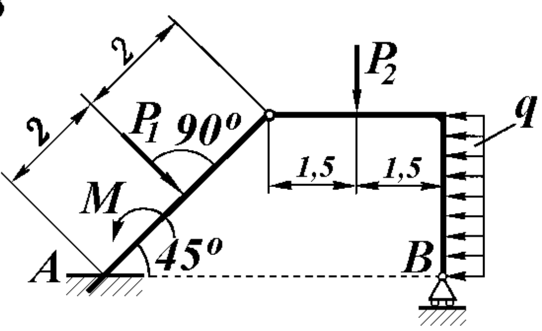
6



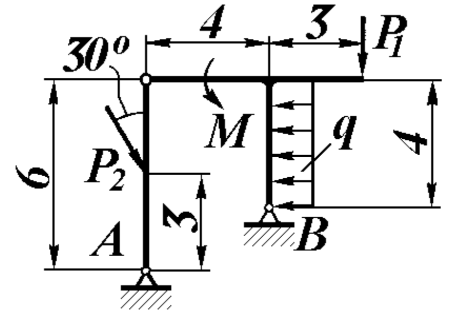
7



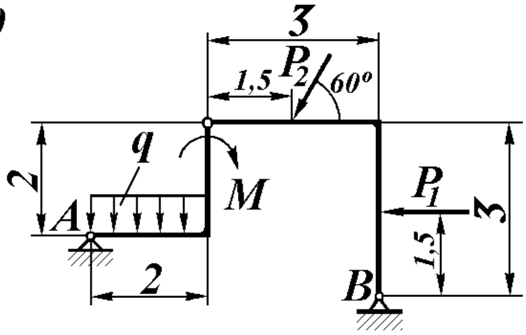
8



9



10



Методические указания.

Перед началом вычислений рекомендуется распределенную нагрузку q заменить сосредоточенной силой Q, приложив ее в середине нагруженного участка конструкции, а силы, действующие под углом к осям координат, разложить на их проекции.

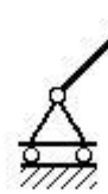
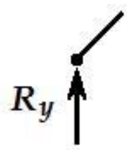
В исходном варианте составная конструкция не обладает ни одной степенью свободы, поэтому под действием заданных сил остается неизменяемой, неподвижно прикрепленной к опорам.

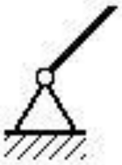
Для использования принципа возможных перемещений конструкция должна быть освобождена от одной связи в любой опоре. Действие отброшенной связи заменяется ее реакцией, которая вводится в состав заданных сил. Системе сообщается возможное допустимое внутренним устройством перемещение, соответствующее полученной степени свободы. Затем следует составить общее уравнение работ заданных сил, включая реакцию отброшенной связи. Из этого уравнения определяется затем искомая реакция связи.

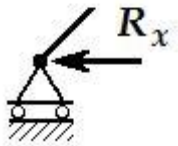
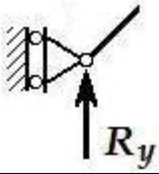
Работу по определению реакций рекомендуется выполнять в следующей последовательности.

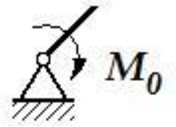
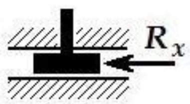
1. Одна из опор конструкции мысленно заменяется на опору с меньшим на единицу числом связей. Подвижная опора отбрасывается совсем. Реакция отброшенной связи вводится в состав действующих сил (см. таблицу 3).
2. Определяется характер движений элементов конструкции (вращательное, поступательное, плоско-параллельное), исходя из полученной степени свободы и с учетом того, что перемещение внутреннего шарнира C является общим для обоих элементов.
3. Для выбранного направления возможных движений элементов конструкций согласовываются величины перемещений, определяются перемещения в точках приложения сил и углы поворота элементов, совершающих вращательные движения.
4. Составляется общее для обоих элементов конструкции уравнение работ заданных сил и введенной реакции с учетом направлений перемещений и поворотов. Все перемещения в общем уравнении работ должны быть выражены через одно, которое затем исключается. Из полученного уравнения определяется реакция отброшенной связи.
5. После определения одной реакции конструкция возвращается в исходное крепление на опорах, а изложенный порядок действий повторяется для следующего варианта замены одной из опор.

Таблица 3

Исходная конструкция опоры	Вариант замены опоры
 Цилиндрический шарнир на подвижной опоре. Количество замен - **1**	 Опора отбрасывается и ее связь заменяется реакцией $\boldsymbol{R_y}$ перпендикулярно опорной поверхности

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Цилиндрический шарнир на неподвижной опоре.

Количество замен - 2</td><td></td><td>а) Вводится цилиндрический шарнир на горизонтально подвижной опоре и горизонтальная составляющая реакции опоры R_x</td></tr>
<tr><td></td><td>б) Вводится цилиндрический шарнир на вертикально подвижной опоре и вертикальная составляющая реакции опоры R_y</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td rowspan="3">Жесткая заделка.

Количество замен - 3</td><td></td><td>а) Вводится цилиндрический шарнир на неподвижной опоре и момент пары сил опорной реакции M_0</td></tr>
<tr><td></td><td>б) Вводится подвижная в горизонтальном направлении опора с жестким креплением к ней элемента конструкции и горизонтальная составляющая реакции опоры R_x</td></tr>
<tr><td></td><td>в) Вводится подвижная в вертикальном направлении опора с жестким креплением к ней элемента конструкции и вертикальная составляющая реакции опоры R_y</td></tr>
</table>

Согласование направлений и величин возможных перемещений элементов конструкции

При поступательном перемещении обоих элементов конструкции все точки будут перемещаться на одну и ту же величину ΔS в выбранном направлении.

Если оба элемента конструкции совершают вращательные движения, то для согласования их перемещений выбирается (произвольно) направление перемещения точки *C* внутреннего шарнира ΔS. Это перемещение затем выражается как произведение поворота ($\Delta\varphi$) на расстояние до оси вращения *l* для обоих элементов: $\Delta S = \Delta\varphi_1 \cdot l_1$ и $\Delta S = \Delta\varphi_2 \cdot l_2$, откуда получается соотношение $\Delta\varphi_1 \cdot l_1 = \Delta\varphi_2 \cdot l_2$. Это соотношение позволяет угловое перемещение первого элемента ($\Delta\varphi_1$) выразить через угловое перемещение второго элемента конструкции ($\Delta\varphi_2$) и наоборот:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{l_2}{l_1}\Delta\varphi_2 \text{ или } \Delta\varphi_2 = \frac{l_1}{l_2}\Delta\varphi_1 .$$

Следует обратить внимание на то, что элементы конструкции могут вращаться относительно своих центров как в одном направлении, так и в противоположных.

Если один элемент конструкции совершает поступательное перемещение, а другой – вращательное, то согласование их перемещений производится также по перемещению совместной точки *C*. Выбирается (произвольно) направление перемещения точки *C* в поступательном движении одного элемента - ΔS, и затем это перемещение выражается через произведение угла поворота другого элемента ($\Delta\varphi$) на расстояние от точки *C* до оси его вращения (l). Тогда: $\Delta S = \Delta\varphi l$ или $\Delta\varphi = \frac{\Delta S}{l}$.

Направление вращательного движения определяется выбранным перемещением точки *C* относительно оси вращения.

Общее уравнение работ

Общее уравнение работ составляется как сумма работ сил и моментов, действующих на оба элемента конструкции, с учетом принятого направления перемещения каждого элемента.

Работы силы и момента включаются в общее уравнение работ со знаком «плюс», если сила или момент действуют в направлении принятого перемещения элемента, т.е. «способствуют» принятому перемещению. В противном случае работа силы или момента включается в уравнение работ со знаком «минус» (если они «противодействуют» принятому направлению перемещения).

При поступательном перемещении элемента конструкции работа сил, приложенных к этому элементу, вычисляется как произведение величины перемещения на проекцию силы на направление поступательного перемещения.

Момент пары сил, действующий на поступательно движущийся элемент конструкции, в уравнение работ не включается.

При вращательном движении элемента конструкции работа силы определяется как произведение силы на плечо и на элементарный угол поворота элемента конструкции относительно оси вращения.

Работа момента пары сил определяется как произведение величины момента на элементарный угол поворота элемента.

Пример Д3 Пользуясь принципом возможных перемещений, определить реакции составной рамы, изображённой вместе с заданной нагрузкой на рис. Д3.11, если P_1=10 кН, q=5 кН/м, P_2=80кН и |M|=200кН·м.

Решение. Заменим равномерно распределённую нагрузку сосредоточенной силой $Q=q\cdot 4=5\cdot 4=20$ кН, приложенной к середине загруженного участка, а силу $\vec{P}_2$ разложим на горизонтальную и вертикальную составляющие;

$$P_2^{'} = P_2 \cos 60° = 80 \cdot 0{,}5 = 40 \quad кН.$$

$$P_2^{''} = P_2 \cos 30° = 80\sqrt{3}/2 = 40\sqrt{3} = 69{,}3 \quad кН.$$

Сначала определим реакцию заделки, реактивный момент M_A, горизонтальную составляющую $\vec{X}_A$ и вертикальную составляющую $\vec{Y}_A$. Для определения реактивного момента M_A отбросим связь, препятствующую повороту рамы, заменив заделку шарнирно-неподвижной опорой, и приложим к раме реактивный момент M_A (рис. Д3.12, а*).*

Сообщим системе возможное перемещение, повернув раму *AC* вокруг шарнира *A* на угол $\delta\varphi$, например, против направления вращения часовой стрелки. Тогда рама *CB* будет совершать плоское движение.

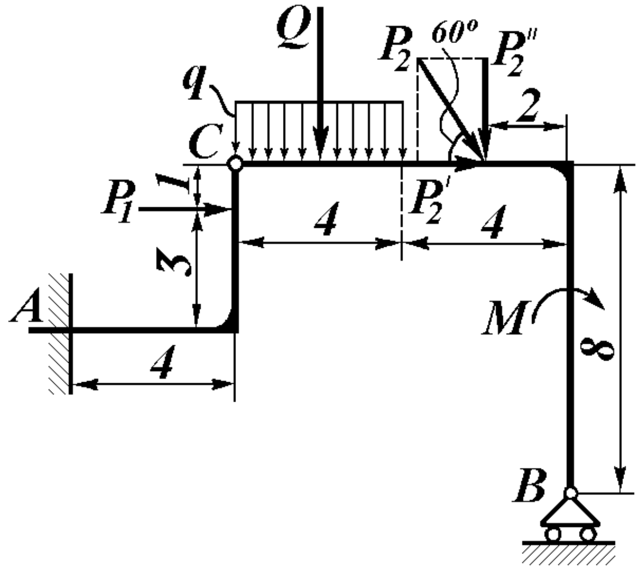


Рис. Д3.11

Найдём мгновенный центр вращения O_1 и, выражая элементарное перемещение δs шарнира *C* через элементарные углы поворота $\delta\varphi$ рамы *AC* и $\delta\varphi_1$ рамы *CB,* найдём соотношение между ними:

$$\delta s = AC \cdot \delta\varphi = O_1C \cdot \delta\varphi_1;$$

$$\delta\varphi_1 = \frac{AC}{O_1C}\delta\varphi = \frac{4\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}\delta\varphi = 0{,}5\delta\varphi.$$

Заметим, что поворот рамы *CB* вокруг мгновенного центра вращения O_1 на угол $\delta\varphi_1$ будет происходить по направлению вращения часовой стрелки.

Составим уравнение работ для определения реактивного момента M_A, учитывая, что работа силы при повороте тела равна моменту силы относительно центра вращения, умноженному на угол поворота тела, и положительна в случае, если направления момента и угла поворота совпадают.

$$M_A\delta\varphi - P_1 3\delta\varphi - Q\cdot 6\delta\varphi_1 - P_2^{'}\cdot 8\delta\varphi_1 - P_2^{''}2\delta\varphi_1 + M\delta\varphi_1 = 0.$$

Подставим сюда значение $\delta\varphi_1$:

$$M_A\delta\varphi - P_1\cdot 3\delta\varphi - Q\cdot 6\cdot 0{,}5\delta\varphi - P_2^{'}\cdot 8\cdot 0{,}5\delta\varphi - P_2^{''}\cdot 2\cdot 0{,}5\delta\varphi + M\cdot 0{,}5\delta\varphi = 0.$$

Отсюда

$$M_A = 3P_1 + 3Q + 4P_2^{''} + P_2^{''} - 0{,}5M = 219\ \ кН\cdot м.$$

Для определения горизонтальной составляющей заделки $\vec{X}_A$ представим опору в виде ползуна *A* в горизонтальных направляющих, жёстко скреплённого с рамой *AC,* и приложим к нему реакцию $\vec{X}_A$ (рис. Д5.12, б). Сообщим всей системе возможное перемещение — поступательное перемещение $\delta\vec{s}$, например, вправо, так как поворот ползуна в направляющих невозможен.

Составим уравнение работ для определения величины горизонтальной составляющей заделки $\vec{X}_A$.

$$X_A\delta s + P_1\delta s + P_2^{'}\delta s = 0; \qquad X_A = -P_1 - P_2^{'} = -50\ \ кН.$$

Знак минус показывает, что горизонтальная составляющая заделки направлена в сторону, противоположную направлению, указанному на рис. Д5.12, *б.*

Для определения вертикальной составляющей заделки $\vec{Y}_A$ отбросим связь, препятствующую вертикальному перемещению точки *A,* заменив заделку, ползуном *A* в вертикальных направляющих, жёстко скреплённым с рамой *AC,* и приложим к нему реакцию $\vec{Y}_A$.

Сообщим раме *AC* возможное перемещение — поступательное перемещение $\delta\vec{s}$, например, вверх. Тогда рама *CB* будет совершать плоское движение, а точка O_2 будет ее мгновенным центром вращения. Составим уравнение работ для определения величины вертикальной составляющей заделки Y_a, выразив перемещение всех точек приложения сил через элементарный угол $\delta\varphi$ поворота рамы *CB* вокруг мгновенного центра вращения O_2, учитывая, что возможное перемещение шарнира *C* равно поступательному перемещению рамы *AC* и $\delta s = 8\delta\varphi$ (рис. Д5.12, в).

$$Y_A 8\delta\varphi - Q\cdot 6\delta\varphi - P_2^{''}\cdot 2\delta\varphi + M\delta\varphi = 0,$$

откуда

$$Y_A = \frac{3}{4}Q + \frac{1}{4}P_2^{''} - \frac{1}{8}M = 7{,}3\ \ кН.$$

Для определения реакции подвижной опоры *B* отбросим эту связь, заменив ее действие реакцией $\vec{R}_B$ (рис. Д3.12, *г).* Сообщим раме *CB* возможное перемещение – поворот на угол $\delta\varphi$ вокруг шарнира *C*, например, против направления вращения часовой стрелки. Тогда $\delta s = 8\delta\varphi$. Рама *AC* при этом остается неподвижной.

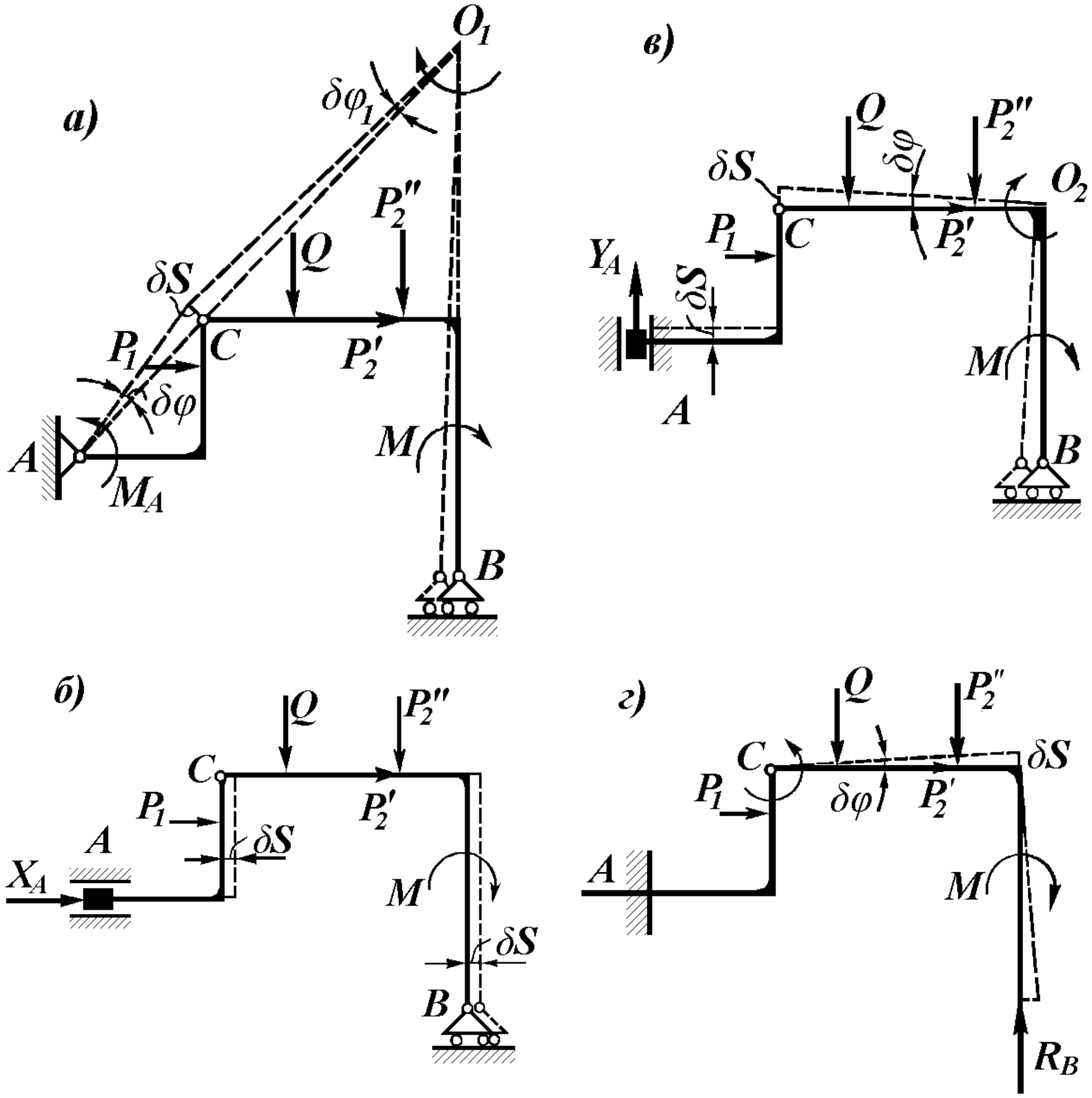


Рис. Д3.12

Составим уравнение работ для определения реакции R_B подвижной опоры *B*:

$$R_B 8\delta\varphi - \mathrm{Q}\cdot 2\delta\varphi - \mathrm{P}_2^{''}6\delta\varphi - M\delta\varphi = 0,$$

отсюда

$$R_B = \frac{2Q + 6P_2^{''} - M}{8} = 82 \ \ \kappa H.$$

Для проверки правильности решения задачи убедимся в том, что для всей рассматриваемой системы удовлетворяются уравнения равновесия

$$\sum X_i = 0, \qquad \sum Y_i = 0 \qquad и \qquad \sum M_{iA} = 0.$$

Действительно,

$$\sum X_i = X_A + P_1 + P_2' = -50 + 10 + 40 = 0;$$

$$\sum Y_i = Y_A - Q - P_2'' + R_B = 7{,}3 - 20 - 69{,}3 + 82 = 0;$$

$$\sum M_{iA} = M_A - P_1 \cdot 3 - Q \cdot 6 - P_2' \cdot 4 - P_2'' \cdot 10 - M + R_B \cdot 12 =$$

$$219 - 30 - 120 - 160 - 693 + 984 = 0.$$

Сопоставляя решение этой задачи, полученное путем применения уравнения работ, с решением, которое могло бы быть получено при составлении уравнений равновесия рассматриваемой системы сил, отметим следующие основные особенности решения задач при помощи принципа возможных перемещений:

1) каждая составляющая любой реакции, связи определяется независимо от других реактивных сил;

2) определение составляющих реакций внешних связей (в рассматриваемом случае опор А и В) не требует определения реакций внутренних связей (шарнира С).

Для системы, состоящей из нескольких тел, определять реакции опор при помощи принципа возможных перемещений особенно удобно в том случае, когда требуется определить реакции не всех опор, а лишь одну или несколько реакций.