

## Общие указания по выполнению расчётно-графических работ

Перед началом выполнения расчётно-графической работы необходимо освоить теоретический материал по теме раздела.

Расчётно-графические работы выполняются отдельно каждая, на листах формата А4. На титульном листе необходимо указать название дисциплины, факультета, номер курса, фамилию и инициалы курсанта, его шифр (номер студенческого билета и зачетной книжки) и выбираемый в соответствии с ним номер варианта. Текст и формулы следует набирать на компьютере в Word шрифтом Times New Roman, 14, интервал в тексте 1,5, изображение рисунков и схем выполнить в ACAD, во встроенном графическом редакторе MS Word.

Для сдачи работ на проверку в компьютерной среде в системе дистанционного обучения следует подготовить файл в формате *pdf*, отсканировав листы РГР, выполненные на бумажном носителе, размер файла до 0,5 МБ, разрешение 200 – 300 *dpi*.

Выбор варианта расчётной схемы в расчётно-графических работах РГР–1, РГР–2 и РГР–5 производится по последней цифре шифра, взятой из соответствующих таблиц. Числовые данные для каждой работы также выбираются из таблиц в соответствии с предпоследней цифрой шифра. Расчётно-графические работы имеют 100 вариантов (10 различных расчётных схем и 10 комбинаций численных значений для каждой из них), РГР–3 и РГР–4 имеют пять вариантов схем, номер схемы определяется по формуле:  $N_{\text{сх}} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ , где  $n$  – последняя цифра зачётной книжки.

Незачётная расчётно-графическая работа подлежит повторному выполнению. Все зачтенные работы с внесенными дополнениями и исправлениями в соответствии с замечаниями рецензента должны быть предъявлены преподавателю для собеседования, в результате которого решается вопрос о зачете и допуске к экзамену. Курсанты с незачётными расчётно-графическими работами к экзамену (зачёту) не допускаются.


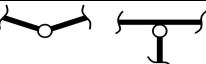

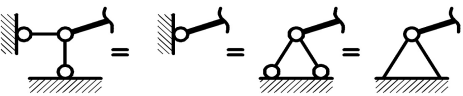
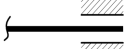

Для студентов очной формы обучения расчётно-графические работы выполняются в соответствии с принятой в настоящем издании нумерацией, для студентов заочной формы обучения первые четыре расчётно-графические работы являются первой контрольной работой, две расчётно-графические работы по сложному сопротивлению – второй, две последние расчётно-

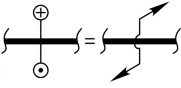
графические работы – третьей.

При оформлении расчётно-графических работ следует оставлять поля для замечаний рецензента. Расчётно-графические работы, выполненные без соблюдения указанных требований, не рецензируются. Решение каждой задачи необходимо начинать с новой страницы, независимо от наличия оставшегося свободного места на предыдущей странице. Запись условий расчётно-графических работ обязательна. Все чертежи и схемы необходимо выполнять в удобочитаемом масштабе с обязательным указанием всех использованных в работе буквенных обозначений и их численных значений, взятых из данного варианта (прил. 1 и 2). При записи уравнений, составляемых по расчетной схеме, она должна быть расположена рядом на странице. После выбора варианта должна быть вычерчена своя схема с числовыми параметрами в принятом масштабе.

Решение каждой задачи следует сопровождать краткими пояснениями с указанием метода решения, использованных теоретических положений, формул или уравнений. Промежуточные и окончательные результаты подсчётов необходимо округлять, при вычислении значений тригонометрических функций в мантиссе следует удерживать не менее трех значащих цифр. Значения всех определяемых величин должны иметь размерности.

При составлении расчетных схем плоских систем следует использовать следующие системы условных обозначений:

Схема	Название
	основание опоры, связанное с неподвижной системой координат
	простой шарнир, соединяющий два диска (стержня)
	цилиндрическая шарнирно-подвижная опора
	цилиндрическая шарнирно-неподвижная опора
	идеальный подшипник скольжения или качения на валу
	цилиндрический шарнир на валу с моментом сопротивления повороту


	$M_R$
	<p>крутящий (внешний или скручивающий) момент, действующий в плоскости, перпендикулярной плоскости чертежа. Знак "+" обозначает действие силы пары, направленной к чертежу, знак "•" — от чертежа</p>

Реактивные моменты, противодействующие повороту, могут быть обусловлены различными механическими причинами: трением в опорах, силами сопротивления рабочего органа машины, их комбинации и др.

В отличие от теоретической механики, где рассматриваются абсолютно жёсткие тела и возможен перенос действия силы вдоль линии её действия, в сопротивлении материалов менять точку приложения силы нельзя, поскольку это изменит напряжённо-деформированное состояние элемента. Поэтому, при указании сил необходимо указать не только линии действия, направление и модуль сил, но ещё и точки их приложения. В случаях, если точка приложения силы читается однозначно (торец, сечение стержня и т.д.) и видно к чему она приложена, то вектор силы изображается обычной стрелкой, точка приложения будет та, что касается поверхности тела:

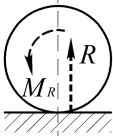
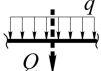
	<p>сила действует на известную точку (торец стержня, сечение тела)</p>
---	--

В случае, если положение силы определяется неясно, например, на фоне тела, оба конца вектора свободны, то точку приложения следует указывать особо, как показано на схеме:


	<p>сила действует на непривязанную к телу точку</p>
---	---

При выполнении всех расчетно-графических работ используется фундаментальный принцип механики — принцип освобождаемости от связей (аксиома). В соответствии с данным принципом нельзя указывать на расчетной схеме и связи, и их реакции одновременно. Либо связи, либо реакции. Однако, иногда, для определения плеч сил при вычислении моментов, линии действия равнодействующих и в других случаях, для наглядности составления уравнений удобно указывать на схеме линии действия равнодействующих нагрузок, реакций, не удаляя сами связи. В

таких случаях допускается указывать силы, изображая их пунктирной линией:

	<p>изображение реакции связи пунктиром</p>
	<p>изображение равнодействующей пунктиром</p>

В соответствии с методом сечений действие одной части элемента на другую (смежную) заменяется усилиями. На вырезанной части должны быть показаны места сечений, усилия прикладываются в точках, где сечения проведены, без переноса сил:

	<p>изображение усилий, действующих в сечениях</p>
---	---

При этом на чертеже элементы схемы должны изображаться линиями различной толщины и не сливаться: толщина осевой линии – 0,13 мм, место сечения – 0,3 мм, вектора – 0,5 мм, стержня 1,0 мм.

## Изгиб стержней

Стержни, преимущественно работающие на изгиб, называются балками. В поперечных сечениях балки при действии поперечной нагрузки (поперек продольной оси) возникают изгибающие моменты, которые эти сечения поворачивают относительно поперечной оси, перпендикулярной площади чертежа и тем самым искривляют продольную ось. При этом часть сечения, в которой продольные (параллельные продольной оси балки) волокна укорачиваются ( $m''n''$ ) (рис. 1), оказывается сжатой, а часть растянутой – продольные волокна ( $m'n'$ ) удлиняются. Кривая, на которой нормальные напряжения равны нулю ( $mn$ ), проходит через центры тяжести поперечных сечений, совпадает с продольной осью балки и называется нейтральной линией.

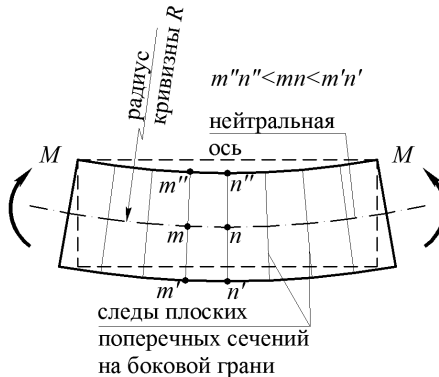


Рис. 1. Искривление оси стержня при изгибе

Наличие при изгибе в одном сечении напряжений и сжатия и растяжения, требует указания на эпорах не только величины изгибающих моментов, но и то, что показывало бы какие части сечения сжаты, а какие растянуты. Часто балки изготавливаются из хрупких материалов, таких как чугун или бетон, которые на растяжение имеют в несколько раз меньшую прочность, чем на сжатие. По эпюре изгибающих моментов  $Эп.М$  определяются соответствующие участки балки и зоны деформаций одного знака. Для зон с большими растягивающими напряжениями в

сечениях, превышающими прочность материала, инженером принимается решение об увеличении сечения, замене материала или применяется армирование материалами с высокой прочностью на растяжение.

Существует несколько правил определения направления действия изгибающих моментов (правило знаков), но в инженерной практике для случая наиболее распространённого случая плоского изгиба, когда все силы лежат в одной плоскости, совпадающей с одной из главных осей инерции сечения, наиболее распространено из-за простоты и наглядности правило построения  $\text{Эп.} M$  со стороны растянутых волокон. В этом случае отпадает необходимость использовать знаки «+» и «-», а также понятия «сверху», «снизу» балки. Очевидно, что стержень может быть расположен в схеме вертикально или под углом, скажем,  $45^\circ$ , что внесет неопределенность в построение эпюры.

Схема нанесения изгибающих моментов на эпюру, определяемая характером искривления оси стержня, показана на рис. 2.



Рис. 2. Построение эпюры изгибающих моментов на участке стержня

Подчеркнём, что ординаты на  $\text{Эп.} M$  просто откладываются со стороны растянутых волокон (выпуклости кривой) и знаки на эпюре **не ставятся**.

Для поперечных сил используется простое правило (рис. 3): если поперечная сила  $Q$ , действующая в рассматриваемом сечении поворачивает выделенный участок стержня относительно другого сечения по часовой стрелке, то её значение принимается положительным (обозначается знаком

«+»), в противном случае, при повороте против часовой стрелки, принимается отрицательным, (обозначается знаком «-»).

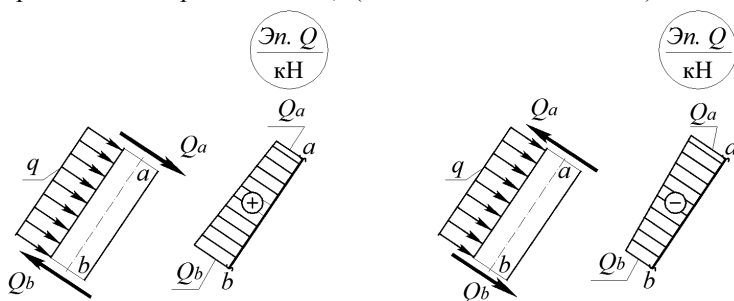


Рис. 3. Правило знаков на эпюре поперечных сил на участке стержня

При построении эпюры продольных сил  $\text{Эп. } N$  используется правило, аналогичное для нормальных напряжений: если усилие действует от сечения – растяжение, значение принимается положительным (обозначается знаком «+»), в противном случае принимается отрицательным, обозначается знаком «-» (рис. 4).

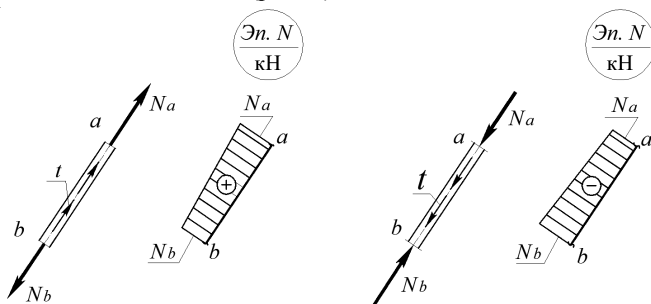


Рис. 4. Построение эпюры продольных усилий на участке стержня

Следует обратить внимание на то, что знаки на эпюрах усилий и напряжений определяются по тому, как они действуют на элемент материала (стержень) или стержень, и к какому виду деформации приводят. Они не связаны с понятиями верх-низ, с осями координат.

При построении эпюр перемещений (удлинений/укорочений и прогибов) знаки будут определяться в соответствии с выбранными осями координат.

### Особенности построения эпюр в изгибаемых балках.

В инженерной практике обычно используются расчётные схемы, в которых внешние нагрузки моделируются ограниченным набором силовых воздействий: сосредоточенная сила, сосредоточенный момент, равномерно распределённая нагрузка. На основании известных дифференциальных зависимостей между изгибающими моментами и поперечными силами:

$$Q = \frac{dM}{dx}, \quad (1)$$

поперечной распределённой нагрузкой и поперечной силой:

$$\frac{dQ}{dx} = -q, \quad (2)$$

распределённой осевой нагрузкой  $t(x)$  и продольными усилиями:

$$t = \frac{dN}{dx}, \quad (3)$$

а также принятых правил знаков для усилий, можно строить эпюры без составления аналитических выражений для функций  $M$ ,  $Q$  и  $N$ , а непосредственно по их значениям в расчётных сечениях по концам участков. В этом случае расчётная схема разбивается на характерные участки, для которых известен закон изменения усилий по длине стержня, границами этих участков являются: узлы сопряжения стержней, место приложения сосредоточенных нагрузок (сил и моментов), начало и конец участка распределённых нагрузок. С помощью метода сечений последовательно вычисляются значения усилий на границах участков расчетной схемы, определяющие ординаты эпюр, которые затем соединяются в соответствии особенностями того или иного усилия.

Усилия в расчётном сечении вычисляются следующим



образом:

- продольная сила  $N$  равна алгебраической сумме проекций всех сил, действующих по одну сторону от сечения, на касательную к оси стержня, проведённую через точку сечения;
- поперечная сила  $Q$  равна алгебраической сумме проекций всех сил, действующих по одну сторону от сечения, на нормаль к продольной оси стержня, проведённую в точке сечения;
- изгибающий момент  $M$  равен алгебраической сумме моментов всех сил, действующих по одну сторону от сечения, относительно точки сечения.

Ординаты эпюр по концам расчетных участков соединяются с помощью графиков функций по продольной координате  $x$  с учётом следующих правил:

1) ненагруженный участок:

$N = \text{const}$ ,  $Q$ ,  $M$  – горизонтальная или наклонная прямая (линейная функция). Тангенс угла наклона  $M$  равен поперечной силе  $Q$ . Знак эпюры  $Q$  определяется совмещением оси стержня с эпюрой  $M$ , если поворот происходит по часовой стрелке, значения  $Q$  положительны, против – отрицательны. Если поперечная сила  $Q$  на участке равна нулю, то  $M = \text{const}$ , материал работает в условиях чистого изгиба;

2) участок, нагруженный равномерно распределённой нагрузкой  $q$ :

$N = \text{const}$ ,  $Q$  – наклонная прямая (линейная функция),  $M$  – парабола (рис. 5) с выпуклостью, направленной в сторону действия нагрузки  $q$  (квадратичная функция);

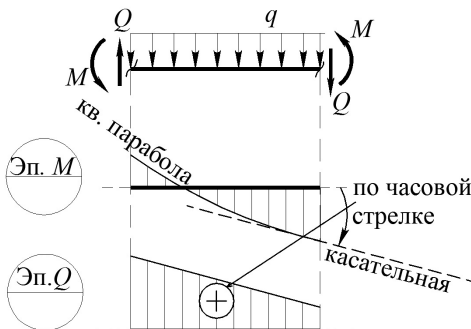


Рис. 5 Характер эпюр  $M$  и  $Q$  на участке с равномерно распределённой нагрузкой

3) участок с равномерно распределённой осевой нагрузкой  $t$ :  
 $N$  – наклонная прямая (линейная функция),  $Q = \text{const}$ ,  $M$  – горизонтальная или наклонная прямая (линейная функция);

4) в точках приложения сосредоточенных нагрузок  $N$ ,  $Q$  или  $M$  получаются скачки, по величине равные значениям этих нагрузок. При этом на эпюре  $M$  имеет место излом графика, образованный касательными к его ветвям, расположенным по разные стороны от места приложения сосредоточенной силы. Направление излома совпадает с направлением силы (рис. 6);

5) в сечениях, примыкающих к шарнирам значения моментов равны нулю.

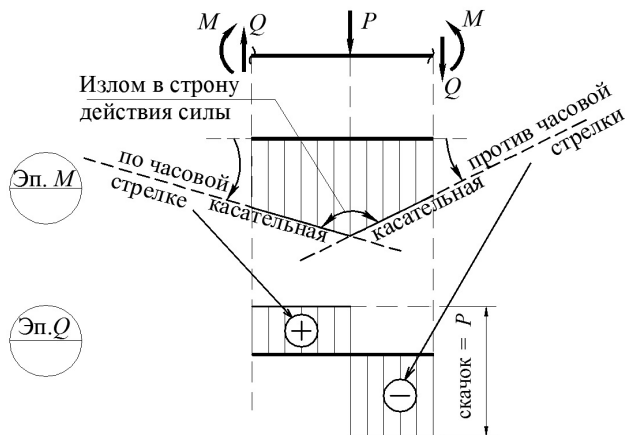


Рис. 6. Характер эпюр  $M$  и  $Q$  под сосредоточенной силой

Перечисленные правила используются для проверки правильности построения эпюр усилий.

Следует придерживаться следующей терминологии.

Прямой изгиб – вид деформации, при которой изгибающие моменты от внешних сил действуют в плоскости, совпадающей с одной из главных осей инерции сечения.

Чистый изгиб – вид деформации, при которой искривление продольной оси стержня вызывается действием только

изгибающих моментов, а поперечные силы в сечении отсутствуют, при наличии поперечных сил будет иметь место поперечный изгиб.

Местоположение центра тяжести расчётного сечения по длине стержня условимся называть точкой сечения.

### **Расчётно-графическая работа №3** **«Расчёт балки на двух опорах, работающей в условиях прямого поперечного изгиба»**

**Технические условия.** Для балки на двух опорах, схема которой изображена на рисунке (Рис. 7), из условия прочности на основе метода предельных состояний необходимо подобрать сечения:

- стальной двутавровой балки, пользуясь таблицами сортамента прокатной стали;
- стальной балки прямоугольного поперечного сечения при отношении его высот к ширине, равном двум.

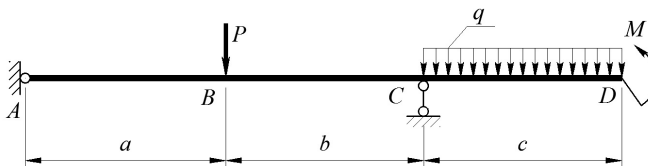


Рис. 7. Расчётная схема РГР

Балка загружена системой внешних сил: сосредоточенной силой  $F$ , равномерно распределенной нагрузкой  $q$  и моментом  $M$ . Балка выполнена из стали с расчётным сопротивлением  $R = 235$  МПа, коэффициент условий работы  $\gamma_c = 1$ .

Требуется:

- в выбранном масштабе вычертить расчётную схему (общую схему РГР не рисовать), построить эпюры усилий: поперечных сил и изгибающих моментов;
- проверить эпюры с использованием особенностей и правил построения для простейших видов нагружения: сосредоточенных сил и моментов, равномерно распределённых нагрузок;
- определить опасные сечения;

– назначить сечения балки по двум вариантам формы поперечного сечения из условия прочности.

Выбор варианта расчётной схемы расчётно–графической работы №5 выполняется в соответствии с данными таблиц (Табл. 1) и (Табл. 2).

Табл. 1. Числовые данные

Расчётные данные	Цифра шрифта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a$ , м	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
$b$ , м	4	5	6	2	3	3	4	5	3	4
$c$ , м	3	4	5	3	4	4	5	3	3	3
$F$ , кН	50	40	30	20	10	50	40	30	20	10
$q$ , кН/м	10	20	10	20	10	20	10	20	10	20
$M_e$ , кН·м	50	40	30	50	30	40	30	40	50	20

Табл. 2 Расчётные схемы вариантов РГР

<p>0</p>	<p>1</p>
<p>2</p>	<p>3</p>
<p>4</p>	<p>5</p>
<p>6</p>	<p>7</p>
<p>8</p>	<p>9</p>

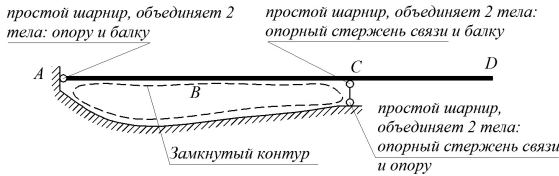
### Последовательность решения задачи

#### 1. Анализ расчётной схемы

Все силы действуют в одной плоскости (плоскость чертежа) – схема соответствует плоской системе сил. Для плоской конструкции используем формулу для определения статической определимости схемы:

$$И = 3К - Ш, \quad (4)$$

где  $И$  – количество избыточных связей,  $К$  – количество замкнутых контуров в схеме,  $Ш$  – количество простых шарниров.



Количество замкнутых контуров:  
 $К = 1$ ,  
 количество простых шарниров:  
 $Ш = 3$ .

Рис. 8. Проверка статической определимости

Из рис. 8 видно, что все шарниры соединяют собой по два тела (стержни, основание опоры), их кратность  $К_{ш} = 1$ , все шарниры простые.

Количество избыточных связей:

$$И = 3К - 3 = 0.$$

Избыточных связей нет, система статически определимая, для определения реакций опор достаточно уравнений равновесия.

Проводим анализ геометрической изменяемости. Освободим тело от связей, заменив их реакциями (рис. 9). Линии действия трёх реакций  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$  и  $R_C$  одновременно не параллельны и не пересекаются в одной точке, в системе нет трёх шарниров, лежащих на одной прямой, система геометрически неизменяемая. Перемещения точек в такой системе возникают только за счёт деформаций под действием усилий.

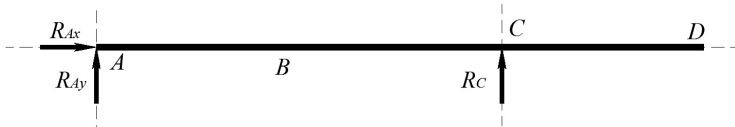


Рис. 9. Проверка геометрической неизменяемости свободной системы

## 2. Определение опорных реакций.

Изображаем в масштабе свою схему в соответствии с исходными данными варианта по геометрии и по действующей нагрузке (рис. 10).

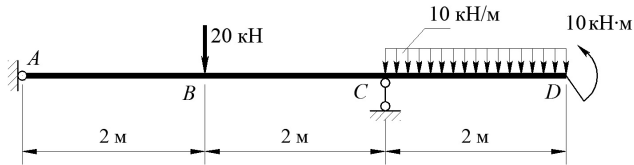


Рис. 10. Заданная расчётная схема по шифру

Назначаем единицы измерения: длины в м, силы в кН, которые в дальнейшем на схемах не указываем, кроме подписи на окончательных эпюрах.

Вводим систему координат (рис. 11), в которой продольная ось стержня совпадает с осью  $x$ , реакцию в шарнирно неподвижной опоре представляем двумя составляющими по осям  $x$  и  $y$ , вертикальную реакцию  $R_C$  направляем произвольно по линии действия (вдоль оси шарнирно подвижной опоры), для указания линии действия наносим пунктиром равнодействующую  $Q_r$  равномерно распределённой нагрузки  $q$ .

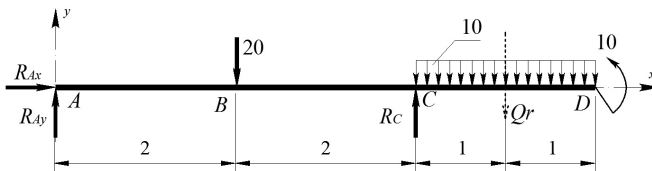


Рис. 11. Свободная от опор заданная система

Реакции опорных связей находим из системы уравнений равновесия плоской системы сил. Система содержит три независимых уравнения. Из уравнения проекций сил на продольную ось:

$$\sum_{i=1}^n F_{xi} = 0$$

определяем тождественное равенство нулю:  $R_{Ax} \equiv 0$ .

Изображаем схему с учетом отсутствия горизонтальных сил (рис. 12).

Для нахождения  $R_{Ay}$  и  $R_C$  воспользуемся записью, содержащей сумму проекций сил на вертикальную ось и уравнения моментов относительно двух несовпадающих точек плоскости:

$$\sum_{i=1}^n M_{Ai} = 0; \sum_{i=1}^n M_{Ci} = 0; \sum_{i=1}^n F_{yi} = 0.$$

Последнее уравнение используем для проверки правильности нахождения искомых величин. Для плоской системы сил правило знаков для моментов сил выбираем произвольно.

$$\Sigma M_A = 0; 20 \times 2 - R_C \times 4 + Qr \times 5 - 10 = 0;$$

$$40 - R_C \times 4 + 10 \times 2 \times 5 - 10 = 0; R_C = 32,5 \text{ кН};$$

Положительное значение найденной реакции  $R_C$  свидетельствует о том, что принятое на схеме её направление (рис. 12) оказалось верным. Изображаем схему с найденными реакциями:

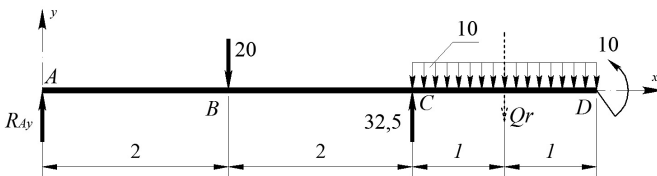


Рис. 12. Расчётная схема балки с двумя найденными реакциями

Реакцию  $R_{Ay}$  находим из уравнения равновесия:

$$\Sigma M_C = 0; R_{Ay} \times 4 - 20 \times 2 + Qr \times 1 - 10 = 0;$$

$$R_{Ay} \times 4 - 20 \times 2 + 10 \times 2 \times 1 - 10 = 0; R_C = 32,5 \text{ кН}.$$

Положительное значение найденной реакции  $R_{Ay}$  свидетельствует о том, что принятое на схеме её направление (рис. 13) оказалось верным. Изображаем схему с найденными реакциями:



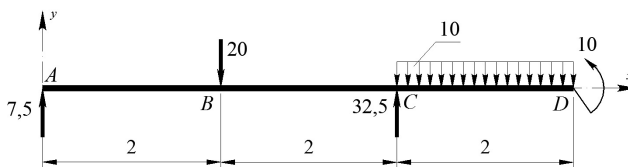


Рис. 13. Расчётная схема балки с тремя найденными реакциями

Выполняем проверку правильности найденных опорных реакций:

$$\sum Y_i = 0; 7,5 - 20 + 32,5 - 10 \times 2 = 0;$$

$$7,5 - 20 + 32,5 - 10 \times 2 = 0;$$

$$40 = 40;$$

Условие равновесия соблюдается, опорные реакции  $R_{Ay}$  и  $R_C$  найдены верно.

### 3. Определение усилий.

Внутренние силовые факторы: поперечные силы и изгибающие моменты, определяются на основании метода сечений. Разбиваем балку на 3 участка, 1-й: «A–B», 2-й: «B–C», 3-й: «D–C». Начало координат для каждого участка балки совпадает с первой буквой в названии интервала.

Участок 1 (Рис. 14). Проводим сечение в точке с координатой  $x_1$  и составляем уравнения равновесия для оставшейся части:

$$\sum X_1 = 0; \Rightarrow N_1 \equiv 0;$$

$$\sum M_{сеч} = 0; 7,5 \times x_1 - M_1 = 0;$$

$$M_1(x_1) = 7,5 x_1;$$

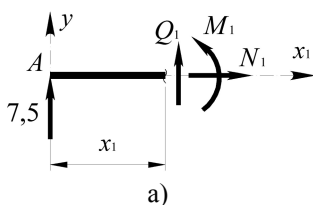
$M_1$  – линейная функция,  
координата  $x_1$  в первой степени.

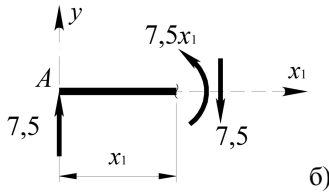
$$\sum Y = 0;$$

$$7,5 + Q_1 = 0;$$

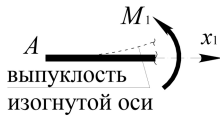
$$Q_1 = -7,5;$$

значение  $Q_1$  на участке  
постоянно.





б)



в)

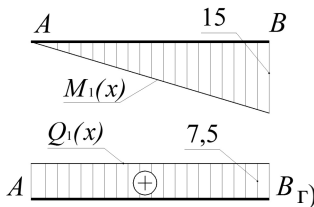


Рис. 14. Определение усилий на участке 1

Участок 2 (Рис. 15). Проводим сечение в точке с координатой  $x_2$  и составляем уравнения равновесия для оставшейся части:

$$\sum X_2 = 0; \Rightarrow N_2 \equiv 0;$$

$$\sum M_{сеч} = 0;$$

$$7,5 \times (2 + x_2) - 20 \times x_2 - M_2 = 0;$$

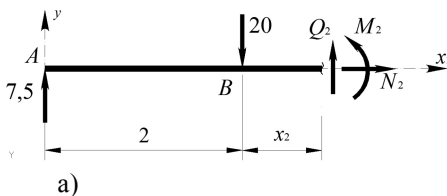
$$M_2 = 15 - 12,5x_2;$$

$M_2$  – линейная функция.

$$\sum Y = 0;$$

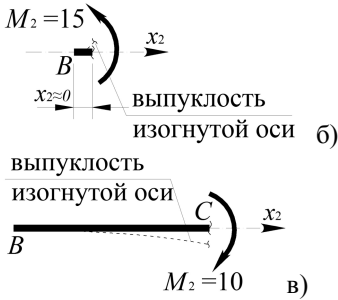
$$7,5 - 20 + Q_2 = 0;$$

$$Q_2 = 12,5;$$



а)

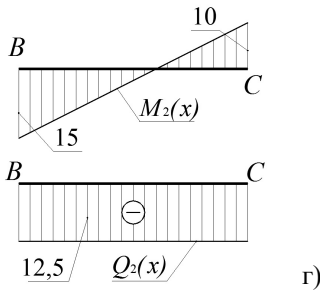
$Q_2$  на участке постоянна.



$M_2(0) = 15$ , направление момента совпадает с принятым на схеме а), растянутые волокна снизу.

При  $x_2 = 2$   $M_2(2) = -10$ , направление момента противоположно принятому, растянутые волокна сверху.

Поперечная сила  $Q_2$  постоянна, поворачивает участок стержня против часовой стрелки, её знак «-».



Изображаем эпюры  $M_2$  и  $Q_2$  на участке. Значения усилий в конце участка при  $x_2 = 2$ :

$$M_2(2) = 10;$$

$$Q_2(2) = -12,5.$$

Рис. 15. Определение усилий на участке 2

Участок 3 (Рис. 16). Проводим сечение в точке с координатой  $x_3$  и составляем уравнения равновесия для оставшейся части:

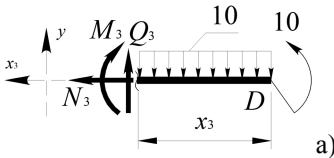
$$\sum X_3 = 0; \Rightarrow N_3 \equiv 0;$$

$$\sum M_{сеч} = 0;$$

$$10 - 10 \times x_3 \times \frac{x_3}{2} - M_3 = 0;$$

$$M_3 = 10 \left( 1 - \frac{x_3^2}{2} \right);$$

$M_3$  – квадратичная функция.



$$\Sigma Y = 0; Q_3 - 10 \times x_3 = 0;$$

$$Q_3 = 10x_3;$$

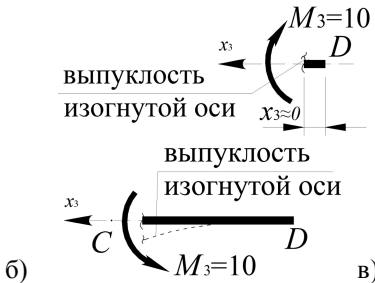
$Q_3$  – линейная функция.

Поперечная сила  $Q_2$  поворачивает участок стержня по часовой стрелке, её знак «+».

$$Q_3(0) = 0.$$

$$Q_3(2) = 20.$$

$M_3(0) = 10$ , направление момента совпадает с принятым на схеме а), растянутые волокна снизу. При  $x_3 = 2$   $M_3(2) = -10$ , направление момента противоположно принятому, выпуклость оси и растянутые волокна оказываются сверху.

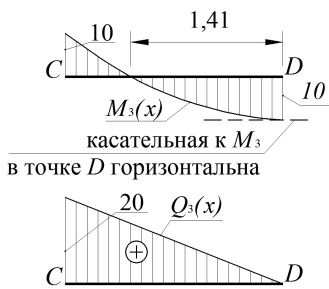


Определяем точку пересечения функции  $M_3$  с базовой линией эпюры. Приравниваем функцию  $M_3$  нулю, корень уравнения определит точку пересечения  $x_3^0 : M_3 = 10 \left( 1 - \frac{x_3^2}{2} \right) = 0; x_3^0 = \sqrt{2} = 1,41;$

Для нахождения экстремума функции  $M_3$  приравняем нулю её первую производную:

$$\frac{dM_3}{dx_3} = 10x_3; 10x_3' = 0; \Rightarrow x_3' = 0.$$

Так как  $\frac{dM_3}{dx_3} = Q_3$ , то абсцисса с экстремальным значением момента совпадает с сечением, в котором поперечная сила равна нулю – в начале участка 3.



Изображаем эпюры  $M_3$  и  $Q_3$  на участке.

Рис. 16. Определение усилий на участке 3

Определив функции усилий во всех сечениях, строим эпюры в балке на всём протяжении. Для этого выбирается соответствующий масштаб, изображается заданная расчётная схема и строго под ней строятся эпюры (рис. 17):

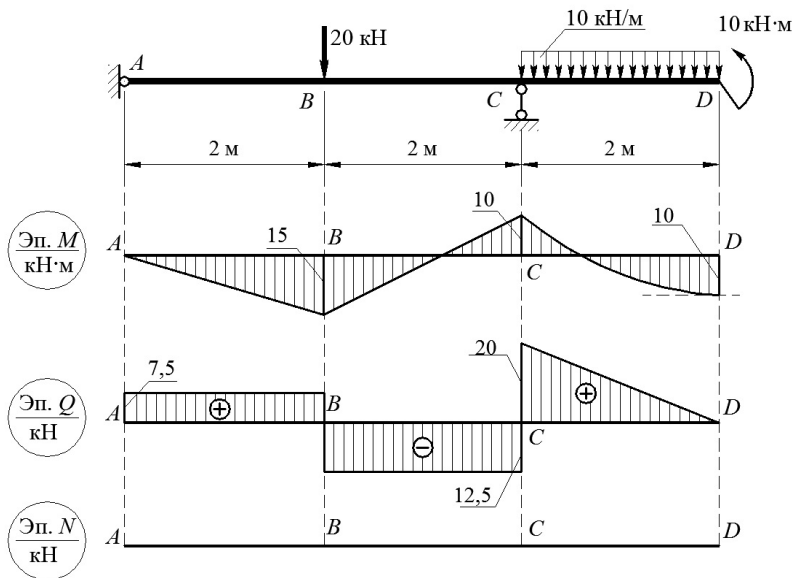


Рис. 17. Эпюры усилий в сечениях балки  $M$ ,  $Q$  и  $N$

#### 4. Проверка правильности построения эпюр.

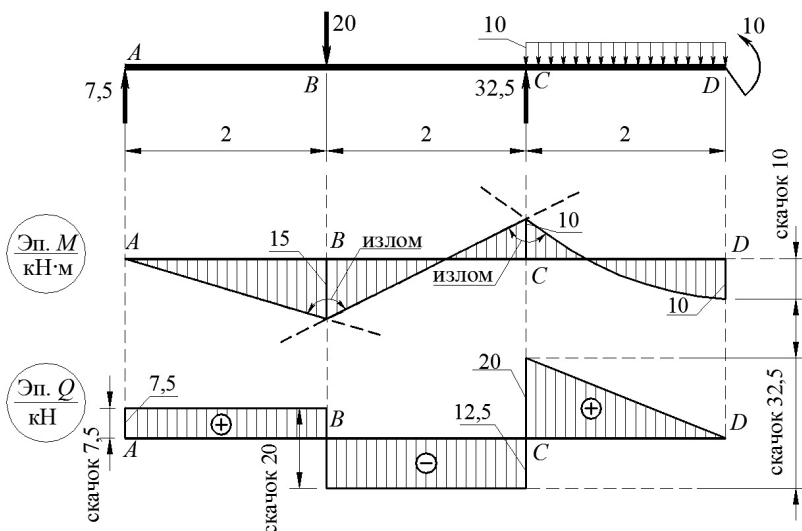


Рис. 18. Проверка построения эпюр  $M$  и  $Q$

# I. Эпюра изгибающих моментов $M$ .

## Участок «AB».

1) участок не нагружен, эпюра в виде прямой – соблюдается;

2) в сечении, примыкающем к шарниру  $A$ , момент равен нулю – соблюдается;

3) в точке «B» наблюдается излом ветвей эпюры, образованный касательными, направление излома в сторону действия внешней сосредоточенной силы – соблюдается.

## Участок «BC».

1) участок не нагружен, эпюра в виде наклонной прямой – соблюдается;

2) в точке «C» наблюдается излом ветвей эпюры, образованный касательными, направление излома в сторону действия внешней сосредоточенной силы (реакции опоры) – соблюдается.

## Участок «CD».

1) участок нагружен равномерно распределённой нагрузкой, эпюра в виде квадратной параболы, направленной

выпуклостью в сторону действия нагрузки – соблюдается;

2) экстремум функции находится в точке « $D$ », в которой касательная к эпюре горизонтальна, а значение поперечной силы равно нулю – соблюдается;

3) в точке « $D$ » наблюдается скачок на эпюре, равный величине внешнего сосредоточенного момента  $10 \text{ кН}\cdot\text{м}$  – соблюдается.

## II. Эпюра поперечных сил $Q$ .

Участок « $AB$ ».

1) участок не нагружен, эпюра постоянна – соблюдается;

2) в сечении, примыкающем к шарниру  $A$ , наблюдается скачок, равный величине внешней сосредоточенной силы  $7,5 \text{ кН}$  – соблюдается;

3) в точке « $B$ » наблюдается скачок, равный величине внешней сосредоточенной силы  $20 \text{ кН}$  – соблюдается;

4) значение ординаты эпюры  $Q$  равно тангенсу угла наклона касательной на эпюре моментов  $M$ :  $15/2 = 7,5$  – соблюдается;

5) поворот оси стержня до совмещения с эпюрой  $M$  по кратчайшему пути происходит по часовой стрелке, что определяет положительные значения на эпюре  $Q$  – соблюдается.

Участок « $BC$ ».

1) участок не нагружен, эпюра постоянна – соблюдается;

2) в точке « $C$ » наблюдается скачок, равный величине внешней сосредоточенной силы  $32,5 \text{ кН}$  – соблюдается;

3) значение ординаты эпюры  $Q$  равно тангенсу угла наклона касательной на эпюре моментов  $M$ :  $(15+10)/2 = 12,5$  – соблюдается;

4) поворот оси стержня до совмещения с эпюрой  $M$  по кратчайшему пути происходит против часовой стрелки, что определяет отрицательные значения на эпюре  $Q$  – соблюдается.

Участок « $CD$ ».

1) участок нагружен равномерно распределённой нагрузкой, эпюра в виде наклонной прямой – соблюдается;

2) поворот оси стержня до совмещения с эпюрой  $M$  по

кратчайшему пути происходит по часовой стрелке, что определяет положительные значения на эпюре  $Q$  – соблюдается;

3) значение интенсивности равномерно распределённой нагрузки равно тангенсу угла наклона эпюры  $Q$ :  $20/2 = 10$  – соблюдается.

## 5. Подбор сечения балки

Определяем сечения балки из условия прочности в качестве проектного расчета. Требуемый момент сопротивления сечения при заданном расчётном сопротивлении стали  $R = 235$  МПа и коэффициенте условий работы  $\gamma_c = 1,0$  вычисляем из условия:

$$W_{z,nec} \geq \frac{M_{\max}}{R \cdot \gamma_c} = \frac{15 \cdot 10^3}{235 \cdot 10^6 \cdot 1,0} = 6,383 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 = 63,83 \text{ см}^3.$$

Подбираем сечение двутавровой балки, пользуясь таблицами сортамента прокатной стали (табл. 7.10), номер балки принимаем с ближайшим большим значением момента сопротивления:

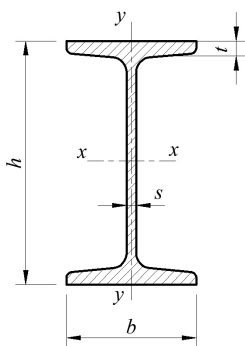
$$W_{z,i} \geq W_{z,nec}. \quad (5)$$

Этому условию соответствует балка номер №14 высотой профиля 140 мм с моментом сопротивления  $W_x = 81,7 \text{ см}^3$  (рис. 19, а).

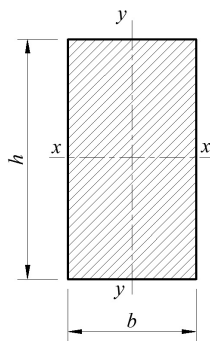
Табл. 3

Номер балки	Размеры, мм			А, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей			
					$x - x$		$y - y$	
	$h$	$b$	$S$		$I_x, \text{ см}^4$	$W_x, \text{ см}^3$	$I_y, \text{ см}^4$	$W_y, \text{ см}^3$
14	140	73	4,9	17,4	572	81,7	41,9	11,50





а) двутавр



б) прямоугольник

Рис. 19 Сечения балки

Подбираем балку прямоугольного поперечного сечения при отношении его высоты к ширине, равном двум (рис. 19 б).

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (2 \cdot b)^2}{6} = \frac{2 \cdot b^3}{3} \quad W_x = \frac{2}{3} b^3 \geq W_{z, \text{нec}} = 63,83 \text{ см}^3;$$

$$\frac{2}{3} b^3 \geq 63,83 \text{ см}^3; \quad b^3 \geq \sqrt[3]{\frac{3}{2} 63,83} = 4,57 \text{ см}.$$

Принимаем ширину сечения прямоугольной балки  $b = 4,6$  см, высоту  $h = 9,2$  см. Площадь поперечного сечения  $A_2 = 4,6 \times 9,2 = 42,3 \text{ см}^2$ . Расход материала на изготовление балки прямоугольного сечения больше, чем на изготовление равнопрочной двутавровой балки в  $\frac{A_2}{A_1} = \frac{42,3}{17,4} = 2,4$  раза.

#### 6. Вывод.

Балка, имеющая двутавровое сечение, является более рациональной по сравнению с балкой прямоугольного поперечного сечения.

**Приложение**  
**Характеристики сечений двутавровых балок**  
**из сортамента по ГОСТ 8239-89**

Таблица

Номер балки	Размеры, мм			$A$ , см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей			
					$x - x$		$y - y$	
	$h$	$b$	$S$		$I_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>4</sup>	$I_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>4</sup>
10	100	55	4,5	12,0	198	39,7	17,9	6,49
12	120	64	4,8	14,7	350	58,4	27,9	8,72
14	140	73	4,9	17,4	572	81,7	41,9	11,50
16	160	81	5,0	20,2	873	109,0	58,6	14,50
18	180	90	5,1	23,4	1290	143,0	82,6	18,40
20	200	100	5,2	26,8	1840	184,0	115,0	23,10
22	220	110	5,4	30,6	2550	232,0	157,0	28,60
24	240	115	5,6	34,8	3460	289,0	198,0	34,50
27	270	125	6,0	40,2	5010	371,0	260,0	41,50
30	300	135	6,5	46,5	7080	472,0	337,0	49,90
33	330	140	7,0	53,8	9840	597,0	419,0	59,90
36	360	145	7,5	61,9	13380	743,0	516,0	71,10
40	400	155	8,3	72,6	19062	953,0	667,0	86,10
45	450	160	9,0	84,7	27696	1231,0	808,0	101,00
50	500	170	10,0	100,0	39727	1589,0	1043,0	123,00
55	550	180	11,0	118,0	55962	2035,0	1356,0	151,00
60	600	190	12,0	138,0	76806	2560,0	1725,0	182,00