Индивидуальное домашнее задание по теории вероятностей для НФИбд-02-20 (2 модуль).

Вариант №27

1. В наборе 4 шара красного цвета, 5 шара синего и 3 шара белого цвета. Из набора случайным образом без возвращения вынимают 4 шара. Найдите вероятность события

$$A = \{\text{белых шаров достали не меньше, чем красных}\},$$

$$B = \{\text{достали по 2 белых и красных шара}\}$$

Решение:

$$A = \{\text{белых шаров достали не меньше, чем красных}\},$$

Т.е.:

4 синих;

1 белый + 3 синих; 1 белый + 1 красных + 2 синих;

2 белых + 2 любых из синих и красных;

3 белых + 1 любой из синих и красных;

$$P = \frac{m}{n},$$

где n - число всевозможных исходов эксперимента, m – число благоприятных исходов.

Извлекаем 5 шаров из 12, следовательно:

$$n = C_{12}^{5} = \frac{12!}{5!\,7!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792$$

$$m = C_5^4 + C_3^1 \cdot C_5^3 + C_3^1 \cdot C_5^2 \cdot C_4^1 + C_3^2 \cdot C_{4+5}^2 + C_3^3 \cdot C_{4+5}^1 =$$

$$= 5 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 10 \cdot 4 + 3 \cdot \frac{9 \cdot 8}{2} + 9 = 272$$

$$P(A) = \frac{272}{792} = \frac{34}{99}$$

$$B = \{\text{достали по 2 белых и красных шара}\}$$

$$m = C_3^2 \cdot C_4^2 = 3 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 18$$

$$P(B) = \frac{18}{792} = \frac{1}{44}$$

Ответ: $P(A) = \frac{34}{99}$; $P(B) = \frac{1}{44}$.

2. Из колоды в 52 карты наугад (без возвращения) извлекаются четыре. Найти вероятность указанных в варианте событий.

Событие A={хотя бы одна черная карта},
событие B={хотя бы один черный король и хотя бы одна красная карта}

Решение:

Классическое определение вероятности

$$P = \frac{m}{n},$$

где n - число всевозможных исходов эксперимента, m – число благоприятных исходов.

$$n = C_{52}^{4} \text{ (число способов выбрать 4 карты из 52)}$$

$$C_N^M = \frac{N!}{M!\,(N-M)!}$$

$$C_{52}^{4} = \frac{52!}{4!\,48!} = \frac{52 * 51 * 50 * 49}{2 * 3 * 4} = 270725$$

а) A = {хотя бы одна черная карта}, т.е. все способы, кроме варианта все красные карты. Красных карт 26, выбираем 4:

$$m = n - C_{26}^{4} = n - \frac{26!}{4! \cdot 22!} = n - \frac{26 * 25 * 24 * 23}{2 * 3 * 4} = n - 14950 = 255775$$

$$P = \frac{255775}{270725} \approx 0.9448$$

б) B={хотя бы один черный король и хотя бы одна красная карта}.

Т.е. один чёрный король (из 2-х) и все способы выбрать 3 карты, кроме варианта все чёрные карты (уже без 2-х королей).

Или два чёрных короля и все способы выбрать 3 карты, кроме варианта все чёрные карты.

$$m = C_2^1(C_{50}^3 - C_{24}^3) + (C_{50}^3 - C_{24}^3) = 3(C_{50}^3 - C_{24}^3)$$

$$C_{50}^3 = \frac{50!}{3!\,47!} = \frac{50 * 49 * 48}{2 * 3} = 19600;$$

$$C_{24}^3 = \frac{24!}{3!\,21!} = \frac{24 * 22 * 21}{2 * 3} = 2024$$

$$m = 3 \cdot (19600 - 2024) = 52728$$

$$P = \frac{52728}{270725} \approx 0.1948$$

Ответ: $P(A) \approx 0.9448;\ P(B) \approx 0.1948.$

3. Консультация перед экзаменом должна начаться между 10.00 и 12.00. Преподаватель и студенты забыли уточнить время. Если преподаватель приходит первым в указанное время, а студентов еще нет, то преподаватель ждет студентов не более 30 минут. Если же студенты пришли первыми, то они ждут преподавателя не более 20 минут. Найти вероятность указанного в варианте события.

Решение:

Событие: консультация началась до 10.45, студенты пришли первыми.

Пусть x - время прихода преподавателя, y – время прихода студентов. Для простоты будем считать время 10.00 нулевой точкой отсчёта времени. Тогда

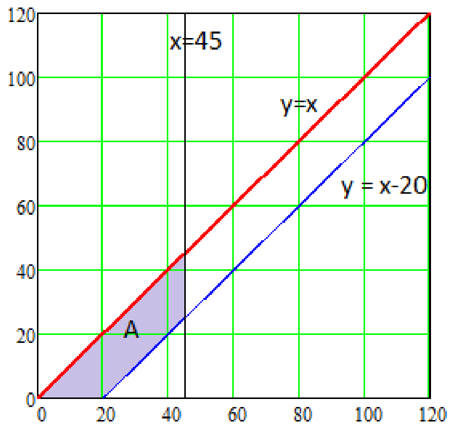
$$x \in [0, 120], y \in [0, 120] \text{ (минут)}$$

Если студенты приходят первыми ($y < x$), то консультация начинается при

$$x - y \leq 20 \Longrightarrow y \geq x - 20$$

При этом $x < 45$ (консультация началась до 10.45).

Изобразим область значений (x, y) на плоскости



Используем геометрическое определение вероятности на плоскости:

$$P = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

Ω - квадрат $[0,120] \times [0,120]$, A - заштрихована на рисунке.

$$P = \frac{\frac{45^2}{2} - \frac{25^2}{2}}{120^2} = \frac{7}{144}.$$

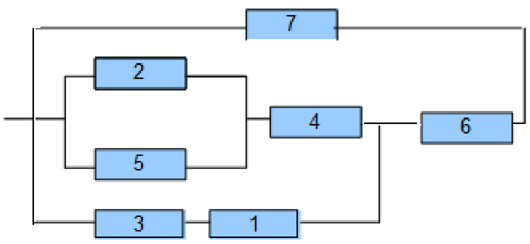
Ответ: $\frac{7}{144}$.

4. Система надежности состоит из 7 элементов и имеет схему, изображенную на рисунке. События A_i, $i=\overline{1,7}$,— отказы элементов за заданный промежуток времени.

1) Выразите через события A_i события A и $\overline{A}$, где A—отказ всей системы за заданный промежуток времени.

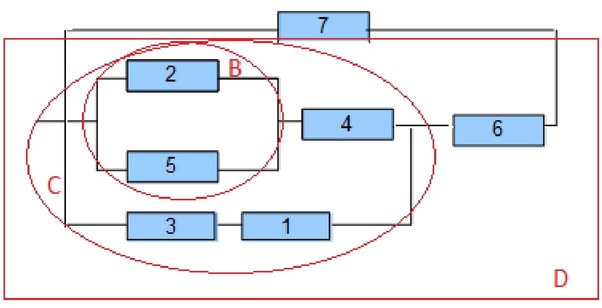
2) Считая, что события A_i независимы в совокупности и имеют вероятности $P(A_i)=p_i$, $i=\overline{1,7}$, вычислите вероятность события A и $\overline{A}$.

$p_1 = p_5 = p_6 = 0{,}2$,
$p_2 = p_3 = 0{,}1$, $p_4 = 0{,}3$,
$p_7 = 0{,}5$



Решение:

Выделим в системе подсистемы как показано на рисунке:



1) События B, C, D – отказ соответствующих подсистем

$$B = A_2A_5; C = (A_1 + A_3)(B + A_4); D = C + A_6$$

A — отказ всей системы за заданный промежуток времени.

$$A = A_7 \cdot D = A_7 \cdot (C + A_6) = A_7 \cdot \big((A_1 + A_3)(A_2A_5 + A_4) + A_6\big)$$

Противоположное событие:

$$\overline{A} = \overline{A_7 \cdot \big((A_1 + A_3)(A_2A_5 + A_4) + A_6\big)} = \overline{A_7} + \overline{\big((A_1 + A_3)(A_2A_5 + A_4) + A_6\big)}$$

$$= \overline{A_7} + \overline{(A_1 + A_3)(A_2A_5 + A_4)} \cdot \overline{A_6} = \overline{A_7} + \Big(\overline{(A_1 + A_3)} + \overline{(A_2A_5 + A_4)}\Big) \cdot \overline{A_6} =$$

$$= \overline{A_7} + \big(\overline{A_1} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_2A_5} \cdot \overline{A_4}\big) \cdot \overline{A_6} = \overline{A_7} + \big(\overline{A_1} \cdot \overline{A_3} + \big(\overline{A_2} + \overline{A_5}\big) \cdot \overline{A_4}\big) \cdot \overline{A_6}$$

2)

$$P(B) = P(A_2)P(A_5) = 0.2 \cdot 0.1 = 0.02$$

$$P(A_1 + A_3) = 1 - \big(1 - P(A_1)\big)\big(1 - P(A_3)\big) = 1 - 0.8 \cdot 0.9 = 0.28$$

$$P(B + A_4) = 1 - \big(1 - P(B)\big)\big(1 - P(A_4)\big) = 1 - 0.98 \cdot 0.7 = 0.314$$

$$P(C) = P(A_1 + A_3)P(B + A_4) = 0.28 \cdot 0.314 = 0.08792$$

$$P(D) = \Big(1 - \big(1 - P(C)\big)\big(1 - P(A_6)\big)\Big) = 1 - (1 - 0.08792) \cdot 0.8 = 0.270336$$

$$P(A) = P(A_7)P(D) = 0.5 \cdot 0.270336 = 0.135168$$

$$P\big(\overline{A}\big) = 1 - P(A) = 0.864832$$

Ответ: $P(A) = 0.135168, P\big(\overline{A}\big) = 0.864832.$

5. В первой урне находятся 5 белых и 2 черных шаров, во второй урне — 5 белых и 5 черных шаров. Сначала из первой урны во вторую перекладывается наугад 4 шара, затем так же наугад перекладывается из второй урны в первую 3 шара.

а) Определите вероятность того, что после вскрытия первой урны в ней будет столько же черных шаров, сколько было до проведения опыта.

б) После вскрытия первой урны оказалось, что в ней столько же чёрных шаров, сколько было до проведения опыта. Вычислите вероятность того, что при этом условии из первой урны во вторую переложили 1 белый шар.

Решение:

Введём следующие гипотезы:

H_i – из первой урны во вторую переложили i белых шаров;

$$\text{С}_7^4 = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7*6*5}{2*3} = 35$$

$$P(H_0) = P(H_1) = 0$$

$$P(H_2) = \frac{\text{С}_5^2\text{С}_2^2}{\text{С}_7^4} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}; (\text{в } 1 - \text{ой урне } 3\text{б, во } 2 - \text{ой } 7\text{б} + 7\text{ч})$$

$$P(H_3) = \frac{\text{С}_5^3\text{С}_2^1}{\text{С}_7^4} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}; (\text{в } 1 - \text{ой урне } 2\text{б} + 1\text{ч, во } 2 - \text{ой } 8\text{б} + 6\text{ч})$$

$$P(H_4) = \frac{\text{С}_5^4}{\text{С}_7^4} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7} (\text{в } 1 - \text{ой урне } 1\text{б} + 2\text{ч, во } 2 - \text{ой } 9\text{б} + 5\text{ч})$$

Убеждаемся, что гипотезы образуют полную группу несовместных событий

$$\sum_i P(H_i) = 1.$$

а) Пусть событие A – после вскрытия первой урны в ней будет столько же черных шаров (2), сколько было до проведения опыта. Тогда при перекладке 3-х шаров в первую урну во второй урне изначально 14 шаров.

$$\text{С}_{14}^3 = \frac{14!}{3!\,11!} = 364$$

$$P(A|H_2) = \frac{\text{С}_7^2\text{С}_7^1}{\text{С}_{14}^3} = \frac{21}{52};$$

$$P(A|H_3) = \frac{\text{С}_6^1\text{С}_8^2}{\text{С}_{14}^3} = \frac{6 \cdot 35}{364} = \frac{6}{13};$$

$$P(A|H_4) = \frac{\text{С}_9^3}{\text{С}_{14}^3} = \frac{84}{364} = \frac{3}{13}$$

Воспользуемся формулой полной вероятности:

$$P(A) = \sum_i P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

$$P(A) = \frac{2}{7} \cdot \frac{21}{52} + \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{13} + \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{13} = \frac{75}{182}$$

б) Пусть событие A – после вскрытия первой урны в ней будет столько же чёрных шаров (2), сколько было до проведения опыта. Вероятность того, что при этом условии из первой урны во вторую переложили 1 белый шара можно определить по формуле Байеса:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)};$$

Поскольку $P(H_1) = 0$, то $P(H_1|A) = 0$

Ответ: а) $\frac{75}{182}$; б) 0.

6. Вероятность попадания в цель при любом из 6 выстрелов равна 0,9. Найдите вероятность того, что произойдет:

а) Ровно 4 попаданий.

б) Не более 4 попаданий.

в) Не менее 4 попаданий.

г) От 1 до 4 попаданий.

Решение:

По формуле Бернулли вероятность m успехов в серии из n испытаний определяется по формуле:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

а) ровно 4 попаданий;

$$P_6(4) = C_6^4 0.9^4 \cdot 0.1^2 = 15 \cdot 0.9^4 \cdot 0.1^2 = 0.098415$$

б) Пусть событие А - не более 4 попаданий, тогда

$$P(A) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) + P_6(3) + P_6(4)$$

$$P_6(0) = 0.1^6 = 0.000001$$

$$P_6(1) = C_6^1 0.9 \cdot 0.1^5 = 6 \cdot 0.9 \cdot 0.1^5 = 0.000054$$

$$P_6(2) = C_6^2 0.9^2 \cdot 0.1^4 = 15 \cdot 0.9^2 \cdot 0.1^4 = 0.001215$$

$$P_6(3) = C_6^3 0.9^3 \cdot 0.1^3 = 20 \cdot 0.9^3 \cdot 0.1^3 = 0.01458$$

$$P(A) = 0.000001 + 0.000054 + 0.001215 + 0.01458 + 0.098415 = 0.114265$$

в) Не менее 4 попаданий.

Пусть событие В - не менее 4 попаданий, тогда $\overline{B} -$ менее 4 попаданий

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P_6(0) - P_6(1) - P_6(2) - P_6(3)$$

$$P(B) = 1 - 0.000001 - 0.000054 - 0.001215 - 0.01458 = 0.98415$$

г) Пусть событие С - от 1 до 4 попаданий включительно, тогда

$$P(C) = P_6(1) + P_6(2) + P_6(3) + P_6(4)$$

$$P(C) = 0.000054 + 0.001215 + 0.01458 + 0.098415 = 0.114264$$

Ответ: а)0.098415; б) 0.114265; в) 0.98415; г) 0.114264.

7. Определите вероятность того, что среди 400 изготовленных изделий бракованными окажутся:

а) ровно 4 изделий.

б) не более 6 изделий,

если вероятность брака равна 0,01

и определите вероятность того, что среди 1300 изготовленных изделий бракованными окажутся

в) ровно 100 изделий.

г) от 95 до 150 изделий

если вероятность брака равна 0,09

Решение:

а) Поскольку вероятность «успеха» - брака изделия $p = 0.01$ достаточно мала, а число испытаний велико, то будем использовать формулу Пуассона ($\lambda = np < 10$):

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

$$\lambda = np.$$

Итак, $n = 400$, $p = 0.01$, следовательно, $\lambda = 4$.

Ровно 4 изделия окажутся бракованными:

$$P_{400}(4) = \frac{4^2 e^{-4}}{4!} \approx 0.1954$$

б) A – бракованными окажутся не более 6 изделий

$$P(A) = P_{400}(0) + P_{400}(1) + P_{400}(2) + P_{400}(3) + P_{400}(4) + P_{400}(5) + P_{400}(6) =$$

$$= e^{-4}\left(1 + 4 + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{5!} + \frac{4^6}{6!}\right) = \frac{437}{9e^4} \approx 0.8893$$

в) Итак, $n = 1300, p = 0.09, np = 117, npq = 106.47$

По формуле Муавра-Лапласа вероятность m успехов в серии из n испытаний определяется по формуле:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

где $\varphi(x)$ – интегральная функция Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. При этом считаем, что $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Значения функции находим из таблиц.

$$P_{1300}(100) \approx \frac{1}{\sqrt{106.47}} \varphi\left(\frac{100 - 117}{\sqrt{106.47}}\right) = \frac{1}{\sqrt{106.47}} \varphi(1.65) \approx 0.01$$

г) Воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа (m – число успехов в серии из n испытаний):

$$P(a < m < b) = \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi(x)$ – интегральная функция Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2}\, dx$. При этом считаем, что $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, При $x > 5$ принимаем $\Phi(x) \approx 0.5$. Значения функции находим из таблиц.

$$P(95 < m < 150) = \Phi\left(\frac{150 - 117}{\sqrt{106.47}}\right) - \Phi\left(\frac{95 - 117}{\sqrt{106.47}}\right) \approx \Phi(3.20) - \Phi(-2.13) =$$

$$= \Phi(3.20) + \Phi(2.13) \approx 0.49931 + 0.4834 \approx 0.9827\ (98.27\%)$$

8. В наборе 5 шара белого цвета, 4 шара синего и 6 шаров красного цвета. Из набора случайным образом без возвращения вынимают 5 шаров. Случайная величина ξ – число вынутых белых шаров. Найдите:

а) Ряд распределения случайной величины ξ.

б) Вероятность попадания случайной величины ξ в интервалы

(1; 4), [1; 4); (1; 4], [1; 4].

в) Найдите ряд распределения случайных величин $\eta = -2(\xi - 3)^2 - 3, \mu = -3 + (\xi - 3)^3$.

Решение:

ξ может принимать значение от 0 до 5,

$$P(\xi = k) = \frac{C_5^k C_{10}^{5-k}}{C_{15}^5}$$

$$C_{15}^5 = \frac{15!}{5!\,10!} = 3003$$

Число способов $C_5^k C_{10}^{5-k}$:

k	0	1	2	3	4	5
$C_5^k C_{10}^{5-k}$	252	1050	1200	450	50	1

а) Ряд распределения случайной величины ξ.

ξ	0	1	2	3	4	5
p	0,083916	0,349650	0,399600	0,149850	0,016650	0,000333

б) Вероятность попадания случайной величины ξ в интервалы

$$P(\xi \in (1;\ 4)) = P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = 0.549451$$

$$P(\xi \in [1;\ 4)) = P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = 0.899101$$

$$P(\xi \in\ (1; 4]) = P(\xi = 2) + P(\xi = 3) + P(\xi = 4) = 0.566101$$

$$P(\xi \in [1;\ 4]) = P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) + P(\xi = 4) = 0.915751$$

в) Ряд распределения случайных величин $\eta = -2(\xi - 3)^2 - 3, \mu = -3 + (\xi - 3)^3$

Вычислим значения случайных величин η и μ:

ξ	0	1	2	3	4	5
η	-21	-11	-5	-3	-5	-11
μ	-30	-11	-4	-3	-2	5
p	0,083916	0,349650	0,399600	0,149850	0,016650	0,000333

Составим ряд распределения η и μ, упорядочив значения случайных величин по возрастанию и, если надо, складывая вероятности при одинаковых значениях:

η	-21	-11	-5	-3
p	0,083916	0,349983	0,416250	0,149850

μ	-30	-11	-4	-3	-2	5
p	0,083916	0,349650	0,399600	0,149850	0,016650	0,000333

9. Непрерывная случайная величина ξ имеет плотность распределения $p(x)$.

$$p_\xi(x) = \begin{cases} A(|1+x|-1)^2, & -2 \le x \le 2 \\ 0, \quad x < -2, & x > 2 \end{cases}.$$

Найдите: а) Константу A

При $-2 \le x \le -1$: $p_\xi(x) = A(-x-2)^2 = A(x+2)^2$.

При $-1 \le x \le 2$: $p_\xi(x) = Ax^2$.

По условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

$$A\int_{-2}^{-1}(x+2)^2dx + A\int_{-1}^{2}x^2dx = A\frac{(x+2)^3}{3}\bigg|_{-2}^{-1} + A\frac{x^3}{3}\bigg|_{-2}^{-1} = A\left(\frac{1}{3}+3\right) \Rightarrow A = \frac{3}{10}$$

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{3(x+2)^2}{10}, -2 \le x \le -1 \\ \dfrac{3x^2}{10}, \quad -1 \le x \le 2 \\ 0, \quad x < -2, \quad x > 2 \end{cases}.$$

б) Функцию распределения случайной величины ξ и постройте ее график.

Найдём функцию распределения:

При $-2 \le x \le -1$:

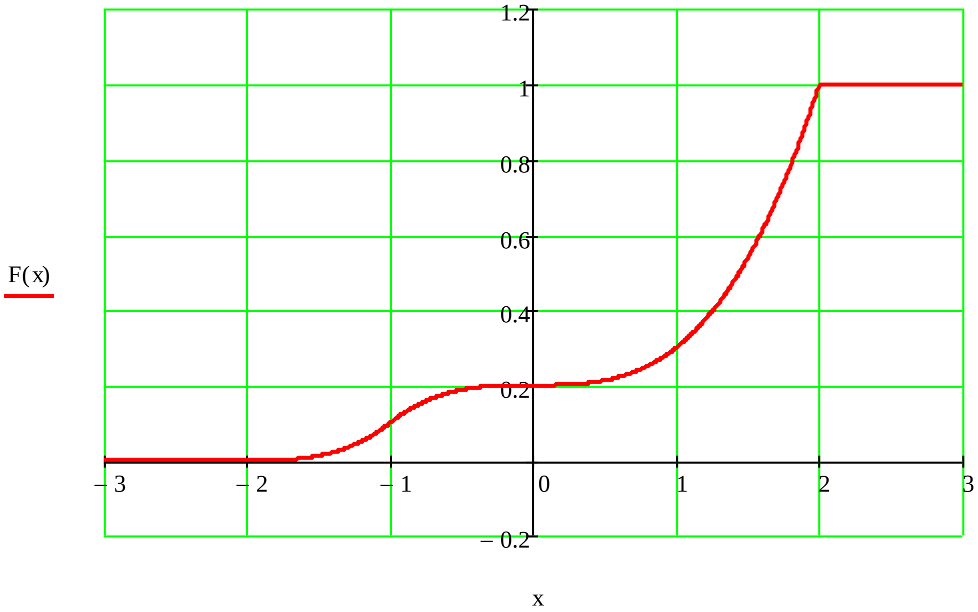
$$F_\xi(x) = \frac{3}{10}\int_{-2}^{x}(x+2)^2dx = \frac{(x+2)^3}{10}\Bigg|_{-2}^{x} = \frac{(x+2)^3}{10};$$

$$F_\xi(-1) = \frac{1}{10}$$

При $-1 \le x \le 2$:

$$F_\xi(x) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}\int_{-1}^{x}x^2dx = \frac{1}{10} + \frac{x^3}{10}\Bigg|_{-1}^{x} = \frac{x^3+2}{10};$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2 \\ \dfrac{(x+2)^3}{10}, & x \in (-2,-1] \\ \dfrac{x^3+2}{10}, & x \in (-1,2] \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$



в) Вычислите функцию распределения и плотность распределения случайной величины $\eta = 8(\xi-1)^3 - 2$.

$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P(8(\xi-1)^3 - 2 < y) = P(8(\xi-1)^3 < y+2) =$$

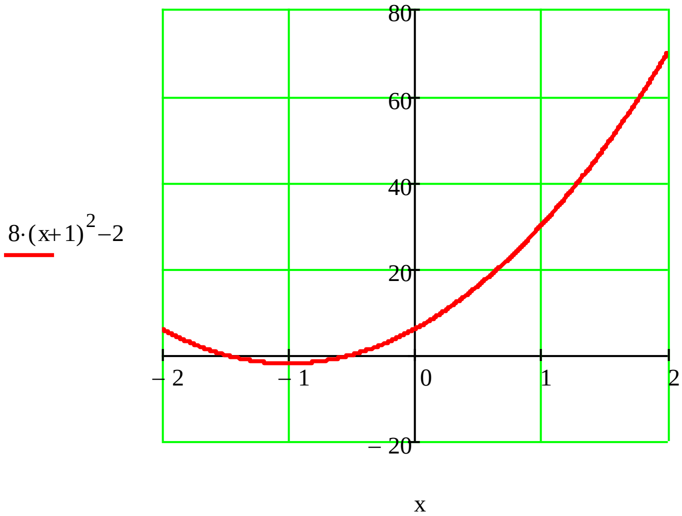
$$= P\left(\xi < \frac{\sqrt[3]{y+2}}{2} + 1\right) = F_\xi\left(\frac{\sqrt[3]{y+2}}{2} + 1\right)$$

$$F_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\le -218\\ \dfrac{\left(\dfrac{\sqrt[3]{y+2}}{2}+3\right)^3}{10}, & y\in(-218,-66]\\ \dfrac{\left(\dfrac{\sqrt[3]{y+2}}{2}+1\right)^3+2}{10}, & y\in(-66,6]\\ 1, & y>6\end{cases}$$

$$p_\eta(y)=F'_\eta(y)$$

$$p_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\le -218\\ \dfrac{\sqrt[3]{y+2}\left(\sqrt[3]{y+2}+6\right)^2}{80(y+2)}, & y\in(-218,-66]\\ \dfrac{\sqrt[3]{y+2}}{6(y+2)}, & y\in(-66,6]\\ 1, & y>6\end{cases}$$

г) Вычислите функцию распределения и плотность распределения случайной величины $\eta=8(\xi+1)^2-2$



$$p_\eta(y)=p_\xi(g(y))|g'(y)|$$

$$y=8(x+1)^2-2,\qquad x=g(y)=-1\pm\frac{\sqrt{y+2}}{2\sqrt{2}}$$

$$|g'(y)|=\frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{y+2}}$$

При $-2 \le x \le 0, -2 \le y \le 6$

$$p_\eta(y) = \left(\frac{3\left(-1 - \frac{\sqrt{y+2}}{2\sqrt{2}} + 2\right)^2}{10} + \frac{\left(-1 + \frac{\sqrt{y+2}}{2\sqrt{2}}\right)^3 + 2}{10} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{y+2}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{32\sqrt{y+2}} + \frac{3\sqrt{2}y}{320\sqrt{y+2}} - \frac{3}{40}$$

При 0$\le x \le 2, 6 \le y \le 70$

$$p_\eta(y) = \frac{\left(-1 + \frac{\sqrt{y+2}}{2\sqrt{2}}\right)^3 + 2}{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{y+2}} = \frac{3\sqrt{2}}{64\sqrt{y+2}} + \frac{3\sqrt{2}y}{640\sqrt{y+2}} - \frac{3}{80}$$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} 0, \quad y \notin [-2, 70] \\ \frac{3\sqrt{2}}{32\sqrt{y+2}} + \frac{3\sqrt{2}y}{320\sqrt{y+2}} - \frac{3}{40}, y \in [-2, 6] \\ \frac{3\sqrt{2}}{64\sqrt{y+2}} + \frac{3\sqrt{2}y}{640\sqrt{y+2}} - \frac{3}{80}, y \in (6, 70] \end{cases}$$

Функция распределения:

При $-2 \le y \le 6$:

$$F_\eta(y) = \int_{-2}^{y} \left(\frac{3\sqrt{2}}{32\sqrt{y+2}} + \frac{3\sqrt{2}y}{320\sqrt{y+2}} - \frac{3}{40} \right) dy = \frac{13\sqrt{2}\sqrt{y+2}}{80} - \frac{3y}{40} + \frac{\sqrt{2}y\sqrt{y+2}}{160} - \frac{3}{20}$$

$$F_\eta(6) = \frac{1}{5}$$

При $6 \le y \le 70$:

$$F_\eta(y) = \frac{1}{5} + \int_{6}^{y} \left(\frac{3\sqrt{2}}{64\sqrt{y+2}} + \frac{3\sqrt{2}y}{640\sqrt{y+2}} - \frac{3}{80} \right) dy = \frac{3\sqrt{2}\sqrt{y+2}}{40} - \frac{3y}{80} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{(y+2)^3}}{320} + \frac{1}{40}$$

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, \quad y \le -2 \\ \frac{13\sqrt{2}\sqrt{y+2}}{80} - \frac{3y}{40} + \frac{\sqrt{2}y\sqrt{y+2}}{160} - \frac{3}{20}, -2 < y \le 6 \\ \frac{3\sqrt{2}\sqrt{y+2}}{40} - \frac{3y}{80} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{(y+2)^3}}{320} + \frac{1}{40}, -2 < y \le 70 \\ 1, \quad y > 70 \end{cases}$$

10. В условиях задачи 8 выбирают $m = 5$ шаров. (В наборе 5 шаров белого цвета, 4 шара синего и 6 шаров красного цвета). Пусть ξ число вынутых красных шаров, а через η – синих.

Найдите:

а) Совместное распределение случайных величин ξ и η (ряд распределения).

ξ может принимать значение от 0 до 5, η может принимать значение от 0 до 4. Всего 15 шаров, извлекаем 5.

$$P(\xi = k, \eta = m) = \frac{C_6^k C_4^m C_5^{5-k-m}}{C_{15}^5};\ C_{15}^5 = \frac{15!}{5!\,10!} = 3003$$

Число способов $C_6^k C_4^m C_5^{5-k-m}$:

$k \setminus m$	0	1	2	3	4
0	1	20	60	40	5
1	30	240	360	120	6
2	150	600	450	60	
3	200	400	120		
4	75	60			
5	6				

Совместное распределение случайных величин ξ и η

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	Сумма
0	0,000333	0,00666	0,01998	0,01332	0,001665	0,041958
1	0,00999	0,07992	0,11988	0,03996	0,001998	0,251748
2	0,04995	0,1998	0,14985	0,01998		0,41958
3	0,0666	0,1332	0,03996			0,23976
4	0,024975	0,01998				0,044955
5	0,001998					0,001998
Сумма	0,153846	0,43956	0,32967	0,07326	0,003663	1

б) Ряды распределения случайных величин ξ и η.

ξ	0	1	2	3	4	5
$P(\xi)$	0,041958	0,251748	0,419580	0,239760	0,044955	0,001998

η	0	1	2	3	4
$P(\eta)$	0,153846	0,43956	0,32967	0,07326	0,003663

в) Условные распределения случайной величины ξ при условии η, случайной величины η при условии ξ, проверить случайные величины на независимость

Условные распределения:

$$P(\xi = k|\eta = m) = \frac{P(\xi = k, \eta = m)}{P(\eta = m)}$$

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 0)$:

ξ	P
0	0,002165
1	0,064935
2	0,324675
3	0,4329
4	0,162338
5	0,012987
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 1)$:

ξ	P
0	0,015152
1	0,181818
2	0,454545
3	0,30303
4	0,045455
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 2)$:

ξ	P
0	0,060606
1	0,363636
2	0,454545
3	0,121212
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 3)$:

ξ	P
0	0,181818
1	0,545455
2	0,272727
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 4)$:

ξ	P
0	0,454545
1	0,545455
Сумма	1

$$P(\eta = m|\xi = k) = \frac{P(\xi = k, \eta = m)}{P(\xi = k)}$$

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 0)$:

η	0	1	2	3	4	Сумма
P	0,007937	0,15873	0,47619	0,31746	0,039683	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 1)$:

η	0	1	2	3	4	Сумма
P	0,039683	0,31746	0,47619	0,15873	0,007937	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 2)$:

η	0	1	2	3	Сумма
P	0,119048	0,47619	0,357143	0,047619	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 3)$:

η	0	1	2	Сумма
P	0,277778	0,555556	0,166667	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 4)$:

η	0	1	Сумма
P	0,555556	0,444444	1

$$P(\eta = 0|\xi = 5) = 1$$

Для независимых случайных величин

$$P(\xi = x, \eta = y) = P(\xi = x)P(\eta = y)$$

Например

$$P(\xi = 0, \eta = 0) = \frac{1}{3003}$$

$$P(\xi = 0)P(\eta = 0) = 0.041958 \cdot 0.153846 = 0.006455 \neq \frac{1}{3003}$$

Равенство

$$P(\xi = 0, \eta = 0) = P(\xi = 0)P(\eta = 0) - \text{неверно}$$

Следовательно, ξ и η зависимы.

г) Значения двумерной функции распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$в заданных точках $(x, y) = (3; 6), (5; 2), (2; 4)$,

$$F_{\xi\eta}(3,6) = P(\xi < 3, \eta < 6) = P(\xi < 3) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) =$$

$$= 0.041958 + 0.251748 + 0.419580 \approx 0.713287$$

$$F_{\xi\eta}(5,3) = P(\xi < 5, \eta < 3) = P(\eta < 3) - P(\xi = 5, \eta = 0) =$$

$$= 0.153486 + 0.43956 + 0.32967 - 0{,}001998 = 0.921079$$

$$F_{\xi\eta}(2,4) = P(\xi < 2, \eta < 4) = P(\xi = 0, \eta = 0) + P(\xi = 0, \eta = 1) + P(\xi = 0, \eta = 2) +$$

$$+P(\xi = 0, \eta = 3) + P(\xi = 1, \eta = 0) + P(\xi = 1, \eta = 1) + P(\xi = 1, \eta = 2) +$$

$$+P(\xi = 1, \eta = 3) = 0.290043$$

д) Ряд распределения новой случайной величины $\mu = \cos\frac{\pi|\xi^2-\eta^2|}{2} - \sin\frac{\pi|\xi^2-\eta^2|}{2}$

Составим таблицу значений случайной величины μ:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4
0	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	1	1	1
2	1	1	1	-1	
3	-1	1	-1		
4	1	1			
5	-1				

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ:

μ	-1	1
$P(\mu)$	0,158508	0,841492

е) Ряд распределения новой двумерной дискретной случайной величины (μ_1; μ_2)

$$\mu_1 = 2\xi - \frac{3 - \eta + \xi}{3} + 4, \mu_2 = \xi - \frac{\eta - \frac{2(\xi - 1)}{3}}{2}$$

Составим таблицу значений случайной величины μ_1:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4
0	-1	-0,66667	-0,33333	0	0,333333
1	0,666667	1	1,333333	1,666667	2
2	2,333333	2,666667	3	3,333333	
3	4	4,333333	4,666667		
4	5,666667	6			
5	7,333333				

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ:

μ_1	-1	-0,666667	-0,33333	0	0,333333	0,666667	1
$P(\mu)$	0,000333	0,006660	0,019980	0,013320	0,001665	0,009990	0,079920
μ_1	1,333333	1,666667	2	2,333333	2,666667	3	3,333333
$P(\mu)$	0,119880	0,039960	0,001998	0,049950	0,199800	0,149850	0,019980
μ_1	4	4,333333	4,666667	5,666667	6	7,333333	
$P(\mu)$	0,066600	0,133200	0,039960	0,024975	0,019980	0,001998	

Составим таблицу значений случайной величины μ_2:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4
0	-0,333333	-0,83333	-1,33333	-1,83333	-2,33333
1	1	0,5	0	-0,5	-1
2	2,333333	1,833333	1,333333	0,833333	
3	3,666667	3,166667	2,666667		
4	5	4,5			
5	6,333333				

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ:

μ_2	-2,333333	-1,833333	-1,33333	-1	-0,83333	-0,5	-0,33333
$P(\mu)$	0,001665	0,013320	0,019980	0,001998	0,006660	0,039960	0,000333
μ_2	0	0,5	0,833333	1	1,333333	1,833333	2,333333
$P(\mu)$	0,119880	0,079920	0,019980	0,009990	0,149850	0,199800	0,049950
μ_2	2,666667	3,166667	3,666667	4,5	5	6,333333	
$P(\mu)$	0,039960	0,133200	0,066600	0,019980	0,024975	0,001998	

Совместное распределение случайных величин μ_1 и μ_2

$\mu_1 \setminus \mu_2$	-2,33333	-1,83333	-1,33333	-1	-0,83333	-0,5	-0,33333	0	0,5	0,833333
-1							0,000333			
-0,666667					0,00666					
-0,333333			0,01998							
0		0,01332								
0,333333	0,001665									
0,666667										
1									0,07992	
1,333333								0,11988		
1,666667						0,03996				
2				0,001998						
2,333333										
2,666667										
3										

3,333333										0,01998
4										
4,333333										
4,666667										
5,666667										
6										
7,333333										

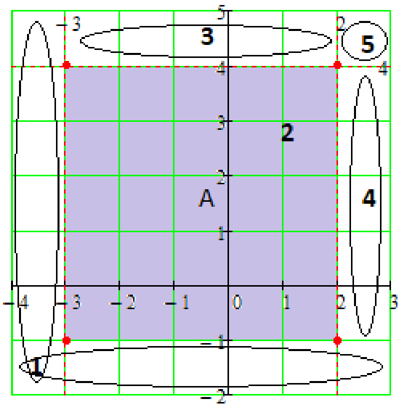
Продолжение таблицы справа:

$\mu_1 \setminus \mu_2$	1	1,333333	1,833333	2,333333	2,666667	3,166667	3,666667	4,5	5	6,333333
-1										
-0,666667										
-0,333333										
0										
0,333333										
0,666667	0,00999									
1										
1,333333										
1,666667										
2										
2,333333				0,04995						
2,666667			0,1998							
3		0,14985								
3,333333										
4							0,0666			
4,333333						0,1332				
4,666667					0,03996					
5,666667									0,024975	
6								0,01998		
7,333333										0,001998

11. В четырехугольник с вершинами в точках $(-3;-1), (-3;4), (2;4), (2;-1)$ в соответствии с принципом геометрической вероятности падает частица. Пусть ξ и η - координаты по оси X и У точки падения частицы.

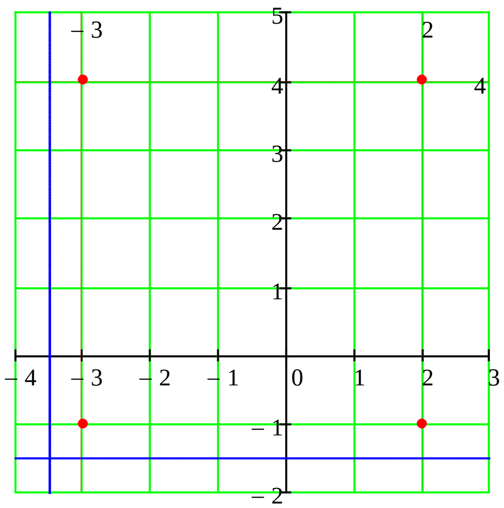
Найдите:

а) Совместную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ случайной величины (ξ,η) и совместную плотность распределения случайной величины (ξ,η).



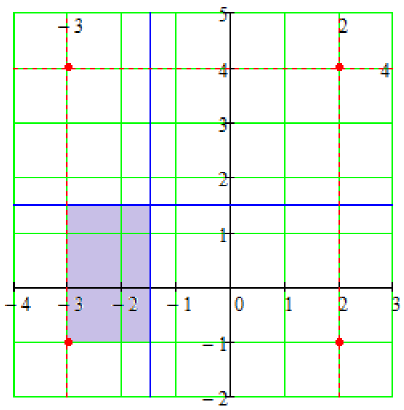
Всего имеем 5 различных областей.

Область 1: $(x < -3)$или $(y < -1)$:



Пересечения с четырёхугольником нет, $F_{\xi\eta}(x, y) = 0$.

Область 2: $(x, y) \in D$:

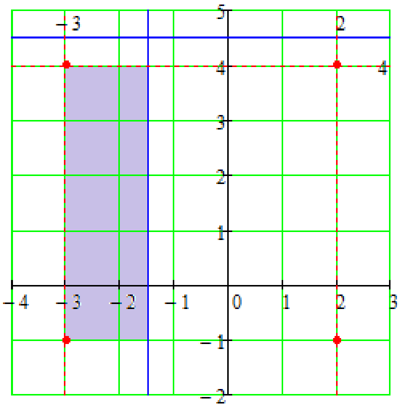


$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{S_D}\int_{-3}^{x}\int_{-1}^{y} dxdy$$

$$S_D = 25 - \text{площадь области.}$$

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{25}\int_{-3}^{x} dx \int_{-1}^{y} dy = \frac{(x+3)(y+1)}{25}.$$

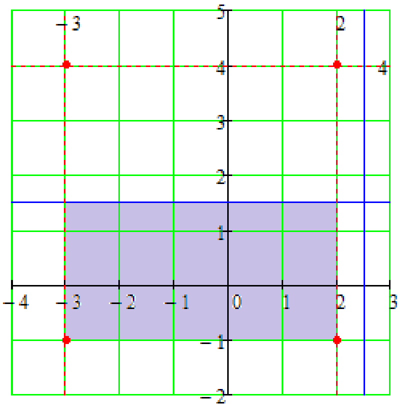
Область 3: $(-3 < x \le 2)$и$(y > 4)$:



$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{S_D}\int_{-3}^{x}\int_{-1}^{4} dxdy$$

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{25}\int_{-3}^{x} dx \int_{-1}^{4} dy = \frac{x+3}{5}.$$

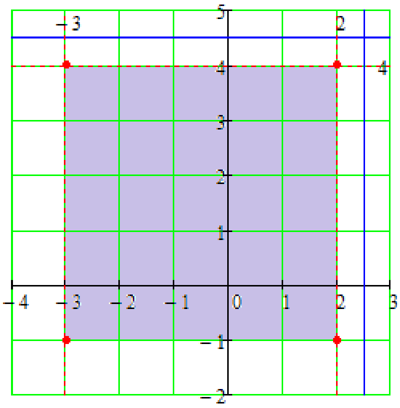
Область 4: $(x > 2)$и$(-1 < y \le 4)$:



$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{S_D}\int_{-3}^{2}\int_{-1}^{y} dxdy$$

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{25}\int\limits_{-3}^{2} dx \int\limits_{-1}^{y} dy = \frac{y+1}{5}.$$

Область 5: $(x > 2)$и$(y > 4)$:



$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{S_D}\int\limits_{-3}^{2}\int\limits_{-1}^{4} dxdy = \frac{1}{25}\int\limits_{-3}^{2}\int\limits_{-1}^{4} dxdy = 1.$$

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x < -3) \text{ или } (y < -1) \\ \frac{(x+3)(y+1)}{25}, & (x,y) \in D \\ \frac{x+3}{5}, & (-3 < x \le 2)\text{и}(y > 4) \\ \frac{y+1}{5}, & (x > 2)\text{и}(-1 < y \le 4) \\ 1, & (x > 2)\text{и}(y > 4) \end{cases}$$

Поскольку площадь четырёхугольника D равна 25, и точки распределены в соответствии с принципом геометрической вероятности то совместная плотность распределения имеет равномерное распределение внутри D:

$$p_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{25}, (x,y) \in D \\ 0, (x,y) \notin D \end{cases}.$$

б) Одномерные плотности и функции распределения случайных величин ξ и η.

$$p_{\xi}(x) = \int\limits_{-1}^{4} p_{\xi\eta}(x,y)\, dy = \frac{1}{25}\int\limits_{-1}^{4} 1\, dy = \frac{1}{5}$$

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, x \in [-3; 2] \\ 0, x \notin [-3; 2] \end{cases}.$$

$$F_\xi(x) = \int_{-3}^{x} p_\xi(x)\, dx = \frac{x+3}{5}, \qquad -3 < x \le 2$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -3 \\ \frac{x+3}{5}, & -3 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$p_\eta(y) = \int_{-3}^{2} p_{\xi\eta}(x, y)\, dx = \frac{1}{25} \int_{-3}^{2} 1\, dy = \frac{1}{5}$$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & y \in [-1; 4] \\ 0, & y \notin [-1; 4] \end{cases}.$$

$$F_\eta(y) = \int_{-1}^{y} p_\eta(y)\, dy = \frac{y+1}{5}, -1 < y \le 4$$

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le -1 \\ \frac{y+1}{5}, & -1 < y \le 4 \\ 1, & y > 4 \end{cases}$$

в) Условные функции распределения и условные плотности распределения случайной величины ξ при условии η, и случайной величины η при условии ξ. Проверьте, будут ли эти случайные величины независимыми

Условная плотность распределения

$$p_\xi(x|y) = \frac{p_{\xi\eta}(x, y)}{p_\eta(y)} = \frac{1}{5} \text{ при } (x, y) \in D$$

Условная плотность распределения

$$p_\eta(y|x) = \frac{p_{\xi\eta}(x, y)}{p_\xi(x)} = \frac{1}{5} \text{ при } (x, y) \in D$$

Для независимых случайных величин должно выполняться равенство:

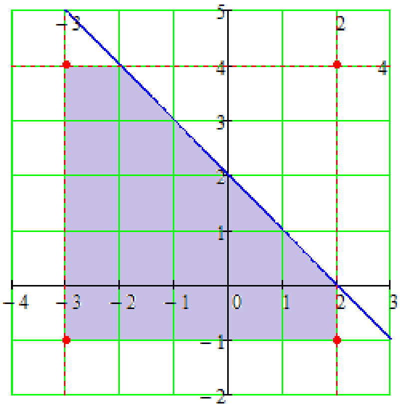
$$p_\xi(x|y) = p_\xi(x) - \text{верно}$$

Следовательно, случайные величины независимы. Условные функции распределения совпадают с одномерными:

$$F_\xi(x|y) = \begin{cases} 0, & x \le -3 \\ \dfrac{x+3}{5}, & -3 < x \le 2; \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$F_\eta(y|x) = \begin{cases} 0, & y \le -1 \\ \dfrac{y+1}{5}, & -1 < y \le 4 \\ 1, & y > 4 \end{cases}$$

г) Значение функции распределения случайной величины $\mu = \xi + \eta$ в точке $z = 2$.



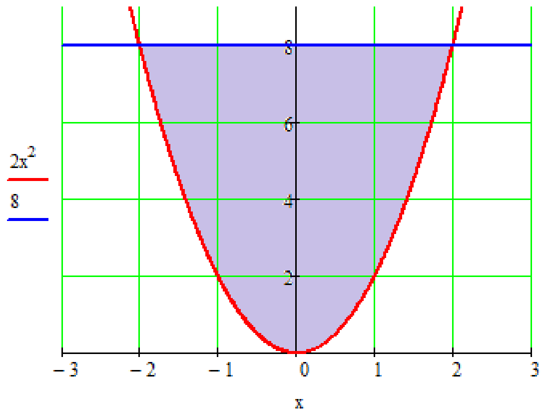
$$F_\mu(2) = P(\xi + \eta < 2) = P(\eta < 2 - \xi) = \frac{S_D}{S} = \frac{25 - \frac{16}{2}}{25} = \frac{17}{25} = 0.68$$

12. Совместная плотность распределения случайных величин ξ и η задана формулой

$$p_{\xi\eta}(x,y) = C(-x^2 + 2y), (x,y) \in D,$$

где область $D: \{(x,y): , y = 8; y = 2x^2\}$. Найдите:

а) Постоянную C.



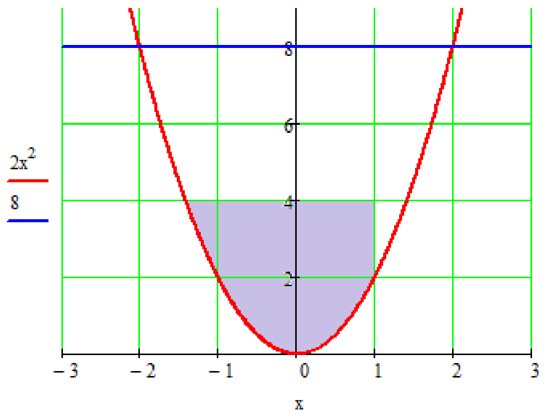
По закону нормировки

$$\iint\limits_D p_{\xi\eta}(x,y)dxdy = 1,$$

$$\int_{-2}^{2} dx \int_{2x^2}^{8} C\left(-x^2 + 2y\right) dy = C \int_{-2}^{2} \left(-x^2 y + y^2\right)\Big|_{2x^2}^{8} dx =$$

$$= C \int_{-2}^{2} (-8x^2 - 2x^4 + 64)dx = C\left(-\frac{8x^3}{3} - \frac{2x^5}{5} + 64x\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{2816}{15}C \Longrightarrow C = \frac{15}{2816}.$$

б) Значения двумерной функции распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ в заданных точках $(x,y) = (1;4)$



$$y = 2x^2 = 4, x = -\sqrt{2}$$

$$F_{\xi\eta}(1,4) = P(\xi < 1, \eta < 4) = \int_{-\sqrt{2}}^{1} dx \int_{2x^2}^{4} p_{\xi\eta}(x,y)\, dy$$

$$F_{\xi\eta}(1,4) = \frac{5}{768}\int_{-\sqrt{2}}^{1} dx \int_{2x^2}^{4} (-x^2 + 2y)\, dy = \frac{5}{768}\int_{-\sqrt{2}}^{1} (-x^2 y + y^2)|_{2x^2}^{4} dx =$$

$$= \frac{5}{768}\int_{-\sqrt{2}}^{1} (-4x^2 - 2x^4 + 16) dx = \frac{5}{768}\left(-\frac{4x^3}{3} - \frac{2x^5}{5} + 16x\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{1} = \frac{\sqrt{2}}{16} + \frac{107}{1408}.$$

в) Одномерные плотности и функции распределения случайных величин ξ и η.

$$p_\xi(x) = \int\limits_{2x^2}^{8} p_{\xi\eta}(x,y)\, dy = \frac{5}{768}\int\limits_{2x^2}^{8} (-x^2 + 2y)\, dy = \frac{5}{768}(-x^2 y + y^2)|_{2x^2}^{8} =$$

$$= \frac{15}{44} - \frac{15x^2}{352} - \frac{15x^4}{1408};$$

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{15}{44} - \dfrac{15x^2}{352} - \dfrac{15x^4}{1408}, x \in [-2;2] \\ \quad 0, \qquad x \notin [-2;2] \end{cases}.$$

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-2}^{x} \left(\frac{15}{44} - \frac{15x^2}{352} - \frac{15x^4}{1408}\right) dx = \left(\frac{15x}{44} - \frac{3x^3}{352} - \frac{3x^5}{1408}\right)\Bigg|_{-2}^{x} =$$

$$= \frac{15x}{44} - \frac{3x^3}{352} - \frac{3x^5}{1408} + \frac{1}{2}.$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} \quad 0, \qquad x \le -2 \\ \dfrac{15x}{44} - \dfrac{3x^3}{352} - \dfrac{3x^5}{1408} + \dfrac{1}{2}, -2 < x \le 2 \\ \quad 1, \qquad x > 2 \end{cases}$$

$$y = 2x^2 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{y}{2}}$$

$$p_\eta(y) = \int\limits_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} p_{\xi\eta}(x,y)\, dx = \frac{5}{768}\int\limits_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} (-x^2 + 2y)\, dx = \frac{5}{768}\left(-\frac{x^3}{3} + 2yx\right)\Bigg|_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} =$$

$$= \frac{5\sqrt{2}y\sqrt{y}}{512}.$$

$$p_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{5\sqrt{2}y\sqrt{y}}{512}, y\in[0;8]\\ 0, y\notin[0;8]\end{cases}.$$

$$F_\eta(y)=\int_0^y p_\eta(y)\,dy=\frac{5\sqrt{2}}{512}\int_0^y y\sqrt{y}\,dy=\frac{\sqrt{2}y^{5/2}}{256}\Bigg|_0^y=\frac{\sqrt{2}y^2\sqrt{y}}{256}$$

$$F_\eta(y)=\begin{cases}0, y\le 8\\ \dfrac{\sqrt{2}y^2\sqrt{y}}{256}, 0<y\le 8\\ 1, \quad y>8\end{cases}$$

г) Условные функции распределения и условные плотности распределения случайной величины ξ при условии η, и случайной величины η при условии ξ. Проверьте, будут ли эти случайные величины независимыми

Условная плотность распределения

$$p_\xi(x|y)=\frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\eta(y)}$$

$$p_\xi(x|y)=\frac{\frac{5}{768}(-x^2+2y)}{\frac{5\sqrt{2}y\sqrt{y}}{512}}=\frac{3\sqrt{2}(-x^2+2y)}{11y\sqrt{y}}\text{ при } (x,y)\in D$$

Условная плотность распределения

$$p_\eta(y|x)=\frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\xi(x)}$$

$$p_\eta(y|x)=\frac{\frac{5}{768}(-x^2+2y)}{\frac{15}{44}-\frac{15x^2}{352}-\frac{15x^4}{1408}}=\frac{x^2-2y}{2(x^4+4x^2-32)}\text{ при } (x,y)\in D$$

Для независимых случайных величин должно выполняться равенство:

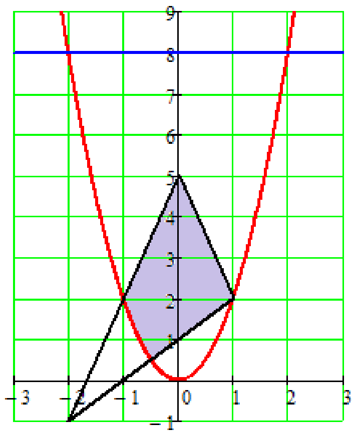
$$p_\xi(x|y)=p_\xi(x)-\text{неверно}$$

Следовательно, случайные величины зависимы.

$$F_\xi(x|y)=\int_{-2}^{x}\frac{3\sqrt{2}(-x^2+2y)}{11y\sqrt{y}}dx=\frac{\sqrt{2}(x+2)(2x-x^2+6y-4)}{11y\sqrt{y}}\text{ при } (x,y)\in D$$

$$F_\eta(y|x) = \int\limits_0^y \frac{x^2 - 2y}{2(x^4 + 4x^2 - 32)}\,dy = \frac{x^2 y - y^2}{2(x^4 + 4x^2 - 32)} \text{ при } (x,y) \in D$$

д) Вычислите вероятность попадания вектора (ξ, η) в треугольник с вершинами в точках $(0;5), (-2;-1), (1;2)$. (Записать интеграл, расставить пределы интегрирования, считать интеграл - не надо)



Стороны треугольника:

$$y = 3x + 5;\, y = -2x + 5;\, y = x + 1$$

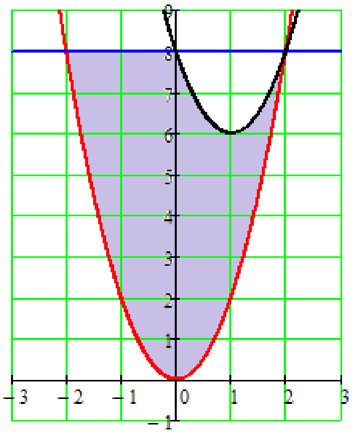
$$x + 1 = 2x^2, \qquad 2x^2 - x - 1 = 0, x_1 = -0.5, x_2 = 1$$

$$P = \frac{5}{768}\int_{-1}^{-0.5} dx \int_{2x^2}^{3x+5} (-x^2 + 2y)\,dy + \frac{5}{768}\int_{-0.5}^{0} dx \int_{x+1}^{3x+5} (-x^2 + 2y)\,dy +$$

$$+\frac{5}{768}\int_{0}^{1} dx \int_{x+1}^{-2x+5} (-x^2 + 2y)\,dy$$

е) Значение функции распределения $F_\mu(z)$ новой случайной величины $\mu = \eta - 2(\xi - 1)^2$ в точке $z = 6$. (Записать интеграл, расставить пределы интегрирования, считать интеграл - не надо)

$$F_\mu(6) = P(\eta - 2(\xi - 1)^2 < 6) = P(\eta < 6 + 2(\xi - 1)^2)$$



$$y = 6 + 2(x-1)^2$$

$$F_\mu(6) = 1 - \frac{5}{768}\int_0^2 dx \int_{6+2(x-1)^2}^{8} (-x^2 + 2y)\, dy.$$