Индивидуальное домашнее задание по теории вероятностей для НФИбд-02-20 (2 модуль).

Вариант №17

5. В первой урне находятся 5 белых и 3 черных шаров, во второй урне — 6 белых и 3 черных шаров. Сначала из первой урны во вторую перекладывается наугад 4 шара, затем так же наугад перекладывается из второй урны в первую 5 шара.

а) Определите вероятность того, что после вскрытия первой урны в ней будет столько же черных шаров, сколько было до проведения опыта.

б) После вскрытия первой урны оказалось, что в ней столько же чёрных шаров, сколько было до проведения опыта. Вычислите вероятность того, что при этом условии из первой урны во вторую переложили 2 белых шара.

Решение:

Введём следующие гипотезы:

H_i – из первой урны во вторую переложили i белых шаров;

$$C_8^4 = \frac{8!}{4!\,8!} = \frac{8*7*6*5}{2*3*4} = 70$$

$$P(H_0) = 0$$

$$P(H_1) = \frac{C_5^1 C_3^3}{C_8^4} = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}; (\text{в } 1-\text{ой урне } 4\text{б}, \text{во } 2-\text{ой } 7\text{б} + 6\text{ч})$$

$$P(H_2) = \frac{C_5^2 C_3^2}{C_8^4} = \frac{10 \cdot 3}{70} = \frac{3}{7}; (\text{в } 1-\text{ой урне } 3\text{б} + 1\text{ч}, \text{во } 2-\text{ой } 8\text{б} + 5\text{ч})$$

$$P(H_3) = \frac{C_5^3 C_3^1}{C_8^4} = \frac{30}{35} = \frac{3}{7}; (\text{в } 1-\text{ой урне } 2\text{б} + 2\text{ч}, \text{во } 2-\text{ой } 9\text{б} + 4\text{ч})$$

$$P(H_4) = \frac{C_5^4}{C_8^4} = \frac{5}{70} = \frac{1}{14} (\text{в } 1-\text{ой урне } 1\text{б} + 3\text{ч}, \text{во } 2-\text{ой } 10\text{б} + 3\text{ч})$$

Убеждаемся, что гипотезы образуют полную группу несовместных событий

$$\sum_i P(H_i) = 1.$$

а) Пусть событие A – после вскрытия первой урны в ней будет столько же черных шаров (3), сколько было до проведения опыта. Тогда при перекладке 5-ти шаров в первую урну во второй урне изначально 13 шаров.

$$C_{13}^5 = \frac{13!}{5!\,8!} = 1287$$

$$P(A|H_1) = \frac{C_7^2 C_6^3}{C_{13}^5} = \frac{420}{1287};\ P(A|H_2) = \frac{C_8^3 C_5^2}{C_{13}^5} = \frac{560}{1287};$$

$$P(A|H_3) = \frac{C_9^4 C_4^1}{C_{13}^5} = \frac{504}{1287};\ P(A|H_4) = \frac{C_{10}^5}{C_{13}^5} = \frac{252}{1287}$$

Воспользуемся формулой полной вероятности:

$$P(A) = \sum_i P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

$$P(A) = \frac{1}{14} \cdot \frac{420}{1287} + \frac{3}{7} \cdot \frac{560}{1287} + \frac{3}{7} \cdot \frac{504}{1287} + \frac{1}{14} \cdot \frac{252}{1287} = \frac{56}{143}$$

б) Вероятность того, что при этом условии из первой урны во вторую переложили *2* белых шара можно определить по формуле Байеса:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(A)}$$

$$P(H_2|A) = \frac{\frac{3}{7} \cdot \frac{560}{1287}}{\frac{56}{143}} = \frac{10}{21}$$

Ответ: а) $\frac{56}{143}$; б) $\frac{10}{21}$.

6. Вероятность попадания в цель при любом из 7 выстрелов равна 0,7. Найдите вероятность того, что произойдет:

а) Ровно 5 попаданий.

б) Не более 5 попаданий.

в) Не менее 5 попаданий.

г) От 2 до 8 попаданий.

Решение:

По формуле Бернулли вероятность m успехов в серии из n испытаний определяется по формуле:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

а) ровно 5 попаданий;

$$P_7(5) = C_7^5 0.7^5 \cdot 0.3^2 = \frac{7!}{5!\,2!} 0.7^5 \cdot 0.3^2 = 21 \cdot 0.7^5 \cdot 0.3^2 = 0.3176523$$

б) Пусть событие А - не более 5 попаданий, тогда $\overline{A}$ −более 5 попаданий

$$P(A) = 1 - P_7(6) - P_7(7)$$

$$P_7(6) = C_7^6 0.7^6 \cdot 0.3^1 = 7 \cdot 0.7^6 \cdot 0.3 = 0.2470629$$

$$P_7(7) = 0.7^7 = 0.0823543$$

$$P(A) = 1 - 0.2470629 - 0.0823543 = 0.6705828$$

в) Не менее 5 попаданий.

Пусть событие В - не менее 5 попаданий,

$$P(B) = P_7(5) + P_7(6) + P_7(7)$$

$$P(B) = 0.3176523 + 0.2470629 + 0.0823543 = 0.6470695$$

г) Пусть событие С - от 2 до 8 попаданий включительно (8 попаданий невозможно), тогда $\overline{C}$ − это 0 или одно попадание.

$$P(C) = 1 - P_7(0) - P_7(1)$$

$$P_7(0) = 0.3^7 = 0.057687$$

$$P_7(1) = C_7^1 \cdot 0.7 \cdot 0.3^6 = 7 \cdot 0.7 \cdot 0.3^6 = 0.0002187$$

$$P(C) = 1 - 0.057687 - 0.0002187 = 0.9962092$$

Ответ: а)0.3176523; б)0.6705828; в) 0.6470695; г) 0.9962092.

7. Определите вероятность того, что среди 1000 изготовленных изделий бракованными окажутся:

а) ровно 3 изделий.

б) не более 5 изделий

если вероятность брака равна 0,002 и определите вероятность того, что среди 1000 изготовленных изделий бракованными окажутся

в) ровно 22 изделия.

г) от 15 до 50 изделий

если вероятность брака равна 0,02

Решение:

а) Поскольку вероятность «успеха» - брака изделия $p = 0.002$ достаточно мала, а число испытаний велико, то будем использовать формулу Пуассона ($\lambda = np < 10$):

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

$$\lambda = np.$$

Итак, $n = 1000, p = 0.002$, следовательно, $\lambda = 2$.

Ровно 3 изделия окажутся бракованными:

$$P_{1000}(3) = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} \approx 0.1804$$

б) А – бракованными окажутся не более 5 изделий

$$P(A) = P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2) + P_{1000}(3) + P_{1000}(4) + P_{1000}(5) =$$

$$= e^{-2}\left(1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!}\right) = \frac{109}{15e^2} \approx 0.9834$$

в) Итак, $n = 1000, p = 0.02, np = 20, npq = 19.6$

По формуле Муавра-Лапласа вероятность m успехов в серии из n испытаний определяется по формуле:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

где $\varphi(x)$ – интегральная функция Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. При этом считаем, что $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Значения функции находим из таблиц.

$$P_{1000}(22) \approx \frac{1}{\sqrt{19.6}} \varphi\left(\frac{22 - 20}{\sqrt{19.6}}\right) = \frac{1}{\sqrt{19.6}} \varphi(0.452) \approx 0.0814$$

г) Воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа (m – число успехов в серии из n испытаний):

$$P(a < m < b) = \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi(x)$ – интегральная функция Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-x^2/2}\,dx$. При этом считаем, что $\Phi(-x)=-\Phi(x)$, При $x>5$ принимаем $\Phi(x)\approx 0.5$. Значения функции находим из таблиц.

$$P(15<m<50)=\Phi\left(\frac{50-22}{\sqrt{19.6}}\right)-\Phi\left(\frac{15-22}{\sqrt{19.6}}\right)\approx\Phi(6.78)-\Phi(-1.13)\approx$$

$$=0.5+\Phi(1.13)\approx 0.5+0.3708=0.8708\ (87.08\%)$$

8. В наборе 5 шара белого цвета, 7 шара синего и 3 шаров красного цвета. Из набора случайным образом без возвращения вынимают 6 шаров. Случайная величина ξ – число вынутых синих шаров. Найдите:

а) Ряд распределения случайной величины ξ.

б) Вероятность попадания случайной величины ξ в интервалы

(2; 5), [2; 5); (2; 5], [2; 5].

в) Найдите ряд распределения случайных величин $\eta=2(5-\xi)^2+2, \mu=(4-\xi)^3+16$.

Решение:

ξ может принимать значение от 0 до 6,

$$P(\xi=k)=\frac{C_7^kC_8^{6-k}}{C_{15}^6}$$

$$C_{15}^6=\frac{15!}{5!\,8!}=5005$$

Число способов $C_7^kC_8^{6-k}$:

k	0	1	2	3	4	5	6
$C_7^kC_8^{6-k}$	28	392	1470	1960	980	168	7

а) Ряд распределения случайной величины ξ.

ξ	0	1	2	3	4	5	6
p	0,005594	0,078322	0,293706	0,391608	0,195804	0,033566	0,001399

б) Вероятность попадания случайной величины ξ в интервалы

$$P(\xi\in(2;5))=P(\xi=3)+P(\xi=4)=0.587413$$

$$P(\xi\in[2;\ 5))=P(\xi=2)+P(\xi=3)+P(\xi=4)=0.8881119$$

$$P(\xi \in\ (2;5]) = P(\xi = 3) + P(\xi = 4) + P(\xi = 5) = 0.620979$$

$$P(\xi \in [2;\ 5]) = P(\xi = 2) + P(\xi = 3) + P(\xi = 4) + P(\xi = 5) = 0.914685$$

в) Ряд распределения случайных величин $\eta = 2(5 - \xi)^2 + 2, \mu = (4 - \xi)^3 + 16$

Вычислим значения случайных величин η и μ:

ξ	0	1	2	3	4	5	6
η	52	34	20	10	4	2	4
μ	80	43	24	17	16	15	8
p	0,005594	0,078322	0,293706	0,391608	0,195804	0,033566	0,001399

Составим ряд распределения η и μ, упорядочив значения случайных величин по возрастанию и, если надо, складывая вероятности при одинаковых значениях:

η	2	4	10	20	34	52
p	0,033566	0,197203	0,391608	0,293706	0,078322	0,005594

μ	8	15	16	17	24	43	80
p	0,001399	0,033566	0,195804	0,391608	0,293706	0,078322	0,005594

9. Непрерывная случайная величина ξ имеет плотность распределения $p(x)$.

$$p_\xi(x) = \begin{cases} A(1 + (1 - 2x)^2), & -2 \le x \le 2 \\ 0, \quad x < -2, & x > 2 \end{cases}.$$

Найдите: а) Константу A

По условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

$$A\int_{-2}^{2}(4x^2 - 4x + 2)dx = 2A\int_{0}^{2}(4x^2 + 2)dx = 2\,A\left(\frac{4x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_0^2 = \frac{88}{3}A \Rightarrow A = \frac{3}{88}$$

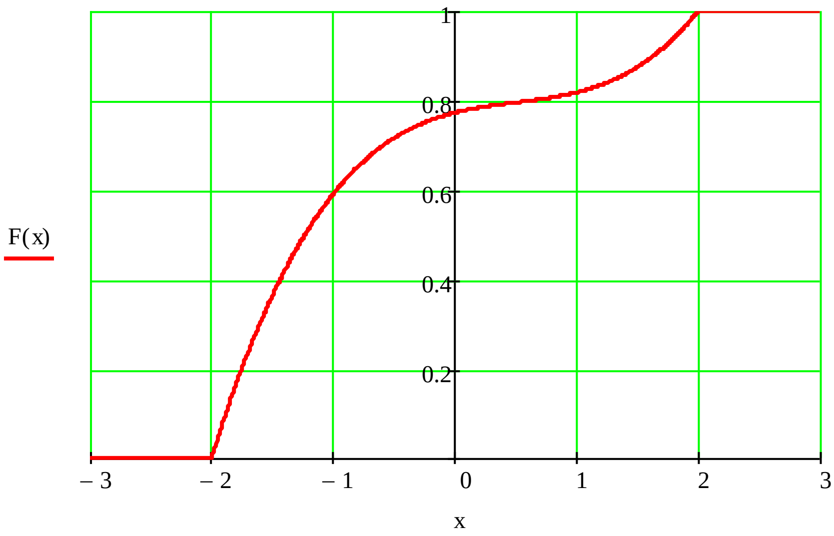
$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{3(2x^2 - 2x + 1)}{44}, -2 \le x \le 2 \\ 0, \quad x < -2, \quad x > 2 \end{cases}.$$

б) Функцию распределения случайной величины ξ и постройте ее график.

Найдём функцию распределения:

$$F_\xi(x) = \frac{3}{44}\int_{-2}^{x}(2x^2 - 2x + 1)dx = \frac{3\left(\frac{2x^3}{3} - x^2 + x\right)}{44}\Bigg|_{-2}^{x} = \frac{2x^3 - 3x^2 + 3x + 17}{44};$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2 \\ \frac{2x^3 - 3x^2 + 3x + 17}{44}, & x \in (-2, 2] \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$



в) Вычислите функцию распределения и плотность распределения случайной величины $\eta = 2(\xi + 1)^3 - 2$.

$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P(2(\xi + 1)^3 - 2 < y) = P(2(\xi + 1)^3 < y + 2) =$$

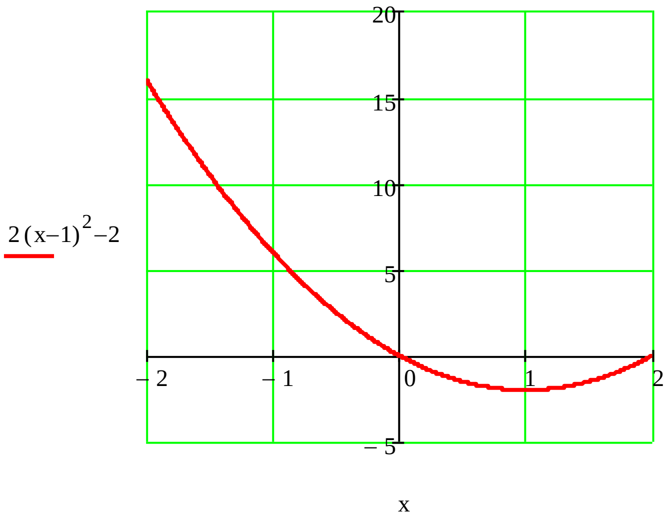
$$= P\left(\xi < \sqrt[3]{\frac{y+2}{2}} - 1\right) = F_\xi\left(\sqrt[3]{\frac{y+2}{2}} - 1\right)$$

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le -4 \\ \frac{2\left(\sqrt[3]{\frac{y+2}{2}} - 1\right)^3 - 3\left(\sqrt[3]{\frac{y+2}{2}} - 1\right)^2 + 3\left(\sqrt[3]{\frac{y+2}{2}} - 1\right) + 17}{44}, & y \in (-4, 52] \\ 1, & y > 52 \end{cases}$$

$$p_\eta(y) = F'_\eta(y)$$

$$p_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\le -4\\ \dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{y+2}{2}}\left(2\left(\sqrt[3]{\dfrac{y+2}{2}}-1\right)^2-6\sqrt[3]{\dfrac{y+2}{2}}+5\right)}{44(y+2)}, & y\in(-4;52]\\ 0, & y>52\end{cases}$$

г) Вычислите функцию распределения и плотность распределения случайной величины $\eta=2(\xi-1)^2-2$



$$p_\eta(y)=p_\xi(g(y))|g'(y)|$$

$$y=2(x-1)^2-2,\qquad x=g(y)=1\pm\sqrt{\frac{y+2}{2}}$$

$$|g'(y)|=\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{y+2}}$$

$$x=1\Rightarrow y=-2$$

При $x\in[0;2]$, $y\in[-2;0]$:

$$p_\eta(y)=\frac{3}{88}\left(1+\left(1-2\left(1+\sqrt{\frac{y+2}{2}}\right)\right)^2+1+\left(1-2\left(1-\sqrt{\frac{y+2}{2}}\right)\right)^2\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{y+2}}=\frac{3\sqrt{2}(y+3)}{88\sqrt{y+2}};$$

При $x \in [-2; 0]$, $y \in [0; 16]$:

$$p_\eta(y) = \frac{3}{88}\left(1 + \left(1 - 2\left(1 - \sqrt{\frac{y+2}{2}}\right)\right)^2\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{y+2}} = \frac{9\sqrt{2}}{176\sqrt{y+2}} + \frac{3\sqrt{2}y}{176\sqrt{y+2}} - \frac{3}{88}$$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} 0, \quad y \notin [-2;\ 16] \\ \dfrac{3\sqrt{2}(y+3)}{88\sqrt{y+2}}, y \in [-2;\ 0) \\ \dfrac{9\sqrt{2}}{176\sqrt{y+2}} + \dfrac{3\sqrt{2}y}{176\sqrt{y+2}} - \dfrac{3}{88}, y \in [0;\ 16] \end{cases}$$

При $y \in [-2; 0]$:

$$F_\eta(y) = \int_{-2}^{y} \frac{3\sqrt{2}(y+3)}{88\sqrt{y+2}} dy = \frac{\sqrt{2}\sqrt{y+2}(y+5)}{44};\ F_\eta(0) = \frac{5}{22}$$

При $y \in [0; 16]$:

$$F_\eta(y) = \frac{5}{22} + \int_{0}^{y} \left(\frac{9\sqrt{2}}{176\sqrt{y+2}} + \frac{3\sqrt{2}y}{176\sqrt{y+2}} - \frac{3}{88}\right) dy =$$

$$= \frac{3\sqrt{2}\sqrt{y+2}}{88} + \frac{\sqrt{2}(y+2)^{\frac{3}{2}}}{88} - \frac{3y}{88} + \frac{5}{44};$$

Функция распределения:

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le -2 \\ \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{y+2}(y+5)}{44}, & y \in (-2, 0] \\ \dfrac{3\sqrt{2}\sqrt{y+2}}{88} + \dfrac{\sqrt{2}(y+2)^{\frac{3}{2}}}{88} - \dfrac{3y}{88} + \dfrac{5}{44}, & y \in (0, 16] \\ 1, & y > 16 \end{cases}$$

10. В условиях задачи 8 выбирают $m = 6$ шаров. (В наборе 5 шара белого цвета, 7 шара синего и 3 шаров красного цвета). Пусть случайная величина ξ число вынутых красных шаров, а случайная величина η – число вынутых синих шаров.

Найдите:

а) Совместное распределение случайных величин ξ и η (ряд распределения).

ξ может принимать значение от 0 до 3, η может принимать значение от 0 до 6. Всего 15 шаров, извлекаем 6.

$$P(\xi = k, \eta = m) = \frac{C_3^k C_7^m C_5^{6-k-m}}{C_{15}^6};\ C_{15}^6 = \frac{15!}{6!\,9!} = 1287$$

Число способов $C_3^k C_7^m C_5^{6-k-m}$:

$k \setminus m$	0	1	2	3	4	5	6
0		7	105	350	350	105	7
1	4	140	840	1400	700	84	
2	30	420	1260	1050	210		
3	40	280	420	140			

Совместное распределение случайных величин ξ и η

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5	6	Сумма
0		0,001399	0,020979	0,069930	0,069930	0,020979	0,001399	0,184615
1	0,000599	0,020979	0,125874	0,209790	0,104895	0,012587		0,474725
2	0,002997	0,041958	0,125874	0,104895	0,020979			0,296703
3	0,001998	0,013986	0,020979	0,006993				0,043956
Сумма	0,005594	0,078322	0,293706	0,391608	0,195804	0,033566	0,001399	1

б) Ряды распределения случайных величин ξ и η.

ξ	0	1	2	3
$P(\xi)$	0,184615	0,474725	0,296703	0,043956

η	0	1	2	3	4	5	6
$P(\eta)$	0,005594	0,078322	0,293706	0,391608	0,195804	0,033566	0,001399

в) Условные распределения случайной величины ξ при условии η, случайной величины η при условии ξ, проверить случайные величины на независимость
Условные распределения:

$$P(\xi = k | \eta = m) = \frac{P(\xi = k, \eta = m)}{P(\eta = m)}$$

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 0)$:

ξ	P
1	0,107143
2	0,535714
3	0,357143
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 1)$:

ξ	P
0	0,017857
1	0,267857
2	0,535714
3	0,178571
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 2)$:

ξ	P
0	0,071429
1	0,428571
2	0,428571
3	0,071429
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 3)$:

ξ	P
0	0,178571
1	0,535714
2	0,267857
3	0,017857
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 4)$:

ξ	P
0,357143	0,357143
0,535714	0,535714
0,107143	0,107143
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 5)$:

ξ	P
0	0,625
1	0,375
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 6) = 1$.

$$P(\eta = m|\xi = k) = \frac{P(\xi = k, \eta = m)}{P(\xi = k)}$$

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 0)$:

η	1	2	3	4	5	6	Сумма
P	0,007576	0,113636	0,378788	0,378788	0,113636	0,007576	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 1)$:

η	0	1	2	3	4	5	Сумма
P	0,001263	0,044192	0,265152	0,441919	0,220960	0,026515	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 2)$:

η	0	1	2	3	4	Сумма
P	0,010101	0,141414	0,424242	0,353535	0,070707	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 3)$:

η	0	1	2	3	Сумма
P	0,045455	0,318182	0,477273	0,159091	1

Для независимых случайных величин

$$P(\xi < x, \eta < y) = P(\xi < x)P(\eta < y)$$

Например

$$P(\xi < 1, \eta < 1) = 0$$

$$P(\xi < 1)P(\eta < 1) = 0.184615 \cdot 0.005594 \neq 0$$

Равенство

$$P(\xi < 1, \eta < 1) = P(\xi < 1)P(\eta < 1) - \text{неверно}$$

Следовательно, ξ и η зависимы.

г) Значения двумерной функции распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$в заданных точках $(x, y) = (8; 3), (2; 8), (2; 4)$,

$$F_{\xi\eta}(8,3) = P(\xi < 8, \eta < 3) = P(\eta < 3) = 0.005594 + 0.078322 + 0.293706 \approx 0.377622$$

$$F_{\xi\eta}(2,8) = P(\xi < 2, \eta < 8) = P(\xi < 2) = 0.184615 + 0.474725 \approx 0.659341$$

$$F_{\xi\eta}(2,4) = P(\xi < 2, \eta < 4) = 0.001399 + 0.000599 + 0.020979 + 0.002997 +$$

$$+0.041958 + 0.001998 + 0.013986 \approx 0.083916$$

д) Ряд распределения новой случайной величины $\mu = 3\sin\frac{\pi\xi\eta}{2} + 2\cos\pi(\xi - \eta)$

Составим таблицу значений случайной величины μ:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5	6
0		-2	2	-2	2	-2	2
1	-2	5	-2	-1	-2	5	
2	2	-2	2	-2	2		
3	-2	-1	-2	5			

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ:

μ	-2	-1	2	5	-2
$P(\mu)$	0,493506	0,223776	0,242158	0,040559	0,493506

e) Ряд распределения новой двумерной дискретной случайной величины (μ_1; μ_2)

$$\mu_1 = \xi - \frac{2-(\xi-3\eta)}{3}, \mu_2 = \frac{3-5(\eta-1+\xi)}{2} + \frac{2\xi+2}{3}$$

Составим таблицу значений случайной величины μ_1:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5	6
0		1,666667	2,666667	3,666667	4,666667	5,666667	6,666667
1	1,333333	2,333333	3,333333	4,333333	5,333333	6,333333	
2	2	3	4	5	6		
3	2,666667	3,666667	4,666667	5,666667			

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ:

μ_1	1,333333	1,666667	2	2,333333	2,666667	3	3,333333	3,666667
$P(\mu)$	0,000599	0,001399	0,002997	0,020979	0,022977	0,041958	0,125874	0,083916
μ_1	4	4,333333	4,666667	5	5,333333	5,666667	6	6,333333
$P(\mu)$	0,125874	0,20979	0,090909	0,104895	0,104895	0,027972	0,020979	0,012587
μ_1	6,666667							
$P(\mu)$	0,001399							

Составим таблицу значений случайной величины μ_2:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5	6
0		2,166667	-0,33333	-2,833333	-5,33333	-7,833333	-10,3333
1	2,833333	0,333333	-2,16667	-4,666667	-7,16667	-9,666667	
2	1	-1,5	-4	-6,5	-9		
3	-0,833333	-3,33333	-5,83333	-8,333333			

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ:

μ_2	-10,3333	-9,666667	-9	-8,33333	-7,833333	-7,16667	-6,5	-5,83333
$P(\mu)$	0,001399	0,012587	0,020979	0,006993	0,020979	0,104895	0,104895	0,020979
μ_2	-5,33333	-4,66667	-4	-3,33333	-2,83333	-2,16667	-1,5	-0,83333
$P(\mu)$	0,06993	0,20979	0,125874	0,013986	0,06993	0,125874	0,041958	0,001998
μ_2	-0,33333	0,333333	1	2,166667	2,833333			
$P(\mu)$	0,020979	0,020979	0,002997	0,001399	0,000599			

Совместное распределение случайных величин μ_1 и μ_2

$\mu_1 \setminus \mu_2$	-10,3333	-9,66667	-9	-8,33333	-7,83333	-7,16667	-6,5	-5,83333	-5,33333	-4,66667
1,333333										
1,666667										
2										
2,333333										
2,666667										
3										
3,333333										
3,666667										
4										
4,333333										0,20979
4,666667								0,020979	0,06993	
5							0,104895			
5,333333						0,104895				
5,666667				0,006993	0,020979					
6			0,020979							
6,333333		0,012587								
6,666667	0,001399									

Продолжение таблицы справа:

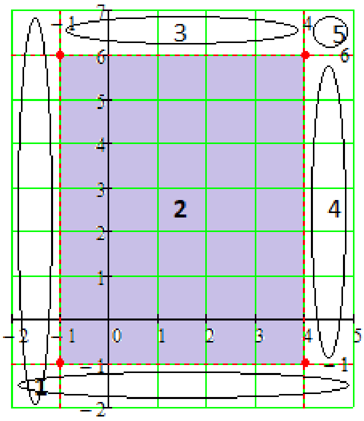
$\mu_1 \setminus \mu_2$	-4	-3,33333	-2,83333	-2,16667	-1,5	-0,83333	-0,33333	0,333333	1	2,166667
1,333333										
1,666667										0,001399
2									0,002997	
2,333333								0,020979		
2,666667						0,001998	0,020979			
3					0,041958					
3,333333				0,125874						
3,666667		0,013986	0,06993							
4	0,125874									

11. В четырехугольник с вершинами в точках $(-1;-1), (-1;6), (4;6), (4;-1)$ в соответствии с принципом геометрической вероятности падает частица. Пусть ξ и η - координаты по оси X и У точки падения частицы.

Найдите:

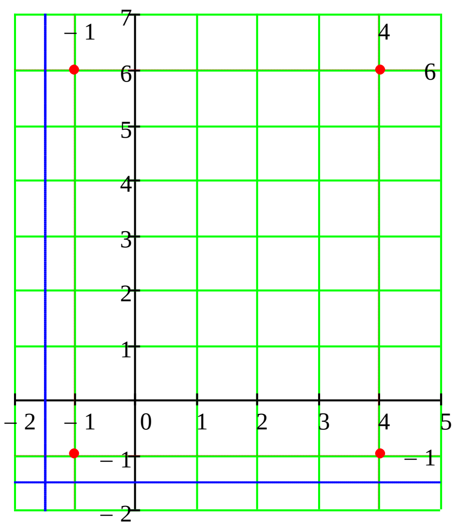
Найдите:

а) Совместную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ случайной величины (ξ,η) и совместную плотность распределения случайной величины (ξ,η).



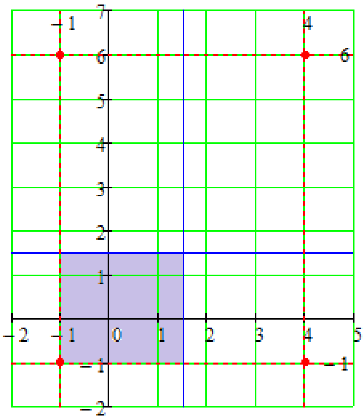
Всего имеем 5 различных областей.

Область 1: $(x<-1)$или $(y<-1)$:



Пересечения с четырёхугольником нет, $F_{\xi\eta}(x,y)=0$.

Область 2: $(x,y)\in D$:

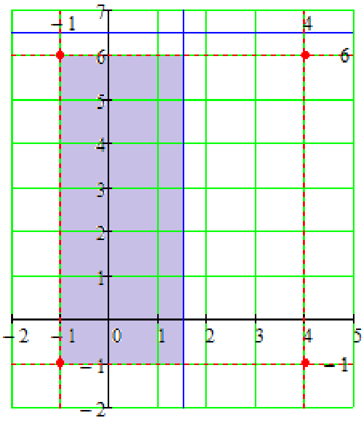


$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{S_D}\int_{-1}^{x}\int_{-1}^{y} dxdy$$

$$S_D = 35 - \text{площадь области.}$$

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{35}\int_{-1}^{x} dx \int_{-1}^{y} dy = \frac{(x+1)(y+1)}{35}.$$

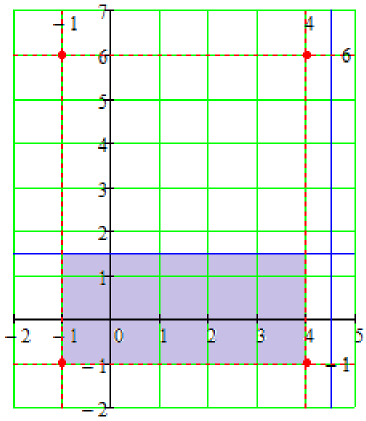
Область 3: $(-1 < x \leq 4)$и$(y > 6)$:



$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{S_D}\int_{-1}^{x}\int_{-1}^{6} dxdy$$

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{35}\int_{-1}^{x} dx \int_{-1}^{6} dy = \frac{(x+1)}{5}.$$

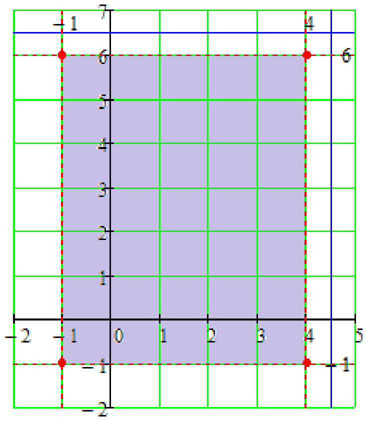
Область 4: $(x > 4)$и$(-1 < y \leq 6)$:



$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{S_D}\int_{-4}^{1}\int_{-1}^{y} dxdy$$

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{35}\int_{-1}^{4} dx \int_{-1}^{y} dy = \frac{y+1}{7}.$$

Область 5: $(x > 4)$и$(y > 6)$:



$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{S_D}\int_{-1}^{4}\int_{-1}^{6} dxdy = \frac{1}{35}\int_{-1}^{4} dx \int_{-1}^{6} dy = 1.$$

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x < -1)\text{или } (y < -1) \\ \dfrac{(x+1)(y+1)}{35}, (x,y) \in D \\ \dfrac{x+1}{5}, (-1 < x \le 4)\text{и}(y > 6) \\ \dfrac{y+1}{7}, (x > 4)\text{и}(-1 < y \le 6) \\ 1, & (x > 4)\text{и}(y > 6) \end{cases}$$

Поскольку площадь четырёхугольника D равна 35, и точки распределены в соответствии с принципом геометрической вероятности то совместная плотность распределения имеет равномерное распределение внутри D:

$$p_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{35}, (x,y) \in D \\ 0, (x,y) \notin D \end{cases}.$$

б) Одномерные плотности и функции распределения случайных величин ξ и η.

$$p_{\xi}(x) = \int_{-1}^{6} p_{\xi\eta}(x,y)\,dy = \frac{1}{35}\int_{-1}^{6} 1\,dy = \frac{1}{5}$$

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, x \in [-1;4] \\ 0, x \notin [-1;4] \end{cases}.$$

$$F_{\xi}(x) = \int_{-1}^{x} p_{\xi}(x)\,dx = \frac{x+1}{5}, \qquad -1 < x \le 4$$

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \frac{x+1}{5}, & -1 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

$$p_{\eta}(y) = \int_{-1}^{4} p_{\xi\eta}(x,y)\,dx = \frac{1}{35}\int_{-1}^{4} 1\,dy = \frac{1}{7}$$

$$p_{\eta}(y) = \begin{cases} \frac{1}{7}, & y \in [-1;6] \\ 0, & y \notin [-1;6] \end{cases}.$$

$$F_{\eta}(y) = \int_{-1}^{y} p_{\eta}(y)\,dy = \frac{y+1}{7}, \qquad -1 < y \le 6$$

$$F_{\eta}(y) = \begin{cases} 0, & y \le -1 \\ \frac{y+1}{7}, & -1 < y \le 6 \\ 1, & y > 6 \end{cases}$$

в) Условные функции распределения и условные плотности распределения случайной величины ξ при условии η, и случайной величины η при условии ξ. Проверьте, будут ли эти случайные величины независимыми

Условная плотность распределения

$$p_\xi(x|y) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\eta(y)} = \frac{1}{5} \text{ при } (x,y) \in D$$

Условная плотность распределения

$$p_\eta(y|x) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\xi(x)} = \frac{1}{7} \text{ при } (x,y) \in D$$

Для независимых случайных величин должно выполняться равенство:

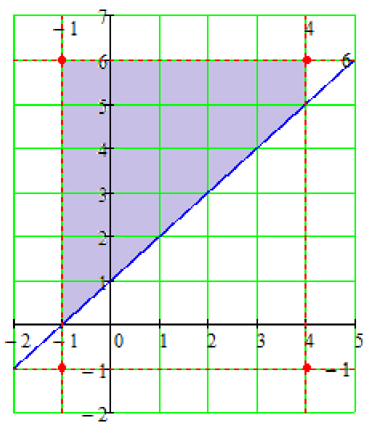
$$p_\xi(x|y) = p_\xi(x) - \text{верно}$$

Следовательно, случайные величины независимы. Условные функции распределения совпадают с одномерными:

$$F_\xi(x|y) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \dfrac{x+1}{5}, & -1 < x \le 4; \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

$$F_\eta(y|x) = \begin{cases} 0, & y \le -1 \\ \dfrac{y+1}{7}, & -1 < y \le 6 \\ 1, & y > 6 \end{cases}$$

г) Значение функции распределения случайной величины $\mu = 3\xi - 3\eta$ в точке $z = -3$.



$$F_\mu(-3) = P(3\xi - 3\eta < -3) = P(\eta > \xi + 1) = \frac{S_D}{S} = \frac{5 + \dfrac{5 \cdot 5}{2}}{35} = \frac{1}{2}$$

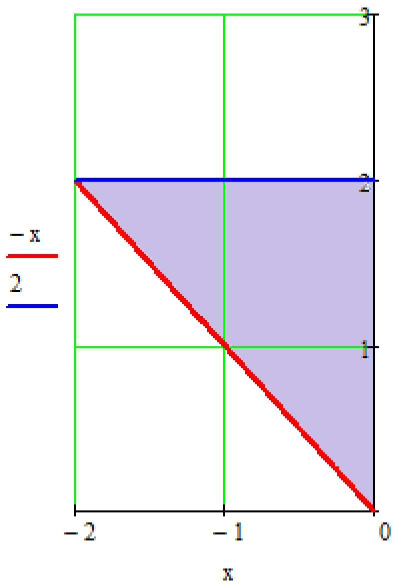
12. Совместная плотность распределения случайных величин ξ и η задана формулой

$$p_{\xi\eta}(x,y) = C(-3x + y^2), (x,y) \in D,$$

где область $D = \{(x;y): x = 0, y = 2, y = -x\}$.

Найдите:

а) Постоянную C.



По закону нормировки

$$\iint\limits_D p_{\xi\eta}(x,y)dxdy = 1,$$

$$\int_{-2}^{0} dx \int_{-x}^{2} C(-3x + y^2)\,dy = C \int\limits_{-2}^{0} \left(-3xy + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-x}^{2} dx = C \int\limits_{-2}^{0} \left(\frac{8}{3} - 6x - 3x^2 + \frac{x^3}{3}\right) dx =$$

$$= C\left(\frac{8x}{3} - 3x^2 - x^3 + \frac{x^4}{12}\right)\Bigg|_{-2}^{0} = 8C, \quad C = \frac{1}{8}$$

б) Значения двумерной функции распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ в заданных точках $(x,y) = (1;1)$

$$F_{\xi\eta}(1{,}1) = P(\xi < 1, \eta < 1) = P(\eta < 1) = \frac{1}{8}\int_{-1}^{0} dx \int_{-x}^{1} (-3x + y^2)\,dy =$$

$$= \frac{1}{8}\int_{-1}^{0}\left(-3xy+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-x}^{1}dx = \frac{1}{8}\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{3}-3x-3x^2+\frac{x^3}{3}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{x}{3}-\frac{3x^2}{2}-x^3+\frac{x^4}{12}\right)\Bigg|_{-1}^{0} = \frac{3}{32}$$

в) Одномерные плотности и функции распределения случайных величин ξ и η.

$$p_\xi(x) = \int_{-x}^{2} p_{\xi\eta}(x,y)\,dy = \frac{1}{8}\int_{-x}^{2}(-3x+y^2)\,dy = \frac{1}{8}\left(-3xy+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-x}^{2} =$$

$$= \frac{1}{3}-\frac{3x}{4}-\frac{3x^2}{8}+\frac{x^3}{24}$$

$$p_\xi(x) = \begin{cases}\frac{1}{3}-\frac{3x}{4}-\frac{3x^2}{8}+\frac{x^3}{24}, x\in[-2;0] \\ 0, x\notin[-2;0]\end{cases}.$$

$$F_\xi(x) = \int_{-2}^{x}\left(\frac{1}{3}-\frac{3x}{4}-\frac{3x^2}{8}+\frac{x^3}{24}\right)dx = \left(\frac{x}{3}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{96}\right)\Bigg|_{-2}^{x} = 1+\frac{x}{3}-\frac{3x^2}{8}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{96}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \quad x\le -2 \\ = 1+\frac{x}{3}-\frac{3x^2}{8}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{96}, -2 < x \le 0 \\ 1, \quad x > 0\end{cases}$$

$$p_\eta(y) = \int_{-y}^{0} p_{\xi\eta}(x,y)\,dx = \frac{1}{8}\int_{-y}^{0}(-3x+y^2)\,dx = \frac{1}{8}\left(\frac{-3x^2}{2}+y^2x\right)\Bigg|_{-y}^{0} = \frac{y^3}{8}+\frac{3y^2}{16}$$

$$p_\eta(y) = \begin{cases}\frac{y^3}{8}+\frac{3y^2}{16}, y\in[0;2] \\ 0, y\notin[0;2]\end{cases}.$$

$$F_\eta(y) = \int_{0}^{y} p_\eta(y)\,dy = \int_{0}^{y}\left(\frac{y^3}{8}+\frac{3y^2}{16}\right)dy = \frac{y^4}{32}+\frac{y^3}{16}$$

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \dfrac{y^4}{32} + \dfrac{y^3}{16}, & 0 < y \le 2 \\ 1, & y > 2 \end{cases}$$

г) Условные функции распределения и условные плотности распределения случайной величины ξ при условии η, и случайной величины η при условии ξ. Проверьте, будут ли эти случайные величины независимыми

Условная плотность распределения

$$p_\xi(x|y) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\eta(y)}$$

$$p_\xi(x|y) = \frac{2(y^2-3x)}{y^2(2y+3)} \text{ при } (x,y) \in D$$

Условная плотность распределения

$$p_\eta(y|x) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\xi(x)}$$

$$p_\eta(y|x) = \frac{3y^2-9x}{(x+2)(x^2-11x+4)} \text{ при } (x,y) \in D$$

Для независимых случайных величин должно выполняться равенство:

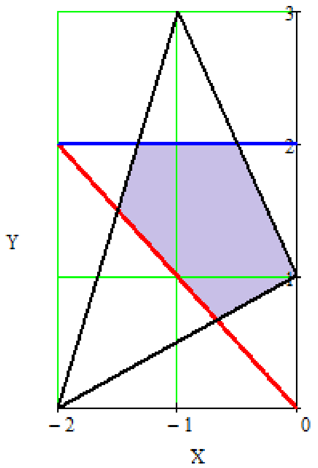
$$p_\xi(x|y) = p_\xi(x) - \text{неверно}$$

Следовательно, случайные величины зависимы.

$$F_\xi(x|y) = \int_{-2}^{x} \frac{2(y^2-3x)}{y^2(2y+3)}dx = \frac{2}{y^2(2y+3)}\left(y^2x - \frac{3x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{x} = \frac{x(2y^2-3x)}{y^2(2y+3)} \text{ при } (x,y) \in D$$

$$F_\eta(y|x) = \int_{0}^{y} \frac{3y^2-9x}{(x+2)(x^2-11x+4)}dy = \frac{y(y^2-9x)}{(x+2)(x^2-11x+4)} \text{ при } (x,y) \in D$$

д) Вычислите вероятность попадания вектора (ξ,η) в треугольник с вершинами в точках $(-2;0), (-1;3), (0;1)$. (Записать интеграл, расставить пределы интегрирования, считать интеграл - не надо)



Стороны треугольника: от $(-2;0)$ до $(-1;3)$; $y = 3x + 6$;

$$3x + 6 = 2 \Rightarrow x = -\frac{4}{3};\, 3x + 6 = -x \Rightarrow x = -1.5$$

$$\text{от } (-1;3) \text{ до } (0;1);\, y = -2x + 1;$$

$$-2x + 1 = 2 \Rightarrow x = -0.5;$$

$$\text{от } (-2;0) \text{ до } (0;1)\, ;\, y = \frac{x}{2} + 1;$$

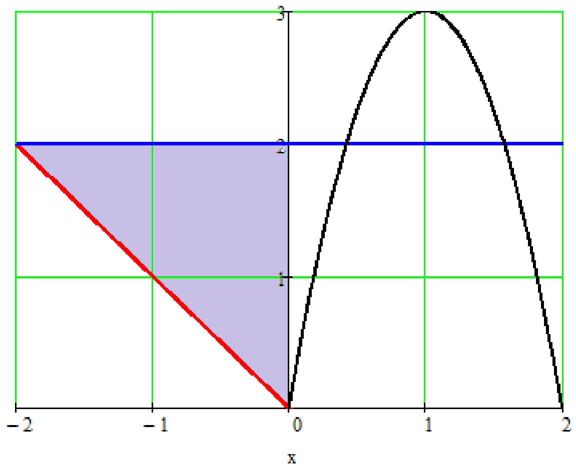
$$\frac{x}{2} + 1 = -x \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

$$P = \frac{1}{8}\int_{-1.5}^{-4/3} dx \int_{-x}^{3x+6} (-3x + y^2)\, dy + \frac{1}{8}\int_{-4/3}^{-2/3} dx \int_{-x}^{2} (-3x + y^2)\, dy +$$

$$+\frac{1}{8}\int_{-2/3}^{-0.5} dx \int_{\frac{x}{2}+1}^{2} (-3x + y^2)\, dy + \frac{1}{8}\int_{-0.5}^{0} dx \int_{\frac{x}{2}+1}^{-2x+1} (-3x + y^2)\, dy$$

e) Значение функции распределения $F_\mu(z)$ новой случайной величины $\mu = 2 - 3(\xi - 1)^2 - \eta$ в точке $z = -1$. (Записать интеграл, расставить пределы интегрирования, считать интеграл - не надо)

$$F_\mu(-1) = P(2 - 3(\xi - 1)^2 - \eta < -1) = P(\eta > 3 - 3(\xi - 1)^2)$$



Получаем, что вся область удовлетворяет условию $\eta > 3 - 3(\xi - 1)^2$, значит

$$P = 1$$