

I. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РПР №1

I.1. Расчет брусьев на прочность при растяжении-сжатии

Растяжением (сжатием) называется такой вид нагружения бруса, когда в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор (БСФ) - нормальная сила.

Нормальная сила определяется методом сечений, ее величина равна алгебраической сумме всех внешних сил, действующих на отсеченную часть бруса. Формула, по которой определяется величина нормальной силы в произвольном поперечном сечении бруса, имеет вид.

$$N = \sum P + \sum_0^z q dz, \quad (I.1)$$

где P - сосредоточенная сила,
 q - погонная нагрузка.

В формуле (I.1) интегрирование производится по длине каждого участка, на который действует погонная нагрузка q , а суммирование ведется по всем участкам, расположенным на отсеченной части бруса. Растягивающая сила считается положительной, сжимающая - отрицательной. Условимся вектор, изображающий нормальное усилие в поперечном сечении бруса, всегда направлять от сечения.

Величина нормального напряжения в произвольном поперечном сечении бруса определяется по формуле.

$$\sigma = \frac{N}{F}, \quad (I.2)$$

где N - нормальная сила в поперечном сечении,
 F - площадь поперечного сечения бруса.

Абсолютное удлинение бруса определяется по следующей формуле:

$$\Delta l = \sum_0^l \int \frac{N dz}{EF} \quad (I.3)$$

Интегрирование в (I.3) ведется по длине каждого участка, а суммирование - по всем участкам бруса. В частном случае, когда нормальная сила N и площадь поперечного сечения F постоянны по длине бруса, величина удлинения

$$\Delta l = \frac{N l}{EF} \quad (I.4)$$

Условие прочности при растяжении (сжатии) имеет следующий вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} \leq [\sigma],$$

где σ_{\max} - максимальное расчетное нормальное напряжение;
 $[\sigma]$ - допускаемое напряжение материала стержня.

Для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию (для пластичных материалов)

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T},$$

где σ_T - предел текучести материала при растяжении (сжатии);
 n_T - коэффициент запаса прочности.

Прежде, чем приступить к решению конкретной задачи, обратим внимание читателя на структурно-логическую схему проектного расчета бруса на прочность при центральном растяжении-сжатии, показанную на рис. 1.1, и советуем ему использовать схему при решении задачи "А" своего варианта.

Рассмотрим пример решения задачи "А" расчетно-графической работы № 1. Исходные данные для задачи следующие:

$$\begin{aligned} P_1 &= P, & l_1 &= l, & D_1 &= d, & q_1 &= q, \\ P_2 &= 5P, & l_2 &= l, & D_2 &= 1.5d, & q_2 &= q, \\ P_3 &= 4P, & l_3 &= 1.5l, & D_3 &= d, & q_3 &= 0, \\ P_4 &= 10P, & l_4 &= 2l. \end{aligned}$$

При расчете примем: $q = 2 \text{ кН/см}$, $l = 50 \text{ см}$, $P = 0.5ql = 50 \text{ кН}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\sigma_T = 300 \text{ МПа}$, $n_T = 1.5$. Сведения для справки: $1 \text{ МПа} = 1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$, $1 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н}$. Схема бруса, с приложенными внешними силами и геометрическими размерами, показана на рис. 1.2а.

Решение задачи начнем с определения опорной реакции R_A в точке, предварительно направив продольную ось бруса x слева направо (рис. 1.2а)

$$\sum F_x = 0, -R_A + ql + P + 10P + 1.5ql + 8P - 10P = 0.$$

При $P = 0.5ql$ получим

$$R_A = 14P.$$

Проектный расчёт на прочность и
определение перемещений в бруске
при центральном растяжении-сжатии

ЗАДАНО
Внешние силы P, q, l
Геометрические размеры
Механические и упругие характери-
стики, коэффициент запаса прочности
 σ_T, E, n_T

Определение опорных реакций

$$\sum F_z = 0$$

Определение нормальной силы в попе-
речных сечениях бруса методом сече-
ний

$$N = \sum P + \sum q dz$$

Построение эпюры N

Определение нормального напряжения
в поперечных сечениях бруса

$$\sigma = \frac{N}{F}$$

Построение эпюры σ

Определение опасного сечения
(сечения, где σ_{max})

Определение из условий прочности
размеров поперечного сечения бруса

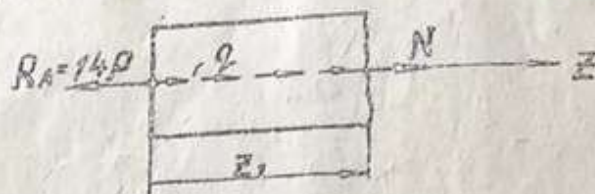
$$F \geq \frac{N}{[\sigma]}$$

Определение удлинений

$$\Delta l = \sum \int_0^l \frac{N dz}{EF}$$

и
построение эпюры перемещений Δw

Для определения нормальной силы на каждом участке бруса используем метод сечений. На первом участке бруса продольная координата $0 \leq z_1 \leq l$. Покажем отдельно отсеченную часть бруса, действующими на нее внешними силами (включая и реакцию заделки).



Используя правило, направим нормальную силу N в сторону от сечения. По формуле (1.1) Σ :

$$N = R_A - \int_0^{z_1} q dz = R_A - qz_1.$$

Продольная сила линейно связана с координатой z_1 . Для построения графика $N = f(z)$ (который носит название эпюры) найдем значения нормальной силы на границах участка, а именно при

$$z_1 = 0, \quad N = R_A = 14P,$$

$$z_1 = l, \quad N = R_A - ql = 12P.$$

Закон изменения напряжения на этом участке, используя (1.2), запишем

$$\sigma = \frac{N}{F_1} = \frac{R_A - qz_1}{\frac{\pi d^2}{4}}.$$

Напряжение, как и нормальная сила, является линейной функцией продольной координаты и на границах участка принимает значения,

$$\text{при } z_1 = 0, \quad \sigma = \frac{14P}{\frac{\pi d^2}{4}} \approx \frac{17.8P}{d^2}$$

$$z_1 = l, \quad \sigma = \frac{12P}{\frac{\pi d^2}{4}} \approx \frac{15.3P}{d^2}.$$

Рассмотрим второй участок, для которого $0 \leq z_2 \leq l$



Для нормальной силы и напряжения на этом участке можно написать:

$$N = R_A - \int_0^l q dz - P = 11P,$$

$$\sigma = \frac{N}{F_2} = \frac{11P}{\frac{\pi}{4} d^2} \approx \frac{14P}{d^2}.$$

Запишем выражения для нормальной силы и напряжения на остальных участках бруса.

Участок III

$$0 \leq z_3 \leq 1,5l$$

$$N = R_A - \int_0^l q dz - P - \int_0^{z_3} q dz = P - qz_3,$$

при

$$z_3 = 0, \quad N = P,$$

$$z_3 = 1,5l, \quad N = -2P.$$

Напряжение на этом участке изменяется по линейному закону

$$\sigma = \frac{N}{F_3} = \frac{P - qz_3}{\frac{\pi}{4} 2,25 d^2},$$

а на границах участка принимает значения

при

$$z_3 = 0, \quad \sigma = \frac{P}{\frac{\pi}{4} 2,25 d^2} \approx \frac{0,57P}{d^2},$$

$$z_3 = 1,5l, \quad \sigma = -\frac{2P}{\frac{\pi}{4} 2,25 d^2} \approx -\frac{1,13P}{d^2}.$$

Условие прочности при растяжении участка

$$N = R_A - \int_0^z q dz = P - 10P - \int_0^z q dz = -3P = -10P,$$

$$\sigma = \frac{N}{F_4} = - \frac{10P}{\frac{\pi}{4} d^2} \approx - \frac{12,7 P}{d^2}.$$

Используя выражения для нормальной силы и напряжения на каком участке бруса, строим их эпюры (рис. 1.2 б, в).

Для определения размеров поперечного сечения необходимо найти опасное сечение, под которым подразумевается сечение, где действует максимальная величина напряжения.

В задаче опасным будет сечение, где действует

$$\sigma_{\max} = \frac{12,7 P}{d^2}.$$

Условие прочности запишется

$$\sigma_{\max} = \frac{12,7 P}{d^2} \leq [\sigma],$$

и из него определим размер

$$d \geq \sqrt{\frac{12,7 P}{[\sigma]}} = \sqrt{\frac{12,7 \cdot 50 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6}} \approx 6,67 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Тогда площади поперечных сечений на соответствующих участках бруса будут равны:

$$F_1 = F_2 = F_4 = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \approx 0,785 \cdot 44,49 \approx 34,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

$$F_3 = \frac{\pi}{4} \cdot 2,25 d^2 \approx 0,785 \cdot 2,25 \cdot 44,49 \approx 78,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

$$F_3 = 2,25 F_1.$$

Покажем, как определяется величина абсолютного удлинения стержня на примере одного из участков. Перемещение сечения, расположенного на первом участке на расстоянии z_1 от заделки, будет равно удлинению участка, расположенного между заделкой и этим сечением, то есть

$$w_1 = \Delta l_1 = \int_0^{z_1} \frac{N dz}{EF_1} = \frac{1}{EF_1} \int_0^{z_1} (R_A - qz) dz = \frac{1}{EF_1} (R_A z_1 - \frac{q z_1^2}{2}).$$

Так как продольная координата $z_1 = 0$ в сечении при

$$z_1 = 0,$$

$$w_1 = 0,$$

$$z_1 = l,$$

$$w_1 = \frac{13Pl}{EF_1} = \frac{13 \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 0.25}{2.1 \cdot 10^8 \cdot 3.49 \cdot 10^{-4}} = 4.42 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

На остальных участках выражения для перемещений запишутся следующим образом.

Участок II

$$w_2 = w_1|_{z_1=l} + \int_0^{z_2} \frac{N dz}{EF_2}$$

Здесь первое слагаемое равно перемещению сечения В, а второе — перемещению сечения 2 относительно сечения В. Вычислив интеграл, получим

$$w_2 = \frac{13Pl}{EF_1} + \frac{11Pz_2}{EF_2}$$

При

$$z_2 = 0,$$

$$w_2 = \frac{13Pl}{EF_1} \approx 4.42 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

$$z_2 = l,$$

$$w_2 = \frac{24Pl}{EF_1} \approx 8.16 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

Участок III

$$w_3 = w_2|_{z_2=l} + \int_0^{z_3} \frac{N dz}{EF_3}$$

После подстановки выражения нормальной силы N и интегрирования имеем

$$w_3 = \frac{24Pl}{EF_1} + \left(Pz_3 - \frac{Qz_3^2}{2} \right) \frac{1}{EF_3}$$

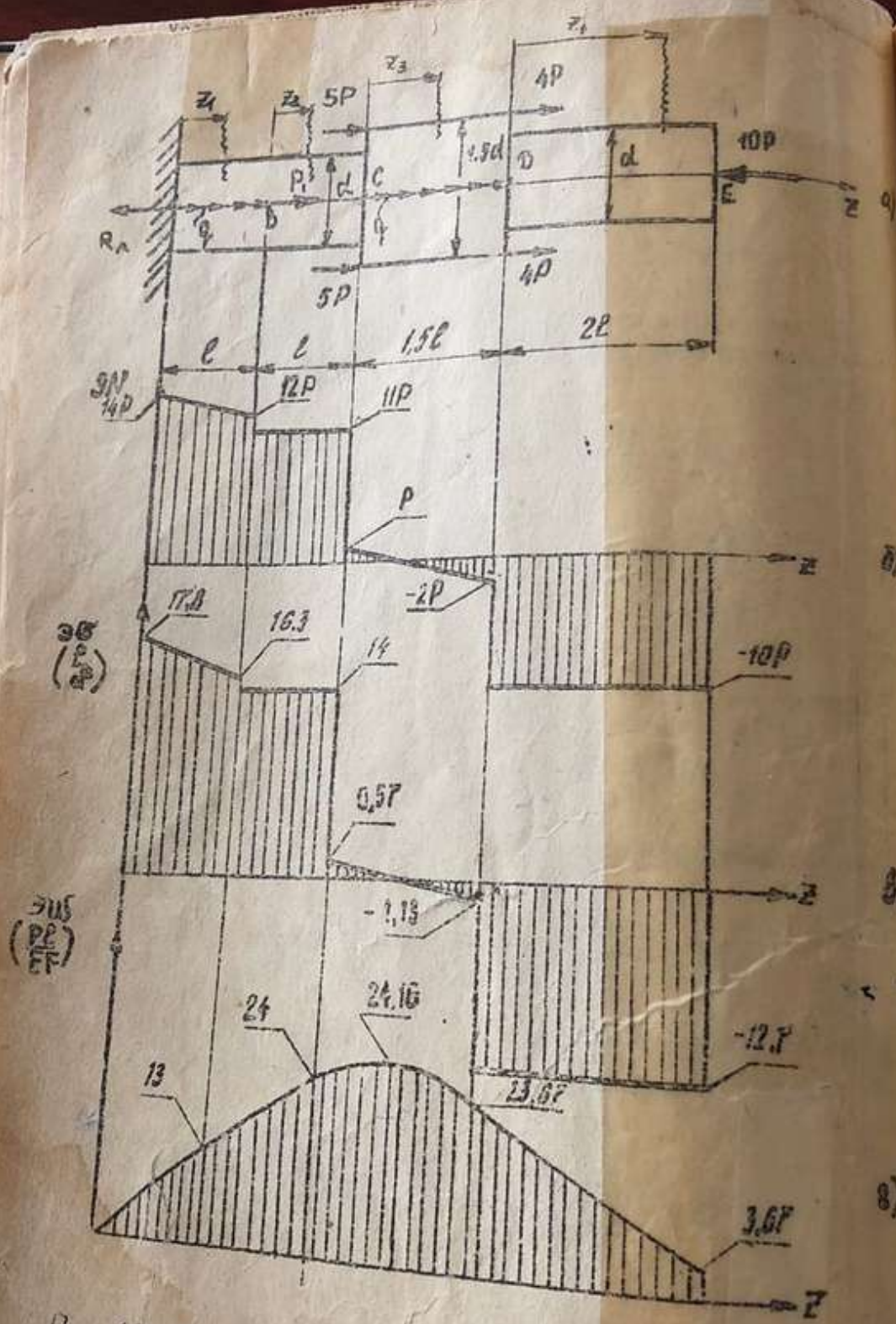
На границах участка при

$$z_3 = 0,$$

$$w_3 = \frac{24Pl}{EF_1} \approx 8.16 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

$$z_3 = 1.5l,$$

$$w_3 = \frac{23.67 Pl}{EF_1} \approx 8.05 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$



Вид 12 Схема нагружения бруса, размеры N, B, W

На последнем участке выражение для перемещения будет
 вид.

$$w_4 = w_3|_{z=1,5l} + \int_0^{z_4} \frac{N dz}{EF_4} = \frac{23,67 Pl}{EF_4} - \frac{10P \cdot z_4}{EF_4}$$

При $z_4 = 0$, $w_4 = \frac{23,67 Pl}{EF_4} \approx 8,05 \cdot 10^{-4}$

$z_4 = 2l$, $w_4 = \frac{3,67 Pl}{EF_4} \approx 1,25 \cdot 10^{-4}$

Используя полученные выражения, строим эпюру перемещений показанную на рис. 1.2г.

В заключение отметим, что наиболее нагруженным является центр вблизи заделки бруса, где нормальное напряжение достигает максимальной величины. Для повышения коэффициента запаса прочности необходимо либо увеличивать размеры поперечного сечения первого участка, либо выбирать материал бруса с более высоким значением предела текучести σ_T . Как следует из построенной эпюры перемещений, наибольшие деформации брус испытывает на последнем участке.

1.2. Статически неопределимые стержневые системы

Статически неопределимыми называются системы, в которых число неизвестных реакций и внутренних силовых факторов превышает число уравнений равновесия. Разность между числом неизвестных и числом уравнений равновесия называют степенью статической неопределимости.

Изложим методику решения стержневых статически неопределимых задач.

Первоначально рассматривают статическую сторону задачи, для чего составляют уравнения равновесия отсеченных элементов конструкции, содержащие неизвестные усилия. Определяют степень статической неопределимости.

Затем, рассматривая систему в деформированном состоянии, устанавливаем связи между перемещениями (деформациями) отдельных элементов конструкции. Эти уравнения называют уравнениями совместности перемещений.

Перемещения в полученном уравнении выражаем через усилия, используя закон Гука. Совместное решение уравнений статики и уравнений совместности перемещений позволяет найти неизвестные

ния в стержнях системы.

В задании "Б" расчетно-графической работы №1 необходимо учитывать напряжения, которые возникают в стержнях, вследствие их нагрева (охлаждения), а также монтажные напряжения, возникающие при сборке, вследствие натяга Δ . В этом случае общий подход к решению статически неопределимых задач не изменяется. Отличие заключается в составлении уравнения совместности перемещений. При нагреве отдельных элементов конструкции алгебраическим суммированием учитываются удлинения от внутренних силовых факторов и изменения температуры, последние определяют по формуле

$$\Delta l_t = \alpha \cdot \Delta t^\circ \cdot l \quad (1.3)$$

где Δl_t - абсолютное удлинение стержня от температуры;
 α - средний коэффициент линейного расширения материала стержня;

l - длина стержня;

Δt° - изменение температуры.

При наличии монтажного зазора Δ последний учитывается при составлении уравнений совместности перемещений. Изложенные выше соображения иллюстрируются схемой, показанной на рис. 1.3.

Рассмотрим пример решения задачи "Б" (вариант № 0001) расчетно-графической работы №1. Номер расчетной схемы - I (см. рис. 1.4а). Стержень I изготовлен из алюминиевого сплава, его параметры:

- площадь $F_1 = F$,
- длина $A = l$,
- модуль упругости $E_1 = 0,7 \cdot 10^5$ МПа,
- предел текучести $\sigma_{T1} = 110$ МПа,
- коэффициент линейного расширения $\alpha_1 = 2,2 \cdot 10^{-5}$,
- стержень нагревается на $\Delta t_1^\circ = 50^\circ\text{C}$.

Стержень 2 - стальной, его параметры:

- площадь $F_2 = 1,5F$,
- длина $B = 2l$,
- модуль упругости $E_2 = 3E_1 = 2,1 \cdot 10^5$ МПа,
- предел текучести $\sigma_{T2} = 300$ МПа,
- коэффициент линейного расширения $\alpha_2 = 1,2 \cdot 10^{-5}$,
- стержень нагревается на $\Delta t_2^\circ = 30^\circ\text{C}$.

При расчете принять

$$P = 100 \text{ кН}, F = 5 \text{ см}^2, l = 20 \text{ см}, \Delta = 0,0005 l$$

Определение напряжений в элементах стержневой статически-неопределимой конструкции

ЗАДАНО
Внешние силы P
Геометрические размеры l, d, F
Механические и упругие характеристики стержней σ_t, E

Составление уравнений равновесия для заданной системы
 $\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma M_0 = 0$

Определение степени статической неопределимости

Составление уравнений совместности перемещений

Выражение перемещений (удлинений) через усилия, используя закон Гука $\Delta l = \frac{N \cdot l}{E F}$

Решение системы уравнений равновесия и уравнения совместности перемещений. Нахождение усилий в стержнях

Определение нормальных напряжений в стержнях

$$\sigma = \frac{N_i}{F_i}$$

Рис. 1.3. План-схема расчета стержневой статически-неопределимой системы

расчет напряжений в стержнях и перемещений
от действия силы Р

применив метод сечений, направим внутренние усилия в стержнях растягивающие. Составим уравнения равновесия (рис. 1.4б)

$$\sum F_y = 0; \quad R_0 + P + N_2 \sin \alpha - N_1 = 0,$$

$$\sum F_x = 0; \quad -N_2 \cos \alpha + H_0 = 0,$$

$$\sum M_0 = 0; \quad -N_1 2\ell + P\ell - N_2 \ell \sin \alpha = 0. \quad (1.7)$$

Из уравнений следует, что неизвестных четыре — N_1 , N_2 , R_0 , H_0 . Степень статической неопределимости равна единице.

Рассмотрим предполагаемую деформацию элементов конструкции под действием приложенных внешних сил. Можно предположить, что стержень 1 удлинится на величину $\Delta \ell_1$, а стержень 2 на $\Delta \ell_2$. Новое возможное положение системы показано на рис. 1.4в.

Для составления уравнения совместности перемещений рассмотрим подобные треугольники OLK и ODC . Можно записать, что

$$\frac{LK}{OK} = \frac{DC}{OD}.$$

В свою очередь отрезок DC связан с BC из треугольника DBC соотношением

$$\frac{BC}{DC} = \cos 45^\circ,$$

тогда выражение, связывающее удлинение стержней, учитывая, что $LK = \Delta \ell_1$, $BC = \Delta \ell_2$, $OK = D = 2\ell$, $OD = A = \ell$, запишем

$$\frac{\Delta \ell_1}{\Delta \ell_2} = \frac{2}{\cos 45^\circ}. \quad (1.8)$$

Выразим удлинения стержней, используя закон Гука,

$$\Delta \ell_1 = \frac{N_1 \ell_1}{E_1 F_1}, \quad \Delta \ell_2 = \frac{N_2 \ell_2}{E_2 F_2},$$

подставим в уравнение (1.8), получим

$$\frac{N_1 \ell_1 E_2 F_2}{N_2 \ell_2 E_1 F_1} = \frac{2}{\cos 45^\circ}. \quad (1.9)$$

Уравнение (1.9) носит название уравнения совместности перемещений (деформаций). Имея систему уравнений (1.7), (1.9), найдем усилия в стержнях и опорные реакции.

ни в старе
рис. 1.46)

(1.7)

R_0, H_0

струкци

, что

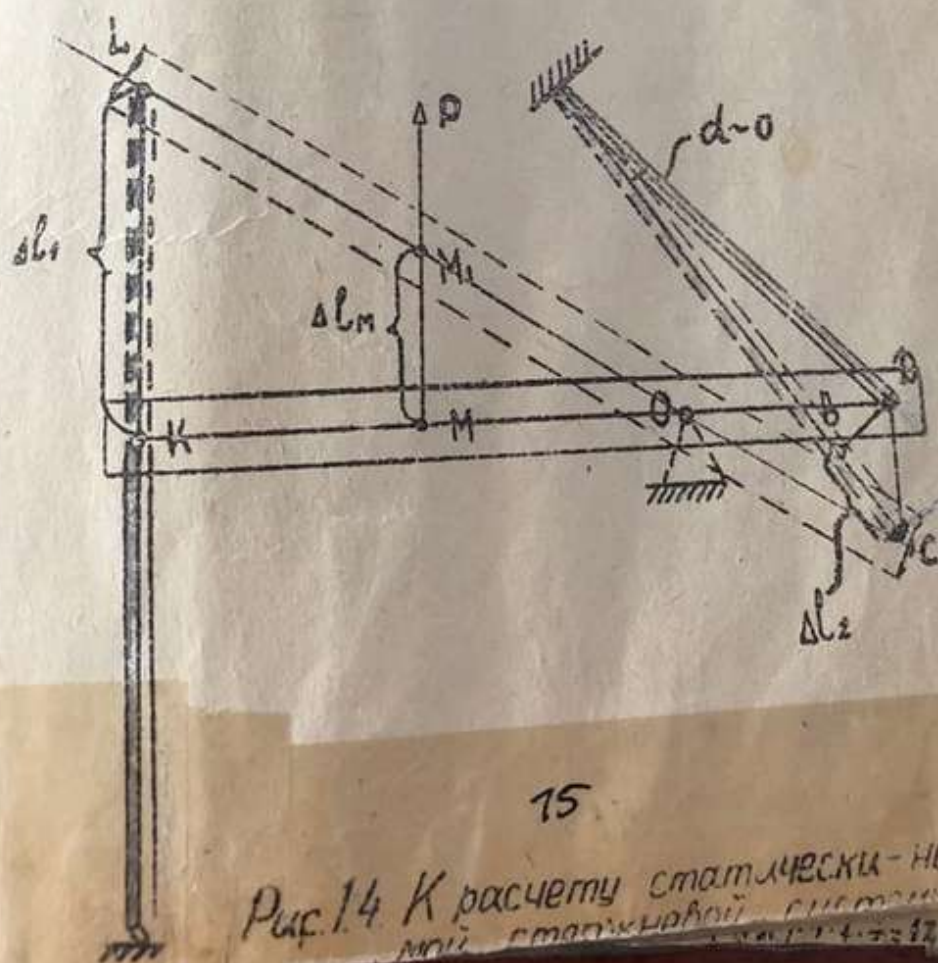
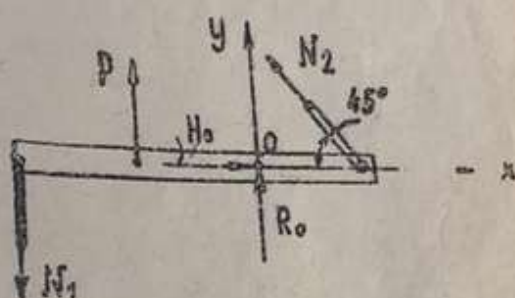
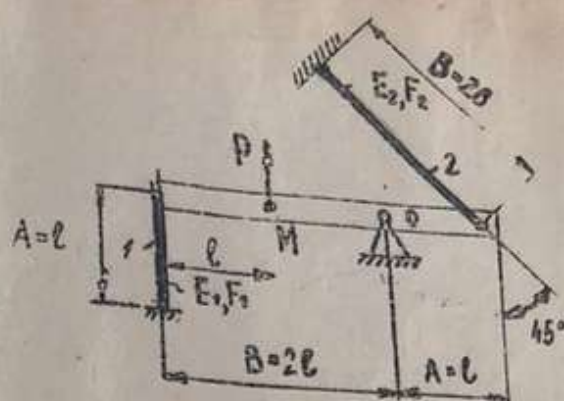
на $- \Delta l_2$

асмот-

отно-

го

8)



75

Рис. 14 К расчету статически-неопределимой статической системы

$$N_1 = \frac{16P}{41} \approx 0.39 \cdot 10^5 \text{ Н}, N_2 = \frac{9\sqrt{2}P}{41} \approx 0.31 \cdot 10^5 \text{ Н}, N_0 = \frac{9P}{41}, R_0 = -\frac{66P}{41}$$

напряжения в стержнях, используя (1.2), определяем следующим образом:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{16P}{41 F_1} = \frac{16 \cdot 10^5}{41 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} \approx 78 \text{ МПа}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{9\sqrt{2}P}{41 F_2} = \frac{9\sqrt{2} \cdot 10^5}{41 \cdot 1.5 \cdot 10^{-4}} \approx 41.2 \text{ МПа}$$

Коэффициент запаса по определению

$$n_T = \frac{\sigma_{\text{доп}}}{\sigma_{\text{max}}}$$

В данном примере $\sigma_{\text{доп}} = \sigma_T$, так как стержни выполнены из хрупкого материала. Тогда, для стержня 1

$$n_{T1} = \frac{\sigma_{T1}}{\sigma_1} = \frac{110}{78} \approx 1.41$$

для стержня 2

$$n_{T2} = \frac{\sigma_{T2}}{\sigma_2} = \frac{300}{41.2} \approx 7.28$$

коэффициент запаса для всей конструкции будет наименьшим, то есть 1.41.

Для вычисления перемещения точки М рассмотрим подобные треугольники BKL и OMM_1 , получим

$$\Delta l_M = \frac{\Delta l_1}{2} = \frac{16P}{41 E_1 F_1} \approx 0.11 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

2. Расчет напряжений и перемещений от совместного действия силы Р и температуры

Нагрев стержней приведет к изменению их удлинений и напряжений в них. Изменится в этом случае и уравнение совместности перемещений (1.9). Используя (1.6), можно записать

$$\Delta l_1^t = \alpha_1 \Delta t_1^0 l_1$$

$$\Delta l_2^t = \alpha_2 \Delta t_2^0 l_2$$

общее удлинение каждого стержня

$$\Delta l_1^2 = \Delta l_1 + \Delta l_1^2$$

$$\Delta l_2^2 = \Delta l_2 + \Delta l_2^2$$

В этом случае соотношение (1.8) запишем так :

$$\frac{\Delta l_1^2}{\Delta l_2^2} = \frac{2}{\cos 45^\circ}$$

После подстановки в предыдущее выражение общих удлинений стержней получаем уравнение совместности перемещений в следующем виде:

$$\frac{\frac{N_1 l_1}{E_1 F_1} + \alpha_1 \Delta t_1 l_1}{\frac{N_2 l_2}{E_2 F_2} + \alpha_2 \Delta t_2 l_2} = \frac{2}{\cos 45^\circ} \quad (1.10)$$

Решение системы уравнений (1.7), (1.10) позволяет найти усилия в стержнях

$$N_1 = \frac{P}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{P}{2} - \left[\frac{E_1 F_1}{l_1} \left(\frac{2}{\cos 45^\circ} \alpha_2 \Delta t_2 l_2 - \alpha_1 \Delta t_1 l_1 \right) \right]}{\frac{\sin 45^\circ}{2} + \frac{E_1 F_1}{l_1} \cdot \frac{l_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{2}{\cos 45^\circ}} \cdot \sin 45^\circ$$

$$N_2 = \frac{\frac{P}{2} - \left[\frac{E_1 F_1}{l_1} \left(\frac{2}{\cos 45^\circ} \alpha_2 \Delta t_2 l_2 - \alpha_1 \Delta t_1 l_1 \right) \right]}{\frac{\sin 45^\circ}{2} + \frac{E_1 F_1}{l_1} \cdot \frac{l_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{2}{\cos 45^\circ}}$$

и соответственно напряжения в них

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{P}{2F_1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{P}{2} - \left[\frac{E_1 F_1}{l_1} \left(\frac{2}{\cos 45^\circ} \alpha_2 \Delta t_2 l_2 - \alpha_1 \Delta t_1 l_1 \right) \right]}{F_1 \left(\frac{\sin 45^\circ}{2} + \frac{E_1 F_1}{l_1} \cdot \frac{l_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{2}{\cos 45^\circ} \right)} \cdot \sin 45^\circ$$

$$= 92.6 \text{ МПа}$$

Ф И Л И А Л
Б И Б Л И О Т Е К И
И М И

17

Библиотека
Ижевского механиче-
ского института

$$G_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{\frac{P}{2} - \left[\frac{E_1 F_1}{L_1} \left(\frac{2}{\cos 45^\circ} \cdot \alpha_2 \Delta t_2 \cdot L_2 - \alpha_1 \Delta t_1 \cdot L_1 \right) \right]}{\left(\frac{\sin 45^\circ}{2} + \frac{E_1 F_1}{L_1} \cdot \frac{L_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{2}{\cos 45^\circ} \right) F_2} \approx 44,1 \text{ МПа}$$

Перемещение точки М с учетом нагрева стержней будет равно

$$\Delta l_M = \frac{\Delta l_1^2}{2} = \frac{N_1 L_1}{2 E_1 F_1} + \alpha_1 \Delta t_1 \cdot L_1 = 0,141 \cdot 10^{-5} + 0,11 \cdot 10^{-5} \approx 0,251 \cdot 10^{-5}$$

1.3. Расчет брусьев на прочность при кручении

Кручением называется такой вид нагружения бруса, когда в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор — крутящий момент.

Крутящий момент определяется методом сечений, его величина в поперечном сечении равна алгебраической сумме всех внешних моментов, действующих на отсеченную часть бруса. Общая формула, по которой определяется величина крутящего момента в произвольном сечении, имеет вид

$$M_K = \sum M + \sum \int_0^L m \, dz \quad (1.11)$$

где M — сосредоточенный момент,

m — погонный момент.

Интегрирование производится по длине каждого участка, на который действует распределенный момент, а суммирование — по всем участкам, расположенным по одну сторону от рассматриваемого сечения. Примем, что крутящий момент в сечении бруса считается положительным, если он вращает брус против часовой стрелки (если смотреть со стороны внешней нормали к сечению). Условимся крутящий момент в сечении всегда направлять как положительный.

Величина наибольшего касательного напряжения в произвольном сечении бруса круглого поперечного сечения определяется по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_p} \quad (1.12)$$

где M_K — крутящий момент в сечении бруса;
 W_p — полярный момент сопротивления.

Полярный момент сопротивления определяется по формуле (для бруса круглого поперечного сечения)

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}} \quad (1.13)$$

где J_p — полярный момент инерции;
 ρ_{\max} — радиус-вектор точки, максимально удаленной от центра тяжести сечения.
 Угол закручивания бруса вычисляется следующим образом:

$$\varphi = \sum \int_0^l \frac{M_k dz}{J_p G} \quad (1.14)$$

где G — модуль сдвига материала бруса.

Интегрирование производится по длине каждого участка, а суммирование — по всем участкам бруса. В частном случае, когда крутящий момент M_k и диаметр постоянны по длине бруса, величина угла закручивания

$$\varphi = \frac{M_k l}{J_p G} \quad (1.15)$$

Для бруса круглого поперечного сечения

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0.1 d^4, \quad (1.16)$$

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0.2 d^3,$$

для кольцевого поперечного сечения

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0.1 D^4 (1 - \alpha^4), \quad (1.17)$$

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \approx 0.2 D^3 (1 - \alpha^4),$$

где $\alpha = \frac{d}{D}$ — отношение диаметров меньшего круга к большему.

Условие прочности при кручении бруса круглого поперечного сечения имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau], \quad (1.18)$$

где τ_{max} — максимальное расчетное касательное напряжение;
 $[\tau]$ — допускаемое напряжение материала стержня.
 На рис. 1.5 представлена схема проектного расчета бруса кру-
 чого поперечного сечения на прочность при кручении.
 В качестве примера рассмотрим задачу "В" РПР №1 (вариант
 0000). Исходные данные следующие:

$$\begin{array}{lll} M_1 = 10M, & D_1 = 1.5d, & l_1 = l, \\ M_2 = M, & D_2 = 2d, & l_2 = l, \\ M_3 = M, & D_3 = 3d, & l_3 = l, \\ M_4 = M, & D_4 = 2d, & l_4 = 2l. \end{array}$$

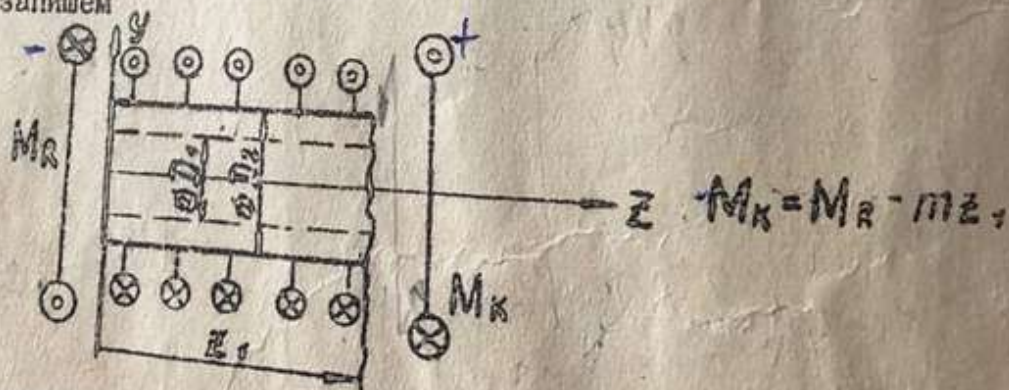
Схема нагружения бруса показана на рис. 1.6а. При расчете при-
 нять: $m = 2 \text{ Н} \cdot \text{м/см}$, $l = 50 \text{ см}$, $M = ml$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$,
 $[\tau] = 80 \text{ МПа}$.

Расположим начало координат в сечении вблизи заделки бруса
 и, направив ось Z , как показано на рис. 1.6а, определим опорный
 момент

$$\sum M_Z = 0; -M_R + m2l + 10M - M + M - M = 0$$

При $M = ml$, $M_R = 11M = 11ml$.

Для определения крутящего момента в сечениях бруса восполь-
 зуемся методом сечений. Рассмотрим первый участок, для которого
 продольная координата $0 \leq Z \leq l$. Направим крутящий момент в се-
 чении согласно правилу, против часовой стрелки и, используя
 (I, II), запишем



На границах участка функция принимает значения

$$Z_0 = 0,$$

$$M_K = M_R = 11ml,$$

$$Z_1 = l,$$

$$M_K = 10ml.$$

Проектный расчет на прочность и
определение перемещений в бруссе
при кручении

ЗАДАНО
Внешние силы M, m
Геометрические размеры z
Техническое и упругие характе-
ристики $[\sigma], G$

Определение опорных
реакций $\sum M_z = 0$

Определение крутящего момента
в поперечных сечениях бруса
методом сечений
 $M_x = \sum M + \sum \int m dz$
Построение эпюры M_x

Определение касательных напря-
жений в поперечных сечениях
бруса $\tau = \frac{M_x}{W_p}$
Построение эпюры τ

Определение опасного сечения
(сечения, где τ_{max})

Определение из условия прочности
размеров поперечного сечения
 $W_p \geq \frac{M_x}{[\tau]}$

Определение углов поворота
сечений $\varphi = \sum \int \frac{M_x dz}{J_p G}$
и построение эпюры φ

аналогичным образом получим выражения для крутящего момента на остальных участках.

участок II,

$$0 \leq z_2 \leq l$$

$$M_K = M_R - ml - mz_1 = 10ml - mz_2,$$

$$M_K = 10ml,$$

$$z_2 = 0,$$

$$M_K = 9ml.$$

$$z_2 = l,$$

$$0 \leq z_3 \leq l$$

на III участке

$$M_K = M_R - 2M - 10M + mz_3 = -ml.$$

участок IV

$$M_K = M_R - 2M - 10M + M = 0.$$

участок V

$$M_K = M_R - 2M - 10M + M - M = -ml.$$

Эпюра крутящего момента показана на рис. 1.66. Для определения максимальных величин касательных напряжений воспользуемся формулой (1.18) и выражением для полярного момента сопротивления. Напряжения на соответствующих участках бруса запишутся:

I участок

$$\tau = \frac{M_{K1}}{W_{p1}} = \frac{M_R - mz_1}{0.2D^3(1-\alpha^4)} = \frac{M_R - mz_1}{1.6d^3 \frac{175}{256}}$$

$$z_1 = 0, \quad \tau = \frac{11ml}{1.6 \frac{175}{256} d^3} \approx 10.05 \frac{ml}{d^3},$$

$$z_1 = l, \quad \tau = \frac{10ml}{1.6 \frac{175}{256} d^3} \approx 9.14 \frac{ml}{d^3}.$$

II участок

$$\tau = \frac{M_R - ml - mz_2}{W_{p2}} = \frac{M_R - ml - mz_2}{1.6d^3}$$

$$z_2 = 0, \quad \tau = \frac{10ml}{1.6d^3} \approx 6.25 \frac{ml}{d^3}$$

$$z_2 = l, \quad \tau = \frac{9ml}{1.6d^3} \approx 5.625 \frac{ml}{d^3}$$

На участках III, IV и V величина напряжения постоянна по брусу.

III участок

$$\tau = - \frac{m\ell}{5.4d^3} \approx -0.185 \frac{m\ell}{d^3}$$

IV участок

$$\tau = \frac{0}{5.4d^3} \approx 0$$

V участок

$$\tau = - \frac{m\ell}{1.6d^3} \approx -0.625 \frac{m\ell}{d^3}$$

Используя полученные выражения, строим эпюру касательных напряжений, показанную на рис. 1.6в. Из эпюры следует, что опасным будет сечение, где действует максимальная величина касательного напряжения (по абсолютной величине), равная

$$\tau_{max} = 10.05 \frac{m\ell}{d^3}$$

Из условия прочности

$$\tau_{max} = 10.05 \frac{m\ell}{d^3} \leq [\tau]$$

находим, что

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{10.05 m\ell}{[\tau]}} \approx 2.325 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Прежде чем перейти к определению углов закручивания, запишем выражения для полярного момента инерции на каждом участке бруса, воспользовавшись (1.16), (1.17):

$$J_{p1} \approx 0.1 D_2^4 (1 - d^4) \approx 0.1 (2d)^4 \left(1 - \frac{81}{256}\right) \approx 4.094 d^4,$$

$$J_{p2} \approx 0.1 D_2^4 \approx 0.1 (2d)^4 \approx 1.6 d^4,$$

$$J_{p3} \approx 0.1 D_3^4 \approx 0.1 (3d)^4 \approx 8.1 d^4,$$

$$J_{p4} \approx 0.1 D_4^4 \approx 0.1 (2d)^4 \approx 1.6 d^4,$$

$$J_{p5} \approx J_{p4} \approx 1.6 d^4.$$

определение углового перемещения (угла закручивания φ)
 исходя из формулы (1.14). На первом участке угол закручива-
 ния сечения z_1

$$\varphi = \int_0^{z_1} \frac{M_x dz}{J_{p1} G} = \int_0^{z_1} \frac{(M_0 - m z_1) dz}{J_{p1} G} = \frac{M_0 z_1 - \frac{m z_1^2}{2}}{J_{p1} G}$$

Угол закручивания φ на первом участке является квадратичной
 функцией продольной координаты z_1 . В сечении $z_1 = l$ его величина
 будет равна

$$\varphi_1 = \frac{11 m l^2 - 0.5 m l^2}{J_{p1} G} \approx 9.597 \frac{m l^2}{G d^4}$$

Угловое перемещение сечения z_2 можно записать

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + \int_0^{z_2} \frac{M_x dz}{J_{p2} G} = \varphi_1 + \int_0^{z_2} \frac{(10 M - m z_2) dz}{J_{p2} G} = \\ &= \varphi_1 + \frac{10 m l z_2 - \frac{m z_2^2}{2}}{J_{p2} G} \end{aligned}$$

где φ_1 - угол закручивания сечения В (см. рис. 1.6a);

$\int_0^{z_2} \frac{M_x dz}{J_{p2} G}$ - угловое перемещение сечения z_2 относительно се-
 чения В.

На границах второго участка при $z_2 = l$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{9.5 m l^2}{J_{p2} G} = 9.597 \frac{m l^2}{G d^4} + \frac{9.5 m l^2}{61.6 d^4} \approx 15.534 \frac{m l^2}{G d^4}$$

аналогично на других участках:

II участок

$$\varphi = \varphi_2 + \int_0^{z_3} \frac{M_x dz}{J_{p3} G} = \varphi_2 - \frac{m l z_3}{J_{p3} G},$$

$$z_3 = 0,$$

$$\varphi_3 = \varphi_2,$$

$$z_3 = l,$$

$$\varphi_3 = 15.411 \frac{m l^2}{G d^4}$$

III участок

$$\varphi = \varphi_3 + \int_0^{z_4} \frac{M_x dz}{J_{p4} G} = \varphi_3 + \int_0^{z_4} \frac{0 \cdot dz}{J_{p4} G} = \varphi_3 \approx 15.411 \frac{m l^2}{G d^4}$$

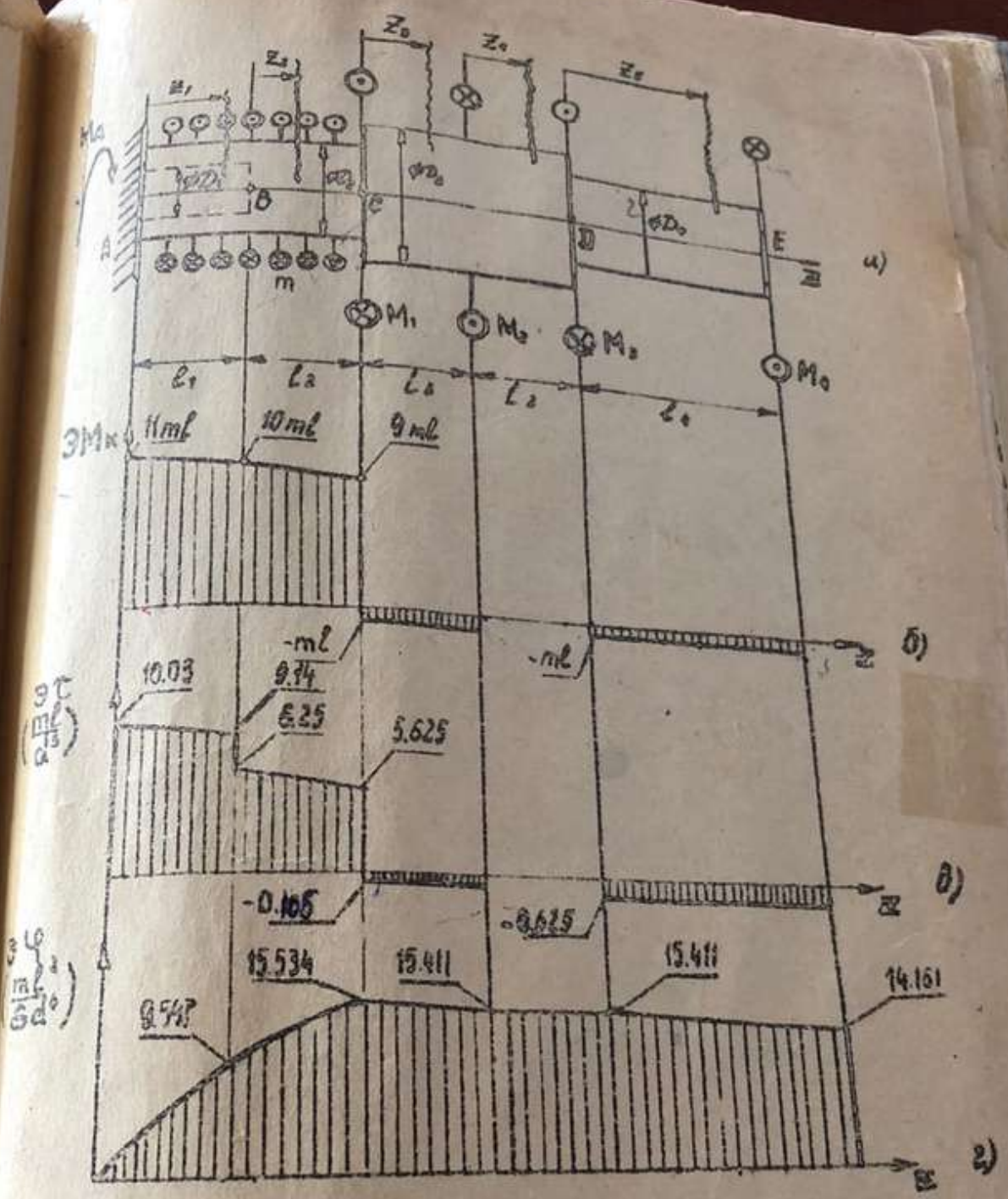


Рис. 1.6. Схема нагружения и эпюры $M_x, Q, \tau_{max}, \varphi$

$$\varphi = \varphi_4 + \int_0^{z_5} \frac{M_x dz}{J_{p5} G} = \varphi_4 - \int_0^{z_5} \frac{m l dz}{J_{p5} G} = \varphi_4 - \frac{m l \cdot z_5}{J_{p5} G}.$$

на границах участка при

$$z_5 = 0,$$

$$\varphi_5 = \varphi_4 = 15,441 \frac{m l^2}{G d^4},$$

$$z_5 = 2l,$$

$$\varphi_5 = 14,161 \frac{m l^2}{G d^4}.$$

Используя полученные выражения, строим эпюру углов закручивания, показанную на рис. 1.6г.

Как следует из анализа результатов, наиболее опасным является сечение заделки, где касательное напряжение достигает максимального значения. Наибольшие деформации возникают на первом и втором участке бруса.

В заключение отметим, что образец оформления переплета проектно-проектировочной работы показан в Приложении.

3. Методические указания к РГР № 3
РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ БРУСА

3.1. Основные расчетные формулы

Прямой поперечным изгибом называют такое нагружение бруса, когда внешние силы и моменты, приложенные к нему, действуют в плоскости, проходящей через главную ось сечения, и вызывают появление в поперечных сечениях внутренних изгибающих моментов и поперечных сил.

Как правило, при изгибе решающее влияние на прочность оказывают нормальные напряжения, возникающие в поперечных сечениях. В отличие от случая растяжение-сжатия при изгибе нормальные напряжения распределяются неравномерно (см. рис. 3.1). Закон распределения нормальных напряжений в сечении описывается выражением

$$\sigma = - \frac{M y}{J_x},$$

в соответствии с этой формулой напряжение в некоторой точке B , взятой в рассматриваемом сечении, зависит от изгибающего момента M , действующего в сечении, координаты y точки B и, кроме того, от величины главного момента инерции J_x .

Отметим, что координатные оси x и y являются главными центральными осями сечения.

Максимальное по абсолютной величине напряжение в сечении определяется по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|}{W_x}, \quad (3.0)$$

где $|M|$ - абсолютная величина изгибающего момента;

$$W_x = \frac{J_x}{|y|_{\max}}$$

- момент сопротивления изгибу;

$|y|_{\max}$ - расстояние от оси x до наиболее удаленной от нее точки сечения.

Таким образом, при расчете наибольшего напряжения в балке постоянного поперечного сечения необходимо:

- найти изгибающие моменты во всех сечениях, т.е. построить эпюру M ;
- вычислить момент сопротивления изгибу для заданного сечения;

в) вычислить по формуле (3.0) наибольшее напряжение в балке, приняв во внимание, что это напряжение возникает в сечении с наибольшим по абсолютной величине изгибающим моментом.

3.2. Задача А

В качестве примера рассмотрим задачу А для варианта № 0000.
Исходные данные к задаче

Схема нагружения балки показана на рис. 3.2, сечение балки изображено на рис. 3.3. Материал балки — Ст. 3, $\sigma_r = 200 \text{ МПа}$. Коэффициент запаса $n_r = 2$, погонная нагрузка $q = 50 \text{ кН/м}$, $l = 40 \text{ см}$.

Требуется:

- 1) построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента,
- 2) из расчета на прочность подобрать размеры поперечного сечения,
- 3) начертить сечение в масштабе и построить эпюру нормальных напряжений в опасном сечении.

Решение

1. Определение реакций опор R_1 и R_2

Реакцию R_1 определяем из уравнения равновесия моментов всех сил, действующих на балку, относительно опоры В:

$$-R_1 \cdot 5l - ql^2 + ql \cdot 4l - ql \cdot 3l + (3q \cdot l) \cdot 3,5l - ql \cdot l - (ql) \cdot \frac{l}{2} = 0.$$

Откуда получаем

$$R_1 = \frac{9}{5} ql.$$

Реакцию R_2 находим из уравнения равновесия моментов относительно опоры А:

$$R_2 \cdot 5l - ql^2 - ql \cdot l - (3q \cdot l) \cdot 1,5l + ql \cdot 2l - ql \cdot 5,5l - ql \cdot 6l = 0,$$

откуда

$$R_2 = \frac{16}{5} ql.$$

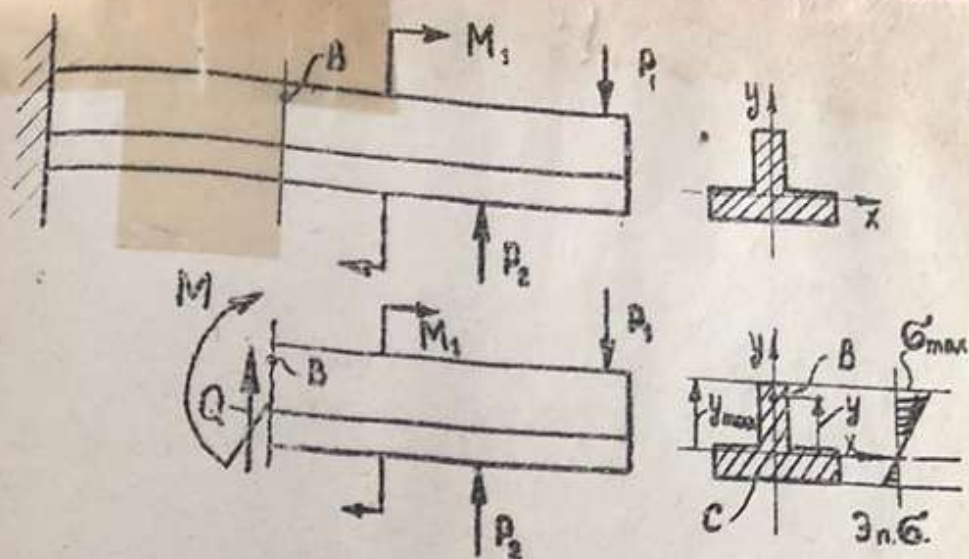


Рис. 3.1. Напряжения при изгибе

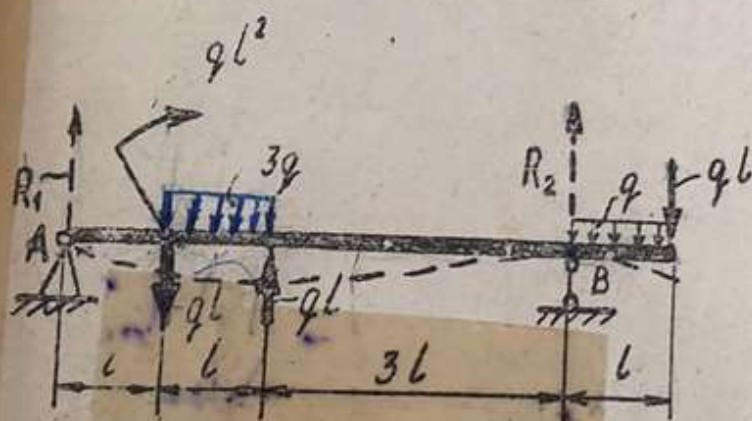


Рис. 3.2. Схема нагружения балки

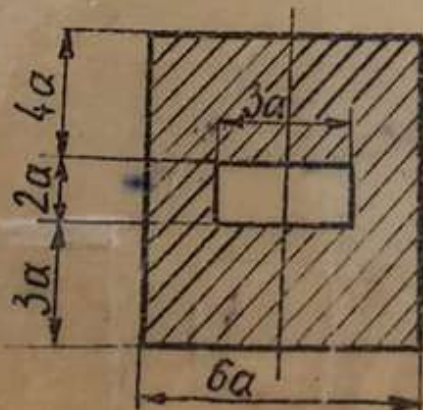


Рис. 3.3. Сечение балки

Балка, нагруженная заданными внешними нагрузками и реакциями опор R_1 и R_2 , показана на рис. 3.4а.

2. Построение эпюр поперечной силы Q и изгибающего момента M

Рассматривая последовательно равновесие частей балки, отсеченных сечениями I, II, III и IV, составим аналитические выражения для Q и M .

Так, например, левая часть бруса, отсеченная сечением I, находится в равновесии под действием внешних нагрузок, а также поперечной силы Q и момента M (рис. 3.4б). (Попутно заметим, что стрелки, изображающие Q и M , приложенные к левой отсеченной части, должны направляться так, как показано на рисунках 3.4г и 3.4д; Q и M , приложенные к правой отсеченной части, должны направляться так, как на рисунках 3.4е и 3.4ж).

Итак, условие равновесия проекций на вертикаль сил, действующих на часть балки, отсеченную сечением I, запишется в виде

$$\frac{q}{5}ql - Q = 0$$

или

$$Q = \frac{q}{5}ql \quad (3.1)$$

Условие равновесия моментов сил, действующих на отсеченную часть балки, относительно точки C можно записать в виде

$$-\frac{q}{5}qlz_1 + M = 0$$

или

$$M = \frac{q}{5}ql \cdot z_1, \quad (0 \leq z_1 \leq l) \quad (3.2)$$

Формулы (3.1) и (3.2) аналитически описывают зависимость Q и M от координаты сечения z_1 . Графики, изображающие эти зависимости, показаны на рисунках 3.4б и 3.4в. Необходимо уточнить, что формулы (3.1) и (3.2) справедливы только на первом участке, т.е. только для сечений, расположенных между силой $\frac{q}{5}ql$ и сосредоточенным моментом ql^2 .

Далее рассматриваем равновесие левой части балки, отсеченной сечением II (рис. 3.4д). Условие равновесия вертикальных проекций сил

$$\frac{q}{5}ql - ql - 3q \cdot z_2 - Q = 0.$$

узками и реализация
 бающего
 тей балки, отсе-
 ческие выраже-
 сечением I, на-
 ок, а также по-
 заметим, что
 отсеченной
 сунках 3.4г
 и, должны на-
 сил, действу-
 ся в виде

(3.1)

отсеченную
 иде

(3.2)

имость Q
 эти зави-
 уточнить,
 участке,
 и сосре-

тсечен-
 ных про-

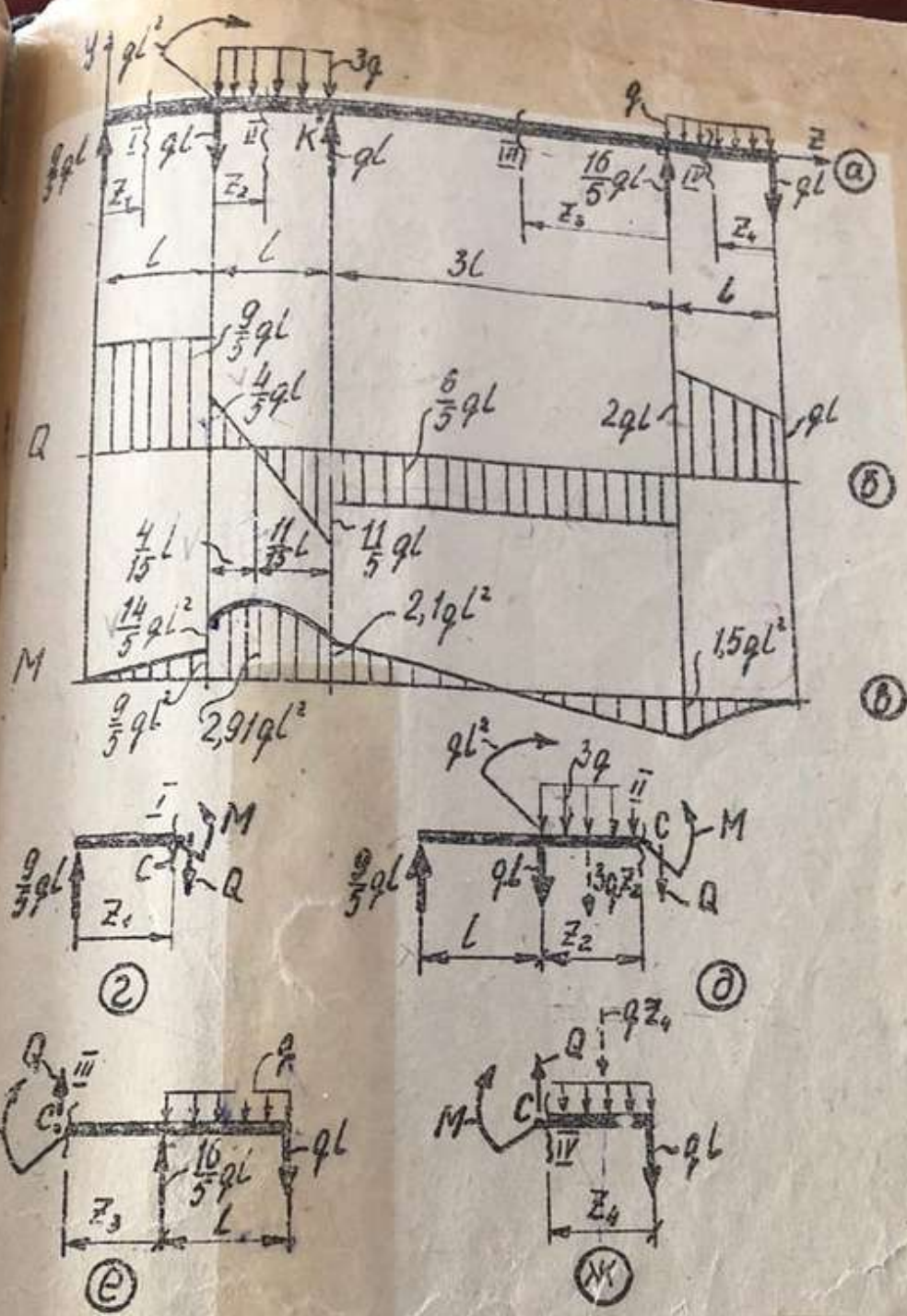


Рис. 3.4. Построение элор Q и M

Отсюда легко получить формулу для Q

$$Q = \frac{4}{5}ql - 3qz_2, \quad (0 \leq z_2 \leq l). \quad (3.3)$$

Условие равновесия моментов сил относительно точки С

$$-\frac{9}{5}ql(l+z_2) - ql^2 + ql \cdot z_2 + 3qz_2 \cdot \frac{z_2}{2} + M = 0.$$

Или

$$M = \frac{14}{5}ql^2 + \frac{4}{5}qlz_2 - \frac{3}{2}qz_2^2, \quad (0 \leq z_2 \leq l). \quad (3.4)$$

Согласно выражению (3.3) поперечная сила Q на втором участке изменяется линейно, причем на левом конце участка, при $z_2=0$,

$$Q = \frac{4}{5}ql, \text{ а на правом конце участка, при } z_2=l, \quad Q = -\frac{11}{5}ql.$$

В соответствии с выражением (3.4) изгибающий момент на втором участке изменяется по параболе. При этом в сечении с координатой

$z_2 = \frac{4}{15}l$ поперечная сила $Q=0$ и изгибающий момент M достигает максимума.

Подставляя в формулу (3.4) координаты $z_2=0$ и $z_2=l$ левого и правого концов участка, получим значения изгибающего момента, соответственно, $\frac{14}{5}ql^2$ и $2,1ql^2$. Максимальный изгибающий момент вычислим по формуле (3.4) при $z_2 = \frac{4}{15}l$:

$$M_{\max} = \frac{14}{5}ql^2 + \frac{4}{5}ql \cdot \frac{4}{15}l - \frac{3}{2}q\left(\frac{4}{15}l\right)^2 \approx 2,91ql^2.$$

Аналогично выводятся формулы для Q и M в сечении III.

Из условий равновесия части балки, показанной на рис. 3.4в, получим выражение для Q и M на третьем участке:

$$Q = -\frac{6}{5}ql, \quad (3.5)$$

$$M = -\frac{3}{2}ql^2 + 1,2qlz_3, \quad (0 \leq z_3 \leq 3l). \quad (3.6)$$

Согласно рис. 3.4ж в сечении IV получим

$$Q = ql + qz_4, \quad (3.7)$$

$$M = -\frac{qz_4^2}{2} - qlz_4, \quad (0 \leq z_4 \leq l). \quad (3.8)$$

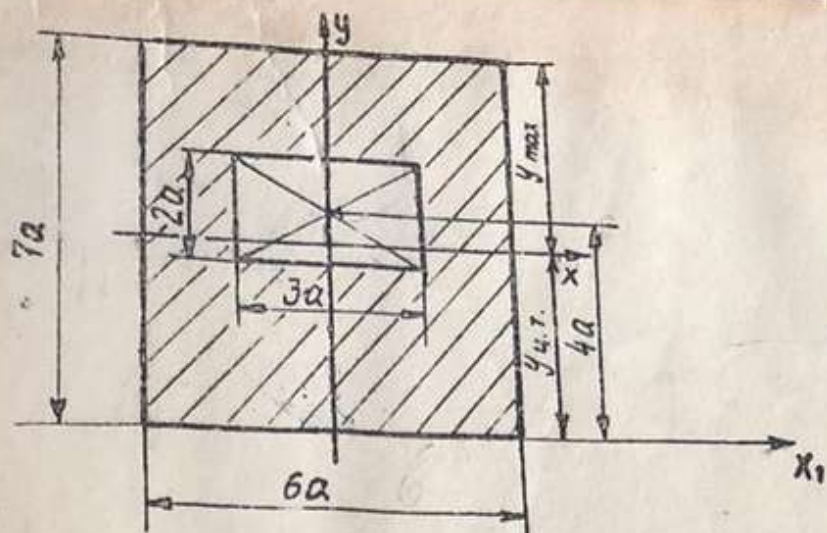


Рис. 3.5. К вычислению момента сопротивления изгибу

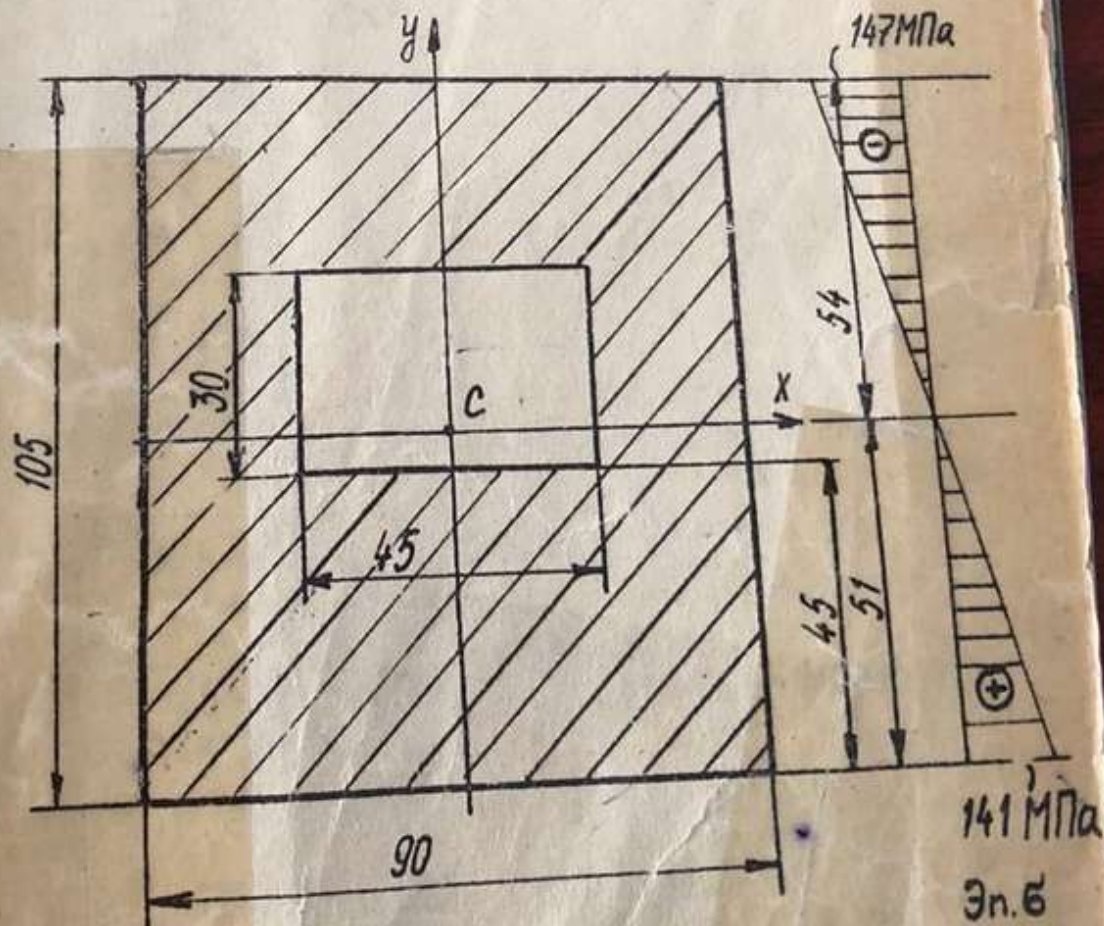


Рис. 3.6. Сечение балки, необходимое по условию прочности 9

По формулам (3.5)-(3.8) достраиваем эпюры Q и M на третьем и четвертом участках (рис. 3.4 б, в). По эпюре M находим, что наибольший изгибающий момент в балке равен

$$M_{max} = 2,91 q l^2.$$

3. Вычисление момента сопротивления изгибу.

Определим положение главной центральной оси x .

Статический момент сечений относительно оси x :

$$S_x = (6a \cdot 7a) \cdot 3,5a - (3a \cdot 2a) \cdot 4a = 123 a^3$$

Площадь сечения

$$F = (6a \cdot 7a) - (3a \cdot 2a) = 36 a^2.$$

Координата центра тяжести

$$y_{ц.г.} = \frac{S_x}{F} = \frac{123}{36} a = 3,42 a$$

Момент инерции сечения

$$\begin{aligned} J_x^{[0]} &= J_x^{[1]} - J_x^{[2]} = \\ &= \left[\frac{6a(7a)^3}{12} + (6a \cdot 7a)(3,5a - 3,42a)^2 \right] - \\ &- \left[\frac{3a(2a)^3}{12} + (3a \cdot 2a)(4a - 3,42a)^2 \right] \approx 167,8 a^4. \end{aligned}$$

Точки сечения, наиболее удаленные от главной центральной оси x , располагаются вблизи верхней кромки сечения. Расстояние от оси x до этих точек равно

$$y_{max} = 7a - y_{ц.г.} = 7a - 3,42a = 3,58 a.$$

Тогда момент сопротивления изгибу получим

$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}} = \frac{167,8 a^4}{3,58 a} = 46,87 a^3.$$

4. Вычисление размеров поперечного сечения, необходимых по условию прочности.

Наибольшее напряжение, возникающее в балке, равно

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{2,91 q l^2}{46,87 \alpha^3}$$

При заданном коэффициенте запаса n_r допустимое напряжение определяется выражением

$$[\sigma] = \frac{\sigma_r}{n_r}$$

Заданный коэффициент запаса n_r будет обеспечен, если наибольшее напряжение в балке не превышает допустимого, т.е.

$$\sigma_{\max} = \frac{2,91 q l^2}{46,87 \alpha^3} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_r}{n_r}$$

$$\text{или} \quad \frac{2,91 q l^2}{46,87 \alpha^3} \leq \frac{\sigma_r}{n_r}$$

отсюда получим

$$\alpha \geq \sqrt[3]{\frac{2,91 q l^2 \cdot n_r}{46,87 \cdot \sigma_r}} = \sqrt[3]{\frac{2,91 \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 0,4^2 \cdot 2}{46,87 \cdot 280 \cdot 10^6}} = 15 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\text{или} \quad \alpha = 15 \text{ мм}$$

$$\text{при этом} \quad W_x = 46,87 \alpha^3 = 46,87 \cdot 1,5^3 \cdot 10^{-6} = 158,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$

$$\sigma_{\max} = \frac{2,91 q l^2}{W_x} = \frac{2,91 \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 0,4^2}{158,2 \cdot 10^{-6}} = 147 \text{ МПа}$$

и коэффициент запаса оказывается несколько ниже заданного

$$n_r = \frac{280}{147} = 1,9$$

Выбранное сечение в масштабе 1:1 и эпюра нормальных напряжений показаны на рис. 3.6.

Заметим, что при помощи эпюры моментов можно приближенно определить форму изогнутой оси балки. Для этого достаточно вспомнить, что на участках с положительным моментом кривая, изображающая ось, вогнута, а на участках с отрицательным моментом - вы-

пукла. Для рассматриваемой балки изогнутая ось пройдет приблизительно так, как показано на рис. 3.2.

5. Вычисление перемещения точки К.

Иногда бывает необходимо знать перемещения некоторых точек балки при действии нагрузок. В случае, если балка имеет постоянное поперечное сечение и нагружена сосредоточенными силами и моментами и равномерно распределенными нагрузками интенсивностью q , перемещения можно вычислить при помощи универсального уравнения упругой линии.

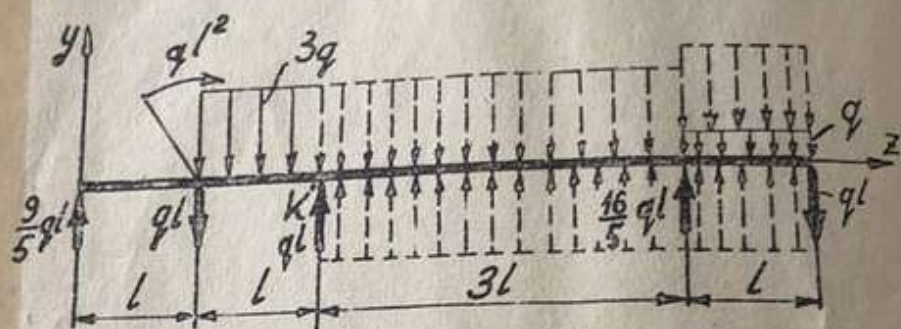


Рис. 3.7. К выводу уравнения упругой линии

Для рассматриваемой балки (рис. 3.7) уравнение упругой линии имеет вид

$$EI_x y = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 z + \frac{9}{5} ql \frac{z^3}{6} \Big|_I + ql \frac{(z-l)^2}{2} - ql \frac{(z-l)^3}{6} - \\ - 3q \frac{(z-l)^4}{24} \Big|_{II} + ql \frac{(z-2l)^3}{6} + 3q \frac{(z-2l)^4}{24} \Big|_{III} + \\ + \frac{16}{5} ql \frac{(z-5l)^3}{6} - q \frac{(z-5l)^4}{24} \Big|_{IV}.$$

Условия закрепления балки (рис. 3.2):

- 1) при $z=0, y=0$;
- 2) при $z=5l, y=0$.

Из первого условия следует $y_0 = 0$, из второго условия по-

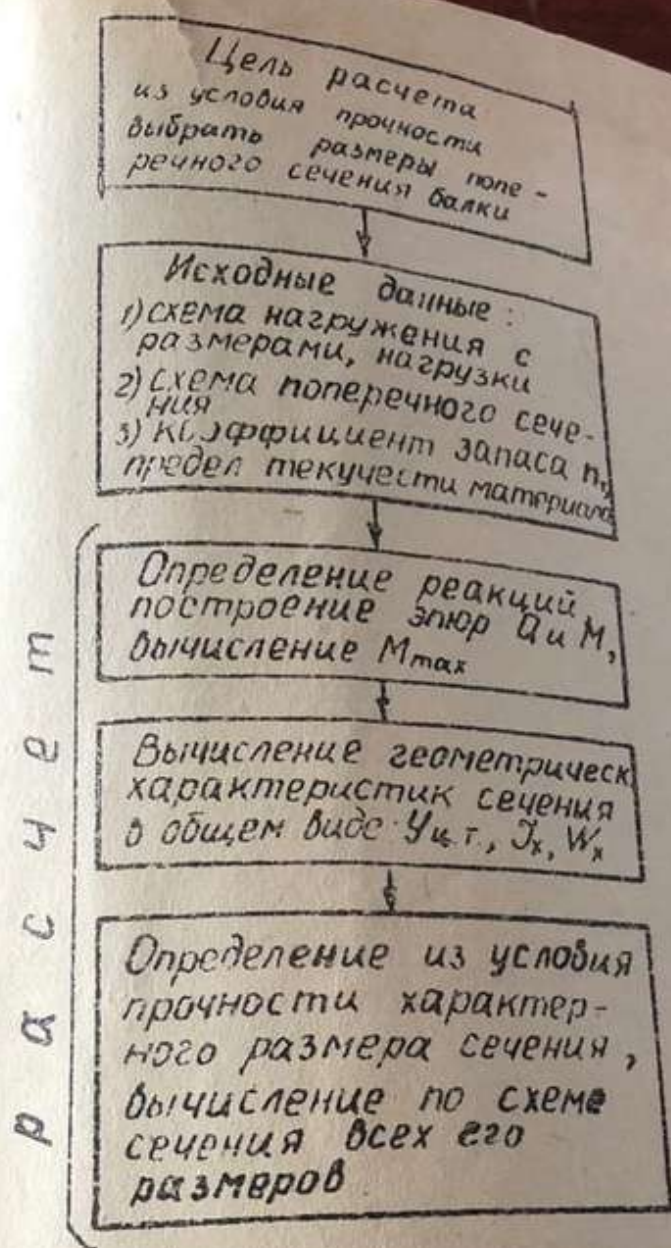


Рис. 3.8. Блок-схема расчета
необходимых по прочности разме-
ров поперечного сечения балки.

лучим $EJ_x \theta_0 = -3,492 ql^3$.

Тогда уравнение упругой линии запишется в виде

$$y = \frac{1}{EJ_x} \left[-3,492 ql^3 z + 0,3 ql^3 z^3 + 0,5 ql^2 (z-l)^2 - \right. \\ \left. - 0,1667 ql(z-l)^3 - 0,125 q(z-l)^4 / II + \right. \\ \left. + 0,1667 ql(z-2l)^3 + 0,125 q(z-2l)^4 / III + \right. \\ \left. + 0,5333 ql(z-5l)^3 - 0,04167 q(z-5l)^4 / IV \right].$$

При помощи этого уравнения можно вычислить перемещение любой точки балки. Найдем перемещение точки К, расположенной на втором участке:

$$y_K = y_{/z=2l} = \frac{1}{EJ_x} \left[-3,492 ql \cdot 2l + 0,3 ql \cdot (2l)^3 + \right. \\ \left. + 0,5 ql^2 l^2 - 0,1667 ql \cdot l^3 - 0,125 ql^4 \right] = \\ = -4,376 \frac{ql^4}{EJ_x}.$$

Учитывая, что $J_x = 167,8 \alpha^4$, получим

$$y_K = -0,02608 \frac{ql^4}{E \alpha^4}.$$

Подставляя в эту формулу численные значения q , l , α и $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, получим

$$y_K = -0,02608 \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 0,4^4}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot (15 \cdot 10^{-3})^4} = -3,14 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -3,14 \text{ мм}.$$

Выводы

1. Максимальный изгибающий момент возникает на участке, где приложена нагрузка $3q$, и равен $2,91 ql^2$.
2. Для того, чтобы при заданных нагрузках коэффициент запаса для рассматриваемой балки был приблизительно равен 2, сечение

должно иметь размеры, показанные на рис. 3.6. При этом $\sigma_{max} = 147 \text{ МПа}$.

Перечень рисунков, которые обязательно должны быть выполнены при оформлении задачи А:

1. Схема нагружения балки
2. Схема сечения балки
3. Балка, нагруженная заданными нагрузками и вычисленными реакциями опор, эпюры Q и M
4. Сечение балки в масштабе с размерами, эпюра напряжений σ в опасном сечении.

3.3. Задача Б